

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

RONALDO OLIVEIRA DOS SANTOS

TESE DE DOUTORADO

"USO DOS MÉTODOS FDTD, LN-FDTD E R-LN-FDTD NA
ANÁLISE DE PROBLEMAS EM ELETROMAGNETISMO".

UFPA/CT/PPGEE/DEEC
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO GUAMÁ
66.075-900 – BELÉM-PARÁ-BRASIL

-----|

Capítulo 1

Introdução

Com a nova geração dos sistemas de comunicação *wireless* uma análise mais rigorosa e eficiente de novos elementos irradiadores (antenas), das mais variadas geometrias, será necessária para garantir a esses sistemas um melhor desempenho. Inúmeras técnicas de análise e síntese são empregadas para analisar diversos tipos de antenas com geometrias complexas [1-6]. Em consenso geral, o que se deseja com essas geometrias, de certa forma complexas, é permitir que o irradiador tenha suas dimensões reduzidas, podendo operar em duas ou mais bandas de frequências (antenas multibandas), e ter suas características de irradiação (diretividade, ganho, eficiência, etc...) otimizadas. Dentre as técnicas de análise se destacam: As técnicas que utilizam funções de Green [7-8], os modelos de linha de transmissão [9], os modelos de cavidade [10], o método das diferenças finitas no domínio do tempo (método FDTD) em coordenadas cartesianas [11], dentre outras [12]. Com relação à técnica de síntese mais usada atualmente, tem-se o algoritmo genético [13]. As técnicas de análises referenciadas acima são muitas vezes limitadas ao sistema de coordenadas cartesianas ou mesmo as próprias limitações do método utilizado para uma análise completa desses irradiadores. Dessa maneira, a idéia de se desenvolver um código que possa fazer a análise de banda larga destes tipos de irradiadores em superfícies curvas (Fig.1.1) ou com suas orientações espaciais não coincidentes com as coordenadas do sistema cartesiano (Fig.1.2), nos motivou à pesquisa do método FDTD em coordenadas gerais.

Um dos mais promissores métodos de análise no domínio do tempo é o método das diferenças finitas no domínio do tempo. Tal método foi inicialmente introduzido por Yee em 1966 [14] na solução de problemas de valor de contorno envolvendo as equações de Maxwell para meios isotrópicos. Apesar da simplicidade e elegância do algoritmo FDTD, ele não despertou muito interesse imediatamente após sua publicação. Os motivos estavam relacionados ao alto custo computacional (para aqueles dias) e algumas limitações inerentes da publicação original, tal como a simulação das equações diferenciais no domínio discreto a um período *restrito* de tempo, na análise de estruturas abertas, pois naquela época não havia nenhuma técnica

de condição de contorno absorvente [15]. Contudo, com o surgimento de computadores cada vez mais velozes e com a implementação de algoritmos mais eficientes, o interesse pelo método aumentou.

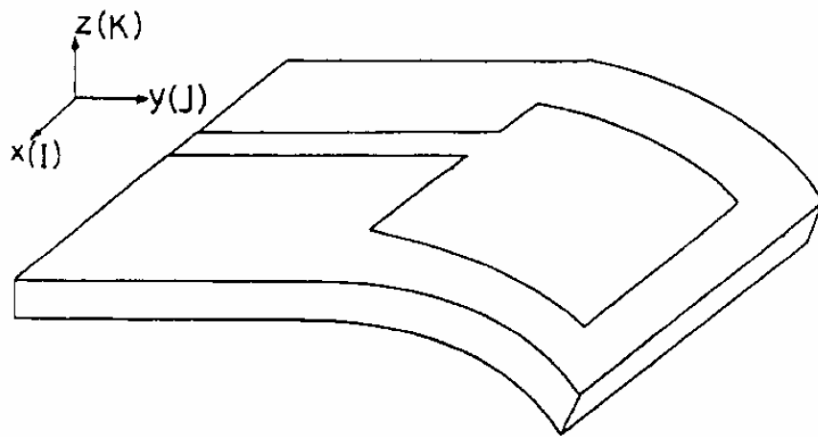


Fig.1.1 – Antena de microfita retangular em um substrato curvado.

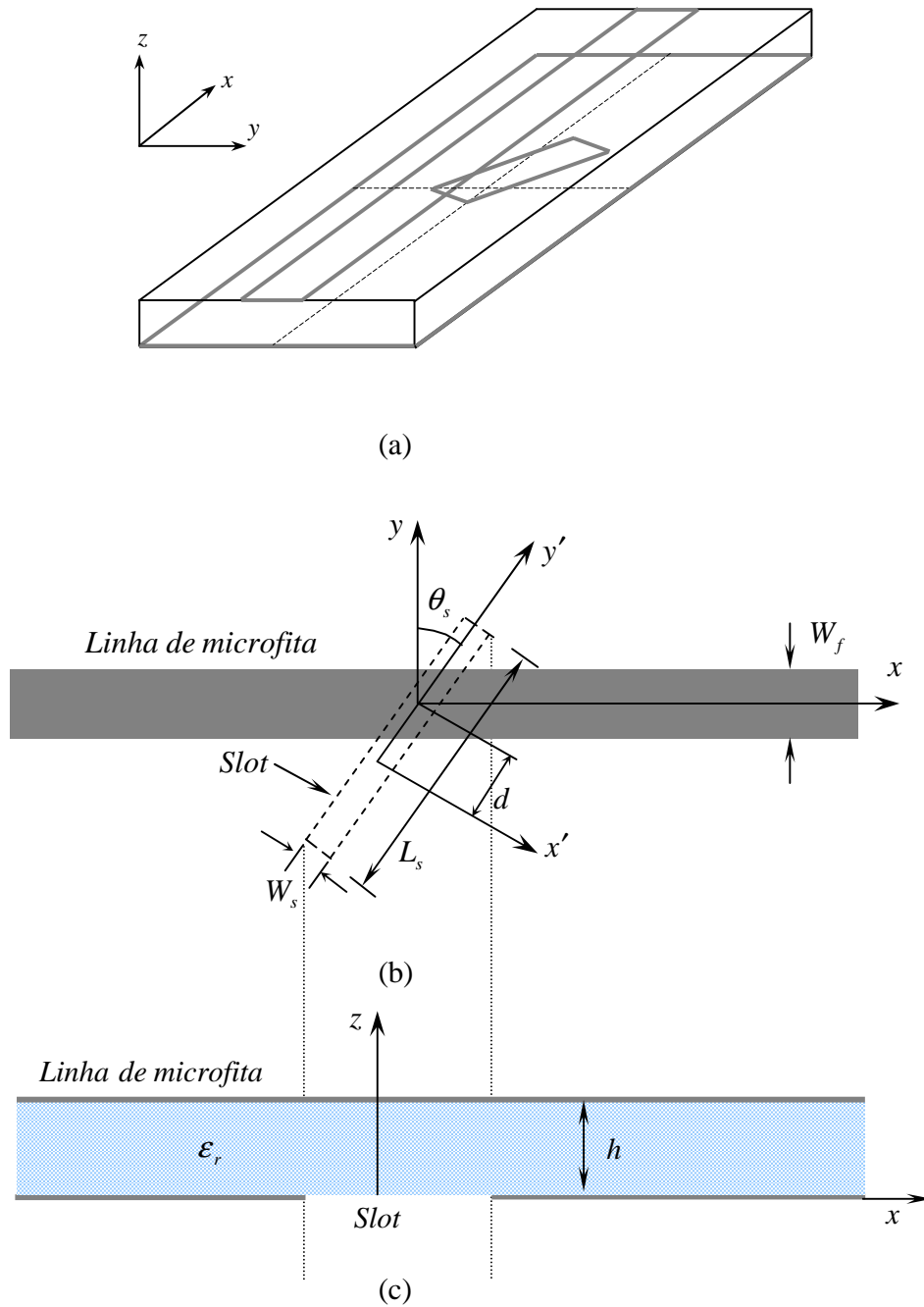


Fig.1.2 – (a) Antena slot alimentada por uma linha de fita; (b) vista de topo; (c) vista de lado.

O método FDTD foi inicialmente usado para analisar o espalhamento de ondas eletromagnéticas por objetos [16]. Mais tarde, após o desenvolvimento de técnicas para incluir fontes dentro do domínio computacional, o método foi usado para analisar estruturas irradiantes [16]. Desde a primeira utilização do método FDTD na análise de antenas simples, a antena monopolo cilíndrica e a antena cônica [17], até os dias de hoje, houve uma grande evolução nas técnicas numéricas e o surgimento de novas gerações de computadores que permitiram com que o método FDTD pudesse ser utilizado na análise de estruturas complexas. Dentre as inovações das técnicas numéricas pode-se citar: As condições de contorno absorvente, a *Perfectly Matched Layer* ou PML, proposta inicialmente por Berenger [18], e o algoritmo FDTD em coordenadas não ortogonais [19-25], etc, e em meio ao desenvolvimento computacional podemos citar a arquitetura de computadores em paralelo ou arquitetura *cluster* [26-28].

Na maioria dos casos práticos as estruturas a serem analisadas possuem geometrias de difícil modelagem mediante o uso do sistema de coordenadas retangulares. Neste caso, as aproximações por *staircasing* provocam erros que, muitas vezes, levam a resultados inaceitáveis, não importando o quanto a malha seja refinada para resolver o problema de contorno [15]. Para resolver este problema, o uso do sistema de coordenadas curvilíneas gerais mostra-se ser mais adequado para a modelagem de tais estruturas.

O objetivo desta tese é o desenvolvimento de um código computacional para a solução de problemas de irradiação e de espalhamento eletromagnético em 2-D e 3-D. Este código foi escrito para ser executado em ambiente de processamento paralelo ou serial. Para isso uma formulação apropriada do problema foi desenvolvida partindo-se das equações de Maxwell, as quais serão escritas em um sistema de coordenadas gerais e resolvidas numericamente mediante o uso do método FDTD-VETORIAL. Em face da necessidade de se limitar à região de análise, condições de contorno absorventes (ABC) apropriadas foram implementadas.

Neste trabalho também foram analisadas as condições de dispersão e estabilidade da técnica proposta. Para validar o código computacional desenvolvido, vários problemas disponíveis na literatura foram resolvidos e os resultados obtidos serão então comparados. A eficiência do novo código foi analisada através do tempo de processamento e/ou do espaço de memória requerido para encontrar determinados parâmetros, como por exemplo, à impedância de entrada de uma antena. Em todos os casos compararam-se os resultados obtidos por este código

com aqueles encontrados mediante o uso do método FDTD em coordenadas retangulares e com resultados disponíveis na literatura.

A metodologia que será utilizada neste trabalho baseia-se no trabalho desenvolvido por Stratton [29], na qual as equações de Maxwell foram escritas em um sistema de coordenadas curvilíneas gerais. A formulação proposta por Stratton foi então estendida e aplicada para um sistema de coordenadas curvilíneas irregulares considerando-se meios anisotrópicos uniaxiais.

1.1 – Método FDTD não ortogonal

Com o objetivo de representar de forma mais precisa os contornos físicos de problemas que não se adaptam ao sistema de coordenadas cartesianas utilizadas pelo método FDTD (convencional), inúmeras variações do método FDTD, usando malhas adaptáveis, têm sido propostas em [15] [25]. Alguns dos esquemas implementam uma deformação local no *grid* ortogonal uniforme próximo do contorno irregular. Tais esquemas são classificados genericamente como modelos de subcélulas. Um excelente resumo versando sobre o assunto é encontrado em [15].

A incorporação de *grid* não ortogonal no método FDTD, foi inicialmente proposto por Holland [30], que utilizou um esquema FDTD não ortogonal baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas global. Esta técnica é denominada FDTD não ortogonal global ou GNFDTD. Nesse método, a formulação de Stratton [29] foi utilizada para resolver numericamente as equações de Maxwell na forma diferencial. Contudo, a técnica GNFDTD tem aplicações limitadas porque é necessário um sistema de coordenadas que seja analiticamente descrito em uma base global [25]. Posteriormente, Fusco em [21] desenvolveu as equações de Maxwell na forma discretizada para um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais locais. Este método é mais versátil que o método GNFDTD, mas requer o desenvolvimento e aplicação de software de geração de *grid* generalizado para discretizar a região de análise. Lee et al. [22] estenderam o trabalho de Fusco para três dimensões e demonstraram o critério de estabilidade do método. Esse algoritmo foi desenvolvido partindo-se das equações de Maxwell na forma integral.

Vale ressaltar que todos os métodos referenciados acima estão baseados no trabalho pioneiro desenvolvido por Stratton, os quais requerem um *grid* estruturado, onde às faces das células são quadriláteros.

Em uma outra linha está o método FDTD não ortogonal que utiliza malha não estruturada. Geralmente utiliza-se esse método em problemas envolvendo contornos complexos onde há dificuldades para discretizar precisamente o contorno usando malhas estruturadas. Esse método não será tratado nesta proposta, contudo um resumo de tal técnica pode ser encontrado em [15], [16] e [26].

1.2 – Disposição dos capítulos

Este trabalho está dividido em 6 capítulos e quatro Apêndices, A, B, C e D. Os assuntos abordados em cada parte da tese são divididos como segue.

No APÊNDICE A, o sistema de coordenadas não ortogonais é apresentado. Neste momento, os vetores unitários e os vetores recíprocos são definidos. Obtêm-se então os elementos diferenciais de arco, área e volume, assim como a representação dos operadores diferenciais como o gradiente, o divergente e o rotacional.

No APÊNDICE B, mostra-se que o operador nabla pode ser representado por uma forma simbólica para que a solução da equação de onda vetorial seja obtida de forma direta.

No APÊNDICE C, obtém-se a equação de dispersão numérica para um tipo particular de malha.

No APÊNDICE D, mostra-se como se obtém os parâmetros dependentes da frequência, a partir da voltagem obtida nos terminais da antena analisada.

No APÊNDICE E, mostram-se partes do código LN-FDTD para a análise de espalhamento eletromagnético por cilindro dielétrico.

No Capítulo 2, o método FDTD em coordenadas curvilíneas locais (LN-FDTD) será introduzido. Serão apresentados os conceitos de células primárias e secundárias, assim como os vetores covariantes e contravariantes. As equações de atualização para as componentes do campo elétrico e magnético são obtidas. Demonstra-se a condição de estabilidade. A relação de

dispersão numérica tridimensional é obtida e solucionada para uma malha com g^{ij} constante e as condições de contorno PEC e PMC são explicadas. Ainda neste capítulo, implementa-se o algoritmo para ser usado em computação paralela.

No Capítulo 3, apresenta-se a formulação relacionada a UPML (Uniaxial *Perfectly Matched Layer*) em coordenadas curvilíneas gerais [31], após o que, a formulação será escrita na forma discreta, usando-se o método LN-FDTD.

No capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos para problemas de irradiação, antena corneta setorial plano- E bidimensional e antenas de microfita, e de espalhamento eletromagnético por cilindro dielétrico. Estes dois tipos de problemas foram analisados pelos dois métodos, o método FDTD e o método LN-FDTD, e os resultados obtidos são então comparados. A partir da comparação dos resultados, mostra-se a validação do código proposto.

No capítulo 5 o método LN-FDTD é reformulado para reduzir a memória requerida em 33%, permitindo um aumento do domínio de análise para um dado tamanho de memória computacional, com moderado aumento na complexidade do código.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Esa, N. A. A. Nawawi, and S. Subahir, "Investigation of Lowering the Operating Frequency of a Microwave Device Using Simulation," *X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, Anais, pp 121-125, Recife, Agosto, 2002.
- [2] E. S. Neves, R. Schieldberg e J. C. S. Lacava, "Antenas de Microfita Multibanda," *X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, Anais, pp 267-271, Recife, Agosto, 2002.
- [3] P. Perlmutter, S. Shtrikman, and D. Treves, "Electric Surface Current model for the analysis of microstrip antennas with application to rectangular elements," *IEEE Trans. On Antennas and prop.*, Vol. Ap-33, pp.301-311, Mar. 1985.
- [4] F. Yang, X. X. Zhang, X. Ye, and Y. R-Sammi, "Wide-band E-shaped patch antennas for wireless communications," *IEEE Trans. On Antennas and prop.*, Vol. Ap-49, pp.1094-1100, July 2001.
- [5] V. Dmitriev e K. Q. Costa, "Antenas de Microfita Retangular com Estubes Periódicos para Redução das dimensões," *X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, Anais, pp. 277-281, Recife, Agosto, 2002.
- [6] L. C. Kretly, A. C. Sodré Jr, "Radiation Characteristics of slot Antenna Arrays for WLAN at 5.2 GHz," *X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, Anais, pp 285-288, Recife, Agosto, 2002.
- [7] F. C. Silva, "Aplicação do formalismo das funções de Green diádicas e do método dos momentos no estudo de elementos de microfita sobre substratos cilíndricos circulares," *Tese de Doutorado, UNICAMP*, 1990.
- [8] L. B. T. Cividomes, "Análise de antenas de microfita em estruturas multicamadas com dielétricos uniaxiais," *Tese de Doutorado, ITA*, 1992.
- [9] A. A. Kishk, "Analysis of spherical circular microstrip antennas," *IEE Proc. Pt. H*, vol.138, No.6, pp.542-548, Dec. 1991.
- [10] K. M. Luck, K. F. Lee, and J. S. Dahele, "Analysis of the cylindrical-rectangular patch antenna," *IEEE Trans. Antenn. Propagat.*, Vol. Ap-37, No. 2, pp.143-147, Feb. 1989.

- [11] D. M. Sheen, S. M. Ali, M. D. Abouzahra and J. A. Kong, "Application of the three-dimensional finite-difference time-domain method to the analysis of planar microstrip circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-38, No. 7, pp. 849-857, July. 1990.
- [12] J. P. Kim and W. S. Park, "Network Modeling of an Inclined and Off-Center Microstrip-Fed Slot Antenna," *IEEE Trans. Antenn. Propagat.*, Vol. Ap-46, no. 8, pp.1182-1188, August. 1989.
- [13] J. M. Jonson and Y. R-Samii, "Genetic Algorithms in Engineering Electromagnetic, *IEEE Antennas Magazine*, Vol. Ap-39, pp. 07-25, August. 1997.
- [14] K.S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-14, pp. 302-307, May 1966.
- [15] A. Taflove, "*Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*," NY: Artech House, may 1995.
- [16] A. Taflove, "*Advances in Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method*," Artech House, Boston-London, 1998.
- [17] J. G. MALONEY , G. S. Smith, and W. R. Scott, Jr., " Accurate computation of the radiation from Simple Antennas Using the Finite-Difference Time-Domain Method," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. AP-38, pp.1059-1068, 1990.
- [18] J. P. Berenger,"A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,"*J. Computational Phisics*, Vol. 114, pp. 185-200, 1994.
- [19] J. F. Lee, and R. MITTRA, "Finite difference time domain algorithm for non-orthogonal grids," *Technical Rep. Eletromagnetic Communication Lab., Departament of Eletrical and Computer Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign*, 1991.
- [20] L. Zhao, L. S. Tong and R. G. Carter,"The Influence of Boundary Conditions on Resonant Frequencies of Cavities in 3-D FDTD Algorithm Using Non-orthogonal Co-ordinates", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-30, No. 5, pp. 3570-3573, September 1994.
- [21] M.Fusco, "FDTD algorithm in curvilinear coordinates", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-38, pp.76-88, 1990.

- [22] J. F. Lee, R. Palendech, and R. Mittra “Modeling Three-Dimensional Discontinuities in Waveguides Using Non-orthogonal FDTD Algorithm”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-40, No.2 Feb. 1992.
- [23] S. L. Ray, “ Numerical Dispersion and Stability Characteristics of Time-Domain Methods on Nonorthogonal Meshes,” *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. AP-38, No.2, pp.233-235, 1993.
- [24] E. A. Navarro, C. Wu, P. Y. Chung and J. Litva, “Some Considerations About the Finite Difference Time Domain Method in General Curvilinear Coordinates,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 4, No.12, pp. 396-398, December 1994.
- [25] J. A. Roden, “Broadband Electromagnetic Analysis of Complex Structures with the Finite-Difference Time-domain Technique in General Curvilinear Coordinates,” *Ph.D. Dissertation, University of Kentucky*, 1997
- [26] G. S. Almasi, and A. Gohlied, “*Hihgly Parallel Computing*,” Benjamin/Cummings Publishing, 2^a ed., 1994.
- [27] J. S. Araújo, “Análise de Antenas 2-D Utilizando o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo com Processamento Paralelo,”*Dissertação de Mestrado, PPGEE/DEEC/UFPA*, Janeiro, 2003.
- [28] J. M. Rocha, “Cluster Beowulf: Aspectos de Projeto e Implementação,”*Dissertação de Mestrado, PPGEE/DEEC/UFPA*, Janeiro, 2003.
- [29] J. A. Stratton, “*Electromagnetic Theory*,” New York: McGraw-Hill, 1941.
- [30] R. Holland “Finite-Difference Solutions of Maxwell’s Equations in Generalized Noorthogonal Coordinates”, *IEEE Trans. on Nuclear Science*, vol. NS-30, No.6 pp. 4589-4591, Dec. 1983.
- [31] S.D. Gedney, “An Anisotropic Perfectly Matched Layer- Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-44, No. 12, pp. 1630-1639, Dec. 1996.

Capítulo 2

O Método FDTD em coordenadas curvilíneas locais (LN-FDTD)

O método FDTD introduzido por Yee [1] foi inicialmente desenvolvido para o sistema de coordenadas retangulares. Conseqüentemente, quando o método é aplicado na modelagem de estruturas que apresentam superfícies curvas ou com o seu sistema de eixos não coincidente com aqueles do sistema cartesiano, consideráveis erros relacionados com as aproximações do contorno físico por *staircase* são introduzidos [2]. Para resolver este problema, diversos pesquisadores estenderam essa técnica para um sistema de coordenadas que se adapte de forma mais amigável ao contorno físico do problema [3-5]. No trabalho inicial de Stratton [3] e mais tarde de Holland [4], demonstrou-se que se um sistema de coordenadas curvilíneas global pode ser adaptado de forma a modelar uma estrutura de geometria complexa, então o algoritmo FDTD pode ser facilmente aplicado levando a uma solução mais precisa, de segunda ordem, no tempo e no espaço. Isto é realizado expressando e solucionando as equações rotacionais de Maxwell no espaço curvilíneo geral. Esta metodologia é denominada método das diferenças finitas no domínio do tempo não ortogonal global ou método GNFDTD. Mais tarde foi mostrado que a técnica FDTD pode ser aplicada em uma base local [5], o que pode ser feito em casos onde um sistema de coordenadas curvilíneas global não possa ser aplicado. Neste algoritmo, as coordenadas curvilíneas são construídas em uma base local, a partir das faces das células de uma malha estruturada irregular. Esta técnica é chamada de método das diferenças finitas no domínio do tempo não ortogonal local ou método LN-FDTD.

2.1 – Implementação do Método LN-FDTD

Neste trabalho, definiu-se um *grid* estruturado irregular não ortogonal como sendo aquele composto de duas malhas denominadas de primária e secundárias. A malha primária é projetada

para adaptar-se a geometria do problema, o que pode ser realizado mediante o uso de um gerador de malhas adaptativas. Esta malha pode também ser escolhida para se alinhar com as componentes do campo elétrico ou magnético, dependendo de qual condição de contorno será imposta na geometria física. Então, a segunda malha é gerada pela conexão dos baricentros das células da malha primária. Um exemplo deste tipo de malha é ilustrado na Figura. 2.1.

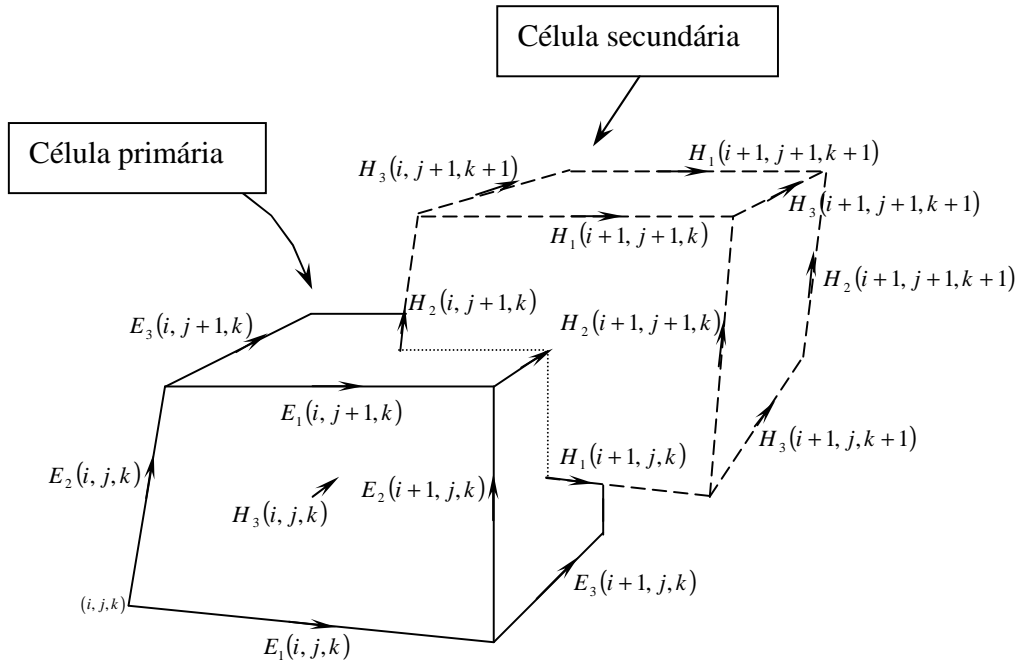


Fig. 2.1 – Célula primária e secundária de uma malha estruturada irregular não ortogonal.

Para as geometrias que possam ser discretizadas por este tipo de *grid*, define-se os vetores unitários de base, \mathbf{A}_i ($i=1,2,3$), pelas arestas das células das malhas primária e secundária, conforme mostra a Figura. 2.2. Como se pode observar nessa figura, preferiu-se representar esses vetores assim como os vetores unitários recíprocos por letras maiúsculas ao invés das letras

minúsculas usadas no APÊNDICE A, isto foi feito com o objetivo de seguir a notação mais usada na literatura. Vale também ressaltar que os sobrescritos e e h , dos vetores de base, significam campos elétricos e magnéticos.

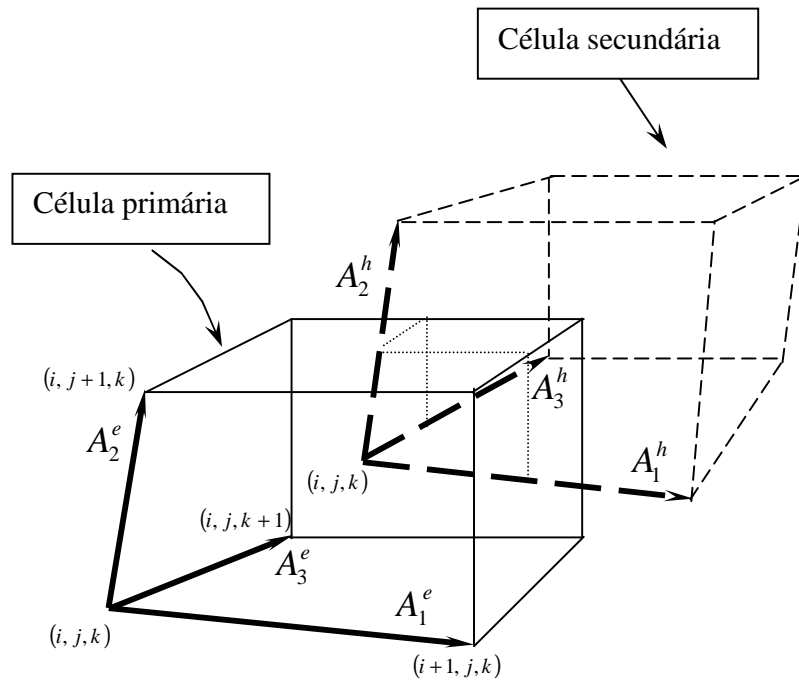


Fig. 2.2 – Definição dos vetores unitários de base para as células primária e secundária no sistema de coordenadas curvilíneas locais.

As equações de Maxwell na forma integral por serem naturalmente aplicadas em um espaço não ortogonal irregular serão utilizadas para a obtenção das componentes de atualização dos campos elétrico e magnético no domínio do tempo, usando-se o método LN-FDTD. Dessa maneira, considerando-se um meio isotrópico e livre de fontes [5], pode-se escrever

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.2)$$

Como visto no APÊNDICE A, um vetor qualquer \mathbf{F} , pode ser escrito em função dos vetores unitário de base ou em função dos vetores recíprocos. Por exemplo, o campo elétrico $\mathbf{E}(i, j, k)$ em um ponto (i, j, k) do *grid*, pode ser expresso em termos das duas bases, respectivamente, como

$$\mathbf{E}(i, j, k) = \sum_{j=1}^3 E^j(i, j, k) \mathbf{A}_j(i, j, k), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E}(i, j, k) = \sum_{j=1}^3 E_j(i, j, k) \mathbf{A}^j(i, j, k). \quad (2.4)$$

Em (2.3) e (2.4), os coeficientes E^i e E_i são chamados de componentes contravariantes e covariantes, respectivamente, do campo elétrico. Essas componentes de campo podem ser interpretadas fisicamente da seguinte forma: usa-se (2.4) para que o fluxo do campo elétrico ao longo da aresta i possa ser encontrado, isto é $\mathbf{E}(i, j, k) \cdot \mathbf{A}_i(i, j, k)$. A partir da eq. (A.9), obtêm-se

$$\mathbf{E}(i, j, k) \cdot \mathbf{A}_i(i, j, k) = \left[\sum_{j=1}^3 E_j(i, j, k) \mathbf{A}^j(i, j, k) \right] \cdot \mathbf{A}_i(i, j, k) = E_i(i, j, k). \quad (2.5)$$

Portanto, conclui-se da equação (2.5) que a componente covariante $E_i(i, j, k)$ representa o fluxo de $\mathbf{E}(i, j, k)$ ao longo da aresta i . Similarmente, fazendo-se o produto escalar de (2.3) pelo vetor unitário de base $\mathbf{A}^i(i, j, k)$, encontra-se,

$$\mathbf{E}(i, j, k) \cdot \mathbf{A}^i(i, j, k) = \left[\sum_{j=1}^3 E^j(i, j, k) \mathbf{A}_j(i, j, k) \right] \cdot \mathbf{A}^i(i, j, k) = E^i(i, j, k). \quad (2.6)$$

Observa-se de (2.6) que $E^i(i, j, k)$ representa o fluxo total do campo elétrico passando através da face i dividida pelo volume V . Isto pode ser demonstrado substituindo a eq. (A.7) na equação acima.

A partir da interpretação física acima, pode-se escrever as expressões para os campos (\mathbf{E} e \mathbf{H}) que aparecem na integral de linha (lado direito) das eqs. (2.1) e (2.2). O que é feito, naturalmente em termos das componentes covariantes, uma vez que estas representam o fluxo real do campo ao longo das arestas das faces de cada célula, como interpretação dada anteriormente. Os campos contravariantes têm direção normal a cada face da célula e, portanto são escolhidos para o lado esquerdo nas eqs. (2.1) e (2.2). A partir disso, pode-se resolver a eq.(2.1), pelo método LN-FDTD, para a componente contravariante do campo magnético $H^{1\ n+1/2}(i, j, k)$, assumindo-se que a mesma seja constante sobre a face da cada célula, como segue

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial t} H^1(i, j, k)^n \mathbf{A}_1 \cdot \left| \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \right| \frac{\mathbf{A}^1}{|\mathbf{A}^1|} = \\ \left(E_3(i, j+1, k)^n - E_3(i, j, k)^n \right) - \left(E_2(i, j, k+1)^n - E_2(i, j, k)^n \right) \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H^1(i, j, k)^n \mathbf{A}_1 \cdot \sqrt{(\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3) \cdot (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)} \frac{\mathbf{A}^1}{|\mathbf{A}^1|} = \\ \left(E_3(i, j+1, k)^n - E_3(i, j, k)^n \right) - \left(E_2(i, j, k+1)^n - E_2(i, j, k)^n \right). \end{aligned}$$

Esta equação pode ser reescrita em função do volume da célula, para isso usa-se a equação (A.63), resultando em

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial t} H^1(i, j, k)^n \mathbf{A}_1 \cdot \sqrt{(\mathbf{A}^1 V) \cdot (\mathbf{A}^1 V)} \frac{\mathbf{A}^1}{|\mathbf{A}^1|} = \\ \left(E_3(i, j+1, k)^n - E_3(i, j, k)^n \right) - \left(E_2(i, j, k+1)^n - E_2(i, j, k)^n \right), \end{aligned}$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} H^1(i, j, k)^n V = \left(E_3(i, j+1, k)^n - E_3(i, j, k)^n \right) - \left(E_2(i, j, k+1)^n - E_2(i, j, k)^n \right), \quad (2.7)$$

onde V é o volume dado pela equação:

$$V = \mathbf{A}_i \cdot (\mathbf{A}_{(i+1)} \times \mathbf{A}_{(i+2)}). \quad (2.8)$$

No sistema de coordenadas curvilíneas locais, o volume V é definido para cada componente contravariante, a partir dos vetores de base unitário que definem a célula (Fig.2.2). Para o cálculo do volume relativo a uma dada face, é necessário conhecer o vetor unitário de base da componente contravariante normal a esta face e os quatro vetores de base unitário, da malha dual, que definem a face através da qual o campo vetorial contravariante passa. Desta forma, o volume para a componente H^1 , de acordo com as Figuras 2.1 e 2.2, é dado por:

$$V_1^h = \mathbf{A}_1^h(i, j, k) \cdot \left\{ \left(\frac{\mathbf{A}_2^e(i, j, k+1) + \mathbf{A}_2^e(i, j, k)}{2} \right) \times \left(\frac{\mathbf{A}_3^e(i, j, k) + \mathbf{A}_3^e(i, j+1, k)}{2} \right) \right\}. \quad (2.9)$$

Com isso, obtêm-se a expressão de atualização para a componente contravariante do campo magnético $H^1(i, j, k)^{n+1/2}$, o que é feito substituindo (2.9) em (2.7)

$$H^1(i, j, k)^{n+1/2} = H^1(i, j, k)^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu V_1^h(i, j, k)} \cdot \left[\left(E_3(i, j+1, k)^n - E_3(i, j, k)^n \right) - \left(E_2(i, j, k+1)^n - E_2(i, j, k)^n \right) \right]. \quad (2.10)$$

As outras componentes contravariantes do campo magnético, $H^2(i, j, k)^{n+1/2}$ e $H^3(i, j, k)^{n+1/2}$ são obtidas da mesma forma. Resultando em

$$H^2(i, j, k)^{n+1/2} = H^2(i, j, k)^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu V_2^h(i, j, k)} \cdot \left[\left(E_1(i, j, k+1)^n - E_1(i, j, k)^n \right) - \left(E_3(i+1, j, k)^n - E_3(i, j, k)^n \right) \right], \quad (2.11)$$

$$H^3(i, j, k)^{n+1/2} = H^3(i, j, k)^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu V_3^h(i, j, k)} \cdot \left[\left(E_2(i+1, j, k)^n - E_2(i, j, k)^n \right) - \left(E_1(i, j+1, k)^n - E_1(i, j, k)^n \right) \right], \quad (2.12)$$

e com os seus respectivos volumes, dados por

$$V_2^h = \mathbf{A}_2^h(i, j, k) \cdot \left\{ \left(\frac{\mathbf{A}_3^e(i, j, k) + \mathbf{A}_3^e(i+1, j, k)}{2} \right) \times \left(\frac{\mathbf{A}_1^e(i, j, k+1) + \mathbf{A}_1^e(i, j, k)}{2} \right) \right\}, \quad (2.13)$$

$$V_3^h = \mathbf{A}_3^h(i, j, k) \cdot \left\{ \left(\frac{\mathbf{A}_1^e(i, j, k) + \mathbf{A}_1^e(i, j+1, k)}{2} \right) \times \left(\frac{\mathbf{A}_2^e(i, j, k) + \mathbf{A}_2^e(i+1, j, k)}{2} \right) \right\}. \quad (2.14)$$

A solução da eq. (2.2), pelo método LN-FDTD, para calcular as componentes contravariantes do campo elétrico, segue o mesmo procedimento feito para a obtenção das componentes contravariantes do campo magnético, e dessa forma obtêm-se

$$E^1(i, j, k)^{n+1} = E^1(i, j, k)^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon(i, j, k)V_1^e(i, j, k)} \left[\left(H_3(i, j, k)^{n+1/2} - H_3(i, j-1, k)^{n+1/2} \right) - \left(H_2(i, j, k)^{n+1/2} - H_2(i, j, k-1)^{n+1/2} \right) \right], \quad (2.15)$$

$$E^2(i, j, k)^{n+1} = E^2(i, j, k)^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon(i, j, k)V_2^e(i, j, k)} \left[\left(H_1(i, j, k)^{n+1/2} - H_1(i, j, k-1)^{n+1/2} \right) - \left(H_3(i, j, k)^{n+1/2} - H_3(i-1, j, k)^{n+1/2} \right) \right], \quad (2.16)$$

$$E^3(i, j, k)^{n+1} = E^3(i, j, k)^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{E}(i, j, k)V_3^e(i, j, k)} \left[\left(H_2(i, j, k)^{n+1/2} - H_2(i-1, j, k)^{n+1/2} \right) - \left(H_1(i, j, k)^{n+1/2} - H_1(i, j-1, k)^{n+1/2} \right) \right], \quad (2.17)$$

com os seus respectivos volumes, dados por:

$$V_1^e = \mathbf{A}_1^e(i, j, k) \cdot \left\{ \left(\frac{\mathbf{A}_2^h(i, j, k) + \mathbf{A}_2^h(i, j, k-1)}{2} \right) \times \left(\frac{\mathbf{A}_3^h(i, j, k) + \mathbf{A}_3^h(i, j-1, k)}{2} \right) \right\}, \quad (2.18)$$

$$V_2^e = \mathbf{A}_2^e(i, j, k) \cdot \left\{ \left(\frac{\mathbf{A}_3^h(i, j, k) + \mathbf{A}_3^h(i-1, j, k)}{2} \right) \times \left(\frac{\mathbf{A}_1^h(i, j, k) + \mathbf{A}_1^h(i, j, k-1)}{2} \right) \right\}, \quad (2.19)$$

$$V_3^e = \mathbf{A}_3^e(i, j, k) \cdot \left\{ \left(\frac{\mathbf{A}_1^h(i, j, k) + \mathbf{A}_1^h(i, j-1, k)}{2} \right) \times \left(\frac{\mathbf{A}_2^h(i, j, k) + \mathbf{A}_2^h(i-1, j, k)}{2} \right) \right\}. \quad (2.20)$$

Para concluir a formulação, é necessário converter as componentes contravariantes do campo elétrico \mathbf{E} em componentes covariantes, para que as componentes contravariantes do campo \mathbf{H} possam ser calculadas, e vice versa. Isso pode ser feito, “projetando-se” as componentes contravariantes do campo (\mathbf{E} ou \mathbf{H}) para a posição da componente covariante que se quer calcular. Vale ressaltar que esta transformação pode ser realizada pela eq. (A.18) e, neste caso, há necessidade de um esquema de média das componentes contravariantes, para que elas possam ser avaliadas nas posições das componentes covariantes. Este esquema é denominado de método da média facial [6]. Através do qual, as componentes para o campo elétrico covariante tornam-se:

$$E_1(i, j, k)^{n+1} = g_{11}E^1(i, j, k)^{n+1} + \frac{g_{12}}{4} \left(E^2(i, j, k)^{n+1} + E^2(i+1, j, k)^{n+1} + E^2(i, j-1, k)^{n+1} + E^2(i+1, j-1, k)^{n+1} \right) + \frac{g_{13}}{4} \left(E^3(i, j, k)^{n+1} + E^3(i+1, j, k)^{n+1} + E^3(i, j, k-1)^{n+1} + E^3(i+1, j, k-1)^{n+1} \right), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
E_2(i, j, k)^{n+1} &= g_{22}E^2(i, j, k)^{n+1} + \\
&\frac{g_{21}}{4} \left(E^1(i, j, k)^{n+1} + E^1(i, j+1, k)^{n+1} + E^1(i-1, j, k)^{n+1} + E^1(i-1, j+1, k)^{n+1} \right) + \\
&\frac{g_{23}}{4} \left(E^3(i, j, k)^{n+1} + E^3(i, j+1, k)^{n+1} + E^3(i, j, k-1)^{n+1} + E^3(i, j+1, k-1)^{n+1} \right), \quad (2.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3(i, j, k)^{n+1} &= g_{33}E^3(i, j, k)^{n+1} + \\
&\frac{g_{31}}{4} \left(E^1(i, j, k)^{n+1} + E^1(i, j, k+1)^{n+1} + E^1(i-1, j, k)^{n+1} + E^1(i-1, j, k+1)^{n+1} \right) + \\
&\frac{g_{32}}{4} \left(E^2(i, j, k)^{n+1} + E^2(i, j, k+1)^{n+1} + E^2(i, j-1, k)^{n+1} + E^2(i, j-1, k+1)^{n+1} \right). \quad (2.23)
\end{aligned}$$

O cálculo das componentes covariantes do campo magnético é realizado de maneira análoga, chegando-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
H_1(i, j, k)^{n+1/2} &= g_{11}H^1(i, j, k)^{n+1/2} + \\
&\frac{g_{12}}{4} \left(H^2(i-1, j, k)^{n+1/2} + H^2(i-1, j+1, k)^{n+1/2} + H^2(i, j, k)^{n+1/2} + H^2(i, j+1, k)^{n+1/2} \right) + \\
&\frac{g_{13}}{4} \left(H^3(i-1, j, k)^{n+1/2} + H^3(i-1, j, k+1)^{n+1/2} + H^3(i, j, k)^{n+1/2} + H^3(i, j, k+1)^{n+1/2} \right), \quad (2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2(i, j, k)^{n+1/2} &= g_{22}H^2(i, j, k)^{n+1/2} + \\
&\frac{g_{21}}{4} \left(H^1(i, j-1, k)^{n+1/2} + H^1(i+1, j-1, k)^{n+1/2} + H^1(i, j, k)^{n+1/2} + H^1(i+1, j, k)^{n+1/2} \right) + \\
&\frac{g_{23}}{4} \left(H^3(i, j-1, k)^{n+1/2} + H^3(i, j-1, k+1)^{n+1/2} + H^3(i, j, k)^{n+1/2} + H^3(i, j, k+1)^{n+1/2} \right), \quad (2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3(i, j, k)^{n+1/2} &= g_{33}H^3(i, j, k)^{n+1/2} + \\
&\frac{g_{31}}{4} \left(H^1(i, j, k-1)^{n+1/2} + H^1(i+1, j, k-1)^{n+1/2} + H^1(i, j, k)^{n+1/2} + H^1(i+1, j, k)^{n+1/2} \right) + \\
&\frac{g_{32}}{4} \left(H^2(i, j, k-1)^{n+1/2} + H^2(i, j+1, k-1)^{n+1/2} + H^2(i, j, k)^{n+1/2} + H^2(i, j+1, k)^{n+1/2} \right). \quad (2.26)
\end{aligned}$$

A computação apropriada das projeções métricas para um *grid* irregular deve ser feita. Para isto, é necessário definir um sistema de coordenadas curvilíneas local para cada componente de campo contravariante. Por exemplo, o sistema de coordenadas local para a componente contravariante $H^1(i, j, k)$ (Fig.2.1), pode ser obtido a partir do seu vetor unitário de base e dos dois vetores definidos pela média das arestas opostas da face na qual $\mathbf{A}^1(i, j, k)$ é normal. Dessa forma os três vetores definindo o sistema de coordenadas local para a computação de $H^1(i, j, k)^{n+1/2}$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_3(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_3^e(i, j, k) + \mathbf{A}_3^e(i, j+1, k)}{2}, \\ \mathbf{A}_2(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_2^e(i, j, k) + \mathbf{A}_2^e(i, j, k+1)}{2}, \\ \mathbf{A}_1(i, j, k) &= \mathbf{A}_1^h(i, j, k),\end{aligned}\tag{2.27}$$

e os vetores que definem o sistema de coordenadas locais para as outras componentes de campo são:

Para $H^2(i, j, k)^{n+1/2}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_1^e(i, j, k) + \mathbf{A}_1^e(i, j, k+1)}{2}, \\ \mathbf{A}_2(i, j, k) &= \mathbf{A}_2^h(i, j, k), \\ \mathbf{A}_3(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_3^e(i, j, k) + \mathbf{A}_3^e(i+1, j, k)}{2}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Para $H^3(i, j, k)^{n+1/2}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_1^e(i, j, k) + \mathbf{A}_1^e(i, j+1, k)}{2}, \\ \mathbf{A}_2(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_2^e(i, j, k) + \mathbf{A}_2^e(i+1, j, k)}{2}, \\ \mathbf{A}_3(i, j, k) &= \mathbf{A}_3^h(i, j, k) .\end{aligned}\tag{2.29}$$

Para $E^1(i, j, k)^{n+1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1(i, j, k) &= \mathbf{A}_1^e(i, j, k), \\ \mathbf{A}_2(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_2^h(i, j, k) + \mathbf{A}_2^h(i, j, k+1)}{2}, \\ \mathbf{A}_3(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_3^h(i, j, k) + \mathbf{A}_3^h(i, j+1, k)}{2}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Para $E^2(i, j, k)^{n+1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_1^h(i, j, k) + \mathbf{A}_1^h(i, j, k+1)}{2}, \\ \mathbf{A}_2(i, j, k) &= \mathbf{A}_2^e(i, j, k), \\ \mathbf{A}_3(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_3^h(i, j, k) + \mathbf{A}_3^h(i+1, j, k)}{2}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Para $E^3(i, j, k)^{n+1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_1^h(i, j, k) + \mathbf{A}_1^h(i, j+1, k)}{2}, \\ \mathbf{A}_2(i, j, k) &= \frac{\mathbf{A}_2^h(i, j, k) + \mathbf{A}_2^h(i+1, j, k)}{2}, \\ \mathbf{A}_3(i, j, k) &= \mathbf{A}_3^e(i, j, k),\end{aligned}\tag{2.32}$$

2.2 – Condição de estabilidade para o método LN-FDTD

Para que um algoritmo numérico baseado em aproximações por diferenças finitas venha a convergir é necessário que o método seja consistente bem como estável [7]. A condição de consistência, que é obtida da expansão em série de Taylor quando da substituição dos operadores

diferencias por diferenças algébricas, requer que o erro de truncagem local se aproxime de zero quando o tamanho da célula tender para zero [5].

O critério de estabilidade para o algoritmo LN-FDTD pode ser demonstrado de maneira similar àquela feita para o GNFDTD [7]. Contudo, no trabalho que ora desenvolve-se, devido à irregularidade do *grid*, o critério de estabilidade não pode ser demonstrado no sentido global como aquele apresentado em [7], mas sim, num sentido local. Em [5] e [9] obteve-se a expressão para a estabilidade numérica do algoritmo LN-FDTD, que é a utilizado nesta proposta de tese, contudo esta condição é somente válida para uma região homogênea na qual o *grid* não apresente curvatura, em outras palavras, para *grids* que conservam constantes as direções dos vetores de base. O critério de estabilidade exato não pode ser obtido numericamente para *grids* irregulares, conforme mostrado em [10], pois o divergente do campo elétrico não é garantido.

Assumindo o espaço tridimensional homogêneo e livre de fontes, o campo elétrico (ou magnético) deve satisfazer a equação de onda vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.33)$$

onde c é a velocidade da luz dentro do meio homogêneo. Aplicando-se a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ e a lei de Gauss ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) em (2.33), obtêm-se

$$(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.34)$$

Como é bem conhecido de [8], uma onda arbitrária pode ser expandida em termos de um espectro de ondas planas as quais podem também ser interpretada como sendo os automodos da equação de onda. Assim, pode-se mostrar que se o algoritmo for estável para uma onda plana arbitrária, ele será estável para todas as outras. Assume-se para tal, que a solução da equação de onda para o campo elétrico seja dado por:

$$\mathbf{E}(u^1, u^2, u^3, t) = \mathbf{e}(t) e^{-j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.35)$$

onde $\mathbf{e}(t)$ é uma função vetorial arbitrária dependente do tempo e u^i ($i=1,2,3$) são as coordenadas gerais (como definidas no APÊNDICE A). Além disso, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ pode ser expresso como:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3, \quad (2.36)$$

onde $k_i = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i$ ($i=1,2,3$).

Para se determinar a estabilidade das equações (2.10)-(2.12) e (2.15)-(2.17), um fator de amplificação α é definido por

$$\alpha = \frac{\mathbf{e}^{n+1}}{\mathbf{e}^n}. \quad (2.37)$$

Logo, para que haja estabilidade $|\alpha| \leq 1$. Aplicando-se o operador *nabla* (∇) na eq. (2.35), e usando-se aproximações de diferenças centradas com os $\Delta u^i = 1$, pode-se mostrar (demonstrado no Apêndice B) que o operador ∇ pode ser substituído simbolicamente por

$$\nabla = -2j \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{A}^i \sin \left(\frac{k_i \Delta u^i}{2} \right) \right]. \quad (2.38)$$

Desta maneira, substituindo-se (2.38) em (2.34), e usando-se uma aproximação de diferenças centradas para a derivada de segunda ordem no tempo, encontra-se

$$\left\{ -2j \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{A}^i \sin \left(\frac{k_i \Delta u^i}{2} \right) \right] \right\} \cdot \left\{ -2j \left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{A}^j \sin \left(\frac{k_j \Delta u^j}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{E}^{n+1} - 2\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (2.39)$$

De (2.37), assume-se que $\mathbf{E}^{n+1} = \alpha \mathbf{E}^n$ e $\mathbf{E}^{n-1} = \mathbf{E}^n / \alpha$, que levadas para (2.39), resulta

$$-4 \left\{ \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{A}^i \sin \left(\frac{k_i \Delta u^i}{2} \right) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{A}^j \sin \left(\frac{k_j \Delta u^j}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{E}^n = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha \Delta t^2} \right) \mathbf{E}^n. \quad (2.40)$$

Finalmente, solucionando a equação (2.40) em função de α , obtêm-se como segue

$$\begin{aligned}
-4s^2\alpha\Delta t^2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 \\
\alpha^2 + \alpha(-2 + 4s^2\Delta t^2) + 1 &= 0 \\
\alpha &= \frac{-(-2 + 4s^2\Delta t^2) \pm \sqrt{(-2 + 4s^2\Delta t^2)^2 - 4}}{2} \\
\alpha &= (1 - 2s^2\Delta t^2) \pm 2s\Delta t\sqrt{s^2\Delta t^2 - 1}, \tag{2.41}
\end{aligned}$$

onde

$$s^2 = c^2 \sum_{l=1}^3 \left(\mathbf{A}^l \cdot \mathbf{A}^m \sin\left(\frac{k_l \Delta u^l}{2}\right) \sin\left(\frac{k_m \Delta u^m}{2}\right) \right). \tag{2.42}$$

De (2.37) e (2.41) observa-se que o método só será estável se e somente se

$$s^2\Delta t^2 \leq 1. \tag{2.43}$$

A condição acima deve ser verdadeira para qualquer modo propagante. Desta forma, a equação (2.42), considerando-se a eq. (A.15), pode ser reescrita, tomando-se o valor máximo para a função seno, como

$$s^2 \leq c^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (g^{lm}) \tag{2.44}$$

onde

$$g^{lm} = \mathbf{A}^l \cdot \mathbf{A}^m. \tag{2.45}$$

Então, substituindo (2.44) em (2.43), pode-se escrever

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\sum_{l,m=1}^3 g^{lm}}} . \quad (2.46)$$

A equação (2.46) é o critério de estabilidade para o algoritmo FDTD em coordenadas curvilíneas não ortogonal local. Embora esta equação não seja exata, ela é bastante utilizada na literatura e, portanto será utilizada aqui.

2.3 – Dispersão Numérica

Neste tópico, será demonstrada a relação de dispersão para uma malha tridimensional. Estudam-se os efeitos dispersivos para diferentes direções de propagação com relação aos vetores de base e para diferentes ângulos de inclinação entre esses vetores. Para o caso particular no qual a malha não apresente curvatura ($\Delta u^i = 1$), o critério de estabilidade é exato e para uma região na qual os tensores métricos são constante, $g^{ij} = \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{A}^j = \text{constante}$, pode-se demonstrar a relação de dispersão numérica [10].

Assumindo-se que a solução da equação de onda para o campo elétrico seja dada por

$$\mathbf{E}(u^1, u^2, u^3) = \exp(j\omega t - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}, \quad (2.47)$$

onde \mathbf{e} é o vetor polarização. Substituindo (2.38) na eq. (2.34) e usando diferenças centradas para a derivada no tempo, obtêm-se a relação de dispersão numérica tridimensional para a malha, tendo g^{ij} constante, como segue

$$\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{A}^i \sin\left(\frac{k_i}{2}\right) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{A}^j \sin\left(\frac{k_j}{2}\right) \right] \mathbf{E} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{c^2 \Delta t^2} \mathbf{E}. \quad (2.48a)$$

ou

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{c^2\Delta t^2} = \left[\sum_{i,j=1}^3 g^{ij} \sin\left(\frac{k_i}{2}\right) \sin\left(\frac{k_j}{2}\right) \right] \quad (2.48b)$$

Como a equação (2.48b) esta escrita em uma forma implícita em termos das componentes de \mathbf{k} , pode-se encontrar estas componentes, numericamente, usando-se o método Newton. O que se deseja observar então são os erros introduzidos na velocidade de fase para esse tipo particular de malha.

Para simplificar a análise, assume-se que \mathbf{A}_3 seja ortogonal ao plano definido por \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 , sendo θ o ângulo entre esses dois vetores, e que a onda se propague no plano definido por \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 formando um ângulo α em relação ao vetor \mathbf{A}_1 (ver Figura 2.3). As dimensões de cada célula são Δh_1 , Δh_2 , Δh_3 (nas direções \mathbf{u}^1 , \mathbf{u}^2 e \mathbf{u}^3 , respectivamente) onde $g_{11} = (\Delta h_1)^2$, $g_{12} = \Delta h_1 \Delta h_2 \cos(\theta)$, $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$, $g_{22} = (\Delta h_2)^2$, e $g_{33} = (\Delta h_3)^2$. Dessa forma, mostra-se no Apêndice C que (2.48b) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{c^2\Delta t^2} = & \frac{1}{(\Delta h_1)^2 \sin^2 \theta} \sin^2\left(\frac{k\Delta h_1}{2} \cos \alpha\right) \\ & - 2 \frac{\cos \theta}{\Delta h_1 \Delta h_2 \sin^2 \theta} \sin\left(\frac{k\Delta h_2}{2} \cos(\alpha - \theta)\right) \sin\left(\frac{k\Delta h_1}{2} \cos \alpha\right) + \\ & \frac{1}{(\Delta h_2)^2 \sin^2 \theta} \sin^2\left(\frac{k\Delta h_2}{2} \cos(\alpha - \theta)\right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Vale ressaltar que esta equação reduz-se a relação de dispersão para uma malha ortogonal convencional [7], fazendo-se $\theta = 90^\circ$.

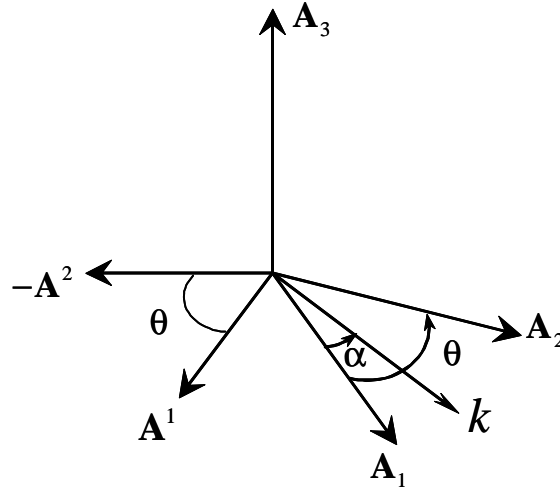


Fig. 2.3 – Vetores unitários de base e recíprocos para o sistema de coordenadas não ortogonal.

Para fazer-se uma análise detalhada sobre a dispersão, primeiramente verifica-se o comportamento da velocidade de fase normalizada em função da resolução da malha (em termos do comprimento de onda), Fig.2.4. Essa análise é feita para vários valores de θ e com o ângulo $\alpha = 0$. Aqui, as dimensões de cada célula são iguais e o incremento de tempo é escolhido como sendo o máximo valor permitido pelo critério de estabilidade, (eq.(2.46)), ou seja

$\Delta t = 1 / \left(c \sqrt{g^{11} + 2g^{12} + g^{22} + g^{33}} \right)$. Observa-se da Fig.2.4 que o erro de dispersão pode ser reduzido a um limite razoável, se for considerado uma resolução de no máximo $\Delta h_1 = \Delta h_2 \leq \lambda / 10$.

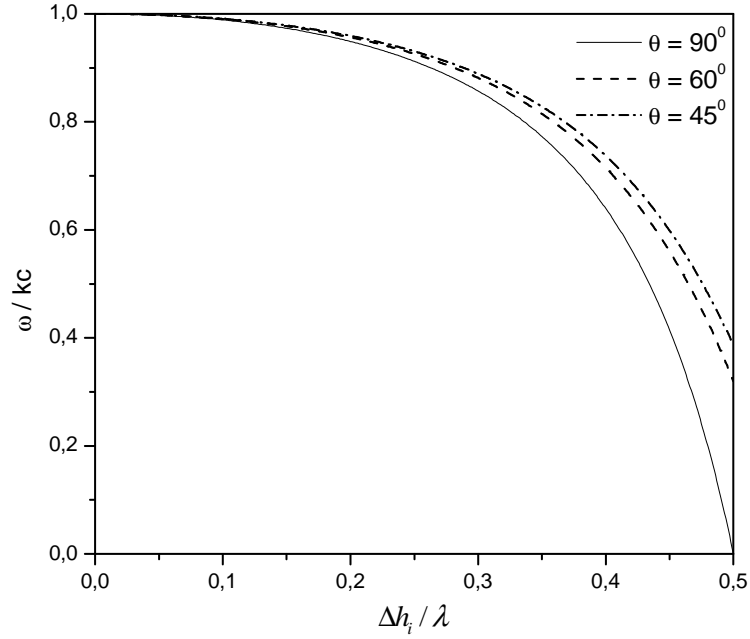


Fig. 2.4 - Velocidade de fase normalizada $\omega/(kc)$ versus o tamanho da célula normalizada $\Delta h_i / \lambda$ para uma malha com vários valores de θ , e com $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3$. A propagação da onda é ao longo de \mathbf{A}_1 , ou seja $\alpha = 0$.

A equação (2.49) é solucionada novamente para se verificar o comportamento da velocidade de fase normalizada em função da direção de propagação α , para diversos ângulos de inclinação da malha, ou seja, para diversos θ . Neste caso, as dimensões das células são feitas iguais a 0.1 do comprimento de onda, isto é $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3 = \lambda/10$ e o incremento de tempo é escolhido da mesma forma como feito anteriormente. Os resultados mostram que o erro de dispersão é bastante pequeno para a resolução desta malha. Observa-se também, que a velocidade de fase normalizada é sempre máxima na direção oblíqua à célula, ou seja, na diagonal da célula.

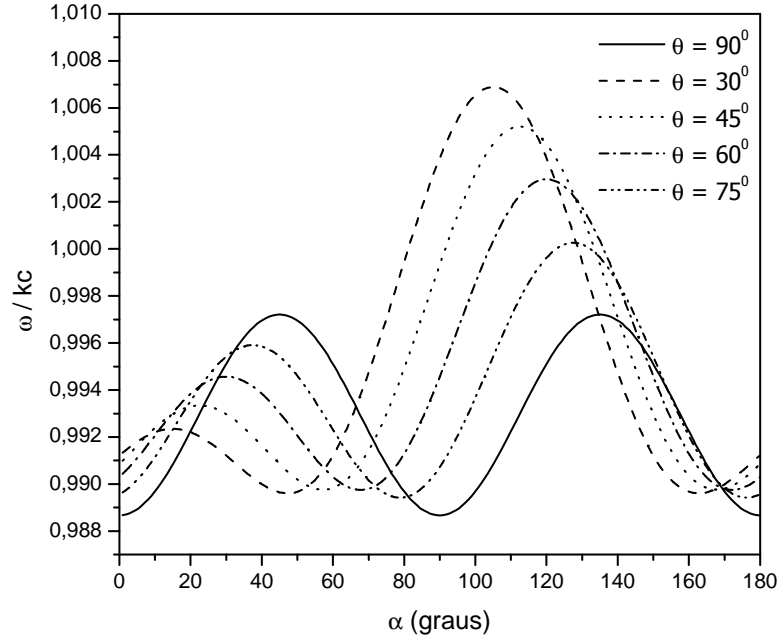


Fig. 2.5 – Velocidade de fase normalizada $\omega/(kc)$ versus o ângulo α para vários ângulos de inclinação θ para o *grid* com $\Delta h_1 / \lambda = 0.1$ e com $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3$.

2.4 – Condição de contorno

De uma forma geral, as condições de contorno estabelecem as relações entre as componentes dos vetores intensidade de campo elétrico, entre aquelas do vetor intensidade de campo magnético e o mesmo acontecendo para as componentes dos vetores densidade de fluxo elétrico e magnético, isto para a interface entre dois meios quaisquer. Para a interface entre um meio qualquer e um condutor elétrico perfeito (contorno PEC), as componentes tangenciais do campo elétrico são contínuas, no interior do condutor o campo é nulo, logo conclui-se que a componente tangencial deste campo no outro meio é também nula, ou seja, $E_{\text{tan}} = 0$. A implementação desta condição para o método FDTD convencional é feita de forma direta. A implementação desta condição de contorno para um sistema de coordenadas gerais não é tão

simples. Isso porque há dois conjuntos de campos para o contorno: Os campos contravariantes e covariantes. Para isso, considere a Fig.2.6. Nesta figura, as arestas da malha primária (linha continua) são escolhidas de forma a se alinharem com o contorno PEC (linha em negrito), e fica claro que as componentes do campo elétrico covariante devem ser feitas iguais a zero para a implementação apropriada das relações das componentes de campo neste contorno ($E_{\text{tan}} = 0$). Não há base para fazer a componente contravariante do campo elétrico igual a zero na superfície, uma vez que este não se encontra tangencial a esta, contudo para atualizar os campos elétricos contravariantes ao longo da superfície condutora, uma estratégia de atualização [6,11] é realizada através da imagem do campo magnético covariante tangencial, ou seja,

$$H_m^{acima} = H_m^{abaixo}, \quad (2.50)$$

desta forma, a integral de linha que aparece na atualização do campo elétrico contravariante $E_{\text{superfície}}^m$ terá apenas duas das quatro componentes do campo magnético covariante, ou seja, apenas aquelas componentes que passam pela superfície [6,11]. Além disso, para que haja consistência física na formulação do problema, os campos magnéticos contravariantes no interior do condutor são explicitamente feitos iguais a zero.

A condição PMC (condutor magnético perfeito) é implementada de forma dual.

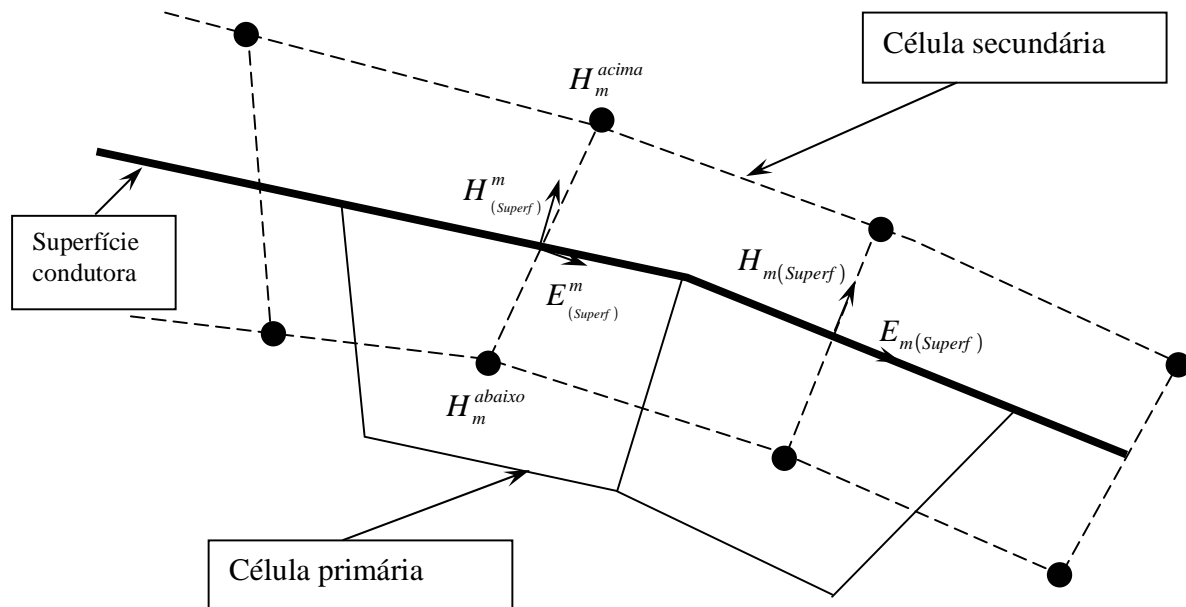


Fig.2.6 – Orientação dos vetores covariantes e contravariantes na interface entre um condutor e um meio qualquer.

2.5 – Implementação paralela do algoritmo LN-FDTD

A principal idéia da implementação paralela do algoritmo LN-FDTD é baseada na divisão do domínio de análise em subdomínios. Nessa técnica, conhecida como Decomposição ou Decomposição do domínio, o domínio de análise é dividido em subdomínios para que cada processador, executando basicamente o mesmo programa (código fonte), possa executar as diferentes tarefas de cada subdomínio. Isto é uma típica implementação do modelo SPMD (Single Program Multiple data) [12]. A distribuição dos dados é feita manualmente, ou seja, o programador define através de funções de mensagens envio/recebimento a comunicação entre os processadores para que haja continuidade na atualização das componentes de campo localizadas na interface dos domínios. A biblioteca escolhida para fazer a troca de mensagens foi a LAM-MPI, desenvolvida na universidade de Ohio [13].

Na Fig.2.7 mostra-se a atualização das componentes dos campos localizadas na interface entre duas regiões, na superfície u^3 . Assim, diferentes processadores trabalham simultaneamente executando uma parte do programa em cada máquina, mas sob diferentes dados. O processador calcula todas as componentes de campos no seu domínio, passando somente aquelas localizados nas interfaces. De forma comparativa, na Fig.2.8 mostra-se a atualização dos campos localizados no plano y-z para o algoritmo FDTD convencional.

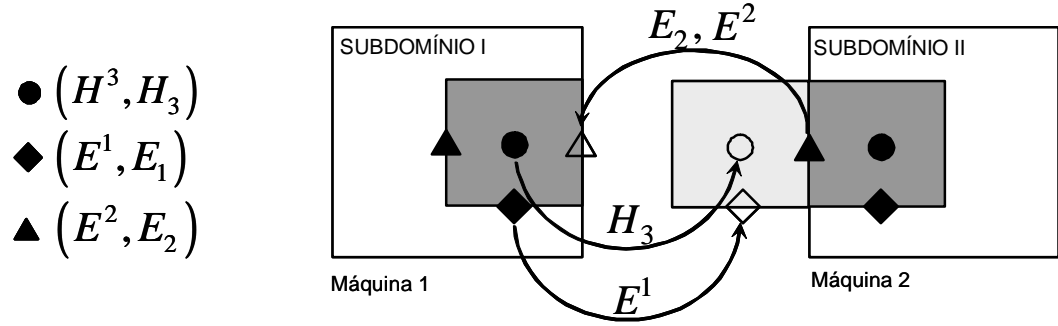


Fig.2.7 - Atualização das componentes do campo localizadas na interface entre duas regiões, e para a superfície u^3 .

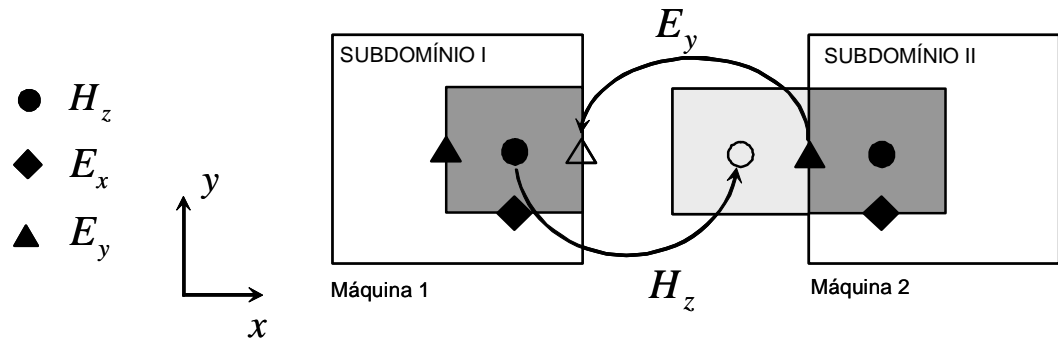


Fig.2.8 - Atualização das componentes do campo localizadas na interface do plano yz, para o método FDTD.

Referências Bibliográficas

- [1] K.S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-14, pp. 302-307, May 1966.
- [2] R. Holland, “The case against staircasing,” in *Proc. 6th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetic* (Monterey, CA), Mar.19-22, 1990, pp. 89-95.
- [3] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, New York, McGraw-Hill, 1941, pp. 38-47.
- [4] R. Holland, “Finite-Difference solution of Maxwell’s equations in generalized nonorthogonal coordinates,” *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. NS-30, no.6, Dec. 1983.
- [5] J. F. Lee, “Modeling Three-Dimensional Discontinuities in Waveguides Using Non-orthogonal FDTD Algorithm”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-40, no.2 Feb. 1992.
- [6] A. Taflove, *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*, NY: Artech House, may 1998.
- [7] A. Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*, NY: Artech House, may 1995.
- [8] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [9] M. Fusco, “FDTD algorithm in curvilinear coordinates,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-38, pp 76-88, Jan. 1990.
- [10] E. A. Navarro, C. Wu, P. Y. Chung and J. Litva, “Some Considerations About the Finite Difference Time Domain Method in General Curvilinear Coordinates,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 4, No.12, pp 396-398, December 1994.
- [11] Roden, J. A., Broadband Electromagnetic Analysis of Complex Structures with the Finite-Difference Time-domain Technique in General Curvilinear Coordinates, *Ph.D. Dissertation, University of Kentucky*, 1997
- [12] Andrews, G. *Foundations of Multithreaded, Parallel and Distributed Programming*, Addison wesley. 2000.

[13] <http://www.mpi.nd.edu/lam>

Capítulo 3

Meios uniaxiais perfeitamente casados (técnica UPML) em Coordenadas Curvilíneas Gerais.

3.1 – Introdução

O método FDTD quando implementado num sistema de coordenadas gerais torna-se uma poderosa técnica numérica para a análise de propagação de onda. A malha não ortogonal permite ao projetista a modelagem mais precisa de contornos físicos que não coincidem com as direções dos eixos do sistema retangular.

Para a aplicação da técnica LN-FDTD na solução de problemas de irradiação é necessário truncar o domínio numérico, ou seja, limitar a região de análise por condição de contorno absorvente. No presente trabalho, será introduzida a UPML [1] para o sistema de coordenadas gerais. Para isso, utilizar-se-á o método LN-FDTD como descrito originalmente por Lee [2]. Nesta formulação, cada célula do *grid* é representada por dois conjuntos de vetores definidos localmente, conhecidos como vetores unitários de base e vetores unitários recíprocos. Esses vetores são definidos de maneira que os vetores unitários definam as arestas das células e os vetores recíprocos sejam normais às faces das células. Os campos são definidos ao longo desses dois vetores e são referidos como campos contravariantes e covariantes, respectivamente [3], Apêndice A.

Navarro et al. [4] adaptaram a PML de Berenger [5] para a formulação covariante-contravariante e mostraram que o método, teoricamente, tem o desempenho equivalente àquele do caso ortogonal. Entretanto, isso só é garantido para a geometria cujo tensor métrico g_{ij} seja independente de uma das coordenadas gerais.

Neste trabalho, a PML é implementada de forma que a mesma seja caracterizada por um tensor uniaxial (UPML). Essa formulação foi implementada por Gedney et al. [1]. A maior vantagem dessa formulação é que as equações de Maxwell conservam sua forma natural e assim

o método é facilmente estendido para meios não homogêneas, dispersivas e com perdas [6], bem como para *grids* não ortogonais como será demonstrado aqui.

3.2 – Formulação

Para um meio absorvedor uniaxial o tensor uniaxial representando os parâmetros constitutivos do meio, em uma região tridimensional, é definido por [7,8]:

$$\bar{\bar{s}} = \begin{bmatrix} \frac{s_2 s_3}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_1 s_3}{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_1 s_2}{s_3} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde $s_i = 1 + \frac{\sigma_i}{j\omega\epsilon_0}$ ($i=1,2,3$) são os parâmetro que caracterizam a atenuação na UPML ao longo dos eixos de coordenadas u_i ($i=1,2,3$). Para garantir a continuidade das componentes normal e tangencial das intensidades dos campos através do meio PML, a seguinte normalização é introduzida,

$$F' = F \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}^{-1} = F\tilde{A}^{-1}, \text{ ou } F = F'\tilde{A}, \quad (3.2)$$

onde F representa a intensidade dos campos elétrico ou magnético (contravariante ou covariante).

Para este caso, as equações de Maxwell são então expressas, para o sistema de coordenadas gerais, como

$$j\omega\epsilon_0\epsilon_r\bar{\bar{s}}E^i\tilde{A} = \frac{1}{V}\nabla\times H'_i\tilde{A}, \quad (3.3)$$

$$-j\omega\mu_0\mu_r\bar{s}H^i\tilde{A} = \frac{1}{V}\nabla\times E_i'\tilde{A}, \quad (3.4)$$

onde os campos contravariantes são representados por sobrescritos e os campos covariantes por subscritos e os dois estão relacionados pela equação (A.18)

Demonstra-se à validade da UPML em coordenadas não ortogonais através da relação de dispersão para ondas planas propagando-se no meio UPML. Isto porque, qualquer campo eletromagnético pode ser decomposto por uma combinação linear de ondas planas monocromáticas. Para tal, assume-se por simplicidade que o vetor de base \mathbf{A}_3 seja ortogonal ao plano definido pelos outros dois vetores de base \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 . Desta forma, o tensor métrico g_{ij} passa a ter a seguinte forma

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde $g_{ij} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j$.

Como o meio é uniaxial, a solução da onda plana desacopla-se naturalmente nos modos TE_3 e TM_3 . A partir disso, a relação de dispersão pode ser solucionada independentemente para uma dessas polarizações. Assume-se então a solução para o modo TM_3 . Neste caso, a solução da equação de onda é da forma

$$f_i = f_0 e^{\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2}, \quad (3.6)$$

onde γ_i ($i=1,2$) são as componentes da constante de propagação complexa ao longo das coordenadas curvilíneas u_i . Vale ressaltar aqui, que (3.6) é uma solução válida para (3.3) e (3.4) somente se o tensor métrico em (3.5) for independente das coordenadas espaciais u_1 , u_2 e u_3 [9]. Então, da eq.(3.4), para o modo TM_3 (H^1, H^2 e E^3), e considerando-se as eqs. (3.1) e (3.2), pode-se escrever:

$$-j\omega\mu_0\mu_r\frac{s_2s_3}{s_1}H'^1s_1 = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial E'_3s_3}{\partial u^2} - \frac{\partial E'_2s_2}{\partial u^3}\right).$$

Considerando-se a eq.(A.18), através da qual obtêm-se as componentes covariante a partir das componentes contravariante, e a eq. (3.5), a equação acima passa a ser expressa por:

$$-j\omega\mu_0\mu_r s_2 H'^1 = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial g_{33}E'^3}{\partial u^2}\right) = \frac{\gamma_2^{PML}g_{33}E'^3}{V}. \quad (3.7)$$

Do mesmo modo como feito anteriormente, obtém-se a equação para H'^2

$$j\omega\mu_0\mu_r s_1 H'^2 = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial g_{33}E'^3}{\partial u^1}\right) = \frac{\gamma_1^{PML}g_{33}E'^3}{V}. \quad (3.8)$$

Para a obtenção da componente E'^3 , segue-se o mesmo raciocínio, só que partindo da eq. (3.3), obtendo-se

$$\begin{aligned} j\omega\epsilon_0\epsilon_r s_1 s_2 E'^3 s_3 &= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial(g_{21}H'^1 + g_{22}H'^2)}{\partial u^1}s_2 - \frac{\partial(g_{11}H'^1 + g_{12}H'^2)}{\partial u^2}s_1\right) \\ &= \frac{1}{V}\left\{\gamma_1^{PML}(g_{21}H'^1 + g_{22}H'^2)s_2 - \gamma_2^{PML}(g_{11}H'^1 + g_{12}H'^2)s_1\right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, assume-se uma onda plana incidindo sobre uma estrutura de UPML numa direção normal a u^1 . Desta forma, só ocorrerá atenuação na direção u^1 , então, para este caso $s_2 = s_3 = 1$. A partir da condição de contorno que estabelece a continuidade das componentes contravariantes tangenciais à fronteira entre dois meios, é possível mostrar que há casamento de fase nesta interface para todo u_2 e u_3 , ou seja $\gamma_2^{PML} = \gamma_2^{inc}$. A relação de dispersão para a polarização TM_3 no meio PML é então obtida. Para isto substitui-se (3.7) e (3.8) em (3.9)

$$j\omega\epsilon_0\epsilon_r s_1 E'^3 s_3 = \frac{1}{V} \left\{ \begin{aligned} &\gamma_1^{PML} \left[g_{21} \left(\frac{1}{V} g_{33} \gamma_2^{PML} E'^3 \frac{(-1)}{j\omega\mu_0\mu_r} \right) + g_{22} \left(\frac{1}{V} g_{33} \gamma_1^{PML} E'^3 \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \right) \right] s_2 - \\ &\gamma_2^{PML} \left[g_{11} \left(\frac{1}{V} g_{33} \gamma_2^{PML} E'^3 \frac{(-1)}{j\omega\mu_0\mu_r} \right) + g_{12} \left(\frac{1}{V} g_{33} \gamma_1^{PML} E'^3 \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \right) \right] s_1 \end{aligned} \right\},$$

como $\gamma_2^{PML} = \gamma_2^{inc}$, têm-se

$$\frac{k_0^2 \epsilon_r \mu_r s_1 V^2}{g_{33}} = -\gamma_1^{PML} \gamma_2^{inc} g_{21} + \frac{g_{22} (\gamma_1^{PML})^2}{s_1} + (\gamma_2^{inc})^2 s_1 g_{11} - g_{21} \gamma_2^{inc} \gamma_1^{PML}, \quad (3.10)$$

onde $k_0^2 = \mu_0 \epsilon_0$.

Para a região de campo incidente, a relação de dispersão pode ser obtida da eq. (3.10) fazendo-se

$$\frac{k_0^2 \epsilon_r V^2}{g_{33}} = -2\gamma_1^{inc} \gamma_2^{inc} g_{21} + g_{22} (\gamma_1^{inc})^2 + (\gamma_2^{inc})^2 g_{11}. \quad (3.11)$$

A partir das equações (3.10) e (3.11) tira-se que $\gamma_1^{PML} = \gamma_1^{inc} s_1$. Da equação (3.8), obtém-se a impedância de onda na direção u^1

$$\begin{aligned} Z^{PML} &= \frac{E'^3}{H'^2} = \frac{j\omega\mu s_1 V}{\gamma_1^{PML} g_{33}}, \\ Z^{inc} &= \frac{E^3}{H^2} = \frac{j\omega\mu V}{\gamma_1^{inc} g_{33}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para haver transmissão através do contorno UPML é necessário que haja casamento de impedância, ou seja, $Z^{PML} = Z^{inc}$. Isso é verdadeiro se $\gamma_1^{PML} = \gamma_1^{inc} s_1$ como pode ser observado de (3.12).

A solução do modo TE_3 leva a uma forma dual de (3.12). Conclui-se, portanto que uma onda plana incidindo sobre uma estrutura de PML será totalmente transmitida, independente do ângulo de incidência ou frequência, se a solução da equação de onda for da forma

$$f_i = f_0 e^{\gamma_1^{PML} u_1 + \gamma_2^{PML} u_2}.$$

Mas, como $\gamma_1^{PML} = \gamma_1^{inc} s_1$ e $\gamma_2^{PML} = \gamma_2^{inc}$, têm-se que

$$f = f_0 e^{\gamma_1^{PML} s_1 u_1 + \gamma_2^{inc} u_2} = f_0 e^{\gamma_1^{PML} \left(1 + \frac{\sigma_1}{j\omega\epsilon_0}\right) u_1 + \gamma_2^{inc} u_2}.$$

Esta equação descreve uma onda propagando-se nas direções u_1 e u_2 e é atenuada exponencialmente na direção u_1 .

3.3 – Implementação da formulação para a região de PML

Nesta seção, a solução numérica das equações de Maxwell no domínio do tempo, usando-se o método LN-FDTD em um sistema de coordenadas não-ortogonais, é implementada. Neste sistema de coordenadas e considerando-se um *grid* estruturado irregular, as equações de Maxwell são naturalmente aplicadas na forma integral, pelo fato dos vetores unitários serem definidos de forma que as suas magnitudes sejam iguais aos respectivos comprimentos das arestas das células no espaço discreto. Assim, a integral de linha que aparece nas equações de Maxwell, é convenientemente aproximada por uma soma discreta dos campos ao longo de cada aresta do *grid*.

As formas integrais das equações de Maxwell para um meio uniaxial são dadas abaixo.

$$-j\omega\mu \oint_S \bar{s} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}, \quad (\text{Lei de Faraday}), \quad (3.13)$$

$$j\omega\mu \oint_S \bar{\mathbf{s}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}, \quad (\text{Lei de Ampère}). \quad (3.14)$$

Primeiramente, demonstra-se como é obtida a equação de atualização para a componente contravariante H^1 . As outras componentes de campo magnético (H^2 e H^3) são obtidas de forma similar.

A equação (3.13) é reescrita em função da componente contravariante H^1 que se encontra na direção do vetor de base (covariante) \mathbf{A}_1

$$-j\omega\mu \oint_S H^1 \mathbf{A}_1 \frac{s_2 s_3}{s_1} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c E_{i_{\neq 1}} \mathbf{A}^{i_{\neq 1}} \cdot d\mathbf{L}, \quad (3.15)$$

Como visto anteriormente, as componentes de campo são normalizadas de forma a garantir a continuidade das componentes normais e tangenciais das intensidades dos campos elétricos e magnéticos, logo $F = F' \tilde{\mathbf{A}}^{-1}$. Assim, (3.15) torna-se

$$\begin{aligned} -j\omega\mu \oint_S H'^1 s_1 \mathbf{A}_1 \frac{s_2 s_3}{s_1} \cdot d\mathbf{S} = & E'_2(i, j, k) s_2 \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}_2 - E'_2(i, j, k+1) s_2 \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}_2 + \\ & E'_3(i, j+1, k) s_3 \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A}_3 - E'_3(i, j, k) s_3 \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A}_3 \end{aligned}, \quad (3.16)$$

Da reciprocidade existente entre os vetores de base e os vetores recíprocos, tem-se que $\mathbf{A}^i \cdot \mathbf{A}_i = 1$.

Com isso, a equação (3.16) reduz-se a:

$$\begin{aligned} -j\omega\mu \oint_S H'^1 \mathbf{A}_1 s_2 s_3 \cdot d\mathbf{S} = & s_2 \left[E'_2(i, j, k) - E'_2(i, j, k+1) \right] + \\ & s_3 \left[E'_3(i, j+1, k) - E'_3(i, j, k) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Considerando-se que a componente de campo magnético contravariante H^1 seja constante sobre a face da célula, a qual esta componente é perpendicular (Fig. 2.1), a equação acima pode ser reescrita como

$$s_2 s_3 \int_S H'^1 \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S} = s_2 s_3 H'^1 \mathbf{A}_1 \cdot \int_S d\mathbf{S} = s_2 s_3 H'^1 \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{S} ,$$

onde S é a área da face da referida célula, a qual é dada por (eq. A.27):

$$S = |\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3| \frac{\mathbf{A}^1}{|\mathbf{A}^1|} = \sqrt{(\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3) \cdot (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)} \frac{\mathbf{A}^1}{|\mathbf{A}^1|} .$$

Como $\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}^1 V$, escreve-se S como função do volume da célula V

$$S = \sqrt{(\mathbf{A}^1 V) \cdot (\mathbf{A}^1 V)} \frac{\mathbf{A}^1}{|\mathbf{A}^1|} = V \sqrt{\mathbf{A}^1 \cdot \mathbf{A}^1} \frac{\mathbf{A}^1}{|\mathbf{A}^1|} ,$$

Dessa forma a equação (3.17) passa a ser dada por:

$$\begin{aligned} -j\omega\mu s_2 s_3 H'^1 \mathbf{A}_1 \cdot V \sqrt{\mathbf{A}^1 \cdot \mathbf{A}^1} \frac{\mathbf{A}^1}{|\mathbf{A}^1|} &= s_2 \left[E'_2(i, j, k) - E'_2(i, j, k+1) \right] + \\ & s_3 \left[E'_3(i, j+1, k) - E'_3(i, j, k) \right] . \end{aligned}$$

Usando a propriedade da reciprocidade como feito anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} j\omega\mu s_2 s_3 H'^1 V &= s_2 \left[E'_2(i, j, k+1) - E'_2(i, j, k) \right] + \\ & s_3 \left[E'_3(i, j, k) - E'_3(i, j+1, k) \right] . \end{aligned} \quad (3.18)$$

A equação acima é uma expressão no domínio da frequência que agora deve ser passada para o domínio do tempo. Há muitas formas de encontrar a expressão de atualização no domínio do tempo para a equação (3.18). Em [4] Navarro utiliza o método de atualização “*Split*” ou “*Split Field*”. Esse método é o mesmo método utilizado por Berenger [5].

Neste trabalho, utilizar-se-á um método mais eficiente, do ponto de vista computacional que o método *split*, para a atualização da equação (3.18). Para tal, reescreve-se inicialmente (3.18) como

$$j\omega\mu s_3 H'^1 V = \left[E'_2(i, j, k+1) - E'_2(i, j, k) \right] + \left[E'_3(i, j, k) - E'_3(i, j+1, k) \right] \frac{s_3}{s_2} . \quad (3.19)$$

Em seguida, introduz-se uma segunda expressão de atualização para o segundo termo do lado direito de (3.19)

$$\tilde{E}_3 = \frac{s_3}{s_2} \left[E'_3(i, j, k) - E'_3(i, j+1, k) \right] = \frac{s_3}{s_2} E_3^{diff} , \quad (3.20)$$

Após algumas manipulações algébricas, a equação (3.20) é passada para o domínio do tempo e resolvida por diferenças centradas, como segue [1],

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3(i, j, k) &= \frac{s_3}{s_2} E_3^{diff}(i, j, k) , \\ s_2 \tilde{E}_3(i, j, k) &= s_3 E_3^{diff}(i, j, k) , \\ \left(1 + \frac{\sigma_2}{j\omega\epsilon_0} \right) \tilde{E}_3(i, j, k) &= \left(1 + \frac{\sigma_3}{j\omega\epsilon_0} \right) E_3^{diff}(i, j, k) , \\ j\omega\epsilon_0 \tilde{E}_3(i, j, k) + \sigma_2 \tilde{E}_3(i, j, k) &= j\omega\epsilon_0 E_3^{diff}(i, j, k) + \sigma_3 E_3^{diff}(i, j, k) \\ \epsilon_0 \left[\frac{\tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2} - \tilde{E}_3(i, j, k)^{n-1/2}}{\Delta t} \right] + \sigma_2 \left[\tilde{E}_3(i, j, k)^n \right] &= \\ \epsilon_0 \left[\frac{\tilde{E}_3^{diff}(i, j, k)^{n+1/2} - \tilde{E}_3^{diff}(i, j, k)^{n-1/2}}{\Delta t} \right] + \sigma_3 \left[E_3^{diff}(i, j, k)^n \right] . \end{aligned}$$

Para as componentes do campo elétrico no instante (n), faz-se uma aproximação “semi-implícita” [10]

$$\tilde{E}_3(i, j, k)^n = \frac{\tilde{E}_3(i, j, k)^{n-1/2} + \tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2}}{2}$$

e

$$\tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^n = \frac{\tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^{n-1/2} + \tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^{n+1/2}}{2}.$$

Dessa forma, é possível obter a expressão de atualização para $\tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2}$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left[\frac{\tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2} - \tilde{E}_3(i, j, k)^{n-1/2}}{\Delta t} \right] + \sigma_2 \left[\frac{\tilde{E}_3(i, j, k)^{n-1/2} + \tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2}}{2} \right] = \\ \varepsilon_0 \left[\frac{\tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^{n+1/2} - \tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^{n-1/2}}{\Delta t} \right] + \sigma_3 \left[\frac{\tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^{n-1/2} + \tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^{n+1/2}}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2} = \tilde{E}_3(i, j, k)^{n-1/2} \left[\frac{\frac{\varepsilon_0 - \sigma_2}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_0 + \sigma_2}{\Delta t}}{\frac{\varepsilon_0 + \sigma_2}{\Delta t}} \right] + \\ \frac{1}{\left[\frac{\varepsilon_0 + \sigma_2}{\Delta t} \right]} \left\{ \left[\frac{\varepsilon_0 + \sigma_3}{\Delta t} \right] \tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^{n+1/2} - \left[\frac{\varepsilon_0 - \sigma_3}{\Delta t} \right] \tilde{E}_3^{dif}(i, j, k)^{n-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A partir da equação (3.19) e da expressão de atualização da componente $\tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2}$, obtém-se a equação de atualização para $H^n(i, j, k)^{n+1/2}$.

$$\begin{aligned} j\omega\mu s_3 H^n V &= \left[E_2'(i, j, k+1) - E_2'(i, j, k) + \tilde{E}_3(i, j, k) \right] \\ j\omega\mu \left(1 + \frac{\sigma_3}{j\omega\varepsilon_0} \right) H^n V &= \left[E_2'(i, j, k+1) - E_2'(i, j, k) + \tilde{E}_3(i, j, k) \right] \\ j\omega\mu H^n V + \frac{\mu H^n \sigma_3 V}{\varepsilon_0} &= \left[E_2'(i, j, k+1) - E_2'(i, j, k) + \tilde{E}_3(i, j, k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H'^1(i, j, k)^{n+1/2} &= H'^1(i, j, k)^{n-1/2} \frac{\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \right]} + \\
&\quad \frac{1}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \right] \mu V} \left[E'_2(i, j, k+1)^n - E'_2(i, j, k)^n + \tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2} \right]. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

As outras expressões de atualização para as componentes contravariantes (H^2 e H^3) são encontradas de maneira semelhante, por:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_1(i, j, k)^{n+1/2} &= \tilde{E}_1(i, j, k)^{n-1/2} \frac{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} - \frac{\sigma_3}{2} \right]}{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2} \right]} + \\
&\quad \frac{1}{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2} \right]} \left\{ \left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2} \right] \tilde{E}_1^{diff}(i, j, k)^{n+1/2} - \left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} - \frac{\sigma_1}{2} \right] \tilde{E}_1^{diff}(i, j, k)^{n-1/2} \right\}. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
E_1^{diff}(i, j, k)^{n+1/2} &= \left[E'_1(i, j, k) - E'_1(i, j, k+1) \right] \\
H'^2(i, j, k)^{n+1/2} &= H'^2(i, j, k)^{n-1/2} \frac{\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \right]} + \\
&\quad \frac{1}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \right] \mu V} \left[E'_3(i+1, j, k)^n - E'_3(i, j, k)^n + \tilde{E}_1(i, j, k)^{n+1/2} \right]. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2(i, j, k)^{n+1/2} = \tilde{E}_2(i, j, k)^{n-1/2} \frac{\left[\frac{\varepsilon_0 - \sigma_1}{\Delta t} - \frac{\sigma_1}{2} \right]}{\left[\frac{\varepsilon_0 + \sigma_1}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2} \right]} + \\ \frac{1}{\left[\frac{\varepsilon_0 + \sigma_1}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2} \right]} \left\{ \left[\frac{\varepsilon_0 + \sigma_2}{\Delta t} + \frac{\sigma_2}{2} \right] \tilde{E}_2^{diff}(i, j, k)^{n+1/2} - \left[\frac{\varepsilon_0 - \sigma_2}{\Delta t} - \frac{\sigma_2}{2} \right] \tilde{E}_2^{diff}(i, j, k)^{n-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} E_2^{diff}(i, j, k)^{n+1/2} = \left[E'_2(i, j, k) - E'_2(i+1, j, k) \right] \\ H'^3(i, j, k)^{n+1/2} = H'^3(i, j, k)^{n-1/2} \frac{\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \right]} + \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \right]} \mu V \left[E'_1(i, j+1, k)^n - E'_1(i, j, k)^n + \tilde{E}_2(i, j, k)^{n+1/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Agora, obtém-se as componentes de campo elétrico contravariante (E^1, E^2 e E^3). Para isso, reescreve-se a equação (3.14) em função da componente contravariante E^1 , que se encontra na direção do vetor de base \mathbf{A}_1 . Isto pode ser feito partindo-se da seguinte equação

$$-j\omega\mu \int_S E^1 \mathbf{A}_1 \frac{s_2 s_3}{s_1} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{c_1} H_{i \neq 1} \mathbf{A}^{i \neq 1} \cdot d\mathbf{L}. \quad (3.27)$$

Normalizando-se as componentes dos campos elétrico e magnético da equação acima e considerando que a componentes E^1 seja constante na face da célula, a qual E^1 é perpendicular (Figura 2.1), a equação (3.27) pode ser escrita por:

$$j\omega\epsilon s_2 s_3 E'^1 V = s_2 \left[H'_2(i, j, k-1) - H'_2(i, j, k) \right] + s_3 \left[H'_3(i, j, k) - H'_3(i, j-1, k) \right], \quad (3.28)$$

Dividindo a equação (3.28) por s_2 , obtêm-se:

$$j\omega\epsilon s_3 E'^1 V = \left[H'_2(i, j, k-1) - H'_2(i, j, k) \right] + \frac{s_3}{s_2} \left[H'_3(i, j, k) - H'_3(i, j-1, k) \right]. \quad (3.29)$$

Fazendo-se

$$\tilde{H}_3(i, j, k) = \frac{s_3}{s_2} \left[H'_3(i, j, k) - H'_3(i, j-1, k) \right] = \frac{s_3}{s_2} H_3^{diff}(i, j, k) \quad (3.30)$$

obtém-se a expressão de atualização para $\tilde{H}_3(i, j, k)^{n+1}$, do mesmo modo como feito para a componente covariante $\tilde{E}_3(i, j, k)^{n+1/2}$, ou seja

$$\begin{aligned} \tilde{H}_3(i, j, k)^{n+1} = \tilde{H}_3(i, j, k)^n & \frac{\left[\frac{\epsilon_0}{\Delta t} - \frac{\sigma_2}{2} \right]}{\left[\frac{\epsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_2}{2} \right]} + \\ & \frac{1}{\left[\frac{\epsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_2}{2} \right]} \left\{ \left[\frac{\epsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2} \right] \tilde{H}_3^{diff}(i, j, k)^{n+1} - \left[\frac{\epsilon_0}{\Delta t} - \frac{\sigma_3}{2} \right] \tilde{H}_3^{diff}(i, j, k)^n \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A partir da equação (3.29) e da expressão de atualização da componente $\tilde{H}_3(i, j, k)^{n+1}$ (eq. 3.31), obtém-se a equação de atualização para $E'^1(i, j, k)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
E'^1(i, j, k)^{n+1} = E'^1(i, j, k)^n & \frac{\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \right]} + \\
& \frac{1}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \right] \varepsilon V} \left[H'_2(i, j, k-1)^{n+1/2} - H'_2(i, j, k)^{n+1/2} + \tilde{H}_3(i, j, k)^{n+1} \right] . \quad (3.32)
\end{aligned}$$

As outras expressões de atualização para as componentes contravariantes (E^2 e E^3) são dadas por:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_1(i, j, k)^{n+1} = \tilde{H}_1(i, j, k)^n & \frac{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} - \frac{\sigma_3}{2} \right]}{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2} \right]} + \\
& \frac{1}{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_3}{2} \right]} \left\{ \left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2} \right] \tilde{H}_1^{diff}(i, j, k)^{n+1} - \left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} - \frac{\sigma_1}{2} \right] \tilde{H}_1^{diff}(i, j, k)^n \right\} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
H_1^{diff}(i, j, k)^{n+1/2} = & \left[H'_1(i, j, k) - H'_1(i, j, k-1) \right] \\
E'^2(i, j, k)^{n+1} = E'^2(i, j, k)^n & \frac{\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \right]} + \\
& \frac{1}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \right] \varepsilon V} \left[H'_3(i-1, j, k)^{n+1/2} - H'_3(i, j, k)^{n+1/2} + \tilde{H}_1(i, j, k)^{n+1} \right] . \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_2(i, j, k)^{n+1} = \tilde{H}_2(i, j, k)^n \frac{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} - \frac{\sigma_1}{2} \right]}{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2} \right]} + \\
\frac{1}{\left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2} \right]} \left\{ \left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\sigma_2}{2} \right] \tilde{H}_2^{diff}(i, j, k)^{n+1} - \left[\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} - \frac{\sigma_2}{2} \right] \tilde{H}_2^{diff}(i, j, k)^n \right\}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde

$$H_2^{diff}(i, j, k)^{n+1/2} = \left[H_2'(i, j, k) - H_2'(i-1, j, k) \right]$$

$$\begin{aligned}
E'^3(i, j, k)^{n+1} = E'^3(i, j, k)^n \frac{\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \right]} + \\
\frac{1}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \right] \varepsilon V} \left[H_1'(i, j-1, k)^{n+1/2} - H_1'(i, j, k)^{n+1/2} + \tilde{H}_2(i, j, k)^{n+1} \right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Referências Bibliográficas

- [1] S.D. Gedney, "An Anisotropic Perfectly Matched Layer- Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-44, No. 12, pp. 1630-1639, Dec. 1996.
- [2] J. F. Lee, "Modeling Three-dimensional Discontinuities in Waveguides Using Non-orthogonal FDTD Algorithm", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol.40, no.2 Feb. 1992.
- [3] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, New York, McGraw-Hill, 1941, pp. 38-47.
- [4] E. A. Navarro, C. Wu, P. Y. Chung and J. Litva, "Application of PML superabsorbing boundary condition to non-orthogonal FDTD method", *Electronic Letters*, vol.30,no.20,p.1654-1656.
- [5] Jean-Pierre Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *J. Computational Physics*, in press.
- [6] S. D. Gedney, "An Anisotropic PML Absorbing Media for the FDTD Simulation of Fields in Lossy Dispersive Media," *Electromagn.*, Vol.16, July/August 1996, pp. 399-425.
- [7] J. A. Roden and S. D. Gedney, "Efficient Implementation of The Uniaxial-Based PML Media in Three-Dimensional Nonorthogonal Coordinates With the Use of the FDTD Technique", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol.14, No.2, February 5 1997.
- [8] J. A. Roden, *Broadband Electromagnetic Analysis of Complex Structures with the Finite Difference Time – Domain Technique in General Curvilinear Coordinates*, *Ph.D. Dissertation, University of Kentucky*, 1997.
- [9] R. Holland, "Finite-Difference solution of Maxwell's equations in generalized nonorthogonal coordinates," *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, Vol. NS-30, no.6 Dec. 1983.
- [10] A. Taflov, *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*, NY: Artech House, may 1995.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através da aplicação dos códigos desenvolvidos neste trabalho. Inicialmente, é feita a análise de antenas cornetas setorial plano- E . Depois, analisaram-se antenas de microfita e por último, verificou-se o espalhamento eletromagnético por cilindro dielétrico. Os parâmetros dependentes da frequência, como: Impedância de entrada, perdas de retorno, VSWR, etc., foram obtidos pela transformada de Fourier da voltagem obtida nos terminais da antena analisada, de acordo com o Apêndice D. Vale-se ressaltar que em todos os casos analisados, foram realizados testes para verificação da influência da truncagem do domínio computacional de forma que, para o tamanho do domínio usado, não se observou influência deste sobre os resultados.

4.1 - Análise de Antenas Cornetas Setoriais plano- E

Com o objetivo de mostrar à precisão e a eficiência do método LN-FDTD em comparação com o método FDTD convencional, tomou-se como base de análise a antena corneta setorial plano- E . Como se pode observar na Fig. 4.1a, a sua análise numérica pode ser feita a partir do modelo bidimensional apresentado na Fig.4.1b.

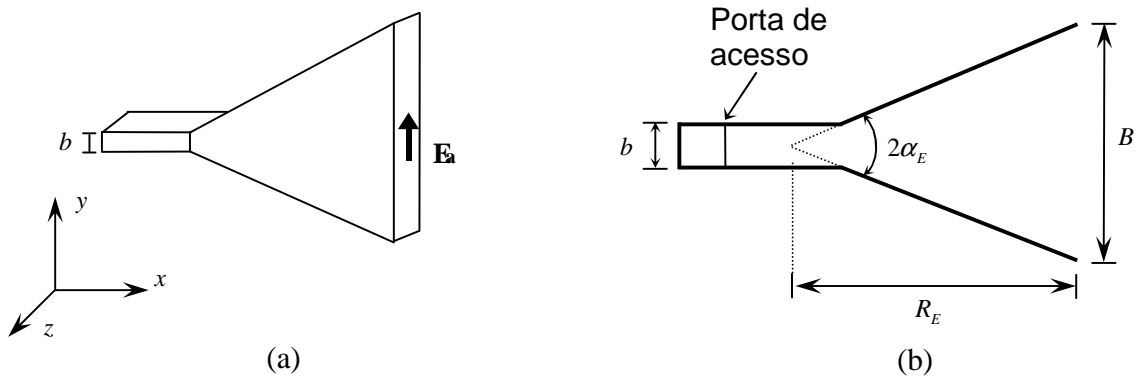


Fig. 4.1 – (a) antena corneta setorial plano- E ; (b) modelo bidimensional para análise da corneta.

4.1.1 – Análise de uma antena corneta setorial plano-E com abertura de 26,57°

Na análise da antena corneta com abertura de 26,57° pelo método LN-FDTD, um gerador de malhas foi utilizado para discretizar o domínio de análise e modelar precisamente o contorno físico da corneta. Na Fig.4.2 mostra-se a malha gerada pelo programa GID.6.1.2 para adaptar a geometria da antena, onde o tamanho médio das células é de aproximadamente $\lambda/12$. Nesta figura, tanto a ordenada quanto a abscissa estão dadas em metros.

Em se tratando da análise da antena pelo método FDTD convencional, usou-se uma malha uniforme, e desta forma aproximou-se o contorno da antena por *staircase*.

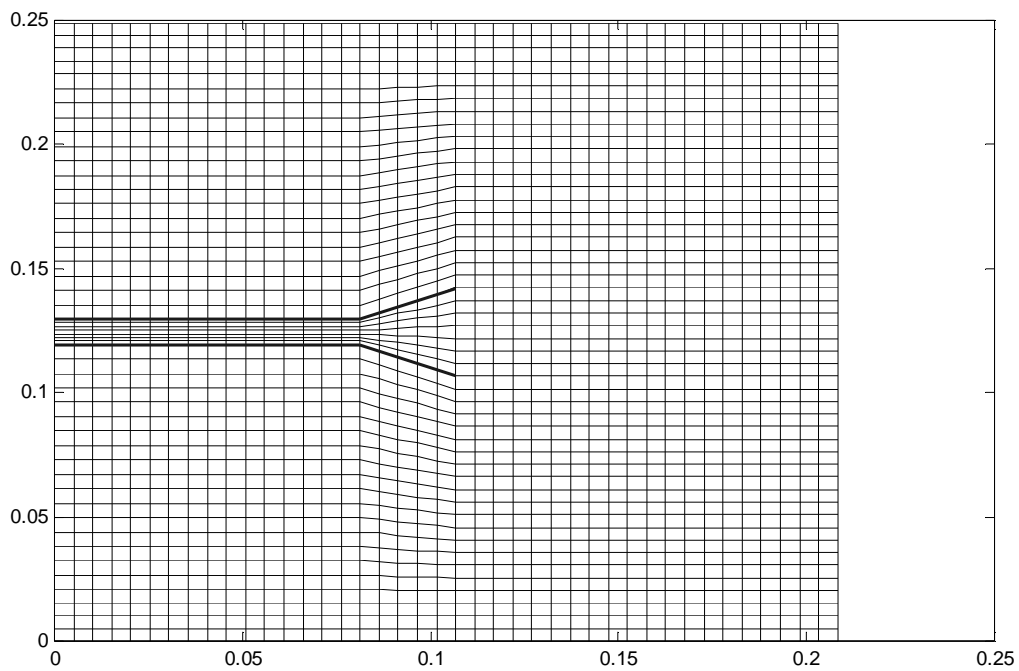


Fig.4.2 – Malha cartesiana oblíqua para o problema da antena corneta setorial plano-E. A malha atual é duas vezes mais densa em relação a esta. Os parâmetros que descrevem essa antena são: $B=3.5$ cm; $R_E=3.5$ cm; $b=1$ cm e $\alpha_E=26,57^\circ$ (Figura 4.1).

Em ambos os métodos, usou-se como função de excitação um pulso gaussiano descrito por:

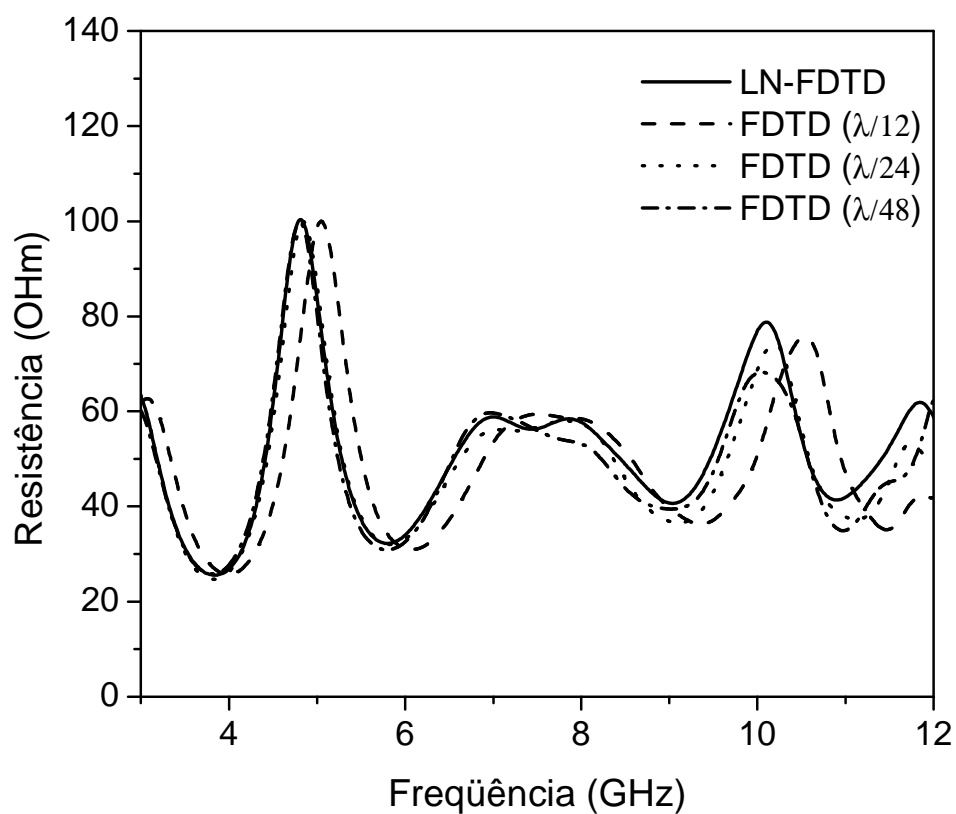
$$f(t) = e^{\left[-(t-3\tau_0)^2 / (\tau_0)^2 \right]} \quad (4.1)$$

com $\tau_0 = 63.7$ ps. O incremento de tempo utilizado deve satisfazer o critério de estabilidade para cada um dos métodos tratados aqui, ou seja, usou-se a condição de Courant [1] para se encontrar o incremento de tempo para o método FDTD convencional e, o incremento de tempo para o método LN-FDTD foi obtido pela eq.(2.46). O domínio computacional foi truncado por condição de contorno absorvente. Usou-se a UPML (ortogonal) e a UPML em coordenadas gerais, ambas com 10 camadas, para limitarem as malhas utilizadas pelos métodos FDTD e LN-FDTD, respectivamente.

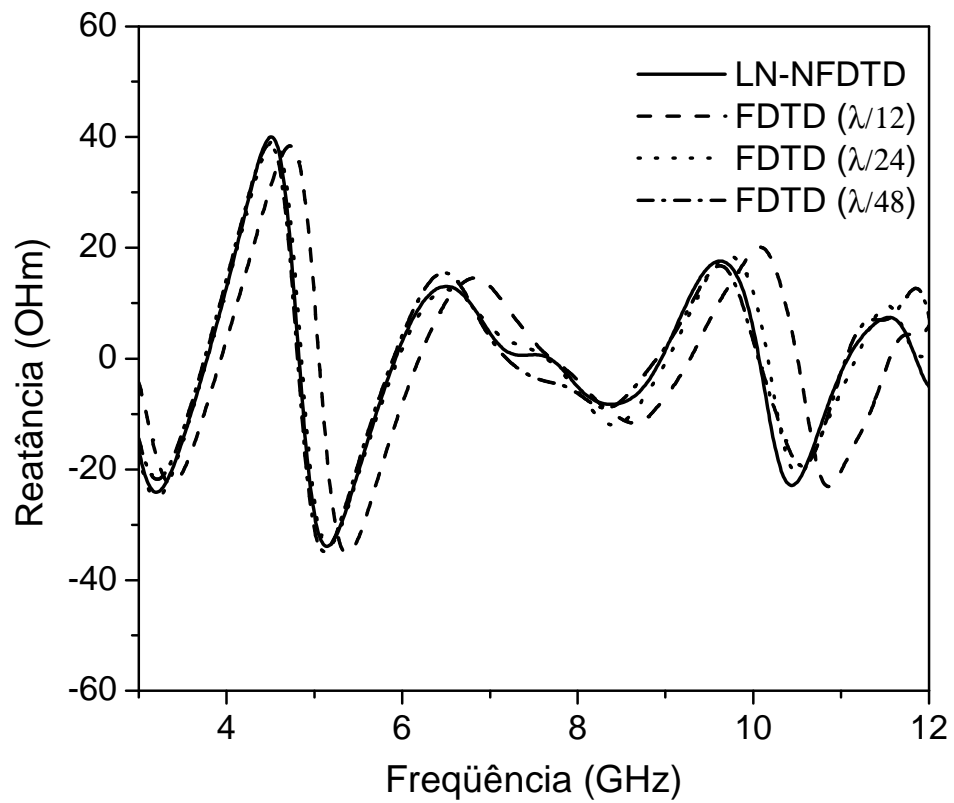
Nas Figs. 4.3a e 4.3b, comparam-se à impedância de entrada, resistência e a reatância, obtidas nos terminais do guia, pelos dois métodos tratados aqui. A antena corneta analisada é descrita pelos parâmetros: $B=3.5$ cm; $R_E=3.5$ cm; $b=1$ cm e $\alpha_E=26,57^\circ$. Observa-se destas figuras que até a frequência de 6.5 GHz, os resultados obtidos pelo método FDTD convencional, para $\delta = \lambda/24$ e $\delta = \lambda/48$, são idênticos àqueles obtidos pelo método LN-FDTD. A partir desta frequência, os resultados passaram a diferir. Esta diferença é mais acentuada nas altas frequências, mesmo para um *grid* bem discretizado ($\delta = \lambda/48$). Na tabela abaixo, são dadas as informações computacionais sobre a análise da antena pelos dois métodos. Vale ressaltar que os resultados aqui apresentados foram obtidos através de códigos fontes implementados na linguagem de programação FORTRAN 90. O programa foi rodado em um computador com processador Pentium III de 700 MHz e 256 MB de memória SDRAM PC133.

Tabela.4.1 – Comparação entre os dois métodos.

	Método FDTD convencional			Método LN-FDTD
Incremento espacial δ	$\delta = \lambda/12$	$\delta = \lambda/24$	$\delta = \lambda/48$	$\approx \delta = \lambda/12$
Incremento temporal Δt (ps)	4,16	2,083	1,41	2,036
Tempo para se encontrar a Estabilidade $n\Delta t$ (ps)	$500\Delta t$	$800\Delta t$	$1400\Delta t$	$600\Delta t$
Tamanho da malha (em número de células)	100x100	200x200	400x400	81x97
Tempo de processamento em (s)	25,036	155,72	1057,941	22,28



(a)



(b)

Fig. 4.3 – Impedância de entrada obtida nos terminais da antena corneta pelos dois métodos de análise tratados aqui. Em (a) mostra-se a resistência e em (b) a reatância. Na análise pelo método FDTD convencional, usou-se três malhas com $\delta = \lambda/12$, $\delta = \lambda/24$ e $\delta = \lambda/48$.

4.1.2 – Análise de uma antena corneta setorial plano-E com abertura de 14°

A antena corneta com abertura de 14° foi projetada de acordo com a condição ótima (parâmetros da antena obtidos para máxima diretividade), ou seja $B = \sqrt{2\lambda R_E}$, com $R_E = 8\lambda$ e $\lambda = 0.03$ m para a frequência de 10 GHz. Na discretização da região de análise, utilizou-se, para o método FDTD convencional, uma malha uniforme com células de dimensões de $\lambda/20$ por $\lambda/20$ e para o método LN-FDTD, projetou-se uma malha que adapta-se a geometria da antena, conforme mostrada na Fig.4.4

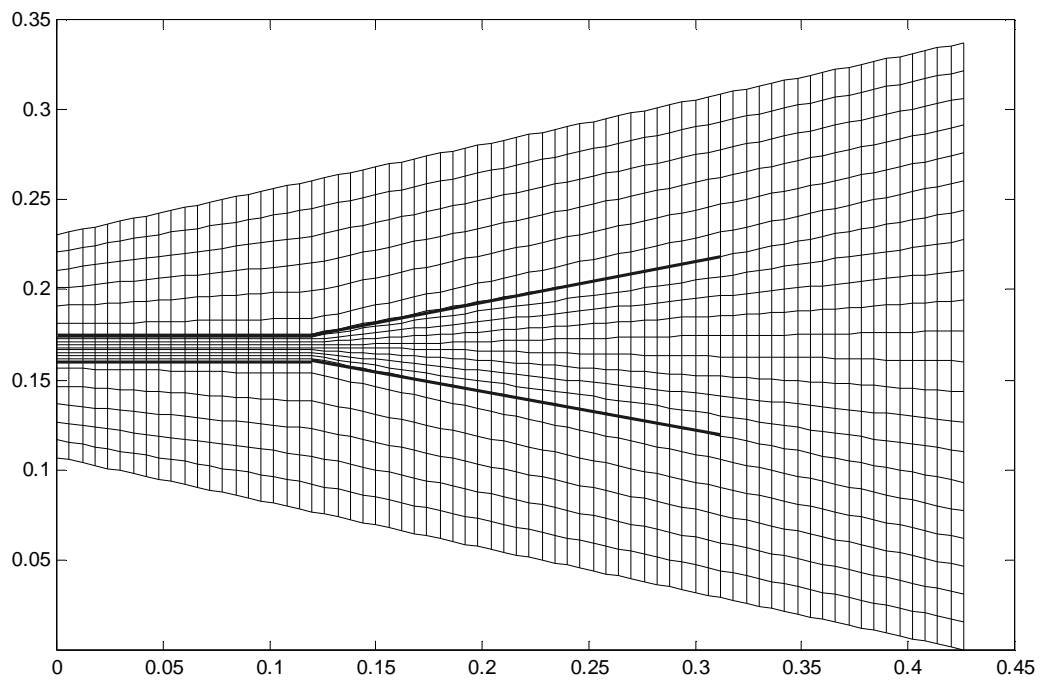


Fig.4.4 – Malha cartesiana oblíqua para o problema da antena corneta setorial plano-E. A malha atual é 4 vezes mais densa em relação a esta. Os parâmetros que descrevem essa antena são: $B=12$ cm; $R_E=24$ cm; $b=1.5$ cm; $\alpha_E=14^\circ$.

A função excitação utilizada foi um pulso gaussiano, descrito por:

$$f(t) = 1.484 \text{sen}[2\pi ft] e^{\left[-(t-3\tau_0)^2 / (\tau_0)^2 \right]} \quad (4.2)$$

com $\tau_0 = 63.7$ e $f = 10$ GHz . Essa função é mostrada na Fig.4.5.

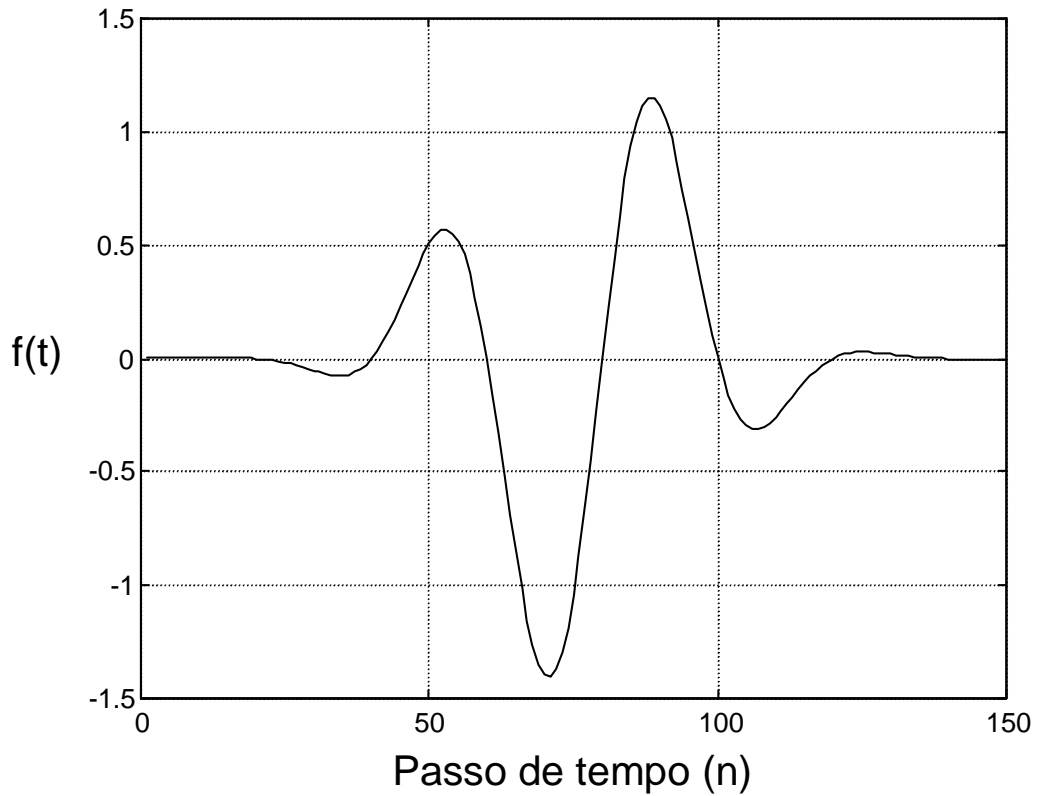


Fig.4.5. – Forma da função Gaussiana modulada em seno

Nas Figs. 4.6 e 4.7, mostra-se a distribuição espacial da componente do campo elétrico, onde as cores vermelhas e azuis indicam maior e menor intensidade de campo, respectivamente. Na Fig.4.6, a distribuição espacial da componente E_y é obtida no instante $800\Delta t$, utilizando-se o

método FDTD convencional, e tanto a ordenada quanto a abscissa indicam posições de células. Na Fig.4.7 têm-se a distribuição espacial da componente covariante, E_2 , obtida no instante $1800\Delta t$ pelo método LN-FDTD. Nesta figura, as coordenadas estão dadas em metros.

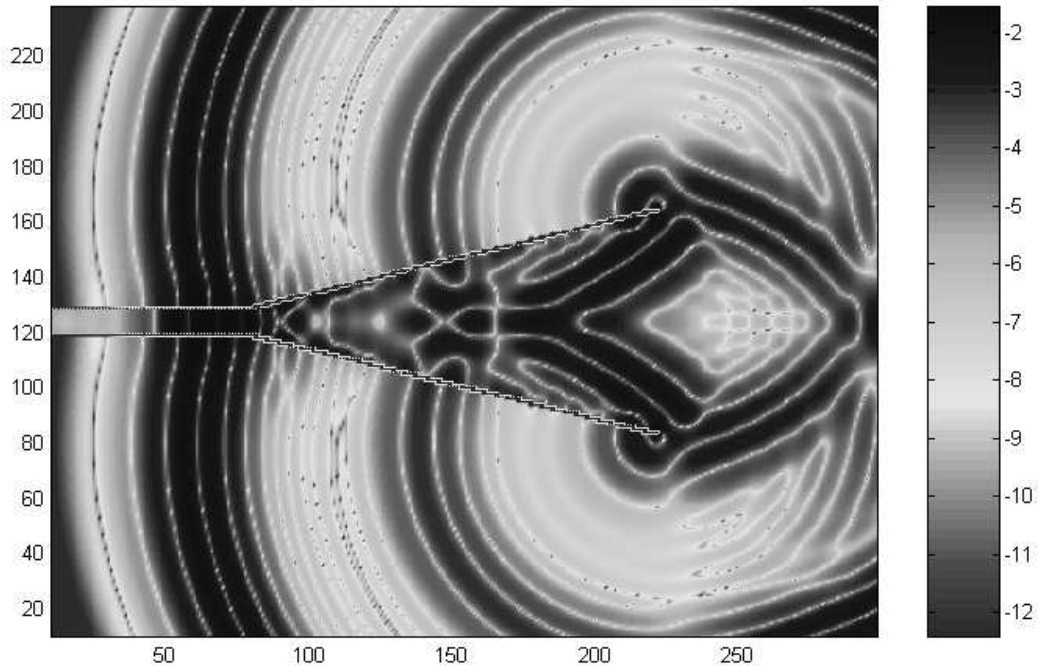


Fig.4.6 – Distribuição espacial da componente do campo elétrico, E_y no instante $800\Delta t$, obtida pelo método FDTD convencional.

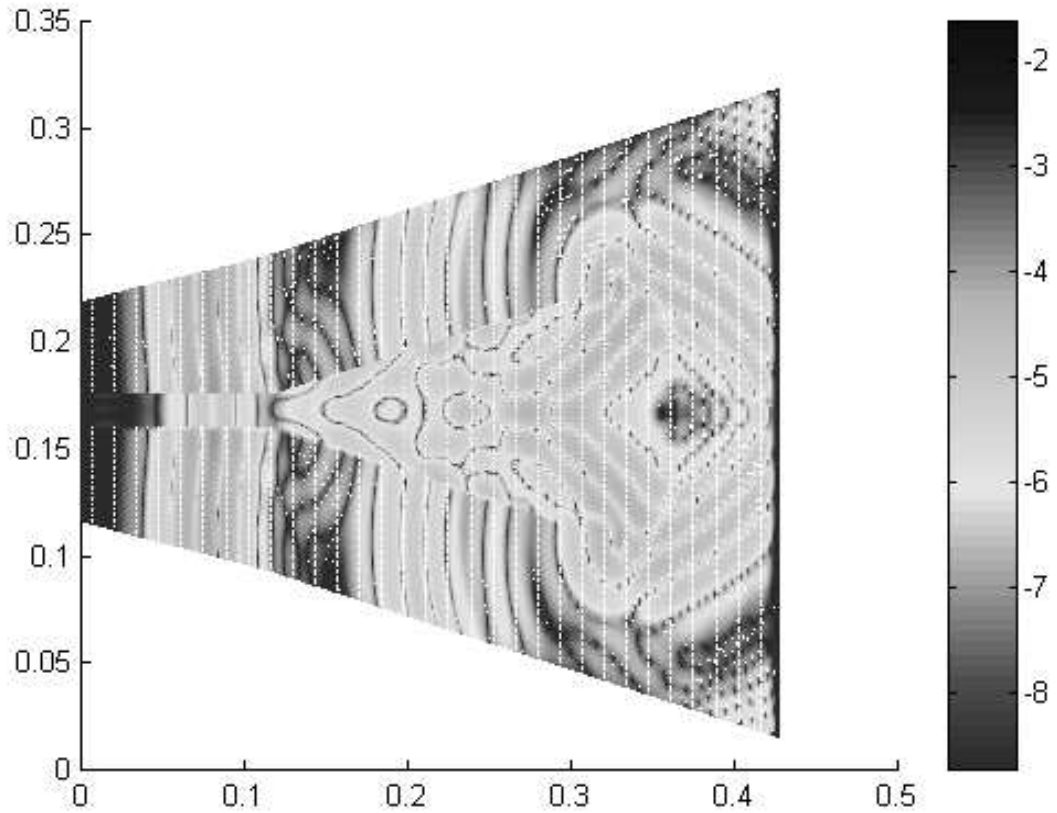


Fig.4.7 – Distribuição espacial da componente covariante do campo elétrico, E_2 no instante $1800\Delta t$, obtida pelo método LN-FDTD.

Nas Figs. 4.8 e 4.9 são mostrados os resultados para a resistência e a reatância, respectivamente, da antena analisada, utilizando-se os dois métodos. Observa-se da Fig.4.8 que o resultado encontrado, para a resistência, pelo método LN-FDTD, converge para um valor de 50 (Ohm), que é a impedância característica da linha, enquanto que, o resultado obtido pelo método FDTD convencional, varia em torno desse valor. O mesmo acontece para a reatância, Fig.4.9, só que o resultado obtido pelo método LN-FDTD converge para zero. A partir dos resultados obtidos pelo método LN-FDTD, pode-se confirmar o casamento de impedância entre a linha de alimentação (guia de ondas) e a antena corneta. A mesma conclusão não se poderia tirar, a partir dos resultados obtidos pelo método FDTD convencional.

Na Fig.4.10, mostra-se o VSWR para a antena corneta setorial plano-*E*. Como era de se esperar, nas altas frequências, os resultados obtidos pelo método FDTD convencional divergem daqueles obtidos pelo método LN-FDTD.

Na Fig.4.11 são mostrados os diagramas de irradiação no plano-*E* obtido através dos dois métodos, para a frequência de 10 GHz. Pode-se observar que há uma pequena diferença entre eles como era de se esperar.

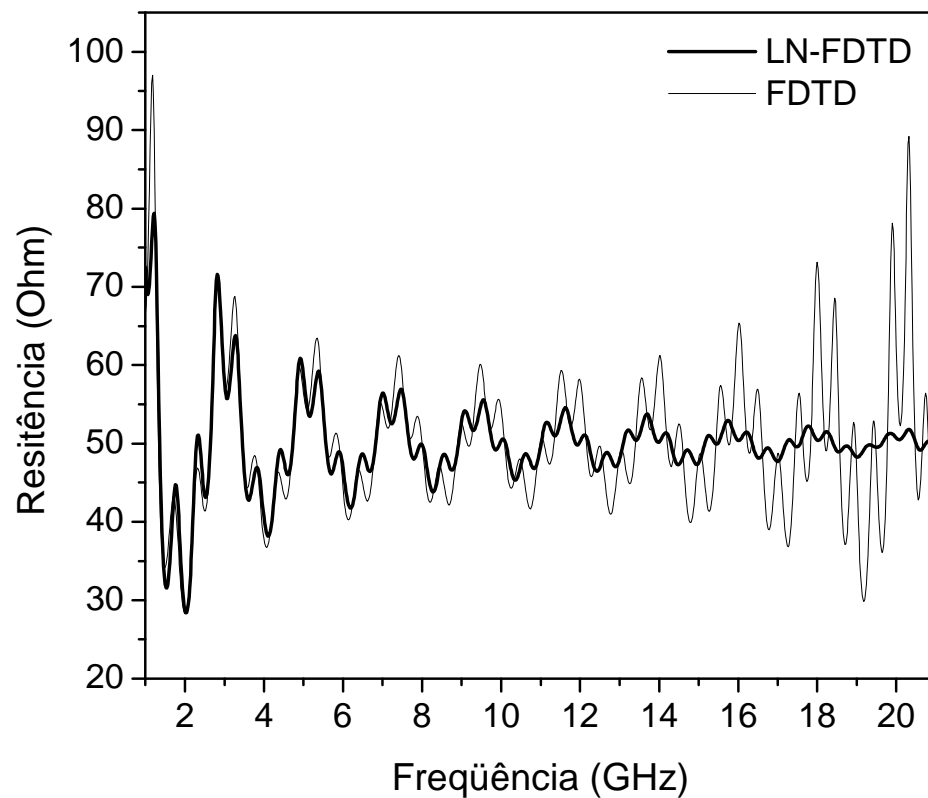


Fig.4.8 – Comparação entre os resultados obtidos, para a resistência, pelo método FDTD convencional e o método LN-FDTD.

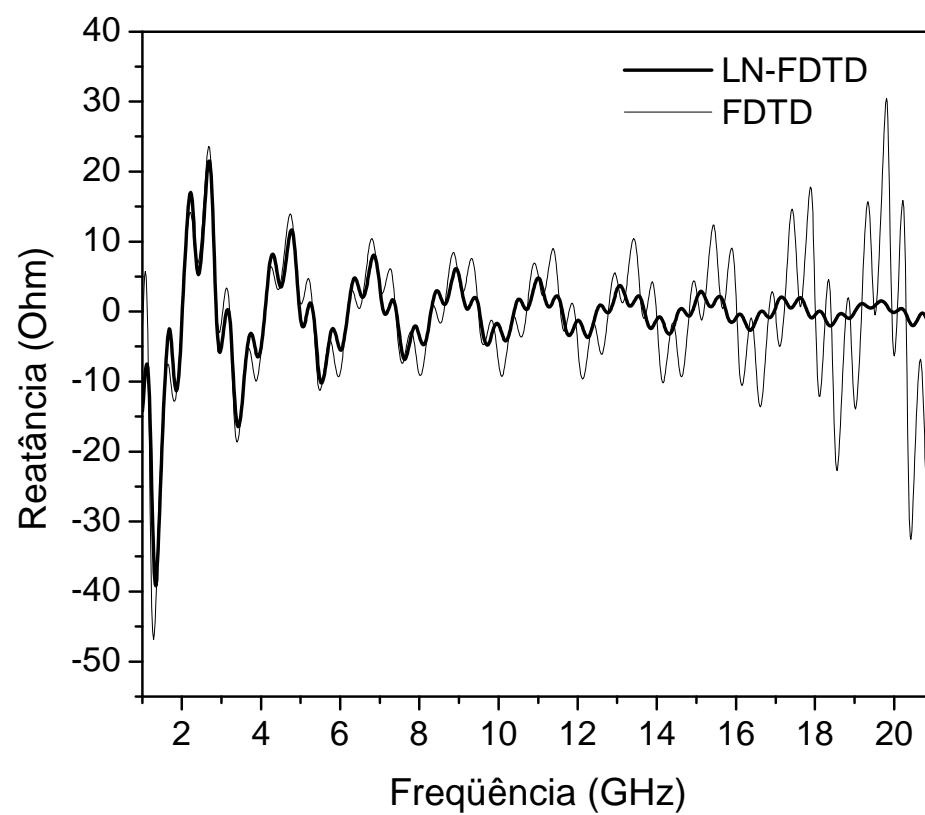


Fig.4.9 – Comparação entre os resultados obtidos, para a reatância, pelo método FDTD convencional e o método LN-FDTD.

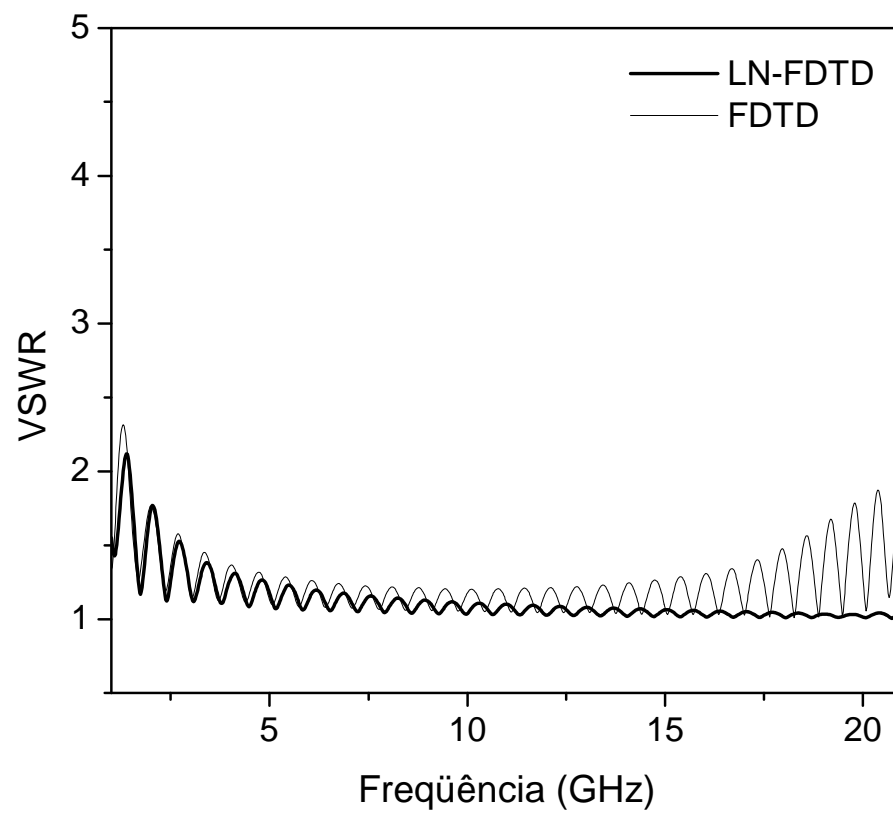
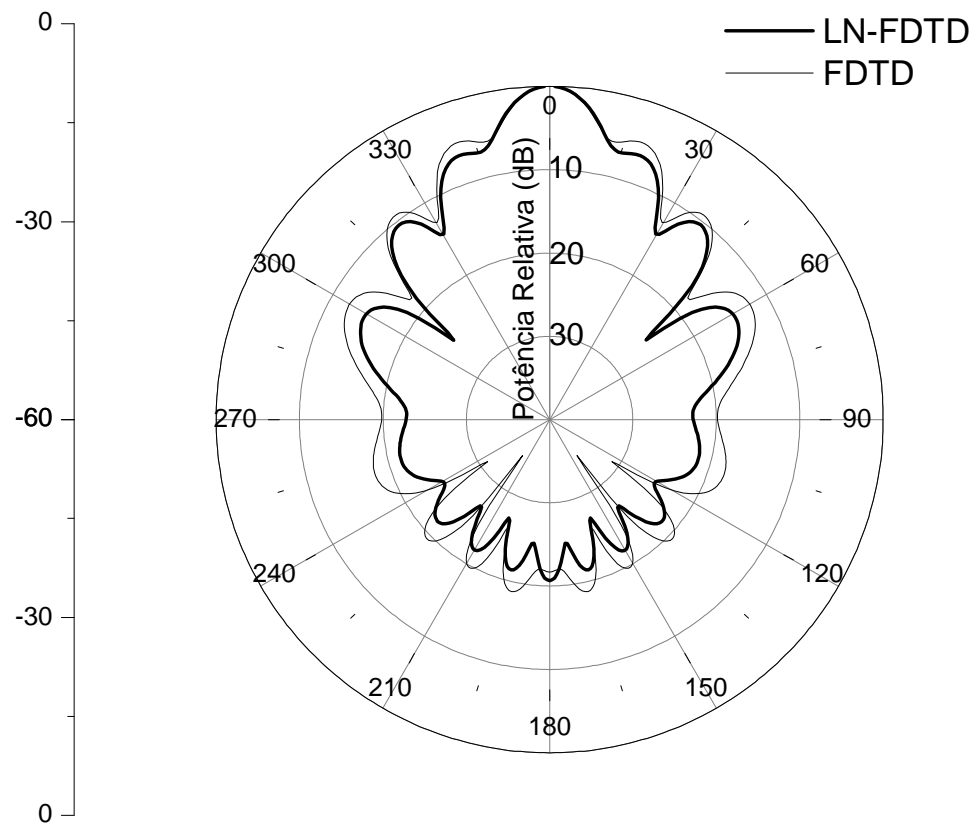


Fig.4.10 – Comparação entre os resultados obtidos, para o VSWR, pelo método FDTD e pelo método LN-FDTD.



4.11 – Comparação entre o diagrama de irradiação obtido pelo método LN-FDTD e o método FDTD convencional, para a frequência de 10 GHz.

4.2 - Análise de Uma Antena de Microfita em um Substrato com Curvatura Cilíndrica.

Aqui, uma antena de microfita com *patch* curvo é analisada pelo método LN-FDTD. Neste caso, deseja-se observar o efeito do *patch* curvo sobre as características de irradiação dessa antena. Para isso tomou-se como referência uma antena de microfita planar com dimensões idênticas às usadas na referência [2].

Para a análise dessas antenas usou-se o cluster AMAZÔNIA (cluster Beowulf) constituído de 12 máquinas, um servidor e onze escravos. O servidor possui dois processadores Athlon XP 1800+, 2 GB de memória DDRAM, 2 discos IDE ATA 133 de 60 GB uma placa controladora RAID ATA 133, uma placa de rede Gigabit 10/100/1000 e uma placa de rede Fast Ethernet 10/100. As máquinas escravas estão equipadas, cada uma, com um processador Athlon XP 1800+, 1,5 GB de memória DDRAM, um disco IDE ATA 133 de 60 GB e uma placa de rede Fast Ethernet 10/100. Assim, o AMAZÔNIA também utiliza softwares de livre distribuição como o sistema operacional Linux, distribuição Red Hat 7.3 e a biblioteca de passagem de mensagem MPI 2.0.

4.2.1 - Antena de microfita planar

A antena de microfita planar é mostrada na Fig.4.12. O seu *patch* é alimentado por uma linha de microfita no mesmo plano. Para análise dessa antena pelo método FDTD convencional, os incrementos espaciais usados foram $\Delta x = 0.389 \text{ mm}$, $\Delta y = 0.4 \text{ mm}$, $\Delta z = 0.265 \text{ mm}$, e as dimensões da malha foram de $63 \times 110 \times 20$ nas direções \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} , respectivamente. O *patch* da antena retangular tem $32\Delta x \times 40\Delta y$. O comprimento da linha de microfita a partir do meio UPML para a aresta da antena é de $50\Delta y$ e o plano de referência onde é coletada a tensão (porta1) é de $10\Delta y$ a partir da aresta do patch. A largura da linha de microfita foi modelada utilizando $6\Delta x$ para a obtenção de uma impedância característica de 50 Ohm.

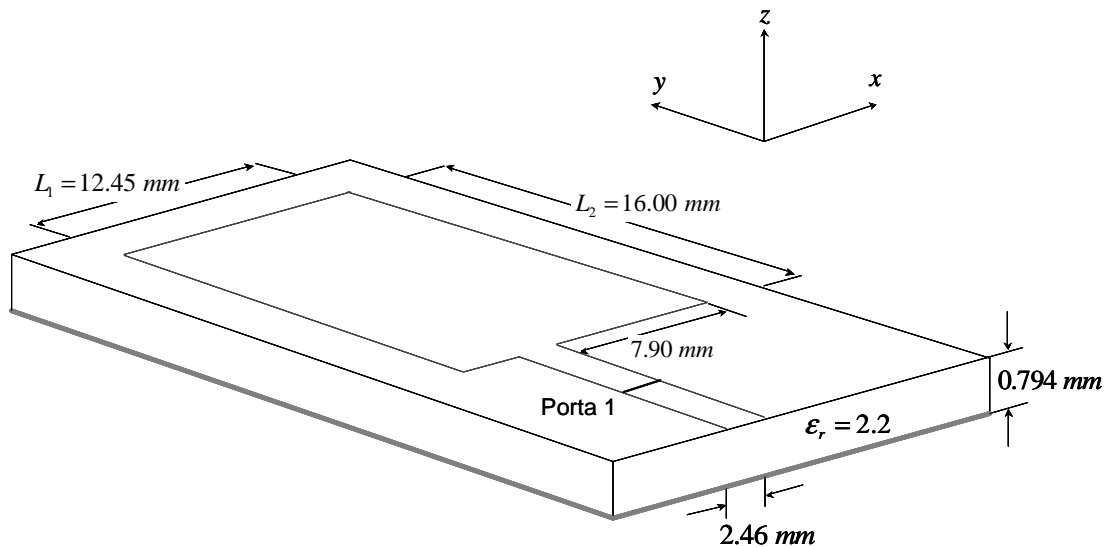


Fig.4.12 – Antena de microfita retangular em um substrato plano.

4.2.2 - Antena de microfita em um substrato com curvatura cilíndrica

A Fig.4.13(a) mostra a antena de microfita sobre um substrato curvo (forma cilíndrica). Trata-se da mesma antena mostrada na Fig.4.12, mas com o seu *patch* curvo no plano y-z, tendo um raio de curvatura de 20 mm. Vale observar que apenas o *patch* se encontra na parte curva do substrato. O plano de alimentação desta antena é idêntico ao da antena de microfita retangular.

A análise da antena de microfita em um substrato curvo pelo método FDTD convencional é difícil de ser realizada pois este método utiliza células retangulares para modelar o contorno físico desta antena que se encontra em uma superfície curva, dificultando a aplicação da condição de contorno. Dessa forma, o método LN-FDTD foi utilizado, sendo que para isto, uma malha curvilinear foi projetada e utilizada para modelar essa antena, conforme mostra a Fig.4.13(b). Esta malha tem dimensões $61 \times 99 \times 36$ nas direções \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} , respectivamente.

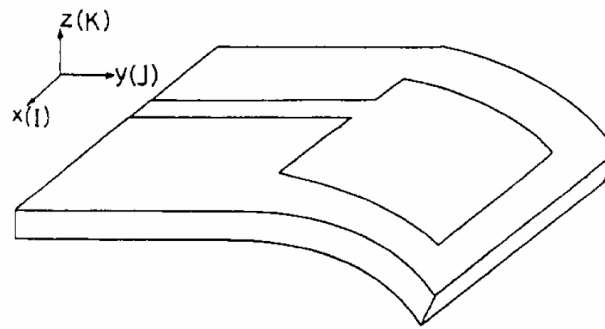
Neste caso, fez-se um estudo da dispersão numérica nesse tipo de malha (Capítulo 2, seção 4), observando-se que para uma resolução de no máximo 0.1λ , o erro de dispersão é muito pequeno, isso para vários ângulos entre os vetores de base. Os incrementos espaciais da linha de microfita foram os mesmos daqueles usados na estrutura planar, mas parcialmente modificados na região do *patch* curvo.

A condição de contorno utilizada para a análise da antena de microfita planar foi a UPML [3]. A mesma condição de contorno, só que num sistema de coordenadas gerais (Capítulo 3), foi utilizada na análise da antena de microfita em um substrato curvo. Para ambas UPML's usou-se um número de 10 camadas para truncar o domínio de análise.

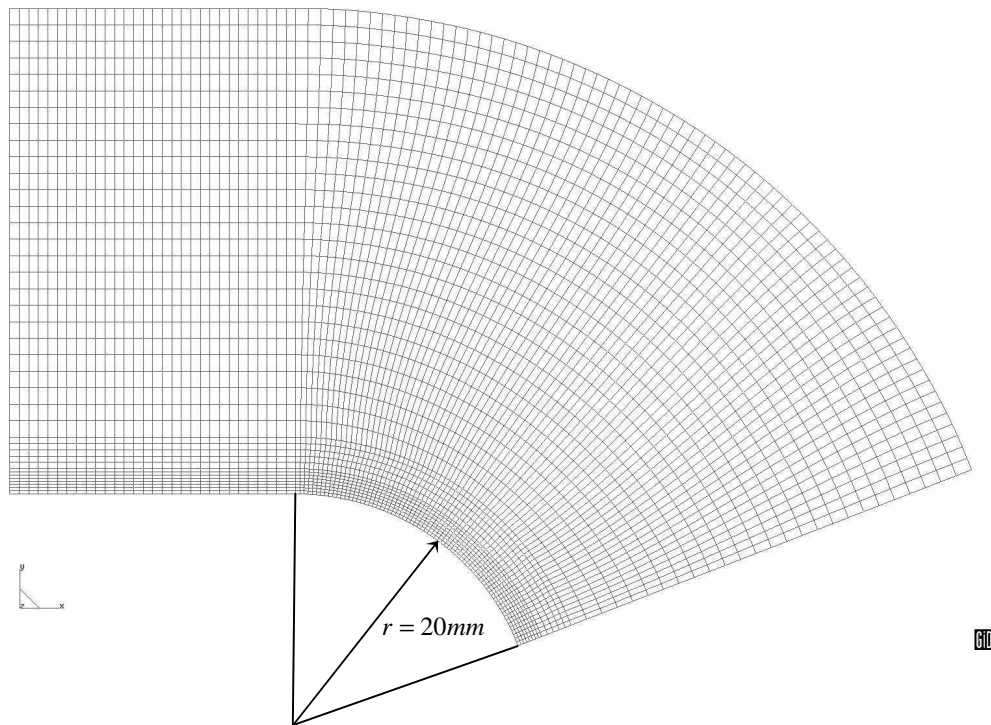
A fonte de excitação utilizada em ambas as antenas foi um pulso gaussiano descrito por:

$$E_z = \exp\left[-(t-t_0)^2/T^2\right] \quad (4.2)$$

onde $T = 15$ ps e $t_0 = 45$ ps. O incremento de tempo Δt utilizado para a análise da antena de microfita planar e da antena de microfita cilíndrica foi de 0.441 e de 0.488 ps, respectivamente. Para ambas as antenas, o tempo utilizado para alcançar a estabilidade foi de $5000 \Delta t$.



(a)



(b)

Fig.4.13 – (a) Antena de microfita retangular em um substrato curvo; (b) Configuração da malha na seção transversal yz.

Para mostrar que o método LN-FDTD pode ser utilizado em computação paralela, a antena de microfita em um substrato curvo foi analisada considerando-se 1, 2, 4 e 6

processadores. A divisão do domínio de análise em subdomínios pode ser verificada na Fig.4.14. Devido a geometria analisada ter somente 36 células na direção \hat{z} , o domínio de análise foi dividido apenas no plano x-y, conforme a Fig.4.14.

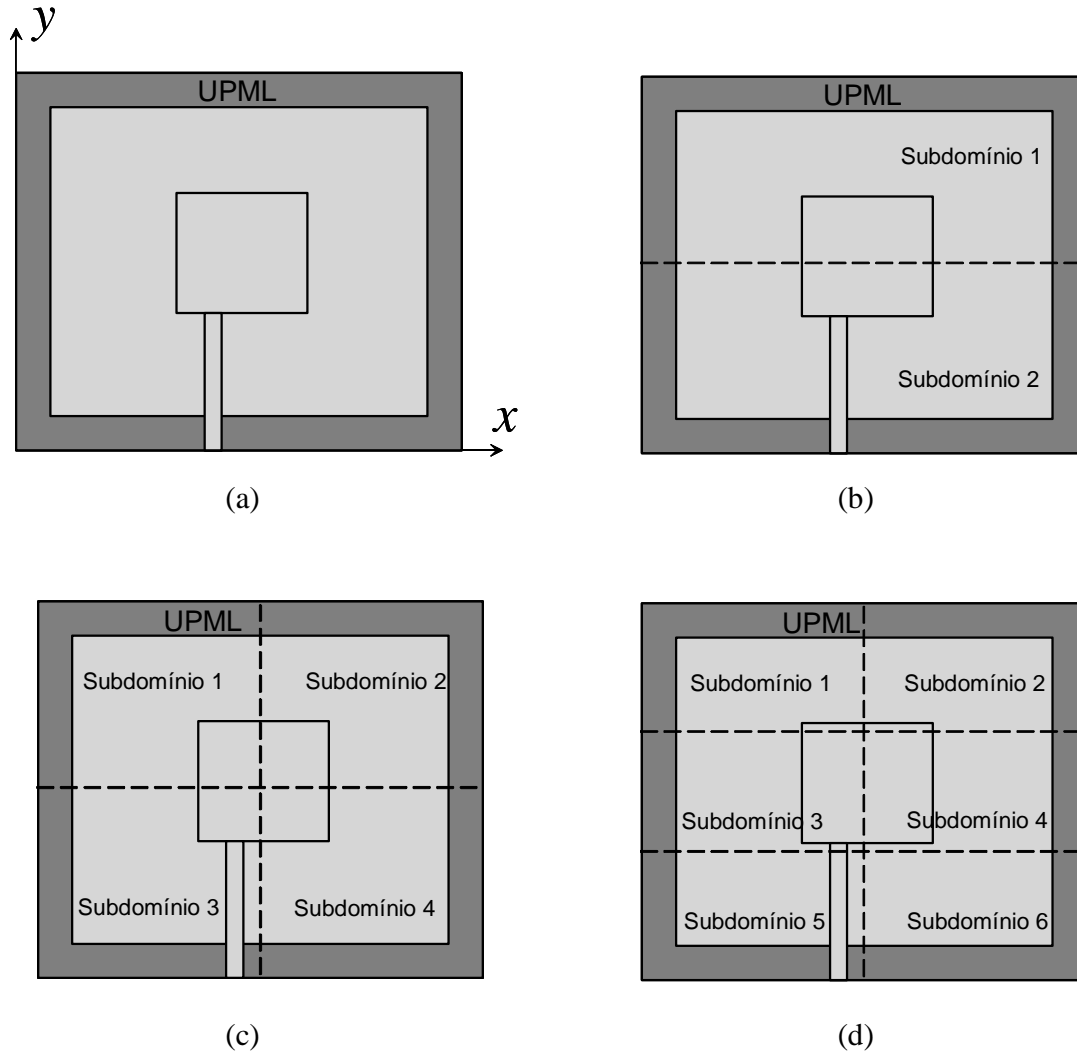
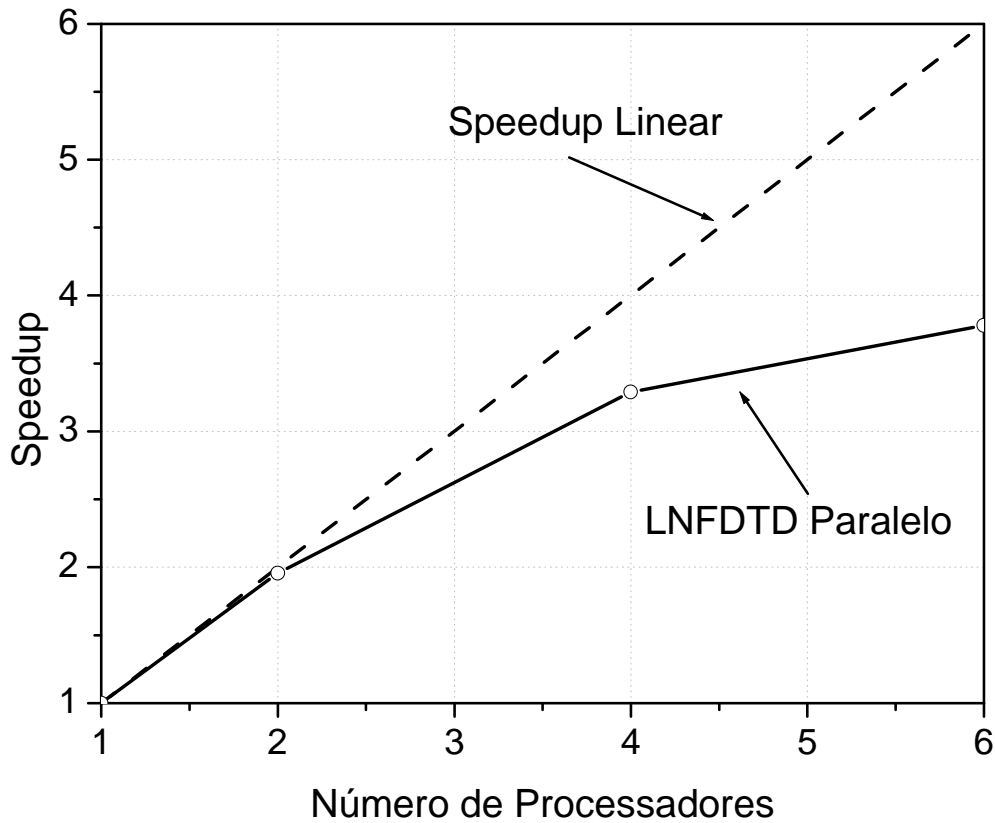
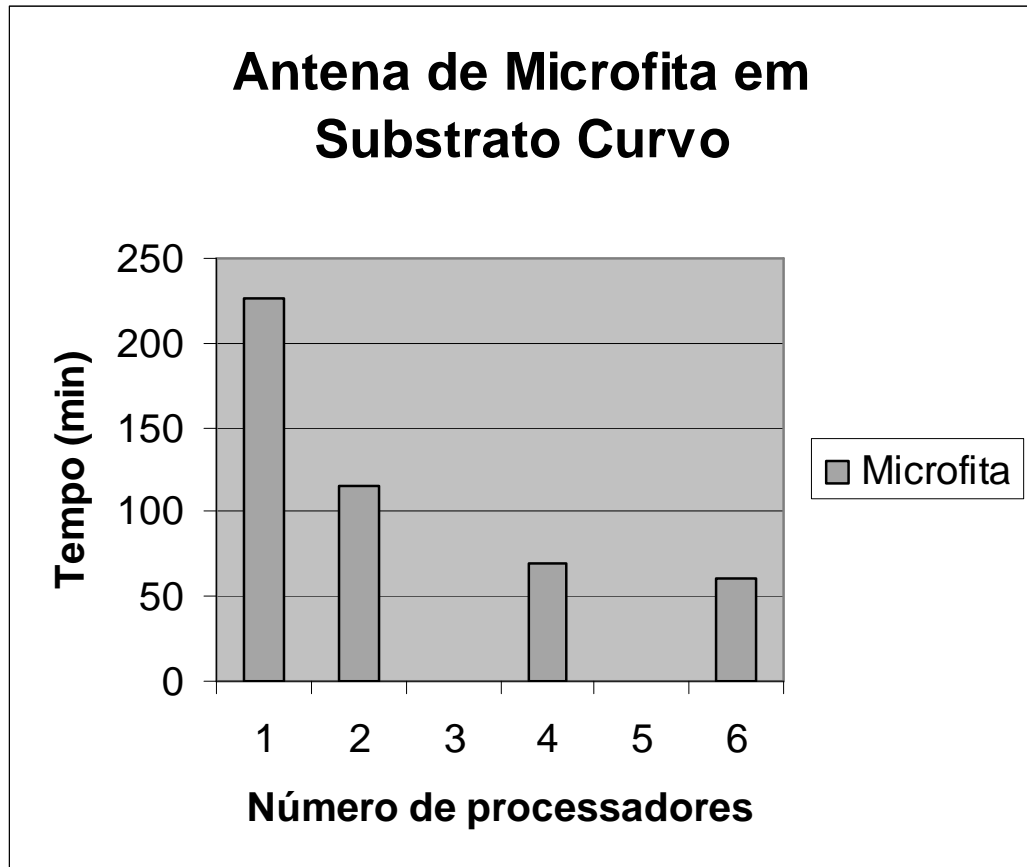


Fig.4.14 – Divisão do domínio numérico em subdomínios. (a) Domínio numérico de análise. (b) Domínio numérico dividido em 2 subdomínios. (c) Domínio numérico dividido em 4 subdomínios e (d) Domínio numérico dividido em 6 subdomínios.

Através da infra-estrutura disponível (cluster AMAZÔNIA), obteve-se a curva de speedup para a antena com substrato curvo, como mostrado na Fig. 4.15(a). Aqui, a definição de speedup é $S = T_S/T_N$, onde T_S é o tempo para o processamento seqüencial e T_N é o tempo de processamento para o cluster com N processadores. Observa-se nesta figura que o *speedup* do algoritmo proposto, considerando-se dois processadores (Fig.14.14(b)), é aproximadamente igual ao *speedup* linear (ideal). A partir de dois processadores, o *speedup* apresentado pelo método LN-FDTD continua a crescer, mas não como o do caso ideal. Isso é devido, ao aumento de comunicação entre as máquinas, pois agora, ao contrário do algoritmo FDTD convencional, há mais componentes de campo que devem ser enviadas e recebidas. Utilizando-se mais de 6 processadores, no caso 9 ou 12 processadores, observou-se saturação na curva de speedup, por isso não se usou todas as máquinas do cluster Amazônia para analisar a antena em questão.



(a)



(b)

Fig.4 .15 – (a) Comparação entre o *speedup* ideal com aquele obtido pelo método LN-FDTD, e
(b) Tempo de processamento para a análise da antena de microfita usando-se processamento paralelo.

Na Fig.4.16 é mostrada a voltagem obtida nos terminais da linha de alimentação (porta 1) para as duas antenas tratadas aqui.

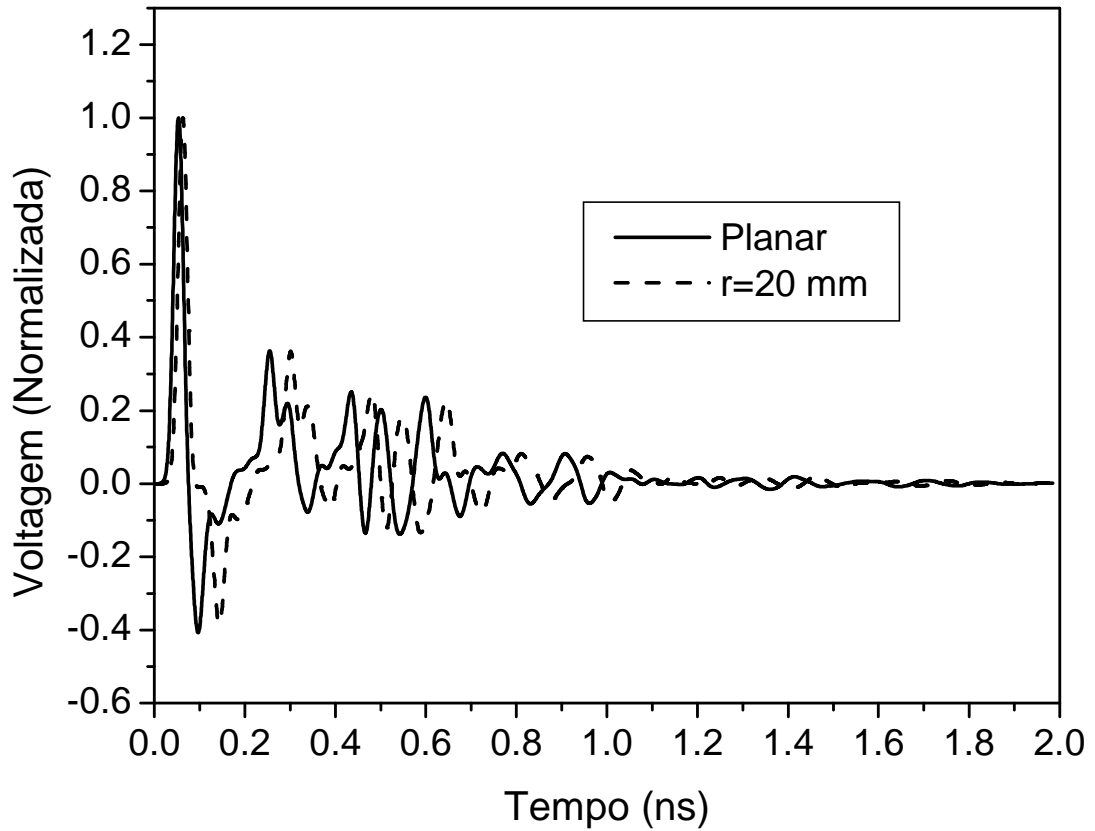


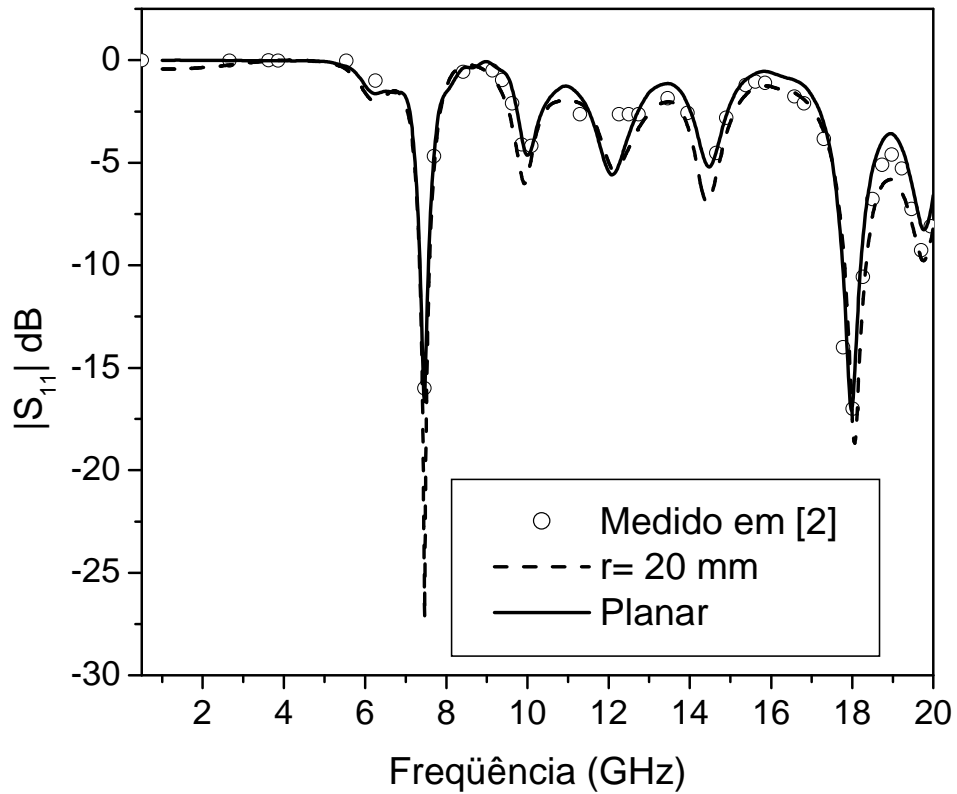
Fig.4.16 – Voltagem calculada nos terminais das duas antenas de microfita tratadas nesta seção.

As perdas de retorno ($|S_{11}|$) de ambas as antenas foram encontrados a partir da transformada de Fourier das tensões obtidas nos terminais dessas antenas, ou seja

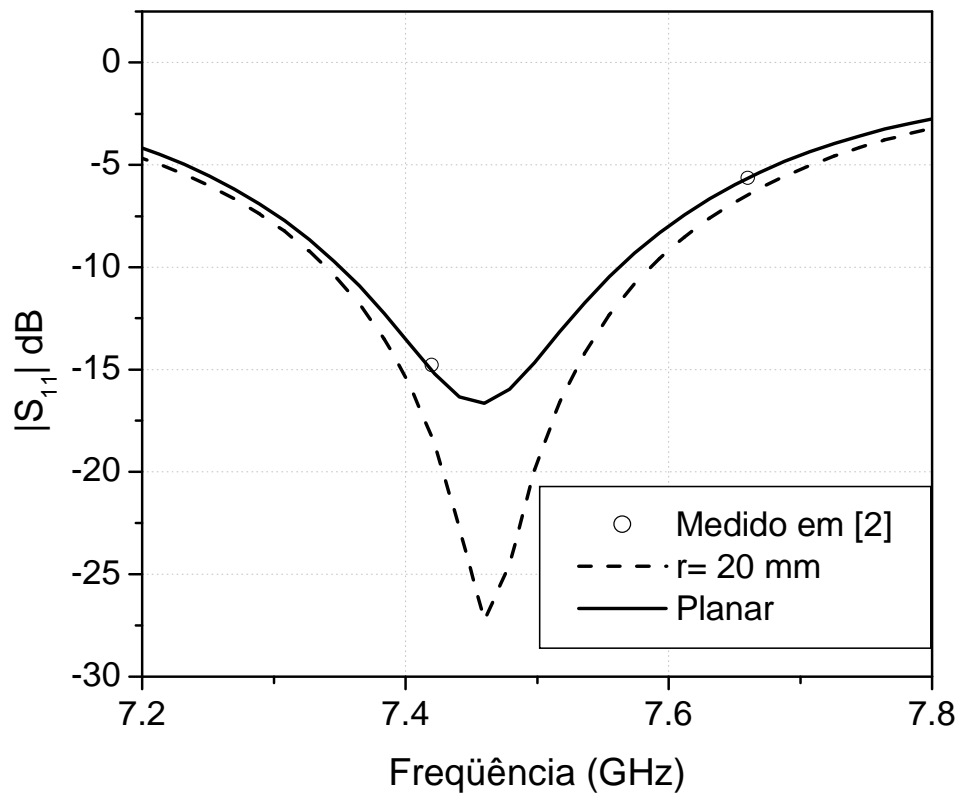
$$S_{11}(\omega) = \frac{F[V_1^{\text{ref}(t)}]}{F[V_1^{\text{inc}(t)}]} \quad (4.3)$$

onde $V_1^{\text{ref}(t)}$ é a voltagem refletida, $V_1^{\text{inc}(t)}$ é a voltagem incidente e F representa a transformada de Fourier.

A Fig.4.17(a) mostra a comparação dos resultados de $|S_{11}|$ para a antena de microfita planar e a curva. Para o caso da antena curva com um raio de 20 mm, observa-se que as reflexões próximas à frequência de ressonância são menores. Além disso, há um pequeno aumento da largura de banda com relação à largura de banda da antena planar, como se pode observar na Fig.4.17(b).



(a)



(b)

Fig.4.17 – (a) Comparação entre as perdas de retorno para as antenas de microfita planar e cilíndrica; (b) Detalhes das perdas de retorno para as antenas de microfita próximo a frequência de ressonância.

A partir do cálculo das perdas de retorno, a taxa de onda estacionária de voltagem, (VSWR) pode ser calculada como

$$\text{VSWR} = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |S_{11}(\omega)|}{1 - |S_{11}(\omega)|} \quad (4.4)$$

A Fig.4.18 mostra o VSWR calculado para ambas as antenas em função da frequência

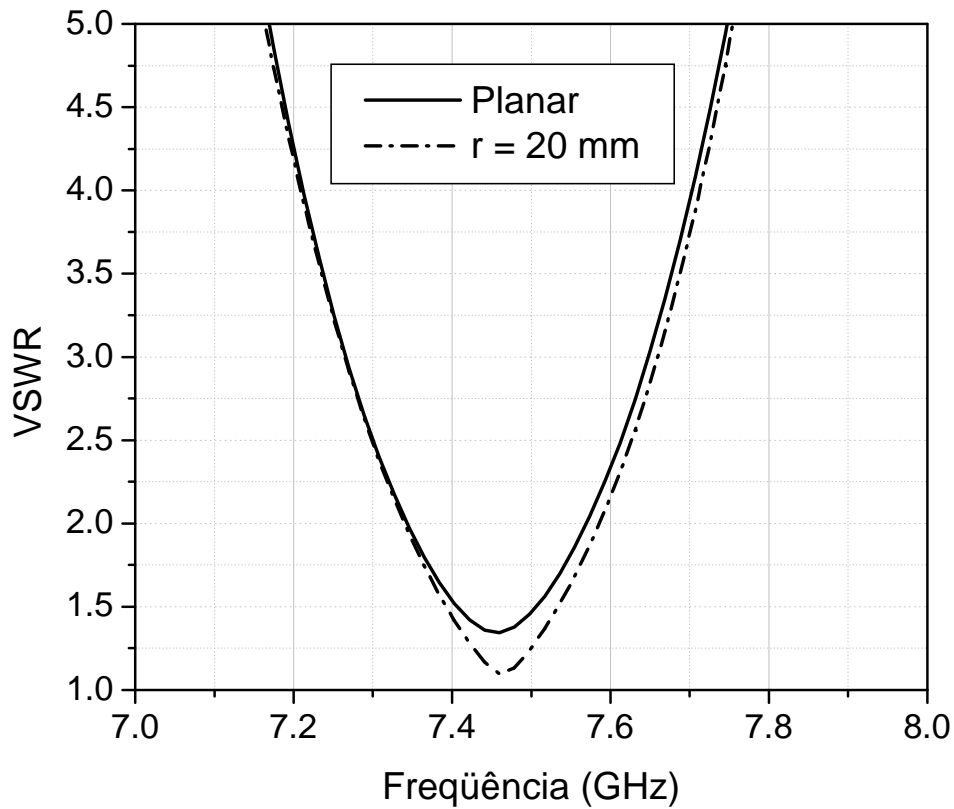


Fig.4.18 –Comparação entre o VSWR das antenas de microfita planar e cilíndrica.

Desta forma, a impedância de entrada para ambas as antenas pode ser calculada a partir do cálculo de $S_{11}(\omega)$, ou seja

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + S_{11}e^{j2KL}}{1 - S_{11}e^{j2KL}}, \quad (4.5)$$

onde K é o número de onda na microfita, L é o comprimento a partir da aresta da antena até o plano de referência ($10\Delta y$), e Z_0 é a impedância característica da linha de microfita. Para o cálculo de Z_{in} assumiu-se que a microfita tenha uma impedância característica de 50 Ohm, e uma permissividade efetiva de 1.9 é usada para calcular o número de onda.

Na Fig.4.19 a variação da impedância de entrada versus a frequência foi examinada. Observa-se que a parte real da impedância de entrada, para a antena de microfita curva, aproxima-se de 50 Ohm próximo da frequência de ressonância em virtude da inclinação do *patch*.

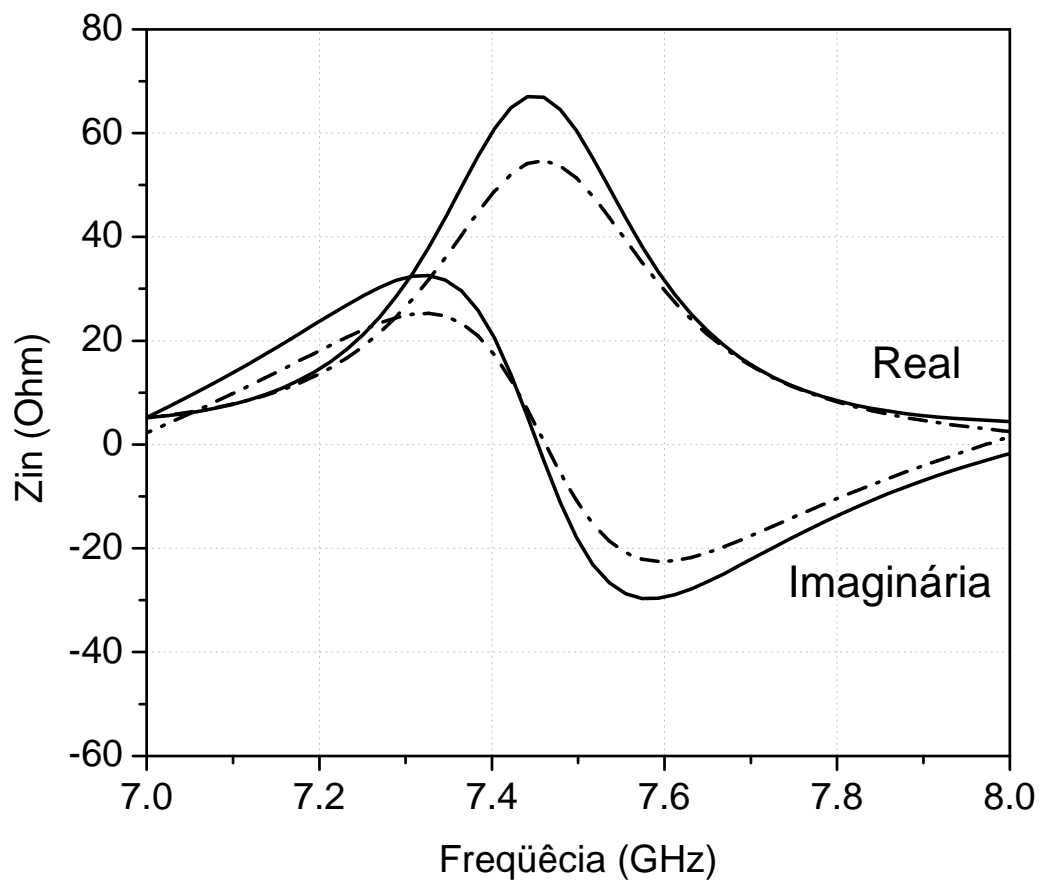
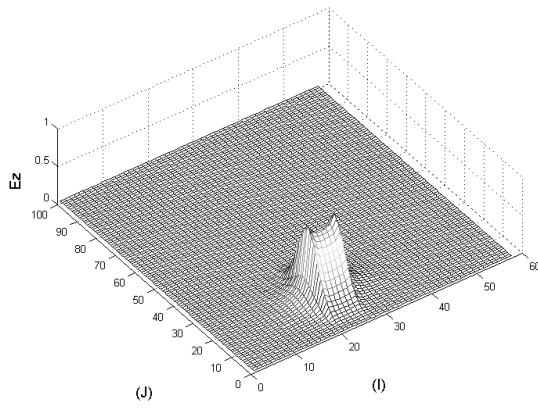
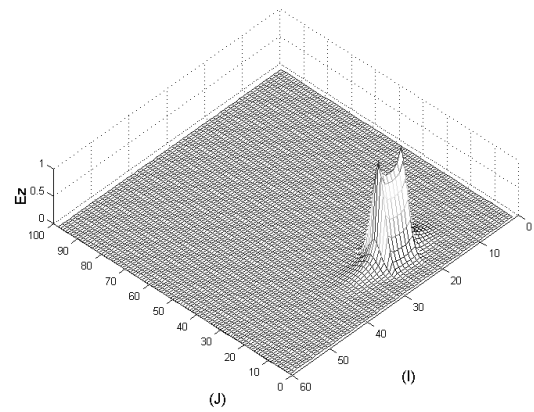


Fig.4.19 – Comparação entre a impedância de entrada das antenas de microfita planar e curva.

Nas Figs.4.20 e 4.21 mostra-se a distribuição do campo elétrico $E_z(x, y, t)$ uma célula abaixo do patch nos instante $100 \Delta t$ e $5000 \Delta t$, respectivamente, para ambas as antenas. Na Fig.4.20 observa-se que o pulso incidente ainda não alcançou o *patch*, enquanto que na Fig.4.21 o campo já se encontra no seu estado estável.

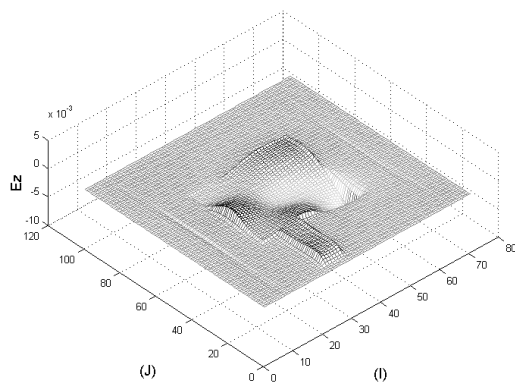


(a)

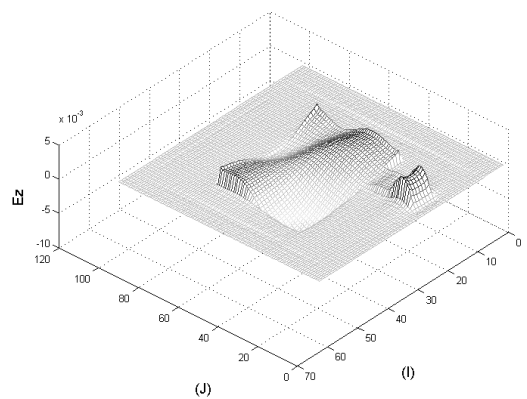


(b)

Fig.4.20 – Distribuição da componente de campo elétrico $E_z(x, y, t)_z$ abaixo do plano do *patch* para $t=44.1$ ps. (a) Antena de microfita planar. (b) Antena de microfita em um substrato cilíndrico ($r=20$ mm).



(a)



(b)

Fig.4.21 – Distribuição da componente de campo elétrico $E_z(x, y, t)_z$ abaixo do plano do *patch*, para $t=2.205$ ns. (a) Antena de microfita planar. (b) Antena de microfita em um substrato curvo ($r=20$ mm).

4.3- Análise de espalhamento eletromagnético por cilindro dielétrico.

Um outro problema que foi analisado pelos métodos LN-FDTD e FDTD convencional foi o espalhamento de ondas eletromagnéticas por cilindro dielétrico, como mostra a Fig. 4.22. Nessa figura, o cilindro é considerado infinito na direção z , e a onda incidente é uma onda plana TE com polarização na direção x . Como não há nenhuma variação da geometria do espalhador ou do campo incidente na direção z , a sua análise numérica pode ser feita a partir do modelo bidimensional mostrado na Fig. 4.22. O cilindro considerado tem um diâmetro de 7,5 milímetros e uma constante dielétrica relativa de 4. A onda plana foi excitada por uma série de pulsos gaussianos modulados em seno. O pulso tem uma largura de 100 ps, correspondendo a uma largura de faixa de 10 GHz e a frequência da modulação foi de 20 GHz.

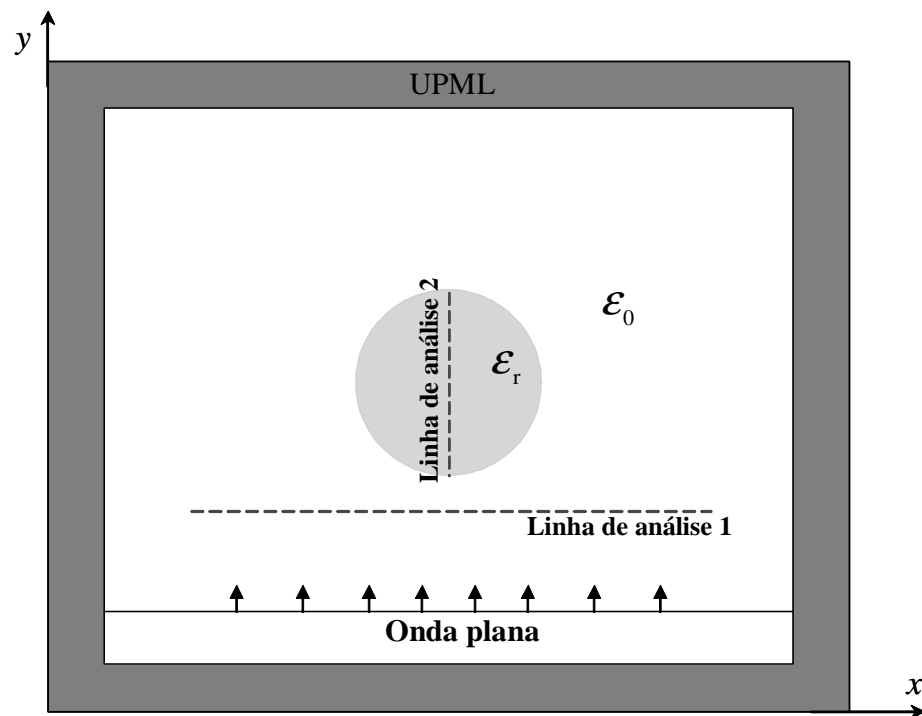


Fig.4.22 – Onda plana incidindo sobre um cilindro dielétrico.

Para análise desse espalhador pelo método LN-FDTD uma malha (83×83) foi projetada de acordo com a Fig.4.23.

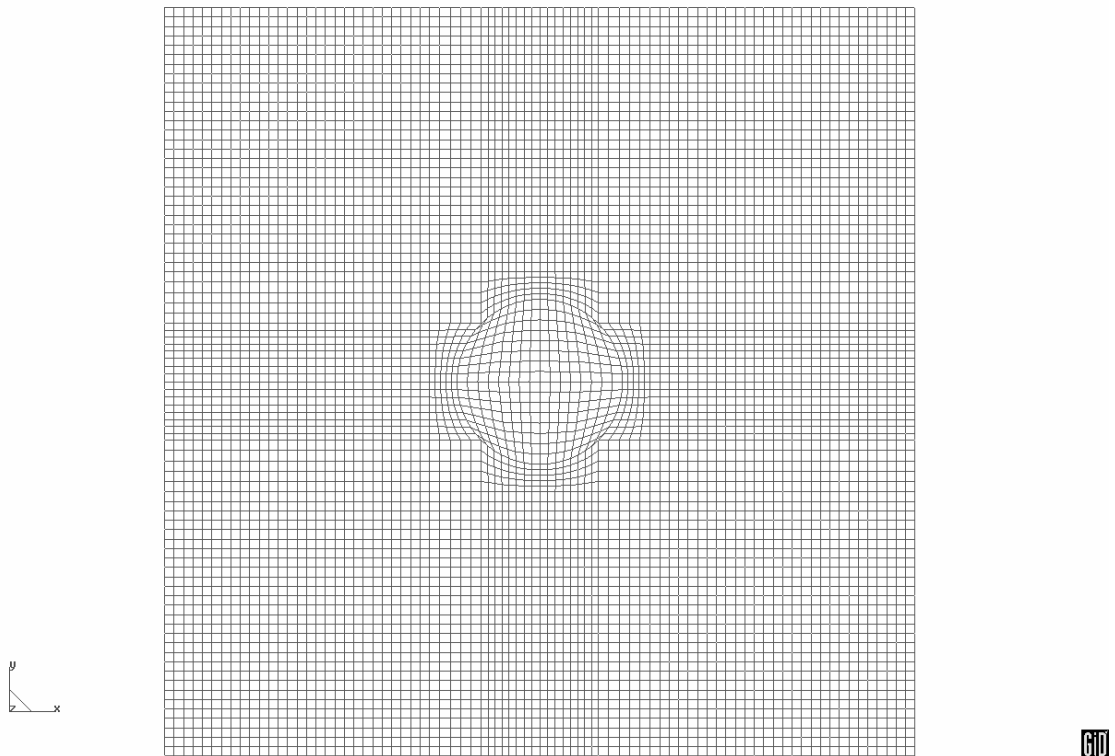


Fig.4.23 – Malha gerada pelo GID 6.1.2 com adaptação para uma geometria cilíndrica.

Em se tratando da análise pelo método FDTD convencional, usou-se uma malha uniforme de 300×300 células, com incremento espaciais de 15.625×10^{-3} m, correspondendo a um incremento espacial de $\lambda/96$, para a máxima frequência (20 GHz). Dessa forma, para modelar o cilindro utilizando essa malha, usou-se *staircase*, como mostrado na Fig. 4.24.

Na Fig. 4.25 mostra-se a amplitude da componente do campo elétrico E_x na frequência de 20GHz, obtida dentro do cilindro e ao longo de seu diâmetro (linha de análise 2). Observa-se, neste caso, que a diferença entre os resultados obtidos é pequena para o caso em questão. Vale-se ressaltar que a malha usada no segundo caso é bem mais fina.

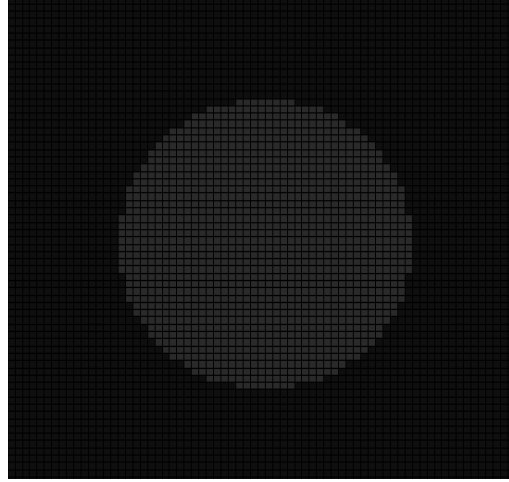


Fig.4.24 – Cilindro dielétrico aproximado por *staircase*.

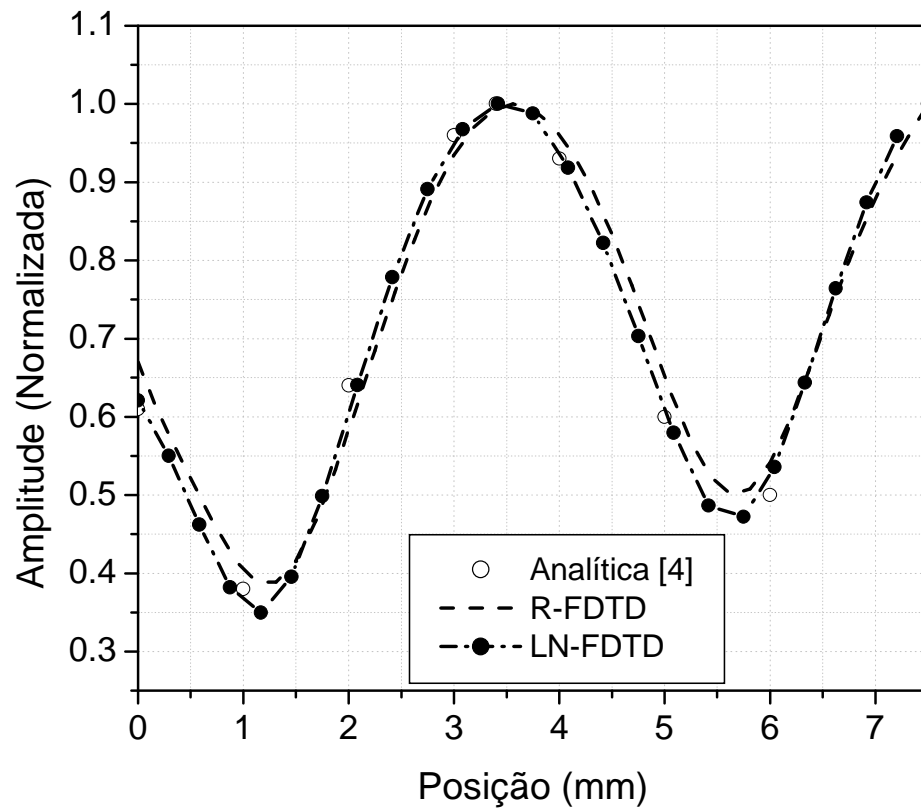


Fig.4.25 – Comparação entre os resultados obtidos pelos método R-FDTD, LN-FDTD e pela solução analítica para o cilindro dielétrico [4], para a componente de campo E_x dentro do cilindro (linha de análise 2).

Uma outra análise feita foi à obtenção do campo espalhado pelo cilindro, na linha de análise 1 (Fig. 4.22), conforme mostrado da Fig.4.26. Os resultados obtidos para a componente de campo E_x obtida ao longo da linha de análise 1, pelos dois métodos tratados aqui, apresentam a mesma forma.

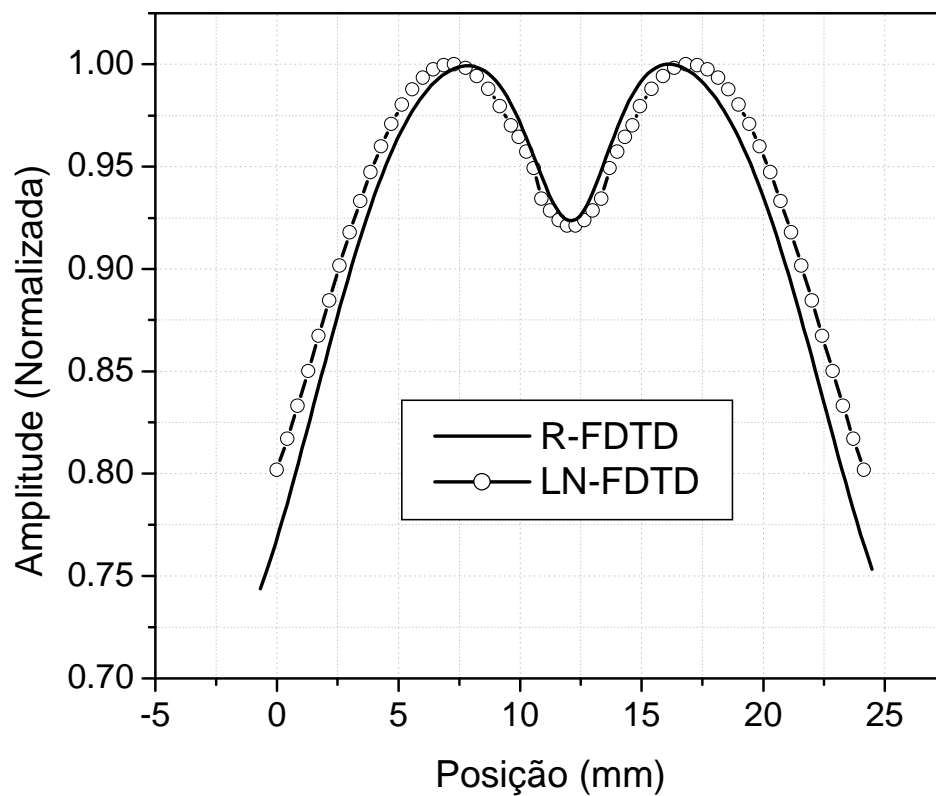
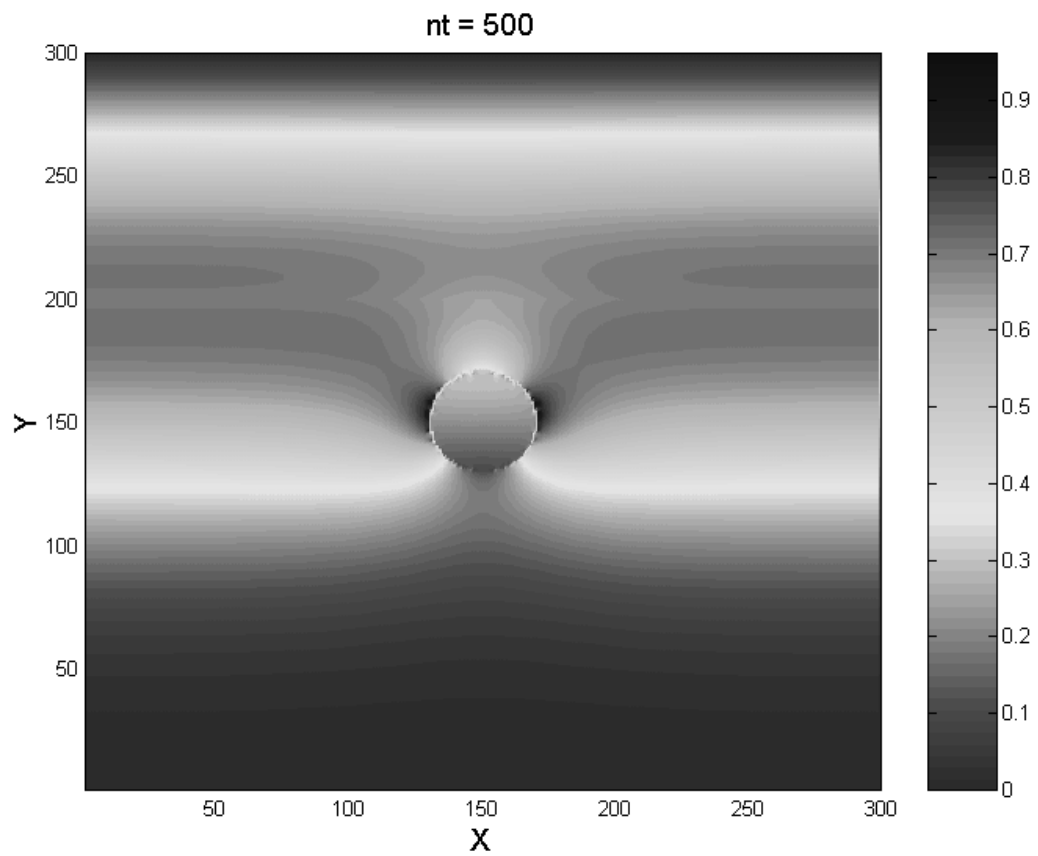
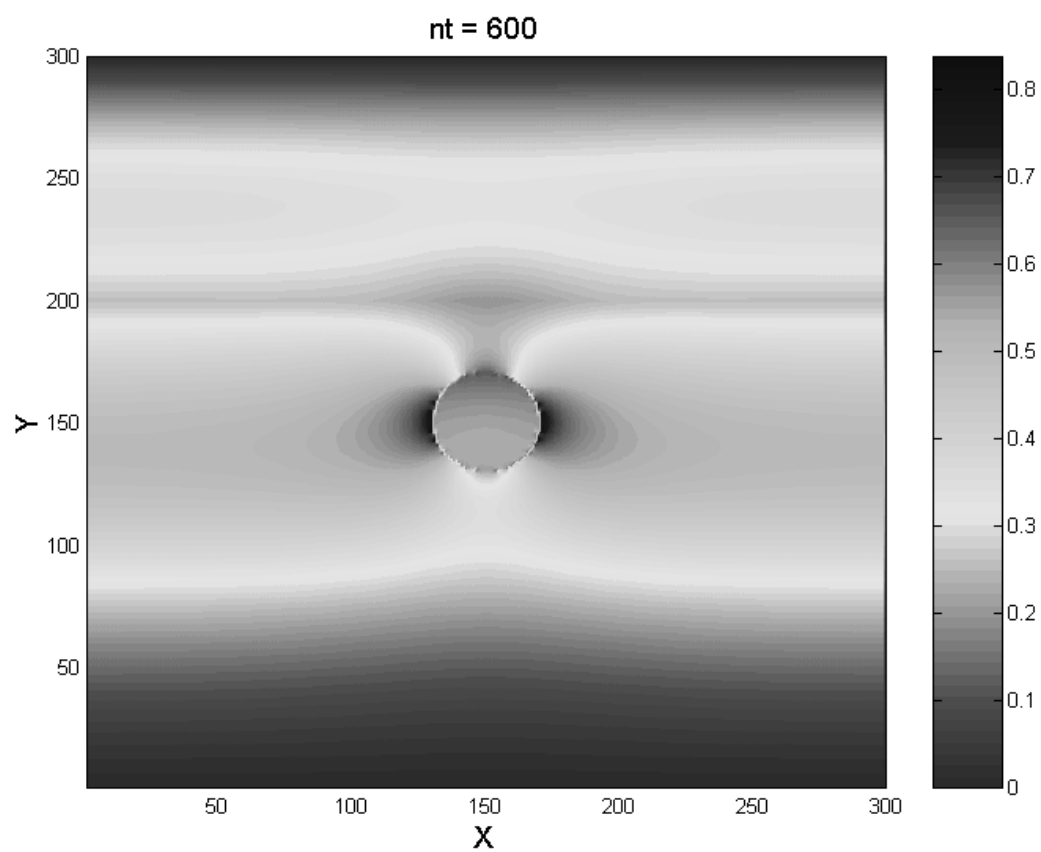


Fig.4.26 – Comparação entre os resultados obtidos pelo método R-FDTD e pelo método LN-FDTD para a componente de campo E_x na linha de análise 2.

Na Fig.4.27 mostra-se a distribuição espacial da componente de campo elétrico $E_x(x, y, t)$ em dois instantes de tempo, onde tanto as abscissas quanto as ordenadas representam índices das células. Uma escala de cor foi usada para mostrar a intensidade de E_x no espaço computacional.



(a)



(b)

Fig.4.27 – Distribuição espacial da componente de campo $E_x(x, y, t)$ no plano xy, em dois instantes de tempo. (a) $n = 500\Delta t$ e (b) $n = 600\Delta t$.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Isaacson and H.B. Keller, “*Analysis of Numerical Methods*”, Wiley, New York, 1967.
- [2] D. M. Sheen, S. M. Ali, M. D. Abouzahra and J. A. Kong, “Application of the three-dimensional finite-difference time-domain method to the analysis of planar microstrip circuits,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-38, No. 7, pp. 849-857, July. 1990.
- [3] S.D. Gedney, “An Anisotropic Perfectly Matched Layer- Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-44, No. 12, pp. 1630-1639, Dec. 1996.
- [4] D. S. Jones, *The Theory of Electromagnetics*, Macmillan, New York, NY, 1964.

Capítulo 5

O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo em Coordenadas Não Ortogonal Local Reduzido (R-LN-FDTD)

5.1 – Introdução

No capítulo 2 o método LN-FDTD foi introduzido para solucionar problemas de irradiação e espalhamento. O uso do método LN-FDTD é muito atrativo para análise de geometrias complicadas, devido principalmente a simplicidade de seu algoritmo. Contudo, o requerimento computacional é alto, e a memória computacional pode tornar-se uma limitação para grandes dimensões elétricas de análise, mesmo usando-se processamento paralelo. A limitação de memória vem do fato de que todo o domínio computacional tem de ser discretizado por células (Fig.2.1), cujo tamanho máximo das arestas é de aproximadamente um décimo de um comprimento de onda para evitar a dispersão numérica (Fig.2.4 e Fig.2.5) que levaria a imprecisão numérica.

Neste capítulo, a formulação LN-FDTD será modificada para reduzir a memória requerida, permitindo um aumento do volume computacional para um dado tamanho de memória computacional. Em contrapartida, tem-se um aumento moderado na complexidade do código.

Em [1], o uso de regiões livres de cargas foi introduzido, combinado com a equação de onda escalar para encontrar este objetivo. Nesta formulação, os autores subdividiram o domínio computacional em regiões de livre divergência e regiões de não livre divergência. O método FDTD convencional foi aplicado em regiões de descontinuidade, condutores, fontes e interfaces dielétricas, enquanto que a equação de onda escalar, requerendo quatro elementos de memória por célula ao invés das usuais seis (método FDTD convencional), foi usado em regiões de livre divergência do campo elétrico. Em virtude de ter sub-regiões esta formulação pode ser complicada de programar, e o mais importante, a redução de memória para esta técnica é somente encontrada para algumas geometrias específicas, tais como, estruturas planares ou em outros casos onde existam grandes regiões homogêneas.

Em [2], o método FDTD convencional foi utilizado com o mesmo objetivo. O método denominado pelo autor de método RFDTD (Reduced-Finite difference Time Domain) elimina a necessidade de subdivisão do domínio computacional em sub-regiões, mantendo a vantagem de reduzir o número de componentes de campo para quatro, enquanto sendo capaz de tratar facilmente condutores e regiões de fontes. Isto é realizado com o uso da natureza de livre divergência do deslocamento elétrico ao invés do campo elétrico com em [1]. Os condutores e as regiões de fontes são apropriadamente tratados, para isso, é necessário calcular as cargas induzidas, que são então usadas no divergente de \mathbf{D} ($\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$). Nessa formulação, embora se armazene somente quatro componentes de campo sobre todo domínio computacional, pode-se reconstruir as duas componentes de campo que estão faltando. Desta forma, condições de contorno como Mur [3], ou PML [4], podem ser implementadas.

5.2 – A Formulação R-LN-FDTD em regiões livres de cargas

Vamos considerar primeiro o caso bidimensional TE, onde somente as componentes de campo E_1 , E_2 e H_3 são consideradas. Aplicando o operador divergente em ambos os lados das equações rotacionais de Maxwell (Eqs. (1) e (2)), e considerando regiões livres de cargas, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Aproximando as derivadas temporais por diferenças centradas na eq.(3) e por diferença avançada na eq.(4), reescrevemos as equações acima como segue:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}^{n+1/2} - \mathbf{D}^{n-1/2}) = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n) = 0. \quad (6)$$

Assumindo, inicialmente (no tempo $t = 0$ e $n = 0$) que todas as componentes são nulas sobre todo o domínio computacional, obtem-se, de (5) e (6):

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{n+1/2} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0. \quad (8)$$

Observe que a suposição de campos nulos no início é geralmente verdadeira em todo o domínio computacional, exceto para as regiões de fontes.

A equação (7) pode ser usada para relacionar as componentes do campo elétrico, assim como a equação (8), para relacionar as componentes do campo magnético. Contudo, é necessário escrever as equações de Maxwell no sistema de coordenadas gerais.

O divergente de uma função vetorial \mathbf{F} no sistema de coordenadas gerais é dado por (APÊNDICE A, eq.(A. 54))

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} (f^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial u^2} (f^2 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial u^3} (f^3 \sqrt{g}) \right\}. \quad (9)$$

Se \mathbf{F} for igual a \mathbf{D} , então $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ (região livre de fontes), nós temos para o modo TE

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} (D^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial u^2} (D^2 \sqrt{g}) \right\} = 0.. \quad (10)$$

Dessa forma, obtém-se a componente contravariante E^2 em função da componente contravariante E^1 , como segue:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_{i,j} E^1(i,j)^{n+1/2} \sqrt{g(i+1/2,j)} - \varepsilon_{i-1,j} E^1(i-1,j)^{n+1/2} \sqrt{g(i-1/2,j)}}{\Delta u^1} = - \\ & \frac{\varepsilon_{i,j} E^2(i,j)^{n+1/2} \sqrt{g(i,j+1/2)} - \varepsilon_{i,j} E^2(i,j-1)^{n+1/2} \sqrt{g(i,j-1/2)}}{\Delta u^2} \\ E^2(i,j)^{n+1/2} &= \frac{\varepsilon_{i,j-1} E^2(i,j-1)^{n+1/2} \sqrt{g(i,j-1/2)}}{\varepsilon_{i,j} \sqrt{g(i,j+1/2)}} - \frac{1}{\varepsilon_{i,j} \sqrt{g(i,j+1/2)}}. \\ & \frac{\varepsilon_{i,j} E^1(i,j)^{n+1/2} \sqrt{g(i+1/2,j)} - \varepsilon_{i-1,j} E^1(i-1,j)^{n+1/2} \sqrt{g(i-1/2,j)}}{\Delta u^2} \end{aligned} \quad (11)$$

É importante observar que Δu^1 e Δu^2 são feitos iguais a 1, porque os comprimentos físicos das arestas são incorporados nos vetores unitários, em outras palavras Δu^1 e Δu^2 estão incluídos em $\sqrt{g(i,j)}$.

A equação (11) pode ser incorporada no algoritmo LN-FDTD, e fazendo um esquema de atualização apropriado, somente a componente E^1 precisa ser armazenada em todo o domínio computacional (para o campo elétrico). Para explicar como isto é feito, assume-se que E^1 já tenha sido calculado com a equação de atualização do método LN-FDTD em todo domínio computacional e queremos continuar com a atualização de H^3 , sem ter que armazenar E^2 em todo domínio. É claro que antes de se calcular a componente do campo magnético H^3 é necessário transformar as componentes contravariantes do campo elétrico E^1 e E^2 em componentes covariantes, E_1 e E_2 . Após esta transformação, pode-se então atualizar a componente H^3 , através da seguinte equação:

$$H^3(i, j)^{n+1} = H^3(i, j)^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu V_3^h(i, j)} \cdot \left[\left(E_2(i+1, j)^{n+1/2} - E_2(i, j)^{n+1/2} \right) - \left(E_1(i, j+1)^{n+1/2} - E_1(i, j)^{n+1/2} \right) \right], \quad (12)$$

Observa-se que para a atualização de $H^3(i, j)$ é necessário calcular $E_2(i, j)^{n+1/2}$ e $E_2(i+1, j)^{n+1/2}$. Estes campos podem ser atualizados usando a eq.(11), assumindo que já tenha sido calculado $E_2(i, j-1)^{n+1/2}$ para todo i . Obviamente, que para começar o algoritmo, precisa-se conhecer $E_2(i, 1)^{n+1/2}$, que pode ser obtido com a equação de atualização do método LN-FDTD. A Fig. 1 mostra o esquema de atualização espacial que deve ser realizado para a atualização de $E_2(i, j)^{n+1/2}$.

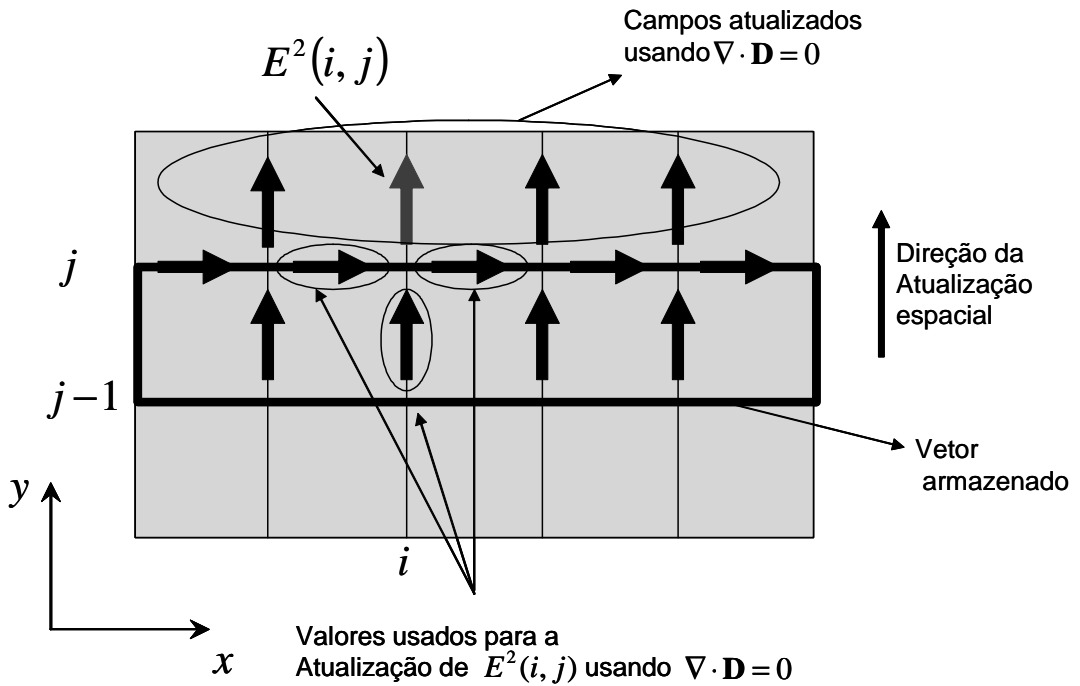


Fig.5.1 – Atualização espacial da componente do campo elétrico $E_2(i, j)^{n+1/2}$.

Como validação do algoritmo proposto, o mesmo problema de espalhamento eletromagnético sobre um cilindro dielétrico tratado em 4.3 foi considerado e analisado pelo novo método e comparado com o resultado obtido pelo método FDTD convencional. Aqui, a UPML em coordenadas gerais foi utilizada para truncar o domínio numérico. Para isso, precisou-se

recompor a componente de campo elétrico $E_2(i, j)^{n+1/2}$ para que a condição de contorno pudesse ser implementada. A Fig.5.2 mostra a comparação entre os resultados obtidos.

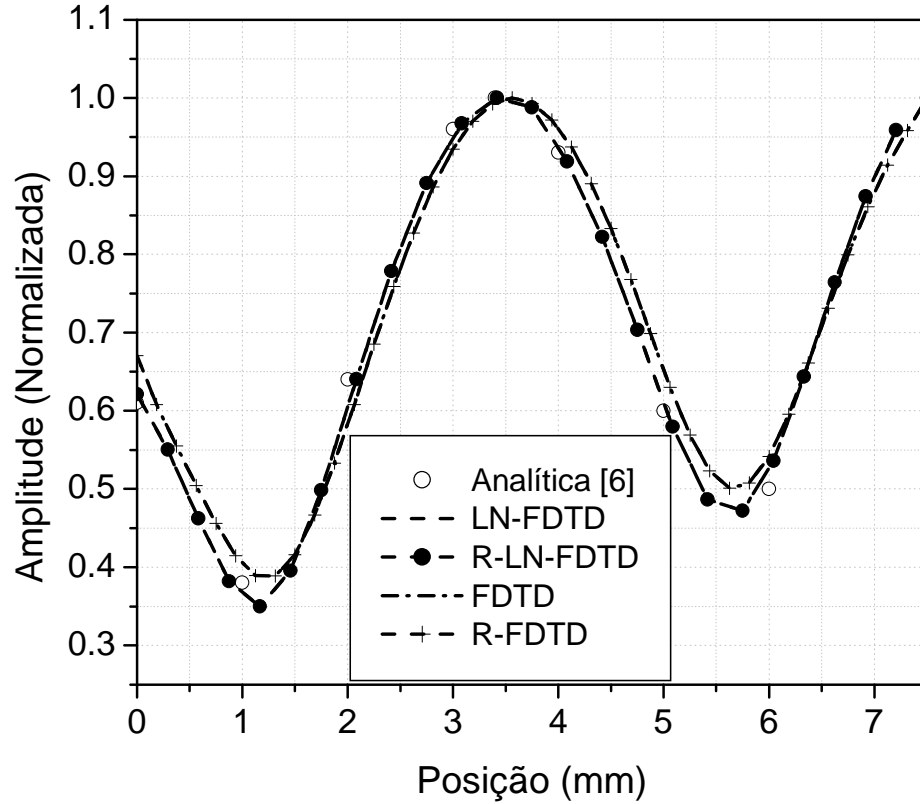


Fig.5.2 - Comparação entre os resultados obtidos pelos métodos: FDTD convencional, R-FDTD, LN-FDTD, R-LN-FDTD e pela solução analítica para o cilindro dielétrico, para a componente de campo E_x dentro do cilindro (linha de análise 2, Fig.4.22).

Referências Bibliográficas

- [1] P. Aoyagi, J. Lee, and R. Mittra, “A hybrid Yee algorithm/scalar-wave equation approach,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, pp. 1593-1600, Sept. 1993.
- [2] George D. Kondylis, “On indoor wireless channel characterization and the design of interference aware medium access control protocols for packet switched networks”, Doctor Thesis, *University of California*, Los Angeles, 2000.
- [3] G. Mur, “Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time domain electromagnetic field equations,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, pp. 377-382, Nov. 1981.
- [4] S.D. Gedney, “An Anisotropic Perfectly Matched Layer- Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-44, No. 12, pp. 1630-1639, Dec. 1996.
- [5] J. A. Stratton, “*Electromagnetic Theory*,” New York: McGraw-Hill, 1941.
- [6] D. S. Jones, *The Theory of Electromagnetics*, Macmillan, New York, NY, 1964.

Capítulo 6

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

6.1 - Conclusões

Um código foi desenvolvido para a solução de problemas de irradiação e de espalhamento eletromagnético em 2-D e 3-D. Esse código foi implementado para ser executado de forma sequencial, uma única máquina, ou utilizando-se processamento paralelo, cluster Beowulf. A metodologia utilizada permite a análise de estruturas que apresentam suas coordenadas não coincidentes com aquelas do sistema cartesiano, e dessa forma, aplica-se as condições de contorno nos contornos físicos dessas estruturas, sem aproximações.

Para o método apresentado, demonstrou-se a condição de estabilidade e a relação de dispersão numérica tridimensional para uma malha com g^{ij} constante. Em seguida, estudou-se o comportamento da velocidade de fase numérica em função da resolução da malha e da direção de propagação α , para diversos ângulos θ de inclinação desta malha. Os resultados obtidos mostram que o erro de dispersão numérica pode ser reduzido a um limite razoável, se for considerado uma resolução de no máximo $\lambda/10$ e que, a velocidade de fase numérica é sempre máxima na direção oblíqua à célula, ou seja, na direção da diagonal.

A aplicação da técnica LN-FDTD na solução de problemas de irradiação, requer uma condição de contorno absorvente para truncar o domínio numérico. Dessa forma, a UPML foi desenvolvida e implementada em coordenadas curvilíneas não ortogonais locais. A consistência para esta ABC é demonstrada a partir da relação de dispersão numérica obtida para o modo TM_3 , para um caso particular, onde o vetor unitário \mathbf{A}_3 é normal ao plano definido pelos outros dois vetores de base, \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 . Desta forma, se uma onda plana incide em um meio PML, ela será totalmente transmitida, independente do ângulo de incidência ou frequência.

Primeiramente, o método LN-FDTD foi aplicado na análise de duas antenas cornetas setoriais plano- E . Os resultados obtidos foram comparados com aqueles obtidos pelo método

FDTD convencional. Para a antena corneta setorial plano- E com abertura de $26,57^\circ$, a impedância de entrada é calculada. Observa-se que, nas altas frequências, mais precisamente a partir de 6.5 GHz, os resultados obtidos pelo método FDTD convencional passam a diferir daqueles encontrados pelo método LN-FDTD. Essa diferença é devida às aproximações por *staircase* utilizada pelo método FDTD convencional. Além disso, o método LN-FDTD é mais eficiente, do ponto de vista computacional, que o método FDTD convencional, como se pode observar na tabela 5.1. Para a antena corneta setorial plano- E com abertura de 14° , a impedância de entrada, o VSWR assim como o diagrama de irradiação para a frequência de 10 GHz são calculados. Como era de se esperar, os resultados obtidos pelo método FDTD convencional diferem, nas altas frequências, daqueles obtidos pelo método LN-FDTD.

Em seguida o método LN-FDTD foi utilizado para analisar uma antena de microfita em um substrato curvo. Como este método requer aproximadamente três vezes mais esforço computacional que o método FDTD convencional e trata-se de um problema 3D, o método LN-FDTD precisou ser implementado para ser executado usando-se computação paralela (cluster Beowulf). Dessa forma, a antena de microfita em um substrato curvo foi analisada considerando-se 1, 2, 4 e 6 processadores. Devido a geometria analisada ter somente 36 células na direção \hat{z} , o domínio de análise foi dividido apenas no plano x-y. Obteve-se a comparação entre o *speedup* linear (ideal) com aquele obtido pelo método LN-FDTD, em função do número de processadores. Observou-se que até dois processadores o *speedup* foi linear. A partir de dois processadores houve uma diminuição do *speedup* com relação ao caso ideal. Isto se deve principalmente ao aumento da comunicação (envio/recebimento) entre as máquinas, uma vez que há muitas componentes de campo que devem ser enviadas e recebidas. Uma forma de resolver esse problema é a implementação da comunicação nas interfaces dos subdomínios de forma mais apropriada, ou seja, empacotar os dados antes dos mesmos serem enviados e desempacotá-los após terem sido recebidos. Essa nova técnica já está sendo implementada para o método FDTD convencional e deverá ser testada neste algoritmo. Através da comparação entre os resultados obtidos pela antena de microfita curva e pela antena de microfita planar para o coeficiente de reflexão, o VSWR e a impedância de entrada, observou-se que a antena curva apresenta menor reflexão próxima à frequência de ressonância que a antena de microfita planar, tendo como consequência melhor casamento de impedância com a linha de alimentação. Vale observar que apenas o *patch* da antena de microfita curva se encontra na curva do substrato. Entretanto, o

método LN-FDTD pode ser facilmente aplicado para uma antena de microrfita que se encontre totalmente em uma superfície curva (linha de alimentação e o *patch*).

O método LN-FDTD foi ainda aplicado na análise de espalhamento eletromagnético por cilindro dielétrico. Desejava-se observar se o método LN-FDTD seria capaz de modelar de forma satisfatória superfícies totalmente cilíndricas. Um dos grandes problemas relacionados é que a formulação desenvolvida requer uma malha estruturada, e para que uma superfície totalmente cilíndrica seja modelada, é necessário um projeto adequado da malha para que a dispersão numérica seja mínima. Observou-se, após o projeto de cinco malhas, para o cilindro analisado, que o erro de dispersão pode ser reduzido se a malha for simétrica, ou seja, constrói-se apenas um quarto da malha e depois se usa funções do gerador de malhas (`copy > surface > transformation > Mirror`) para se construir as outras partes. Os resultados obtidos pelos dois métodos em questão, comparados com a solução analítica, mostraram que o método LN-FDTD é um método preciso bem como eficiente computacionalmente, pois foi necessário apenas malha de 83×83 para que a solução obtida seja praticamente coincidente com a solução exata. A análise feita de espalhamento por cilindro dielétrico foi uma análise bidimensional, entretanto, uma análise tridimensional de cilindros dielétricos ou metálicos pode ser feita facilmente. A idéia de se modelar cilindros dielétricos é de suma importância, pois, pode-se calcular de forma precisa a atenuação das ondas eletromagnéticas por estes cilindros nas frequências desejadas e depois inserir essas perdas nos modelos empíricos de propagação, como por exemplo, nos modelos de propagação em florestas.

Por fim, a formulação LN-FDTD foi modificada para reduzir a memória requerida, permitindo um aumento de 50% no volume de análise para um dado tamanho de memória computacional. Em contrapartida, tem-se um aumento moderado na complexidade do código. Apesar do desenvolvimento da formulação ser feita para um caso bidimensional, a sua extensão para o caso 3D é direta. Dessa forma, estruturas dielétricas tridimensional podem ser analisadas com esta nova formulação. A condição de contorno absorvente desenvolvida pode ser aplicada para truncar o domínio de análise. Para isso é necessário recompor as componentes de campo nas regiões que contém a UPML.

A utilização de condutores em regiões livres de cargas, para o método R-FDTD pode ser tratado calculando-se as cargas induzidas nas superfícies condutoras e acrescentando-as nas equações obtidas para regiões livres de cargas, ou tratando o dielétrico como um dielétrico de alta

permissividade. Verificou-se, para este método, que a partir de uma permissividade relativa de valor 2000 (na frequência de 20 GHz), o dielétrico comporta-se como um metal.

A utilização de condutores em regiões livres de cargas, para o método LN-FDTD não é tão fácil de ser aplicada, isso porque existem dois conjuntos de componentes, componentes contravariantes e covariantes. Verificou-se que, usando-se dielétrico com permissividade de valor 2000, o efeito causado era como se a componente contravariante fosse nula. Entretanto, para o caso bidimensional, as duas componentes devem ser nulas nas interfaces do cilindro metálico, e os resultados apresentavam uma pequena diferença. Por isso, não se abordou a utilização de condutores para o método R-LN-FDTD.

6.2 - Sugestões para trabalhos futuros

1 – O método LN-FDTD mostrou-se ser capaz de modelar precisamente geometrias curvas, entretanto, para que isso possa ser feito, uma malha estruturada é necessária. O fato de se usar malhas estruturadas, limita a aplicação do método na análise de geometrias altamente complexas. Dessa forma, a extensão do método LN-FDTD para ser utilizado com malhas não estruturadas, o tornaria mais geral, permitindo sua aplicação na análise de dispositivos como, por exemplo: divisores de potência Wilkinson, Gysel etc...

2 – Para a aplicação do método LN-FDTD um gerador de malhas deve ser utilizado para discretizar o domínio de análise e fornecer todos as coordenadas desta malha. Utilizou-se o GID 6.1.2. para gerar as coordenadas X, Y e Z de todos os pontos da malha. Entretanto, apesar de todos os pontos da malha serem escritos em um arquivo de saída, eles não tinham uma lógica para que pudessem ser lidos de forma direta, sendo necessário outros procedimentos para a leitura desses dados. O desenvolvimento de um gerador de malhas que pudesse ser acoplado ao código LN-FDTD tornaria o método proposto muito mais eficiente.

3 – A implementação paralela do algoritmo FDTD e LN-FDTD é baseada na divisão do domínio de análise em subdomínios, para que cada processador, executando basicamente o mesmo programa (código fonte), possa executar as diferentes tarefas de cada subdomínio. Entretanto, é o programador quem divide manualmente o domínio de análise, definindo o que cada processador deve fazer. Para um cluster com 50 nós este procedimento é inviável. Dessa forma, o desenvolvimento de um programa que possa ser usado para realizar esta tarefa tornaria ambos os métodos uma ferramenta ainda mais poderosa para a análise de geometrias de grandes dimensões elétricas, como, por exemplo, na análise de espalhamento eletromagnético para a caracterização de canal *wireless* em ambientes *indoor*.

4 – Estudos podem ser feitos para otimizar a forma de comunicação nas interfaces dos subdomínios envio/recebimento, quando se utiliza a computação paralela do algoritmo FDTD e LN-FDTD. Uma saída que está sendo testada é empacotar os dados antes dos mesmos serem enviados e desempacotá-los após terem sido recebidos. Esta nova técnica já está sendo implementada para o método FDTD convencional e deverá ser testada no método LN-FDTD.

6 – Escrever o algoritmo LN-FDTD, considerando-se as sugestões 2, 3 e 4, na forma visual, ou seja, onde seja possível o usuário simplesmente desenhar a estrutura que quer analisar, discretizá-la, escolher o tipo de fonte que deverá ser utilizada e depois simular, isso tudo em um só ambiente. Esta é uma tarefa desafiadora, pois se entraria em uma outra área, que seria na de *Software*.

7 – Por fim, o código desenvolvido pode ser utilizado na análise de inúmeros dispositivos eletromagnéticos.

APÊNDICE A

Sistema de coordenadas não ortogonais.

Neste capítulo, define-se um sistema de coordenadas curvilíneas gerais a partir de um conjunto de três vetores independentes chamados de vetores unitários ou vetores de base. A partir desses vetores, um segundo conjunto de três vetores chamados de vetores recíprocos é definido, sendo estes individualmente ortogonais aos pares consecutivos dos vetores unitários. A partir deste conhecimento básico, serão demonstradas as equações para o cálculo do gradiente de uma função escalar e do divergente e rotacional de um vetor.

A.1 – Vetores unitários e recíprocos

Para efeito de definição dos vetores unitários e recíprocos, considere uma dada região de espaço caracterizada pelas funções u^1, u^2 e u^3 ,

$$u^1 = f_1(x, y, z), u^2 = f_2(x, y, z), u^3 = f_3(x, y, z), \quad (\text{A.1})$$

as quais são funções contínuas, independentes e de valor único das coordenadas retangulares x, y e z . De forma análoga, as equações acima podem ser solucionadas com relação à x, y e z , como segue:

$$x = \varphi_1(u^1, u^2, u^3), y = \varphi_2(u^1, u^2, u^3), z = \varphi_3(u^1, u^2, u^3), \quad (\text{A.2})$$

onde x, y e z são também funções independentes, contínuas e de valor único dentro de certos limites. Dentro deste contexto, as funções u^1, u^2 e u^3 são chamadas de coordenadas gerais ou curvilíneas.

Para efeito de melhor entendimento dos conceitos que serão aqui abordados, considere a Fig. A.1. Nesta Figura, o vetor posição \mathbf{r} , de um ponto $P(x, y, z)$ qualquer, pode ser considerado uma função das coordenadas u^1, u^2 e u^3 como,

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3). \quad (\text{A.3})$$

De maneira que por cada ponto $P(x, y, z)$ passam três superfícies chamadas de superfícies de coordenadas, onde cada superfície é caracterizada pelo nome da coordenada que é constante. Vale ressaltar que em cada superfície de coordenada uma coordenada é constante e as outras duas são variáveis. Quando duas superfícies de coordenadas se interceptam tem-se como resultado uma curva, a qual é chamada de curva de coordenada, ao longo da qual duas coordenadas são constantes e uma é variável. Desta maneira, cada curva de coordenada será designada pela coordenada variável.

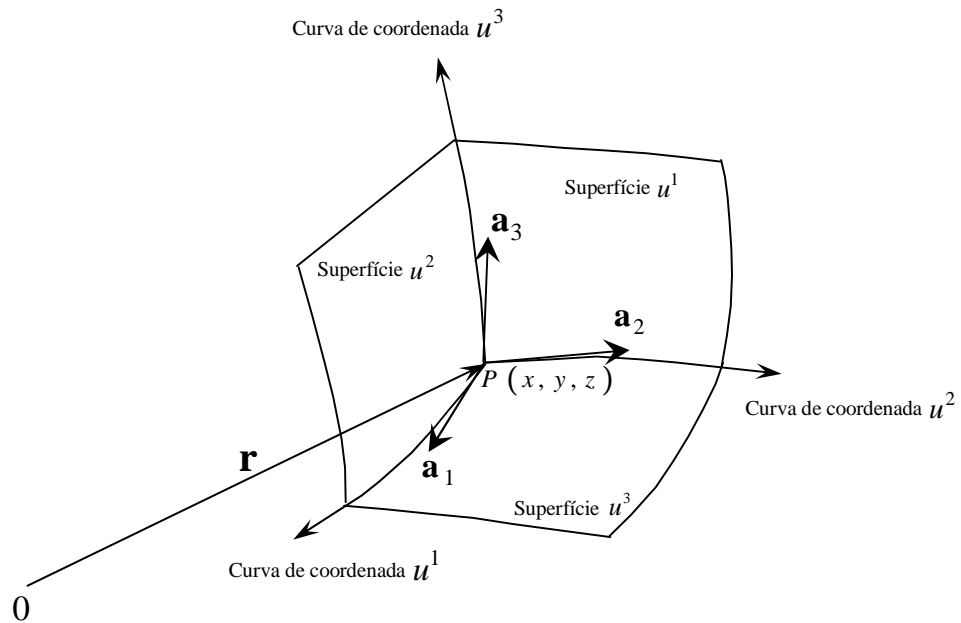


Fig.A.1- Superfícies de coordenadas, curvas de coordenadas e vetores de base para um sistema de coordenada curvilínea.

Para o cálculo da diferencial de \mathbf{r} , pequenos deslocamentos ao longo das curvas de coordenadas são considerados, de forma que:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} du^3, \quad (\text{A.4})$$

onde $\partial \mathbf{r} / \partial u^1$, $\partial \mathbf{r} / \partial u^2$ e $\partial \mathbf{r} / \partial u^3$ representam os deslocamentos de \mathbf{r} nas direções das curvas de coordenadas u^1, u^2 e u^3 , respectivamente. Dessa forma para um ponto $P(u^1, u^2, u^3)$ um conjunto de vetores são definidos.

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, \mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}. \quad (\text{A.5})$$

Estes vetores são denominados de vetores unitários ou vetores de base associados ao ponto P . Eles definem os eixos unitários do espaço curvilíneo geral, conforme pode ser observado na Fig.A.1. Os vetores unitários não têm necessariamente comprimento unitário, suas dimensões dependem do sistema de coordenadas gerais que se está utilizando e representam um sistema de base de referência para todos os outros vetores relacionados ao ponto P .

A equação (A.4) pode então ser reescrita em função dos vetores de base como segue:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_1 du^1 + \mathbf{a}_2 du^2 + \mathbf{a}_3 du^3. \quad (\text{A.6})$$

Um conjunto alternativo de vetores, chamado de recíproco pode ser definido por:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \mathbf{a}^2 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \mathbf{a}^3 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \quad (\text{A.7})$$

onde V é o volume do paralelepípedo formado pelos vetores de base, ou seja

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \quad (\text{A.8})$$

e \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 e \mathbf{a}^3 são os vetores unitários recíprocos, os quais são perpendiculares aos planos formados pelos pares de vetores $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)$ e $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, respectivamente. Os vetores recíprocos constituem a base de um outro sistema de coordenadas, e não têm intensidade necessariamente unitária. Para melhor entendimento da geometria dos sistemas, aqui considerados, ver Fig. A.2.

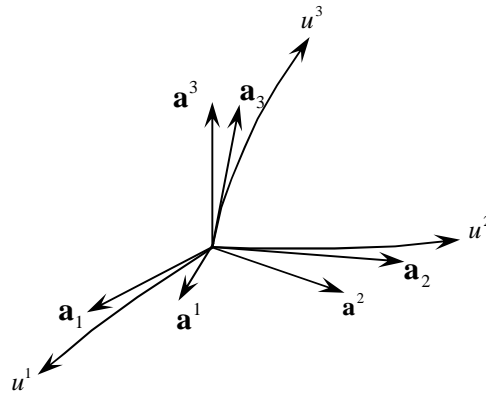


Fig.A.2 – Vetores unitários e recíprocos para um sistema de coordenadas gerais.

Partindo-se de (A.7) e (A.8) pode-se mostrar que

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (\text{A.9})$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker.

Neste ponto, os vetores unitários podem então ser expressos em termos dos vetores recíprocos \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 e \mathbf{a}^3 , o que é feito por relações idênticas àsquelas dadas em (A.7), ou seja,

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}^2 \times \mathbf{a}^3), \mathbf{a}_2 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}^3 \times \mathbf{a}^1), \mathbf{a}_3 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2). \quad (\text{A.10})$$

Como os dois grupos de vetores, considerados até então, não são coplanares e estão relacionados pelas equações (A.7)-(A.10), isto nos permite classificá-los como sistemas recíprocos.

Agora, se os vetores unitários recíprocos são empregados como um sistema de base, a diferencial $d\mathbf{r}$ pode ser escrita como

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}^1 du_1 + \mathbf{a}^2 du_2 + \mathbf{a}^3 du_3, \quad (\text{A.11})$$

onde du_1 , du_2 e du_3 representam as componentes de $d\mathbf{r}$ nas direções definidas pela nova base de vetores e u_1 , u_2 e u_3 são as coordenadas do sistema recíproco, as quais são funções das coordenadas gerais.

Das equações (A.6) e (A.11), pode-se escrever

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{a}_1 du^1 + \mathbf{a}_2 du^2 + \mathbf{a}_3 du^3 \\ d\mathbf{r} &= \mathbf{a}^1 du_1 + \mathbf{a}^2 du_2 + \mathbf{a}^3 du_3 \end{aligned} \right\} d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i du^i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{a}^j du_j. \quad (\text{A.12})$$

Multiplicando-se a primeira equação de (A.12) por \mathbf{a}^i e a segunda por \mathbf{a}_j , e utilizando a reciprocidade entre os vetores (eq.(A.9)), encontra-se

$$\mathbf{a}_j \cdot d\mathbf{r} = du_j = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i du^i, \quad \mathbf{a}^i \cdot d\mathbf{r} = du^i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j du_j \quad (\text{A.13})$$

Aqui, se pode então introduzir dois novos parâmetros, os quais representarão o produto escalar entre dois vetores unitários

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = g_{ji}, \quad (\text{A.14})$$

e entre dois vetores recíprocos quaisquer

$$g^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j = g^{ji} , \quad (\text{A.15})$$

que representam os coeficientes métricos, como será visto a frente.

Da equação (A.13) e fazendo-se uso das equações (A.14) e (A.15), as componentes de $d\mathbf{r}$ no sistema de base recíproco e no sistema de base unitário estão relacionadas por, respectivamente:

$$\begin{aligned} du_j &= \sum_{i=1}^3 g_{ji} du^i \\ du^i &= \sum_{j=1}^3 g^{ij} du_j . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A.2 – Representação de um vetor nos sistemas acima definidos

Para efeito de aplicação da teoria acima desenvolvida, seja um vetor fixo \mathbf{F} , em um ponto P , o qual pode ser representado no sistema de base \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 e \mathbf{a}_3 ou com respeito ao sistema recíproco \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 e \mathbf{a}^3 , usando-se a equação (A.12), como segue

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 f^i \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^3 f_j \mathbf{a}^j . \quad (\text{A.17})$$

Da equação acima e considerando-se a equação (A.16), pode-se observar que as componentes de \mathbf{F} no sistema unitário, estão relacionadas com as componentes de \mathbf{F} no sistema recíproco por:

$$f_j = \sum_{i=1}^3 g_{ji} f^i , \quad f^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} f_j . \quad (\text{A.18})$$

Pode-se também observar, que as componentes acima, podem ser encontradas a partir do conhecimento do vetor \mathbf{F} , o que pode ser obtido multiplicando-se a equação (A.17) por \mathbf{a}^i e \mathbf{a}_j , respectivamente, e considerando-se a equação (A.9), o que resulta:

$$f^i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^i, \quad f_j = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_j. \quad (\text{A.19})$$

Substituindo (A.19) em (A.17) resulta,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^i) \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_j) \mathbf{a}^j, \quad (\text{A.20})$$

onde as componentes f^i são chamadas de componentes contravariantes do vetor \mathbf{F} , enquanto que as componentes f_i são chamadas de componentes covariantes.

Como referenciado anteriormente, as características dos vetores unitários são dependentes da natureza do sistema de coordenadas curvilíneas utilizado. Dessa forma, um conjunto apropriado de vetores unitários, com seus respectivos comprimentos unitários, são definidos:

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}} = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \mathbf{i}_2 = \frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{g_{22}}}, \quad \mathbf{i}_3 = \frac{\mathbf{a}_3}{\sqrt{g_{33}}}, \quad (\text{A.21})$$

onde a equação (A.14) foi considerada, e conseqüentemente, de (A.17) pode-se escrever

$$\mathbf{F} = F^1 \mathbf{i}_1 + F^2 \mathbf{i}_2 + F^3 \mathbf{i}_3, \quad (\text{A.22})$$

com

$$F^i = f^i \sqrt{g_{ii}}, \quad (\text{A.23})$$

onde F^i representa as componentes físicas no sistema de base. Para se obter as componentes de campo em unidades independentes da geometria, as seguintes normalizações deverão ser aplicadas

$$F^i = f^i \sqrt{g_{ii}}, F_i = f_i \sqrt{g^{ii}}, \quad (\text{A.24})$$

onde g_{ii} e g^{ii} foram definidos em (A.14).

A.3 – Representação dos elementos de comprimento, área e volume

Na solução das equações de Maxwell, no sistema de coordenadas curvilíneas, haverá a necessidade de se usar elementos de arco, de superfície e volume, os quais serão obtidos conforme os seguintes procedimentos.

Considere ds_1 como sendo um deslocamento infinitesimal a partir de $P(u^1, u^2, u^3)$ e ao longo da curva u^1 , e ds_1 a sua magnitude. Fazendo-se uso de (A.14), obtém-se

$$ds_1 = \mathbf{a}_1 du^1, \quad ds_1 = |ds_1| = \sqrt{g_{11}} du^1. \quad (\text{A.25})$$

Similarmente, para as magnitudes dos deslocamentos ao longo das curvas u^2 e u^3 , encontra-se

$$\begin{aligned} ds_2 &= \mathbf{a}_2 du^2, \quad ds_2 = \sqrt{g_{22}} du^2, \\ ds_3 &= \mathbf{a}_3 du^3, \quad ds_3 = \sqrt{g_{33}} du^3. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Para o elemento de área, considere um paralelogramo infinitesimal, como mostrado na Figura A.3, o qual é construído sobre a superfície u^1 . Este paralelogramo tem como lados os vetores ds_2 e ds_3 . Pode-se então encontrar a área do mesmo, fazendo-se uso da equação (A.26), através da seguinte equação

$$\begin{aligned}
da_1 &= |ds_2 \times ds_3| = |\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3| du^2 du^3, \\
da_1 &= \sqrt{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} du^2 du^3.
\end{aligned}
\tag{A.27}$$

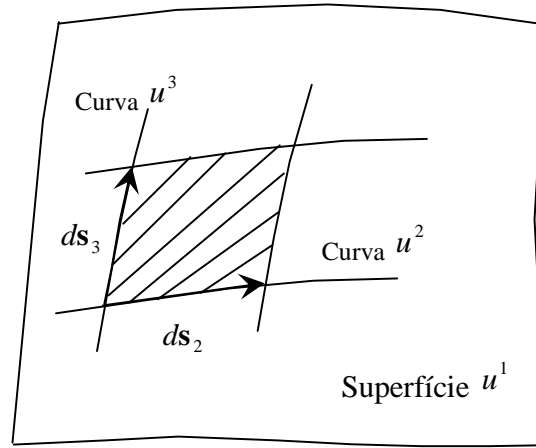


Fig.A.3 – Elemento de área na superfície u^1 .

Com o objetivo de escrever a equação (A.27) em uma forma mais adequada e, em função dos coeficientes métricos, faz-se uso da seguinte identidade vetorial

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \tag{A.28}$$

onde \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e \mathbf{d} são vetores quaisquer. Desta forma, pode-se escrever que

$$(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3)(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2) = g_{22}g_{33} - g_{23}^2. \tag{A.29}$$

Desta forma, substituindo (A.29) em (A.27), resulta

$$da_1 = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} du^2 du^3. \tag{A.30}$$

Seguindo um procedimento similar para o cálculo dos elementos de área nas superfícies u^2 e u^3 , encontra-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} da_2 &= \sqrt{g_{33}g_{11} - g_{31}^2} du^3 du^1, \\ da_3 &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Finalmente, um elemento de volume pode ser obtido através da expressão

$$dV = d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 du^1 du^2 du^3. \quad (\text{A.32})$$

Para escrever a equação acima em uma forma mais apropriada, pode-se fazer $\mathbf{F} = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ na equação (A.20), de onde se obtém

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = (\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3 \quad (\text{A.33})$$

Com relação à equação acima, pode-se substituir as expressões (equação (A.7)) para os vetores recíprocos, resultando na seguinte equação

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1}{V} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) + \frac{\mathbf{a}_2}{V} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) + \frac{\mathbf{a}_3}{V} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad (\text{A.34})$$

a qual, ao ser multiplicada escalarmente por \mathbf{a}_1 , obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) &= \\ \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \cdot [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3] &. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

A equação anterior pode ser reescrita de maneira a se chegar ao Jacobiano da transformação, para tal a mesma é multiplicada pelo volume do paralelepípedo formado pelos vetores de base (eq. (A.8)) e, então, fazendo-se uso da identidade vetorial (eq. (A.28)), para encontrar:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)]^2 &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 [(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2)] + \\ &\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 [(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) \cdot (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3)] + \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 [(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) \cdot (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1)]. \quad (\text{A.36})$$

O próximo passo é substituir os produtos escalares entre os vetores de base, que aparecem na equação (A.36), por seus respectivos coeficientes métricos g_{ij} (eq. (A.14)), obtêm-se a seguinte expressão.

$$[\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)]^2 = g_{11}[g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}] + g_{12}[g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}] + g_{13}[g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31}], \quad (\text{A.37})$$

ou, na forma matricial

$$[(\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3))]^2 = g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad V = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \sqrt{g}, \quad (\text{A.38})$$

onde \sqrt{g} é o Jacobiano da transformação. Finalmente, substituindo a equação acima em (A.32), chega-se à expressão final para o elemento diferencial de volume

$$dV = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3. \quad (\text{A.39})$$

Pode-se agora obter expressões correspondentes para os elementos de arco, área e volume no sistema de base recíproca através da troca de g_{ij} por g^{ij} . Entretanto, observa-se que os coeficientes g_{ij} são suficientes para caracterizar completamente as propriedades geométricas do espaço com relação a qualquer sistema curvilíneo de coordenadas.

A.4 – Os Operadores Diferenciais

Neste tópico, mostrar-se-á como se obtém o gradiente, o divergente, e o rotacional num sistema de coordenadas curvilíneas.

A.4.1 - O gradiente de uma função escalar

O gradiente de uma função escalar $\phi(u^1, u^2, u^3)$ é um vetor fixo definido em direção e magnitude como a taxa máxima de variação de ϕ com relação as coordenadas. A variação em ϕ (diferencial de ϕ) ocorrida durante um deslocamento $d\mathbf{r}$ é definida por

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial u^i} du^i, \quad (\text{A.40})$$

onde du^i ($i=1,2,3$), que aparece em (A.40), representa as componentes contravariantes do vetor deslocamento $d\mathbf{r}$ e é obtido por (ver eq.(A.19))

$$du^i = \mathbf{a}^i \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A.41})$$

a qual ao ser substituída na eq.(A.40), resulta

$$\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial u^i} \mathbf{a}^i \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (\text{A.42a})$$

ou

$$\left(\nabla\phi - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial u^i} \mathbf{a}^i \right) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (\text{A.42b})$$

e desde que o deslocamento $d\mathbf{r}$ seja arbitrário, obtêm-se o gradiente de uma função escalar em qualquer sistema de coordenada curvilíneas

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \frac{\partial\phi}{\partial u^i} = \left(\mathbf{a}^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \mathbf{a}^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + \mathbf{a}^3 \frac{\partial}{\partial u^3} \right) \phi, \quad (\text{A.43})$$

Com o operador ∇ dado por:

$$\nabla = \mathbf{a}^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \mathbf{a}^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + \mathbf{a}^3 \frac{\partial}{\partial u^3} . \quad (\text{A.44})$$

Observa-se que a eq.(A.43) está escrita no sistema de base recíproco. Para escrevê-la no sistema de base unitário, pode-se usar a eq. (A.18), de tal forma que:

$$\mathbf{a}^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} \mathbf{a}_j . \quad (\text{A.45})$$

A.4.2 - O divergente de uma função vetorial

A equação para o divergente de uma função vetorial $\mathbf{F}(u^1, u^2, u^3)$, no sistema recíproco, em um ponto P , pode ser deduzida mais facilmente usando-se a definição de vetor recíproco (eq.A.7). Para tal demonstração, parte-se da equação abaixo

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{A.46})$$

onde V é o volume, S é a área da superfície que limita este volume, \mathbf{n} é o versor normal à S e da representa um elemento diferencial de área. Então, para o cálculo do divergente de um vetor qualquer, seja o elemento de volume num sistema de coordenadas curvilíneas, conforme mostra a Fig.A.4.

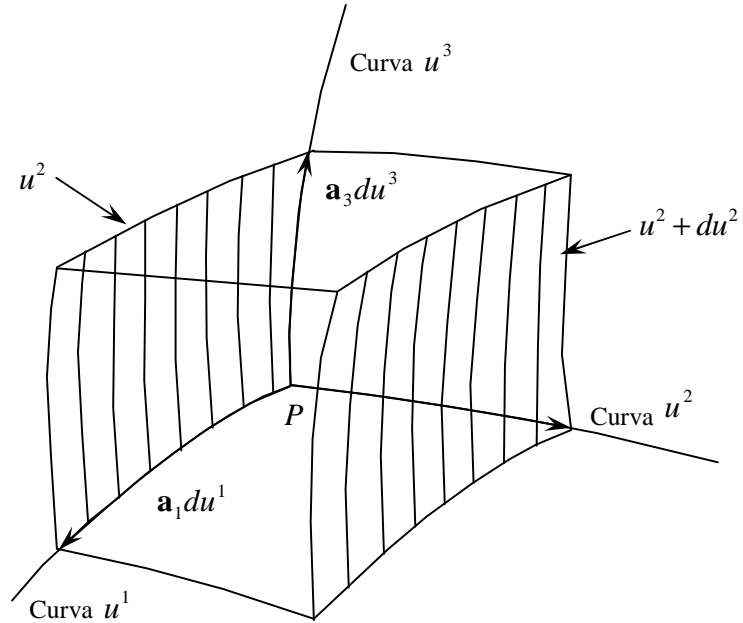


Fig.A.4 – Elemento de volume em um sistema de coordenadas curvilíneas.

Através desta figura pode-se calcular o fluxo nas faces do paralelepípedo em u^2 e $u^2 + du^2$. Para isto precisa-se caracterizar a área das faces sob o aspecto vetorial de forma a indicar o sentido do fluxo através das mesmas, o que pode ser feito por exemplo pela expressão $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) du^1 du^3$, para a face em u^2 (sentido *outward*). A contribuição nestas faces, para o cálculo do fluxo *outward*, é portanto,

$$\left[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) du^1 du^3 \right]_{em(u^2 + du^2)} + \left[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) du^1 du^3 \right]_{em(u^2)} . \quad (\text{A.47})$$

Para valores suficientemente pequenos de du^2 , a expressão (A.47) pode ser aproximada pelo termo linear de uma expansão de Taylor, o que é feito como segue

$$\left[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) du^1 du^3 \right]_{u^2 + du^2} \cong \left[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) du^1 du^3 \right]_{u^2} + du^2 \frac{\partial}{\partial u^2} \left[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) du^1 du^3 \right]_{u^2} ,$$

que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) du^1 du^3 \right]_{u^2+du^2} + \left[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) du^1 du^3 \right]_{u^2} \equiv \\ & du^2 \frac{\partial}{\partial u^2} \left[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) du^1 du^3 \right]_{u^2} . \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Após o que, multiplicando a segunda equação, em (A.7), escalarmente por um vetor qualquer \mathbf{F} , resulta

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^2 V, \quad (\text{A.49})$$

que associada com a equação $f^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^2$, obtida de (A.19), obtém-se

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = f^2 V = f^2 \sqrt{g} . \quad (\text{A.50})$$

Conseqüentemente, a contribuição das duas faces para a integral de superfície é:

$$\frac{\partial}{\partial u^2} (f^2 \sqrt{g}) du^1 du^2 du^3 . \quad (\text{A.51})$$

Contribuições análogas podem ser obtidas para os outros pares de superfícies, resultando nas expressões:

$$\frac{\partial}{\partial u^1} (f^1 \sqrt{g}) du^1 du^2 du^3 , \quad (\text{A.52})$$

para as faces em u^1 e $u^1 + du^1$, e

$$\frac{\partial}{\partial u^3} (f^3 \sqrt{g}) du^1 du^2 du^3 , \quad (\text{A.53})$$

Para as faces em u^3 e $u^3 + du^3$.

No limite quando $\Delta V \rightarrow 0 \Rightarrow du^i \rightarrow 0$, para $i = 1, 2, 3$, e como $\Delta V = dV = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3$, o divergente de \mathbf{F} (eq.(A.46)) passa a ser dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{g} du^1 du^2 du^3} \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (f^i \sqrt{g}) du^1 du^2 du^3 \right\}$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (f^i \sqrt{g}) \quad (\text{A.54})$$

A.4.3 - O rotacional de uma função vetorial

Para a obtenção da equação do rotacional de um vetor \mathbf{F} , no sistema de coordenadas gerais, pode-se partir da equação de definição do rotacional. Neste caso, a componente do rotacional em uma dada direção, definida por um versor \mathbf{n} , é dada por

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{A.55})$$

onde S representa a área de uma superfície qualquer e c é o contorno desta superfície. Desta forma, calcula-se primeiro as contribuições da integral de linha de um elemento retangular localizado na superfície u^1 (ver Fig.A.5), onde os seus lados são $\mathbf{a}_2 du^2$ e $\mathbf{a}_3 du^3$. A contribuição dos lados paralelos à curva u^3 , conforme Fig.A.5, é

$$\left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 du^3 \right]_{u^2+du^2} - \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 du^3 \right]_{u^2}, \quad (\text{A.56})$$

e para a curva u^2 , obtém-se

$$-\left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2 du^2\right]_{u^3+du^3} + \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2 du^2\right]_{u^3} . \quad (\text{A.57})$$

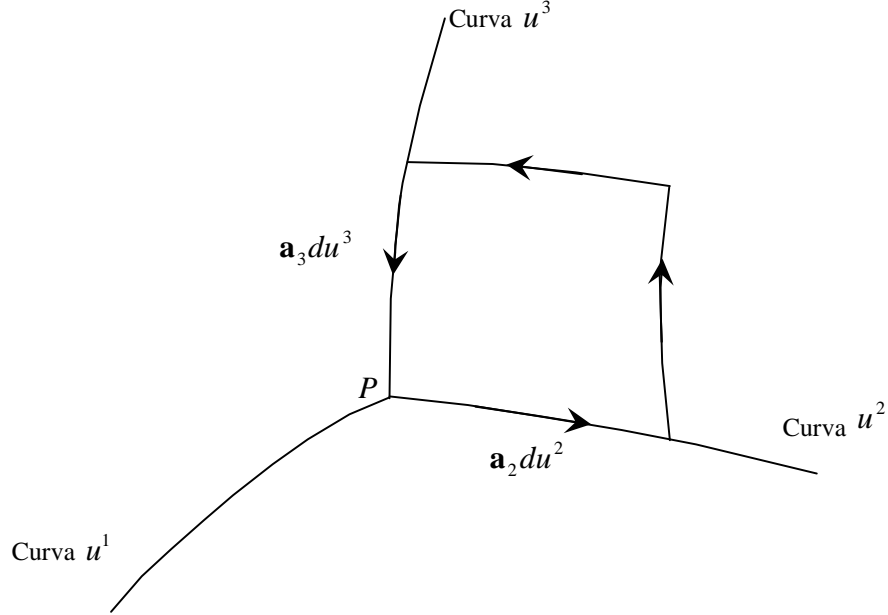


Fig.A.5 - Cálculo da componente do rotacional, em coordenadas curvilíneas, na direção do vetor \mathbf{n} .

Aproximando-se as equações (A.56) e (A.57) por série de Taylor, têm-se

$$\left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 du^3\right]_{u^2+du^2} - \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 du^3\right]_{u^2} = du^2 \frac{\partial}{\partial u^2} \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 du^3\right]_{u^2} , \quad (\text{A.58})$$

$$\left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2 du^2\right]_{u^3+du^3} - \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2 du^2\right]_{u^3} = du^3 \frac{\partial}{\partial u^3} \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2 du^2\right]_{u^3} , \quad (\text{A.59})$$

respectivamente. Então, para concluir a circulação em (A.55), soma-se (A.56) com (A.57), levando-se em conta as duas últimas equações, resultando na aproximação

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 du^3\right]_{u^2+du^2} - \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3 du^3\right]_{u^2} - \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2 du^2\right]_{u^3+du^3} + \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2 du^2\right]_{u^3} = \\ & \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2) \right] du^2 du^3 . \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Para resolver o limite em (A.55), a eq.(A.60) deve ser dividida pela área do retângulo (eq.(A.30)) e para representar o versor \mathbf{n} escolhe-se o vetor recíproco \mathbf{a}^1 uma vez que este é sempre normal à superfície u^1 , o que não acontece com o vetor unitário \mathbf{a}_1 . Dessa forma, \mathbf{n} é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}^1}{\sqrt{\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1}}. \quad (\text{A.61})$$

Substituindo as equações (A.27), (A.60) e (A.61) em (A.55), resulta na componente desejada do rotacional

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \frac{\mathbf{a}^1}{\sqrt{\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1}} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}} \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2) \right], \quad (\text{A.62})$$

a qual pode ser escrita em uma forma mais adequada. Com este objetivo, as equações (A.7) e (A.8) permitem escrever

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = V \mathbf{a}^1 = [\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)] \mathbf{a}^1 = \sqrt{g} \mathbf{a}^1. \quad (\text{A.63})$$

Logo, substituindo (A.63) em (A.62), encontra-se

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \frac{\mathbf{a}^1}{\sqrt{\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{g} \mathbf{a}^1 \cdot \sqrt{g} \mathbf{a}^1}} \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2) \right], \quad (\text{A.64})$$

ou

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2) \right]. \quad (\text{A.64a})$$

Por analogia, encontram-se as demais componentes do rotacional de \mathbf{F} , ou seja

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{a}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3) \right], \quad (\text{A.65})$$

componente na direção de \mathbf{a}^2 e

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{a}^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_1) \right], \quad (\text{A.66})$$

na direção de \mathbf{a}^3 . Então, substituindo na eq. (20) \mathbf{F} por $\nabla \times \mathbf{F}$ e desenvolvendo o somatório, pode-se escrever

$$\nabla \times \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^i) \mathbf{a}_i = (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^1) \mathbf{a}_1 + (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^2) \mathbf{a}_2 + (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^3) \mathbf{a}_3. \quad (\text{A.67})$$

Para concluir a demonstração, são substituídas às equações (A.64a)-(A.66) em (A.67). Desta maneira, encontra-se

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2) \right) \mathbf{a}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial u^3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_3) \right) \mathbf{a}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial u^1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_1) \right) \mathbf{a}_3 \right]. \quad (\text{A.68})$$

Esta equação pode ainda ser escrita em função das componentes covariantes de \mathbf{F} (f_j), o que é feito através da eq. (A.19). Finalmente, têm-se para o rotacional de um vetor com relação a um sistema de coordenadas gerais

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial u^2} (f_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (f_2) \right) \mathbf{a}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial u^3} (f_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (f_3) \right) \mathbf{a}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial u^1} (f_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (f_1) \right) \mathbf{a}_3 \right]. \quad (\text{A.68a})$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. A. Stratton, “*Electromagnetic Theory*,” New York: McGraw-Hill, 1941.

APÊNDICE B

Em um sistema de coordenadas curvilíneas gerais, o operador *nabla* ∇ é expresso pela eq.(A.44), conforme visto no APÊNDICE A. Entretanto, a representação deste operador por uma outra equação mais apropriada é necessária para que a solução da equação de onda vetorial seja obtida de forma direta. Assim sendo, demonstra-se que o operador *nabla* pode ser representado simbolicamente por:

$$\nabla = -2j \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{A}^i \sin\left(\frac{k_i \Delta u^i}{2}\right) \right]. \quad (\text{B.1})$$

Assume-se para tal, que a solução da equação de onda para o campo elétrico seja dada pela eq.(2.35), levando-se em conta a eq.(2.36). Desta forma, aplicando-se o operador *nabla* (eq.(A.44)) na eq.(2.35) e usando-se aproximações de diferenças centradas para as derivadas espaciais, obtém-se

$$\nabla \mathbf{E} = \left(\mathbf{A}^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \mathbf{A}^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + \mathbf{A}^3 \frac{\partial}{\partial u^3} \right) \mathbf{e}(t) e^{-j(k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3)}.$$

Para a primeira componente

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{E})_1 &= \left(\mathbf{A}^1 \frac{\partial}{\partial u^1} \right) \mathbf{e}(t) e^{-j(k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3)} = \mathbf{e}(t) \mathbf{A}^1 \frac{\partial}{\partial u^1} e^{-j(k_1 I \Delta u^1 + k_2 J \Delta u^2 + k_3 K \Delta u^3)} \\ (\nabla \mathbf{E})_1 &= \mathbf{e}(t) \mathbf{A}^1 \left(\frac{e^{-j\left(k_1 \left(I + \frac{1}{2}\right) \Delta u^1 + J k_2 \Delta u^2 + K k_3 \Delta u^3\right)} - e^{-j\left(k_1 \left(I - \frac{1}{2}\right) \Delta u^1 + J k_2 \Delta u^2 + K k_3 \Delta u^3\right)}}{\Delta u^1} \right), \\ (\nabla \mathbf{E})_1 &= \frac{\mathbf{e}(t) \mathbf{A}^1}{\Delta u^1} \mathbf{e}(t) e^{-j(k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3)} \left(e^{-j\left(\frac{1}{2} k_1 \Delta u^1\right)} - e^{+j\left(\frac{1}{2} k_1 \Delta u^1\right)} \right), \\ (\nabla \mathbf{E})_1 &= -2j \frac{\mathbf{e}(t) \mathbf{A}^1}{\Delta u^1} \mathbf{e}(t) e^{-j(k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3)} \frac{\left(e^{+j\left(\frac{1}{2} k_1 \Delta u^1\right)} - e^{-j\left(\frac{1}{2} k_1 \Delta u^1\right)} \right)}{2j}, \end{aligned}$$

$$(\nabla \mathbf{E})_1 = -2j \frac{\mathbf{A}^1}{\Delta u^1} \operatorname{sen} \left(\frac{k_1 \Delta u^1}{2} \right) \mathbf{E}.$$

As outras componentes são obtidas fazendo-se o mesmo procedimento. Dessa forma, a equação completa para a operação $\nabla \mathbf{E}$, com os $\Delta u^i = 1$, é dada abaixo.

$$\nabla \mathbf{E} = -2j \sum_{i=1}^3 \mathbf{A}^i \operatorname{sen} \left(\frac{k_i \Delta u^i}{2} \right) \mathbf{E}, \quad (\text{B.2})$$

com o operador *nabla* dado pela eq. (B.1)

APÊNDICE C

Em um sistema de coordenadas gerais e considerando-se uma malha com g^{ij} constante, a relação de dispersão numérica pode ser demonstrada. Para isso, considere uma região da malha com suas células tendo dimensões Δh_1 , Δh_2 , Δh_3 (nas direções u^1 , u^2 e u^3 , respectivamente), e com os vetores unitário de base e os vetores recíprocos dispostos como mostra a Fig 2.3. Para simplificar a análise, assume-se que \mathbf{A}_3 seja ortogonal ao plano definido por \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 , sendo θ o ângulo entre esses dois vetores, e que a onda se propague no plano definido por \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 formando um ângulo α em relação ao vetor \mathbf{A}_1 (ver Figura C.1)

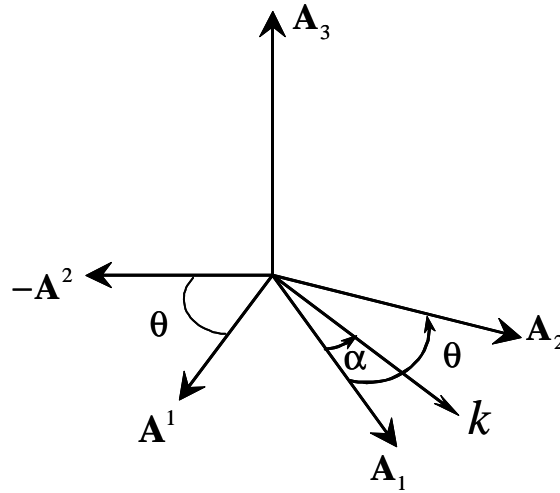


Fig.C.1 – Vetores unitários de base e vetores recíprocos para uma malha com g^{ij} constante.

Para este tipo particular de malha, os coeficientes métrico são dados por

$$g_{11} = (\Delta h_1)^2, \quad g_{12} = \Delta h_1 \Delta h_2 \cos(\theta), \quad g_{33} = (\Delta h_3)^2, \quad g_{22} = (\Delta h_2)^2, \quad g_{13} = g_{23} = 0, \quad (\text{C.1})$$

e

$$\begin{aligned}
g^{11} &= \frac{1}{(\Delta h_1)^2 \sin^2(\theta)}, g^{12} = g^{21} = \frac{-\cos(\theta)}{\Delta h_1 \Delta h_2 \sin^2(\theta)}, g^{13} = \frac{1}{\Delta h_1 \Delta h_3 \sin(\theta)} \\
g^{22} &= \frac{1}{(\Delta h_2)^2 \sin^2(\theta)}, g^{23} = \frac{1}{\Delta h_2 \Delta h_3 \sin(\theta)}, g^{31} = \frac{1}{\Delta h_3 \Delta h_1 \sin(\theta)} \\
g^{32} &= \frac{1}{\Delta h_3 \Delta h_2 \sin(\theta)}, g^{33} = \frac{1}{(\Delta h_3)^2}.
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Além dos coeficientes métricos, dados acima, é necessário obter as componentes do número de onda no sistema de coordenadas gerais, para que a eq. (2.48a) possa ser solucionada. Para isso faz-se uso da equação $k_i = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i$ ($i=1,2,3$), obtendo-se

$$\begin{aligned}
k_1 &= k \mathbf{A}_1 \cos(\alpha) = k \Delta h_1 \cos(\alpha) \\
k_2 &= k \mathbf{A}_2 \cos(\theta - \alpha) = k \Delta h_2 \cos(\theta - \alpha) \\
k_3 &= k \mathbf{A}_3 \cos(90^\circ) = 0.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Substituindo-se as equações (C.2) e (C.3) na equação que caracteriza a relação de dispersão numérica tridimensional (eq. (2.48a)) para o sistema de coordenadas gerais, obtêm-se

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{c^2\Delta t^2} &= \frac{1}{(\Delta h_1)^2 \sin^2 \theta} \sin^2\left(\frac{k\Delta h_1}{2} \cos \alpha\right) \\
&\quad - 2 \frac{\cos \theta}{\Delta h_1 \Delta h_2 \sin^2 \theta} \sin\left(\frac{k\Delta h_2}{2} \cos(\alpha - \theta)\right) \sin\left(\frac{k\Delta h_1}{2} \cos \alpha\right) \\
&\quad - \frac{1}{(\Delta h_2)^2 \sin^2 \theta} \sin^2\left(\frac{k\Delta h_2}{2} \cos(\alpha - \theta)\right).
\end{aligned} \tag{C.4}$$

APÊNDICE D

Parâmetros dependentes da frequência

Após a obtenção dos resultados transientes no domínio do tempo, são feitos os cálculos para encontrar os correspondentes no domínio da frequência, usando-se transformada de Fourier (F). A vantagem de uma implementação feita com este procedimento é que os cálculos são executados em um único código de programação, servindo de forma direta para computar os coeficientes da matriz de espalhamento. O que é feito através da equação:

$$S_{11}(\omega) = \frac{F\{V(t)^{tot} - V(t)^{inc}\}}{F\{V(t)^{inc}\}}, \quad (D.1)$$

na qual $V(t)^{tot}$ é a voltagem total computada na porta de acesso. Para o caso da antena corneta, esta porta de acesso encontra-se a 20 células do guia de onda para as paredes inclinadas da corneta, (Figura 4.1). A voltagem total $V(t)^{tot}$ é obtida em regime de estabilidade da antena, e contém informações do pulso incidente $V(t)^{inc}$. Por outro lado, $V(t)^{inc}$ é obtido no mesmo acesso a partir da simulação de uma guia de onda infinito. Em se tratando da antena de microfita, $V(t)^{tot}$ é também obtida na porta de acesso (porta 1) que se encontra à 10 células do patch, de acordo com a Fig.4.12 e $V(t)^{inc}$ é obtida pela simulação de uma linha de microfita infinita. Logo, o parâmetro S_{11} representa o coeficiente de reflexão devido à descontinuidade das estruturas (Figura 4.1 e Figura 4.12), pois equação (D.1) representa a relação da voltagem refletida pela voltagem incidente.

O cálculo da impedância de entrada do modelo proposto é facilmente obtido a partir de S_{11} . Este parâmetro tem importante aplicação em projetos de antenas, podendo ser usado para estudar o casamento entre a alimentação e a antena, de tal forma que a impedância de entrada é dada por [1]

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + S_{11}e^{2ikL}}{1 - S_{11}e^{2ikL}}, \quad (D.2)$$

sendo Z_0 a impedância da linha (do guia de onda ou da linha de microfita), L a distância que vai do acesso (que se encontra na linha de transmissão) até a descontinuidade da antena (patch da microfita ou abertura inclina da corneta) e k é o número de onda, dado pela formula:

$$k = 2\pi f_{ress} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{reff}} , \quad (D.3)$$

em que f_{ress} e ϵ_{reff} são a frequência de ressonância e a constante dielétrica efetiva, respectivamente, para a antena e a linha de fita.

A partir do cálculo das perdas de retorno, a taxa de onda estacionária de voltagem, (VSWR) pode ser calculada como

$$VSWR = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |S_{11}(\omega)|}{1 - |S_{11}(\omega)|} . \quad (D.4)$$

APÊNDICE E

C #####
PARTES PRINCIPAIS DO PROGRAMA (2D) QUE ANALISA O ESPALAMENTO DE UMA
ONDA PLANA (MODO TE) SOBRE UM CILÍNDRIO DIELÉTRICO, EM DUAS
DIMENSÕES Fig. (4.22), PARA A FREQUÊNCIA DE 20 GHZ USANDO O ALGORÍTIMO
LN-FDTD

AUTOR: RONALDO OLIVEIRA DOS SANTOS

DATA: 14/02/2004

UFPA/CT/PPGEE/LANE

C #####

PROGRAM cylinder_dieletrico

T=100.D-12	! largura do pulso gaussiano
diam=7.5d-3	! diâmetro do cilindro
ra=diam/2	! raio do cylinder
fc= 20 GHz	! frequência central, ou frequência de modulação
dt=1	! referência para o cálculo de dt
ic	! número de camadas
nx	! número de células na direção x
ny	! número de células na direção y
eps0	! permissividade no espaço livre
ami0	! permeabilidade no espaço livre
m	! ordem da função polinomial que representa a atenuação na UPML
jl	! posição da onda plana em j

C INICIALIZAÇÃO DOS VETORES POSIÇÕES

```
do j=1,ny2
do i=1,nx2
X(i,j)=0.D0
Y(i,j)=0.D0
enddo
enddo
```

C INICIALIZAÇÃO DOS CAMPOS

```
do 10 i = 1,nx1
do 10 j = 1,ny1
e1(i,j) = 0      ! componente contravariante
e2(i,j) = 0      ! componente contravariante
h3(i,j) = 0      ! componente contravariante
e1c(i,j) = 0     ! componente covariante
e2c(i,j) = 0     ! componente covariante
```

10 continue

C LEITURA DOS DADOS GERADOS PELO GID 6.1.2

```
open(1,file = 'X_cylinder.dat')
rewind(1)
open(2,file = 'Y_cylinder.dat')
rewind(2)
do j=1,ny2
  do i=1,nx2
    read(1,*) X(i,j)
    read(2,*) Y(i,j)
  enddo
enddo
```

C CÁLCULO DAS METRICAS g11, g22, g12, sqrt(g), g11c, g22c, g12c

```
do i=1,nx1
  do j=1,ny1

    A1x= (X(i+1,j+1)+X(i+1,j))/2 - (X(i,j)+X(i,j+1))/2 ! component. do vetor unitário de base
    A1 na direção  $\hat{x}$ 
    A1y= (Y(i+1,j+1)+Y(i+1,j))/2 - (Y(i,j)+Y(i,j+1))/2 ! component. do vetor unitário de base
    A1 na direção  $\hat{y}$ 
    A2x= (X(i,j+1)+ X(i+1,j+1))/2 - (X(i,j)+X(i+1,j))/2 ! component. do vetor unitário de
    base A2 na direção  $\hat{x}$ 
    A2y= (Y(i,j+1)+ Y(i+1,j+1))/2 - (Y(i,j)+Y(i+1,j))/2 ! component. do vetor unitário de
    base A2 na direção  $\hat{y}$ 

    g11(i,j)= A1x*A1x+ A1y*A1y                                coeficientes métricos (EQ. A14)
    g12(i,j)= A1x*A2x+ A1y*A2y                                coeficientes métricos (EQ. A14)
    g22(i,j)= A2x*A2x+ A2y*A2y                                coeficientes métricos (EQ. A14)
    raizg(i,j)= A1x*A2y- A1y*A2x                               ! Jacobiano de transformação (EQ. A.38)
    g11c(i,j)=(A2x*A2x+ A2y*A2y)/(raizg(i,j)*raizg(i,j))      coeficientes métricos EQ. A15)
    g22c=(A1x*A1x+ A1y*A1y)/(raizg(i,j)*raizg(i,j))          coeficientes métricos EQ. A15)
    g12c=(-A2x*A1x- A2y*A1y)/(raizg(i,j)*raizg(i,j))         coeficientes métricos EQ. A15)
```

C CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE

C VETOR QUE DARÁ TODOS OS INCREMENTOS DE TEMPO DE TODOS AS CÉLULAS, SENDO QUE APENAS O MENOR SERÁ ESCOLHIDO

```
vinct(i,j)=1/(cluz*dsqrt(g11c(i,j)+g22c+2*g12c))            EQ. (2.46)
if(vinct(i,j).lt.bb)then
```

```

dt=vinct(i,j)
endif
enddo
enddo

```

C REGIÃO ENTRE A UPML E A REGIÃO DE ANÁLISE

```

io=nc+1
il=nx1-nc
jo=nc+1
jl=ny1-nc

```

C CONSTANTES UTILIZADAS PARA CÁLCULO DAS EQUAÇÕES DE UPML

```

cte=eps0/dt
cte1=ami0/dt
cte2=ami0/eps0

```

C DEFINIÇÃO DOS SIGMAS QUE REPRESENTAM AS PERDAS PARA A REGIÃO DA UPML

```

dy=0.42857d-3
dx=0.42847d-3
sigmax1=(m+1)/(150*pi*dx)
sigmax2=(m+1)/(150*pi*dy) ! sigmas óptimos

```

```

do i=1,nx
if(i.lt.il.and.i.ge.io)then
sig1_e1(i)=0
sig1_e2(i)=0
elseif(i.ge.1.and.i.lt.io)then
sig1_e1(i)=sigmax1*abs(i-io+0.5)**m/nc**m
sig1_e2(i)=sigmax1*abs(i-io)**m/nc**m
else
sig1_e1(i)=sigmax1*abs(i-il+0.5)**m/nc**m
sig1_e2(i)=sigmax1*abs(i-il)**m/nc**m
endif
enddo

```

```

do j=1,ny
if(j.lt.jl.and.j.ge.jo)then
sig2_e1(j)=0
sig2_e2(j)=0
elseif(j.ge.1.and.j.lt.jo)then
sig2_e1(j)=sigmax2*abs(j-jo)**m/nc**m
sig2_e2(j)=sigmax2*abs(j-jo+0.5)**m/nc**m
else
sig2_e1(j)=sigmax2*abs(j-jl)**m/nc**m
sig2_e2(j)=sigmax2*abs(j-jl+0.5)**m/nc**m
endif
enddo

```

```

endif
enddo
do i=1,nx
if(i.lt.i1.and.i.ge.io)then
sig1_h3(i)=0
elseif(i.ge.1.and.i.lt.io)then
sig1_h3(i)=sigmax1*abs(i-io+0.5)**m/nc**m
else
sig1_h3(i)=sigmax1*abs(i-i1+0.5)**m/nc**m
endif
enddo

```

```

do j=1,ny
if(j.lt.j1.and.j.ge.jo)then
sig2_h3(j)=0
elseif(j.ge.1.and.j.lt.jo)then
sig2_h3(j)=sigmax2*abs(j-jo+0.5)**m/nc**m
else
sig2_h3(j)=sigmax2*abs(j-j1+0.5)**m/nc**m
endif
enddo

```

C INICÍO DO LOOP DO TEMPO

```
do 15 n=1,nt
```

C CÁLCULO DA COMPONENTE CONTRAVARIANTE e1 TANTO NA REGIÃO DE ANÁLISE QUANDO NA REGIÃO DE UPML

```
do i=1,nx
do j=1,ny
```

```
if((i.ge.io.and.i.lt.i1).and.(j.ge.jo.and.j.lt.j1)) then ! REGIÃO DE ANÁLISE
```

```
vole1= (raizg(i,j)+raizg(i,j-1))/2 ! EQ. (2.18)
```

```
cte3=epse1(i,j)/dt
```

```
e1(i,j)=e1(i,j) + (1/(cte3*vole1))*(h3(i,j)-h3(i,j-1)) ! EQ. (2.15)
```

```
else ! REGIÃO DE UPML
```

```
vole1= (raizg(i,j)+raizg(i,j-1))/2
```

```
h3til(i,j)=h3til(i,j)*(cte-sig2_e1(j)/2)/(cte+sig2_e1(j)/2)+ ! EQ. (3.31)
```

```
*(1/(cte+sig2_e1(j)/2))*(cte*(h3(i,j)-h3(i,j-1))-cte*(h3pas(i,j)-h3pas(i,j-1)))
```

```
e1(i,j)=e1(i,j) + (1/(cte*vole1))*h3til(i,j) EQ. (3.32)
```

```
endif
```



```

        enddo
        enddo

C          CÁLCULO DA COMPONENTE CONTRAVARIANTE e2 TANTO NA
REGIÃO DE ANÁLISE QUANDO NA REGIÃO DE UPML

        do i=1,nx
        do j=1,ny

        if((i.ge.io.and.i.lt.i1).and.(j.ge.jo.and.j.lt.j1)) then          ! REGIÃO DE ANÁLISE

        vole2= (raizg(i,j)+raizg(i-1,j))/2                                ! EQ. (2.19)
        cte3=epse2(i,j)/dt
        e2(i,j)=e2(i,j) +(1/(cte3*vole2))* (h3(i-1,j)-h3(i,j))          ! EQ.(2.16)

        else                                                                ! REGIÃO DE UPML

        vole2= (raizg(i,j)+raizg(i-1,j))/2
        e2(i,j)=e2(i,j)*(cte-sig1_e2(i)/2)/(cte+sig1_e2(i)/2) +          ! EQ.(3.34)
        *(1/((cte+sig1_e2(i)/2)*vole2))* (h3(i-1,j)-h3(i,j))

        endif

        enddo
        enddo

C          EXCITAÇÃO (ONDA PLANA)

        j=jl
        do i=1,nx
        source= exp((n*dt-3*T)**2/(-T**2))*sin(2*pi*fc*(n*dt))
        vole1= (raizg(i,j)+raizg(i,j-1))/2
        e1(i,j)=e1(i,j) + (1/(cte*vole1))*(h3(i,j)-h3(i,j-1)) + source
        enddo

C          PAREDE ELÉTRICA PARA TRUNCAR A UPML, PARA AS
COMPOANANTE CONTRAVARIANTES e1 e e2

        do i=1,nx
        e1(i,1)=0
        e1(i,ny1)=0
        enddo
        do j=1,ny
        e2(1,j)=0
        e2(nx1,j)=0
        enddo

```

C TRANSFORMAÇÃO DE COMPONENTES CONTRAVARIANTES PARA COVARIANTES

Do i=1,nx
Do j=1,ny

```

do i=1,nx
do j=1,ny
e1C(i,j)=((g11(i,j)+g11(i,j-1))/2)*e1(i,j)+ ((g12(i,j)+g12(i,j-1))/2)*(e2(i,j)+e2(i+1,j)+e2(i,j-1)+
* e2(i+1,j-1))/4 ! EQ. (2.21)
enddo
enddo

```

```

do i=1,nx
do j=1,ny
e2cpas(i,j)=e2c(i,j)
e2C(i,j)=((g22(i,j)+g22(i-1,j))/2)*e2(i,j)+(g12(i,j)+g12(i-1,j))/2)*(e1(i,j)+e1(i,j+1)+e1(i-1,j+1)+
* e1(i-1,j))/4 ! EQ.(2.22)
enddo
enddo

```

C PAREDE ELÉTRICA PARA TRUNCAR A UPML, PARA AS COMPOANANTE COVARIANTES e1 e e2

```

do i=1,nx
e1c(i,1)=0.d0
e1c(i,ny1)=0.d0
enddo
do j=1,ny
e2c(1,j)=0.d0
e2c(nx1,j)=0.d0
enddo

```

C CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO H3

OBS: Para o caso bidimensional o campo magnético pode ser considerado tanto covariante quanto contravariante

```

do i=1,nx
do j=1,ny

if((i.ge.io.and.i.lt.i1).and.(j.ge.jo.and.j.lt.j1)) then ! REGIÃO DE ANÁLISE

h3pas(i,j)=h3(i,j) ! ARAMAZENA O VALO DO CAMPO NO INSTANTE PASSADO
h3(i,j)=h3(i,j)+(1/(cte1*raizg(i,j)))*(e1c(i,j+1)-e1c(i,j)+ e2c(i,j)-e2c(i+1,j)) ! EQ. (2.12)

else ! REGIÃO DE UPML

```

