

FI3104 Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Tarea 6

Camila Sandivari

Profesor: Valentino Gonzalez

Profesor Auxiliar: Felipe Pesce

(Dated: 4 de noviembre de 2015)

El presente reporte muestra la resolución de ecuaciones parabólicas, que modelan procesos de reacción y difusión para dos sistemas de interés; Fisher-KPP modela como una onda la forma en que un gen se dispersa espacialmente en una población, cuando éste es ventajoso para la especie, Newell-Whitehead-Segel describe convección de la forma Rayleigh-Benard que se produce en una capa de fluido calentada desde abajo. Para lograr el objetivo se debe discretizar usando métodos distintos, la parte de la reacción se resuelve con un método de Euler explícito y la parte de la difusión con Cranck-Nickolson.

Procedimiento

Parte 1 Para resolver la ecuación de Fisher-KPP (1) con sus respectivas condiciones iniciales, se implementa un algoritmo que resuelve la parte de difusión con método Cranck-Nickolson y la de reacción con método Euler explícito.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2 \quad (1)$$

$$n(t, 0) = 1 \quad (2)$$

$$n(t, 1) = 0 \quad (3)$$

$$n(0, x) = e^{-x^2/0.1} \quad (4)$$

Con $n(x, t)$ la densidad de la especie en tiempo, μn la tendencia de la especie a crecer indefinidamente, $-\mu n^2$ el factor competencia debido al aumento de densidad de población, y $\gamma \nabla^2 n$ la tendencia de la especie a dispersarse para encontrar más recursos.

Los métodos de resolución se obtienen de resolver la ecuación (5) mediante discretizar de la forma mostrada en (6). Cuando el parámetro a es igual a 0 se tiene el método de Euler explícito que resuelve la parte de reacción del problema, y cuando a es igual a 1 se conoce como método Cranck-Nickolson y resuelve la parte de difusión del problema.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\epsilon} = \frac{a}{2} \left[\frac{T_{k+1}^{n+1} - 2T_k^{n+1} + T_{k-1}^{n+1}}{h^2} \right] + \frac{2-a}{2} \left[\frac{T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n}{h^2} \right] \quad (6)$$

El algoritmo implementado busca resolver ecuaciones parabólicas lineales, asumiendo que son de la forma $A\vec{\varphi} = \vec{b}$ y buscando los parámetros que la ajustan a los casos particulares de cada problema a resolver.

Parte 2 El problema dos es análogo al anterior pero se busca resolver el siguiente sistema, correspondiente a la ecuación Newell-Whitehead-Segel:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3) \quad (7)$$

$$n(t, 0) = 0 \quad (8)$$

$$n(t, 1) = 0 \quad (9)$$

$$n(0, x) = \text{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)} \quad (10)$$

Resultados

Parte 1 Se presenta en la figura 1 el gráfico para la densidad $n(x, t)$ en función de x , la posición. Se observa el equilibrio inestable en $x = 0$ porque corresponde a un máximo en la función y un equilibrio estable en $x = 1$ que se ve como el mínimo.

Parte 2 Los gráficos de las figuras 3 y 4 presentan la solución de la densidad para la ecuación Newell-Whitehead-Segel, y la representación en mapa de colores de x versus t , respectivamente. Se observan los puntos de equilibrio previstos, $x = 0$ y $x = \pm 1$.

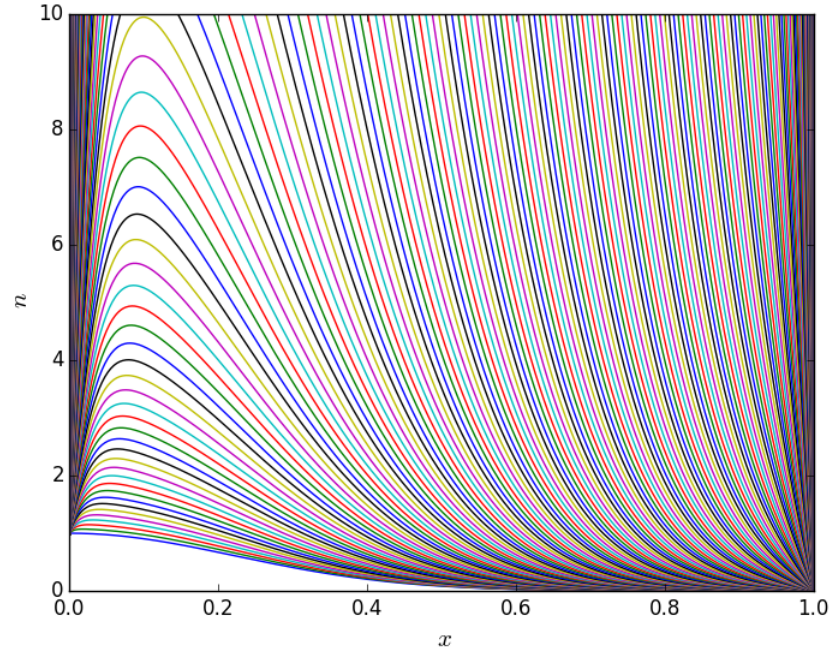


Figura 1. Densidad de población obtenida de la ecuación Fisher- KPP. En el eje y se encuentra la densidad. En el eje x se encuentra la variable x referente a la posición.

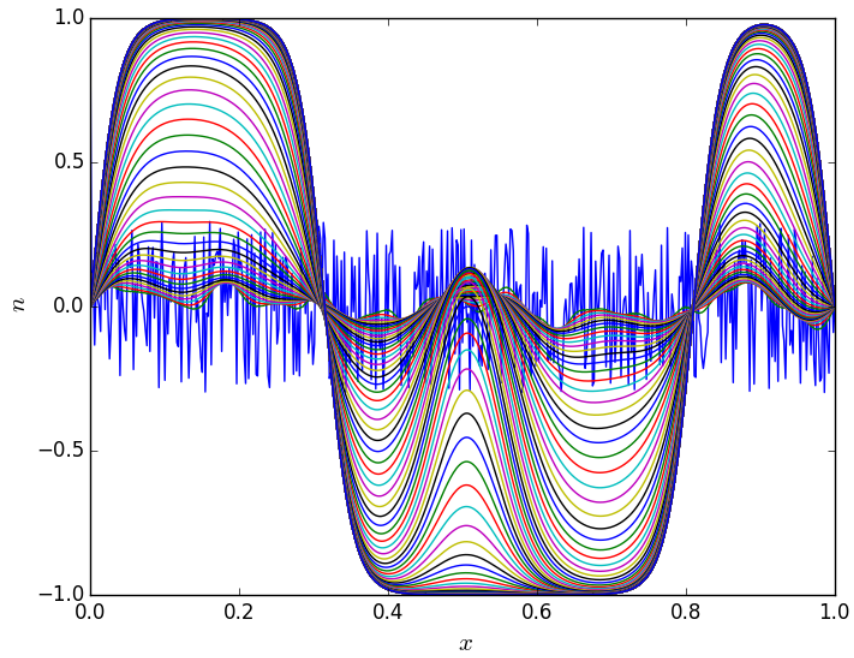


Figura 2. Densidad de población obtenida de la ecuación Newell-Whitehead-Segel. En el eje y se encuentra la densidad. En el eje x se encuentra la variable x referente a la posición.

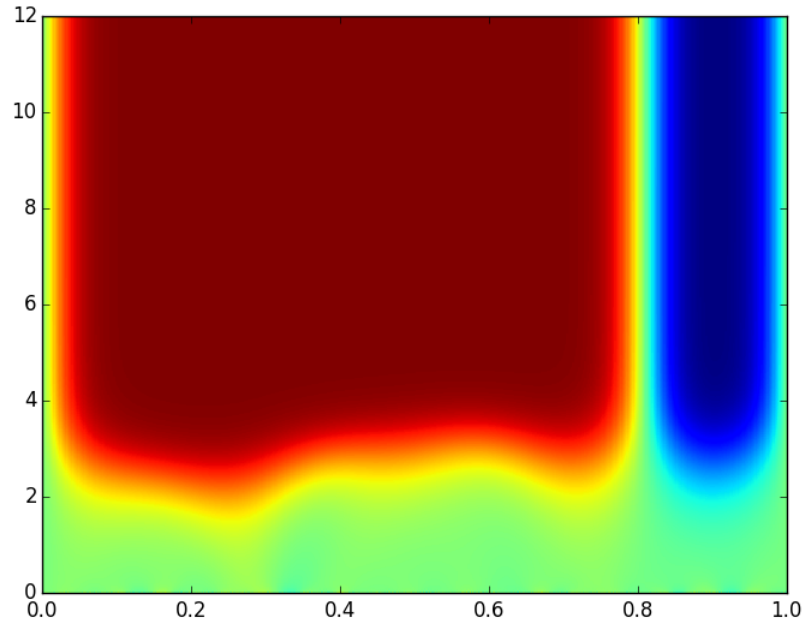


Figura 3. Mapa a color de x versus t . En el eje y se ve la posición x . En el eje x se ve el tiempo

Conclusiones Se logran resolver las ecuaciones planteadas, usando el método tridiagonal para ecuaciones parabólicas, dividido en Euler explícito y Cranck- Nickolson dependiendo de la etapa estudiada, entendiendo que se estudian ecuaciones que describen procesos de difusión y reacción. Se obtiene una idea clara de la evolución de los sistemas, sus puntos de equilibrio y respectivas estabilidades a través de graficos de la densidad en función de la posición.