Construction des espaces de Eilenberg-MacLane en HoTT

Camil Champin

Encadré par Emile Oleon et Samuel Mimram

Juin-Juillet 2023

1 Introduction du problème

1.1 Notion de Groupe en HoTT

Note sur les types connexes : Dans un type connecté, tout les types égalité sont non-vides. Pour autant il ne s'agit pas toujours de propositions :

$$\prod_{x,y:X} \|x = y\|_{-1} \not\simeq \prod_{x,y:X} (x = y)$$

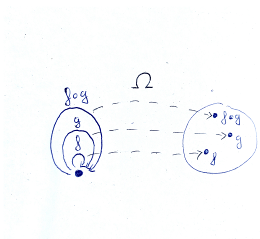
En particulier, une proposition (droite) a des égalités triviales, ce qui n' est pas le cas pour tout type connexe : un exemple est $\mathbb{S}_1$.

Définition 1.1. *On appelle* groupe *un tuple :*

- $S : Set$
- $e : S$
- $\mu : \sum_{\star:S\to S\to S} \prod_{g_1,g_2,g_3:S} (g_1 \star e = e \star g_1 = g_1) \times (g_1 \star (g_2 \star g_3) = (g_1 \star g_2) \star g_3)$
- $\iota : \sum_{\mathrm{inv}:S\to S} \prod_{g:S} (f(g) \star g = g \star f(g) = e)$

1.2 Type Classifiant

Une operation fréquente en théorie des catégories est de faire correspondre à chaque monoïde une catégorie pointée à *un* objet, c'est à dire un point avec des flèches qui bouclent sur lui.



L'objet qui va jouer le rôle de la catégorie ici est un type *non-vide*, *connexe*, et on réclame également qu' il s'agisse d'un *groupoïde* (les types égalité sont des ensembles). On pose l'univers de tels types :

$$\mathcal{U}_*^{=1} :\equiv \sum_{A:\mathcal{U}} A \times \text{is-connected}(A) \times \text{is-groupoid}(A)$$

Il s'agit d'un espace pointé (A, a), son *loop-space* $\Omega(A, a) :\equiv (a = a)$ est un ensemble, et c'est naturellement un groupe. On va enfaite montrer que cette transformation Ω est une équivalence, on appelle sa pseudo-inverse B. Ainsi pour chaque groupe G on a un *espace classifiant* de G, BG. On appelle shape_G l'élément distingué de BG.

1.3 Actions de Groupes

Une action ϕ de $G \curvearrowright X$ est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \phi : BG &\to Set \\ * &\mapsto X \end{aligned}$$

De sorte à ce que par transport $\phi(g) : X = X$, à lire comme "ϕ induit pour chaque élément de G un automorphisme de X". On note G-set : $(BG \to Set)$ le type des ensembles sur lesquels G agit.

2 Construction de $K(G,1)$ par torseurs

Définition 2.1. *Si (A, a_0) est un type pointé, on note* $\mathrm{BAut}(A) :\equiv \sum_{x:A} \|x = a_0\|_{-1}$ *la composante connexe de a_0 dans A.*

Proposition 2.2. *Le loop-space de la composante connexe de a_0 est le loop-space de a_0 :*

$$\Omega(\mathrm{BAut}(A)), a_0) = \Omega(A, a_0)$$

Démonstration. $(\mathrm{BAut}(A), a_0)$ est un type pointé, et soit code la fibration :

$$\begin{aligned} \mathrm{code} : \mathrm{BAut}(A)) &\to \mathcal{U} \\ (x, !) &\mapsto (x =_A x) \end{aligned}$$

On pose la fonction decode qui à $(x, !_x)$ et $p : (x = a_0)$ associe un élément de $((x, !_x) = (a_0, !_{a_0})) \simeq \sum_{p:(x=a_0)} (p^*(!_x) = !_{a_0})$. Il suffit de donner un élément de ce second type. C'est un tuple, le premier élément est p, le second est une preuve de $(p^*(!_x) = !_{a_0})$ qu'on tire de la contractibilité de $\|a_0 = a_0\|_{-1}$. On vérifie les hypothèses du lemme encode-décode pour les loop-spaces :

1. $c_0 :\equiv \mathrm{refl}_{a_0} : \mathrm{code}(a_0)$
2. $\mathrm{decode} : \prod_{x:\mathrm{BAut}(A)} \mathrm{code}(x) \to ((a_0, !) = x)$
3. Si $c : \mathrm{code}(a_0) \equiv (a_0 = a_0)$, alors $\mathrm{decode}_{a_0}(c) = ((a_0, !) = (a_0, !))$ et :
   $\mathrm{transport}^{\mathrm{code}}(\mathrm{decode}_{a_0}(c), c_0) = c_0 \equiv \mathrm{refl}_{a_0}$ par construction du transport.
4. $\mathrm{decode}_{a_0}(c_0) = c_0$

□

3 Construction concise à partir de générateurs

3.1 Exemple des groupes cycliques

3.2 Généralisation

3.3 Exemple sur un autre groupe

3.4 Correction