

INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA

CAMILLA BARRETO DE SOUSA

PROCESSAMENTO DE SINAIS DIGITAIS
RELATÓRIO A1 - FILTROS IIR

São José - SC

março/2021

SUMÁRIO

1	DESCRIÇÃO	2
2	ESPECIFICAÇÕES E CÁLCULOS	3
2.1	Filtro Passa Baixa	3
2.2	Filtro Passa Faixa	4
3	RESULTADOS	6
3.1	Filtro Passa Baixa	6
3.2	Filtro Passa Faixa	7
A	SCRIPTS	10

1 DESCRIÇÃO

Os filtros são componentes presentes em sistemas de comunicação e possuem diversas utilidades, a mais comum é a seleção ou exclusão de uma faixa de frequência desejada. Dependendo da faixa que o filtro fará sua seleção ele será definido como: passa baixa, passa alta, passa faixa ou rejeita faixa. Além disso o filtro pode ser analógico ou digital. Para projetar um filtro é escolhido um modelo e a partir dele é contruído um protótipo que por padrão se caracteriza por um filtro passa baixa analógico. Depois do protótipo são feitos ajustes para se obter o filtro especificado pelo projeto.

Este relatório apresenta resultados do projeto de dois filtro IIR desenvolvidos no software MATLAB, sendo o primeiro um filtro passa baixa analógico e o segundo um filtro passa faixa digital. No [Capítulo 2](#) são apresentadas as especificações dos projetos e os cálculos usados durante a elaboração. No [Capítulo 3](#) são apresentados os gráficos de resposta em frequência dos filtros a cada etapa e os resultados são relatados. Por fim, no [Apêndice A](#) é disponibilizado o link do repositório com os códigos usados no desenvolvimento.

2 ESPECIFICAÇÕES E CÁLCULOS

Nesse capítulo foram reunidos as especificações dos filtros IIR passa baixa analógico e passa faixa digital além dos cálculos usados no desenvolvimento dos dois projetos.

2.1 Filtro Passa Baixa

As especificações do primeiro filtro estão na [Tabela 1](#), informando o tipo do filtro, modelo, frequências, atenuação e ganho.

Tipo	Analógico
Resposta ao impulso	IIR
Resposta em frequência	Passa Baixa
Modelo de aproximação	Butterworth
Frequência de Passagem (f_p)	100Hz
Frequência de Rejeição (f_s)	500Hz
Atenuação de Passagem (A_p)	3dB
Atenuação de Rejeição (A_s)	40dB
Ganho de Topo (G_o)	-10dB

Tabela 1 – Especificações do Filtro Passa Baixa

O primeiro passo para realizar o protótipo é normalizar as frequências de passagem e rejeição:

$$w_p = 2\pi * f_p \longrightarrow W_P = w_p/w_p = 1 \quad (2.1)$$

$$w_s = 2 * \pi * f_s \longrightarrow W_S = w_s/w_p = 5 \quad (2.2)$$

Para obter a ordem do filtro (n) primeiramente deve ser calculado o valor de ϵ . A ordem do filtro deve ser um número inteiro, portanto deve ser feito um arredondamento para o próximo valor se necessário.

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 1 \quad (2.3)$$

$$n \geq \frac{\log[(10^{0.1A_s} - 1)/\epsilon^2]}{2 \log \Omega_s} \longrightarrow n = 3 \quad (2.4)$$

Os resultados de ϵ e da ordem do filtro são utilizados para calcular os pólos (p_k) que compõem a função de transferência do filtro protótipo ($H(p)$). Com os pólos é possível obter o polinômio do denominador, onde o coeficiente constante desse polinômio será o valor do numerador.

$$p_k = \epsilon^{(-1/n)} e^{j \frac{(2k+n-1)}{2n} \pi}, k = 1, 2, 3, \dots, n \longrightarrow D(p) = \prod_{k=1}^n (p - p_k) \quad (2.5)$$

$$H(p) = \frac{D(end)}{D(p)} = \frac{1.0}{p^3 + 2.0p^2 + 2.0p + 1.0} \quad (2.6)$$

Depois de encontrar a função de transferência do protótipo deve ser feita uma substituição de variáveis para obter a função de transferência do filtro especificado originalmente.

$$H(s) = H(p) \Big|_{p = \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.7)$$

$$H(s) = \frac{7.844 \cdot 10^7}{s^3 + 1257.0 s^2 + (7.896 \cdot 10^5) s + 2.481 \cdot 10^8} \quad (2.8)$$

2.2 Filtro Passa Faixa

As especificações do segundo filtro estão na [Tabela 2](#), informando o tipo do filtro, modelo, frequências, atenuação e ganho.

Tipo	Digital
Resposta ao impulso	IIR
Resposta em frequência	Passa Faixa
Modelo de aproximação	Chebyshev 2
Frequência de Amostragem (f_a)	4kHz
Frequência de Rejeição Inferior (f_{si})	0.4kHz
Frequência de Passagem Inferior (f_{pi})	0.8kHz
Frequência de Passagem Superior (f_{ps})	1kHz
Frequência de Rejeição Superior (f_{ss})	1.4kHz
Atenuação de Passagem (A_p)	3dB
Atenuação de Rejeição (A_s)	40dB
Ganho de Topo (G_o)	-10dB

Tabela 2 – Especificações do Filtro Passa Faixa

O primeiro passo é normalizar as duas frequências de passagem e as duas de rejeição pela metade da frequência de amostragem do filtro digital, obtendo assim dois valores de ângulo (θ_p) e dois valores de rejeição (θ_s). Como esses resultados é possível obter os valores de λ , que serão usados para projetar o protótipo:

$$\theta_p = \frac{f_p}{f_a/2} = [0.4; 0.5] \longrightarrow \lambda_p = 2 \tan \left(\frac{\theta_p \pi}{2} \right) = [1.4531; 2] \quad (2.9)$$

$$\theta_s = \frac{f_s}{f_a/2} = [0.2; 0.7] \longrightarrow \lambda_s = 2 \tan \left(\frac{\theta_s \pi}{2} \right) = [0.6498; 3.9252] \quad (2.10)$$

Os valores de λ são usados para compensar a distorção na frequência causada pela transformação bilinear. As frequências W_s e W_p , usadas para projetar o filtro protótipo passa baixa são calculadas através dos valores de B e λ_0 como mostrado:

$$B = \lambda_{p2} - \lambda_{p1} = 0.5469 \quad (2.11)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\lambda_{p2} \lambda_{p1}} = 1.7047 \quad (2.12)$$

$$W_P = 1 \quad (2.13)$$

$$W_S = \min\left(\left|\frac{-\lambda_s^2 + \lambda_0^2}{B \lambda_s}\right|\right) = 3.6084 \quad (2.14)$$

O menor valor de W_s é escolhido para o protótipo e então a ordem do filtro é calculado através da função *cheby2ord* e então com *cheby2* os coeficientes da função de transferência $H(p)$ são obtidos:

$$n = \text{cheby2ord}(WP, WS, Ap, As, 's') = 3 \quad (2.15)$$

$$[bp, ap] = \text{cheby2}(n, As, WS, 's') \quad (2.16)$$

$$H(p) = \frac{bp}{ap} = \frac{(3.9 \cdot 10^{15}) p^2 + 6.771 \cdot 10^{16}}{(3.603 \cdot 10^{16}) p^3 + (8.77 \cdot 10^{16}) p^2 + (1.065 \cdot 10^{17}) p + 6.771 \cdot 10^{16}} \quad (2.17)$$

Depois de encontrar a função de transferência do protótipo deve ser feita uma substituição de variáveis para obter a função de transferência do filtro passa faixa analógico, e o ganho de topo é alterado para o valor especificado.

$$H(s) = H(p) \Bigg|_{p = \frac{s^2 + w_o^2}{Bs}} \longrightarrow H(s) = H(s) * 10^{G_o/20} \quad (2.18)$$

$$H(s) = \frac{(7.121 \cdot 10^{14}) s ((8.265 \cdot 10^{32}) s^4 + (9.096 \cdot 10^{33}) s^2 + 6.981 \cdot 10^{33})}{(3.143 \cdot 10^{49}) s^6 + (4.185 \cdot 10^{49}) s^5 + (3.019 \cdot 10^{50}) s^4 + (2.529 \cdot 10^{50}) s^3 + (8.772 \cdot 10^{50}) s^2 + (3.534 \cdot 10^{50}) s + 7.715 \cdot 10^{50}} \quad (2.19)$$

Por fim uma última substituição de variáveis é feita, para então obtider a função de transferência do filtro digital com as especificações requeridas:

$$H(z) = H(s) \Bigg|_{s = 2 \frac{z-1}{z+1}} \quad (2.20)$$

$$H(z) = \frac{(5.3 \cdot 10^{-3}) z^6 - (2.3 \cdot 10^{-3}) z^5 - (7.6 \cdot 10^{-4}) z^4 + (7.6 \cdot 10^{-4}) z^2 + (2.3 \cdot 10^{-3}) z - 5.3 \cdot 10^{-3}}{1.0 z^6 - 0.83 z^5 + 2.5 z^4 - 1.3 z^3 + 1.9 z^2 - 0.5 z + 0.46} \quad (2.21)$$

3 RESULTADOS

Os gráficos da resposta em frequência das etapas dos projetos dos filtros, relatados no [Capítulo 2](#) são apresentados nessa seção.

3.1 Filtro Passa Baixa

A [Figura 1](#) mostra a resposta em frequência do protótipo, onde a frequência de passagem e de rejeição correspondem aos valores resultantes na [Equação 2.1](#) e na [Equação 2.2](#). A função de transferência desse protótipo é mostrada em [Equação 2.6](#).

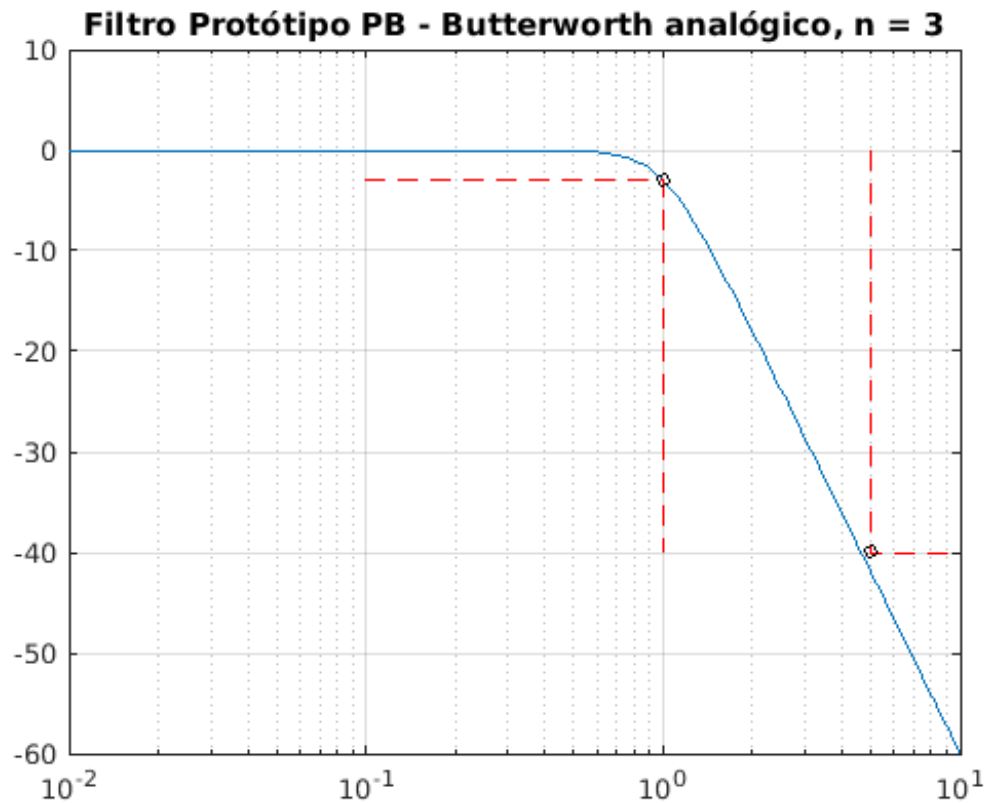


Figura 1 – Resposta em frequência do protótipo

Após a realização do filtro protótipo, como relatado na [seção 2.1](#), foi possível obter a função de transferência ([Equação 2.8](#)) do filtro passa baixa especificado na [Tabela 1](#). A resposta em frequência final é mostrada na [Figura 2](#).

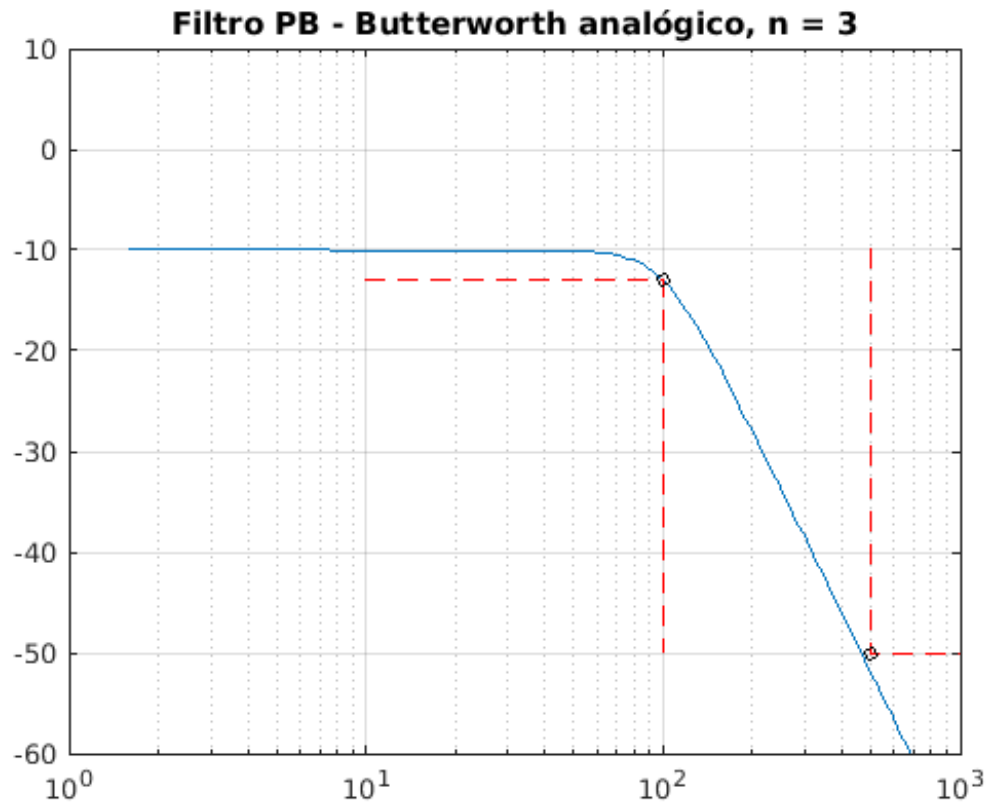


Figura 2 – Resposta em frequência do filtro passa baixa

3.2 Filtro Passa Faixa

A Figura 4 mostra a resposta em frequência do protótipo, onde a frequência de passagem e de rejeição correspondem aos valores resultantes na Equação 2.13 e na Equação 2.14. A função de transferência desse protótipo é mostrada em Equação 2.17.

Após a realização do filtro protótipo, como relatado na seção 2.2, foi possível obter a função de transferência (Equação 2.19) do filtro passa faixa analógico. A resposta em frequência dessa etapa é mostrada na Figura 1.

Um último passo foi realizado para obter a resposta em frequência mostrada na Figura 5 do filtro digital especificado em Tabela 2. A função de transferência final é mostrada na Equação 2.21.

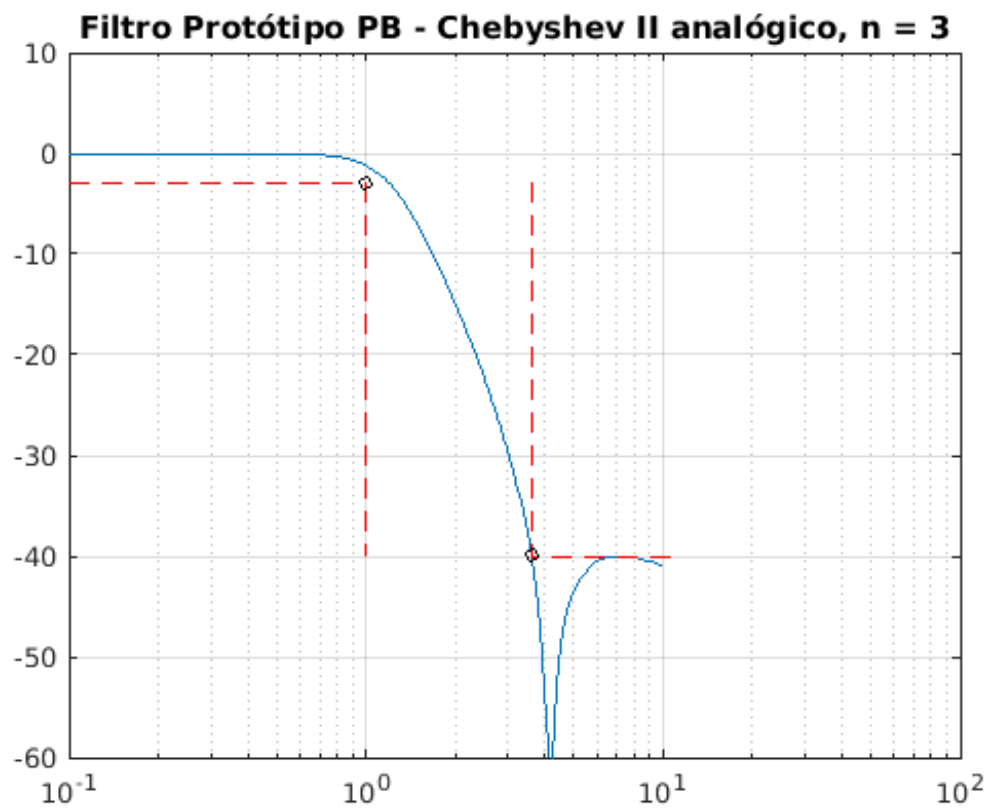


Figura 3 – Resposta em frequência do filtro protótipo

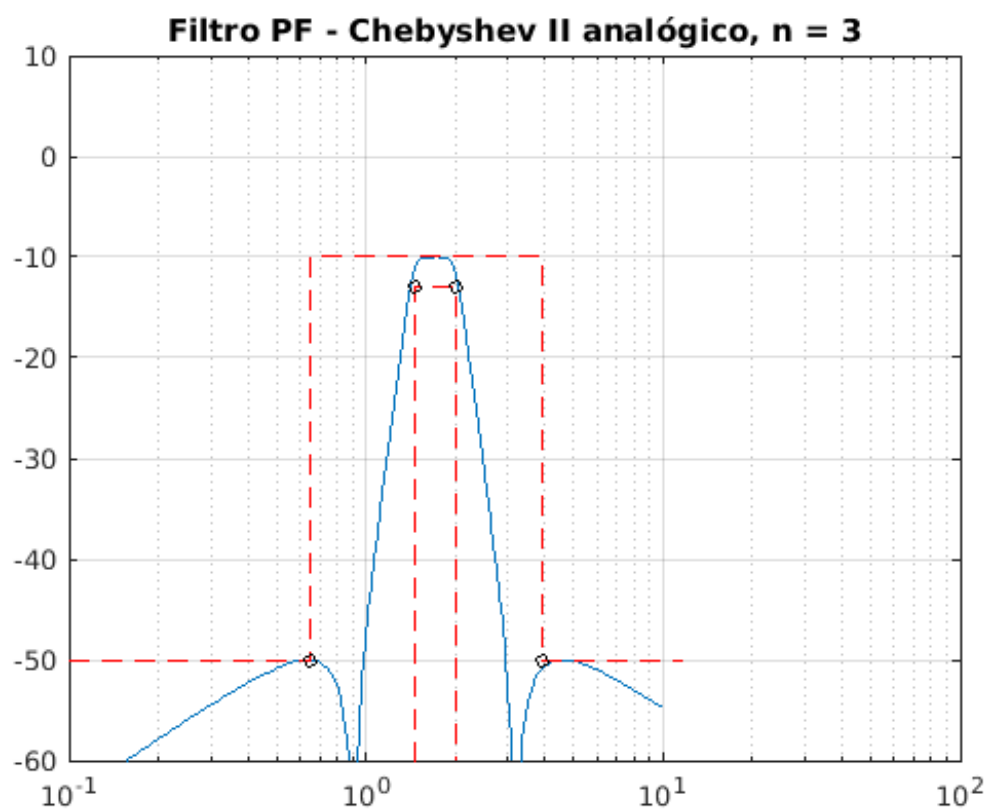


Figura 4 – Resposta em frequência do filtro passa faixa

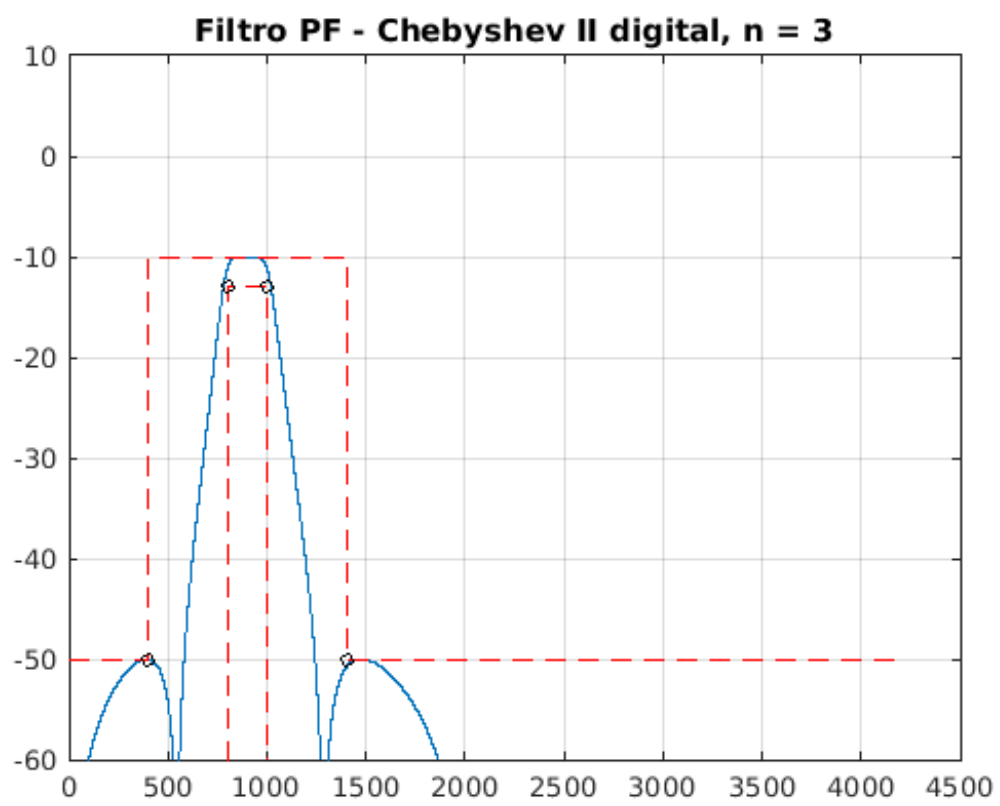


Figura 5 – Resposta em frequência do filtro passa faixa

A *SCRIPTS*

Códigos dos projetos citadas neste relatório:

- Filtro Passa Baixa
- Filtro Passa Faixa