Camilla Berti
Corso di laurea in Fisica
Università di Bologna

March 20, 2024

MINI RECAP — buono studio

1. Funzioni a variabili complesse

Dimostrazioni che sono state chieste: disuguaglianza triangolare in $\mathbb{C}$, formula di Eulero, teorema fondamentale dell'algebra, teorema di Morera.

Domande 1

- Perché in una curva regolare la derivata deve essere diversa da zero in ogni punto? L'importante è che non ci siano punti di non derivabilità per definire la direzione tangente, ma se la derivata in un punto è zero la tangente è comunque definita no? Snì, è un casino quando si fa il cambio di variabile nell'integrale.
- Come si può far vedere che posso deformare il percorso di integrazione di una funzione olomorfa come voglio senza alterare il risultato dell'integrale (A patto che non si attraversi nessun punto singolare)? Direi con il teorema dei residui.

Schemino mentale 1

- thm di Cauchy: f olomorfa in una regione aperta e sempl. connessa, allora l'integrale di linea di f su una curva chiusa semplice che appartiene a questa regione è zero.
- Rappresentazione integrale di Cauchy: ipotesi di curva e regione le stesse del thm di Cauchy
- thm di Morera: se l'integrale di f di una funzione continua in una regione aperta e connessa si annulla per ogni curva chiusa, semplice e regolare appartenente a quella regione, la funzione è olomorfa. Cioè se la funzione non è olomorfa non si può annullare in ogni curva, prima solo con Cauchy c'era questa ambiguità, ora è un se e solo se. Dim importante: definisco F, scrivo il suo rapporto incrementale, togliamo e aggiungiamo f all'interno dell'integrale e poi usiamo Darboux.
- Serie di Taylor: f olomorfa in un disco centrato in z0, z0 non deve essere un punto di singolarità.
- Serie di Laurent: più potente, vale in una corona circolare centrata in un punto z0 stavolta di singolarità. n è negativo, i coefficienti a_n con n positivo coincidono con quelli della serie di taylor, ma non sono la derivata n-esima di f in z0 (anche perché z0 è singolare, non vale la formula della derivata con la rappresentazione integrale)
- zeri e punti singolari. Ok qua bisogna stare attenti. Zero: un punto del dominio in cui f è zero. Easy. Se f è olomorfa con uno zero e le prime n-1 derivate sono sempre zero nello zero, ma l'n-esima derivata no, allora il punto si chiama zero di ordine n. Cosa mi interessa? f olomorfa in un intorno dello zero->serie di taylor, ma i primi n-1 termini sono zero, è una serie infinita che parte dall'n-esimo termine e posso scrivere f = (z-zero)^n g(z). g è regolare e non nulla nello zero, e per continuità in un intorno dello zero. Quindi in un intorno dello zero neanche f è zero. Quindi funzione olomorfa: può avere solo zeri isolati oppure è la funzione identicamente nulla. Polo: consideriamo z0 punto di singolarità, ma f olomorfa in un disco centrato su z0->serie di Laurent. Se z0 è un punto di singolarità, vuol dire che almeno uno dei coefficienti a_{-n} è non nullo (altrimenti sarebbe una polinomiale, no singolarità). Se a_{-n} è non nullo, ma $a_{-(n+1)}$, $a_{-(n+2)}$ ecc sono tutti nulli si dice che z0 è un polo di ordine n. n=1, polo semplice. $n = \infty$, singolarità essenziale, funzione scatenata attorno alla singolarità essenziale (assume tutti i valori).

- Thm Liouville: una funzione intera, cioè olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ e limitata deve essere costante: la dimostrazione si fa facendo vedere che la derivata è zero usando la rappresentazione integrale di Cauchy.

- Residuo: prendiamo f olomorfa in una regione aperta con un punto z0 che può essere una singolarità. Allora presa una curva chiusa semplice γ che racchiude questo punto, definiamo il residuo come:

  $$Res(f(z))|_{z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz$$

  Il teorema dei residui ci dice che se abbiamo una curva chiusa con all'interno un numero finito di singolarità, l'integrale sulla curva chiusa è uguale alla somma dei residui della funzione in tutte quelle singolarità, per $2\pi i$. Questo è ganzo perché abbiamo un modo per calcolare l'integrale senza calcolare effettivamente l'integrale.

- Calcolo dei residui: allora per un polo di ordine n c'è una formula che diventa semplicemente un limite se abbiamo un polo semplice. Se poi come avviene generalmente abbiamo un polo semplice perché si annulla un denominatore allora il calcolo del residuo è ancora più easy. Se z0 è una singolarità isolata possiamo sviluppare f in serie di Laurent, e si vede che il residuo in z0 è uguale al coefficiente a_{-1}. Se abbiamo delle singolarità all'infinito possiamo calcolare il residuo anche lì, anche se è una questione un po' più delicata perché potremmo avere nessuna singolarità e un residuo non nullo (esempio più banale, la funzione $\frac{1}{z}$ ha residuo non nullo all'infinito, anche se ha la singolarità solo in 0).

- se una funzione olomorfa ha solo singolarità isolate, la somma di tutti i residui è zero. La dim è semplice: prendiamo una curva semplice chiusa che non passi per nessuna singolarità. Se la vediamo come orientata in senso antiorario, l'integrale della funzione sulla curva sarà uguale alla somma dei residui delle singolarità interne alla curva. Ma posso vedere anche la curva orientata in senso orario e in questo caso l'integrale sarà uguale alla somma dei residui esterni che ora sono considerati interni, per il teorema dei residui.

- Indicatore logaritmo: è la derivata del logaritmo della funzione $f(z)$. Se f ha uno zero di ordine m, l'indicatore logaritmico ha nello zero un polo semplice, con residuo m. Se f ha un polo di ordine n, l'indicatore logaritmico ha in quel punto un polo semplice con residuo -n. Vedendo quanti zeri e poli e di che ordine sono trovo così al volo il residuo dell'indicatore logaritmico. Il teorema dice che integrando l'indicatore logaritmico lungo una curva chiusa, semplice che non passa da nessuno zero e nessuna singolarità di f, l'integrale è uguale alla differenza zeri-poli per $2\pi i$. (Considerando uno zero di ordine n n zeri e idem per i poli). Una conseguenza è che se f è razionale, anche l'indicatore è razionale, quindi è una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ eccetto dei punti di singolarità isolate, quindi la somma dei residui è zero. Questo implica che il numero dei poli di f è uguale al numero degli zeri di f. Se consideriamo un polinomio di grado n, questo avrà un solo polo: un polo di ordine n all'infinito. Per quanto appena detto, avrà n zeri. Abbiamo trovato il teorema fondamentale dell'algebra.

2. Spazi topologici

2.1. Domande 2

- Qual è un esempio di spazio topologico non compatto ma limitato? (//importante, penso sia stato chiesto all'esame)

- $\mathbb{R}$ è compatto? No, si dimostra che non è compatto prendendo un ricoprimento aperto da cui non si può estrarre un sottoricoprimento finito. Il ricoprimento aperto in questione è $U_n = \{]-n,n[\ n = 1,...,\infty\}$.

- $]-1,1[$ è compatto? No, esempio di ricoprimento aperto da cui non è possibile estrarre ricoprimento finito: $S_n = \{x \in\ ]-1,1[\,, d(0,x) < (1-1/n)\ \ n = 1,...,\infty\}$

Schemino mentale 2

- Spazio topologico: definizione, topologia indotta da un sottoinsieme di uno spazio topologico, topologia forte, fine, topologia generata (data una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi possiamo generare una topologia aggiungendo solo gli elementi necessari che servono a far rispettare la definizione).

- Punti spazio topologico: punti interni, esterni, isolati e non isolati, di aderenza, di accumulazione, di frontiera.

- Base di una topologia: ottengo la topologia con l'unione di tutti gli elementi della base. Una base per una topologia è tale se: l'insieme vuoto appartiene, il supporto si può ottenere dalla base e se ho due elementi della base, la loro intersezione si può ottenere come unione di elementi della base.

- Spazi metrici: definizione, topologia indotta dalla metrica (insieme aperto o se è vuoto o se è unione di sfere aperte, in altre parole le sfere aperte costituiscono una base per la topologia indotta dalla metrica).

- Proprietà topologiche: ricoprimento, insieme compatto se da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un ricoprimento finito. Spazio topologico compatto: lo dice il nome, quando il supporto è un insieme compatto. Se abbiamo spazio topologico compatto allora ogni insieme chiuso è compatto: la dimostrazione è semplice: prendo un ricoprimento aperto di un insieme chiuso C, ci unisco il complementare di C (che è aperto) e così ho un ricoprimento aperto del supporto. Estraggo ricoprimento finito, composto dal complementare di C + numero finito di insiemi aperti (non è restrittivo supporre che ci sia il complementare). Se ora tolgo il complementare ho un ricoprimento finito aperto di C, C è compatto. (Ma secondo me è ancora più semplice di così, cioè ogni ricoprimento aperto finito del supporto è ricoprimento di ogni insieme che fa parte dello spazio topologico.)

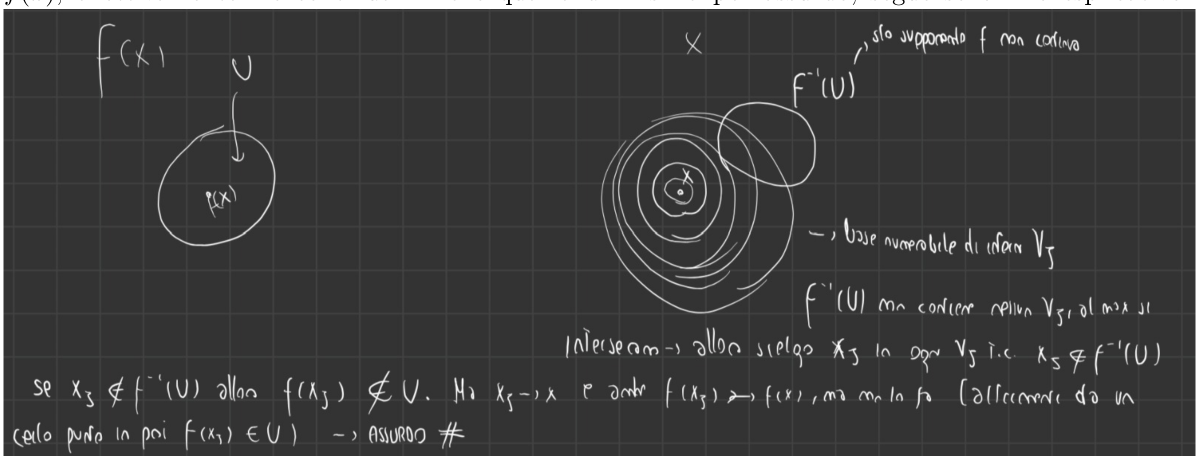
- Spazio di Hausdorff o spazio separato: dati due elementi diversi posso trovare due intorni di questi due punti con intersezione vuota. Punti diversi sono separati, ma non c'è per forza una distanza, anche se ovviamente se ho uno spazio metrico, questo è di Hausdorff, segue direttamente dalla definizione di metrica. Non tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff, esempio: $\mathbb{R}$ che ha come aperti le semirette: è un cosiddetto spazio topologico di Kolmogorov, ma non riesco a trovare due intorni disgiunti tra loro. Un altro esempio di spazio topologico non di Hausdorff è: prendiamo X insieme infinito e definiamo la topologia come: $\tau = \{X, \emptyset, (X/F), \text{con } F \text{ sottoinsieme finito}\}$, cioè gli aperti sono quelli insiemi da cui togliamo un numero finito di punti. Uno spazio topologico è detto spazio topologico di Frechet. In questo caso non riesco a trovare due intorni di due punti x e y disgiunti fra loro. Se ho uno spazio di Hausdorff, ogni insieme compatto è anche chiuso (inverso del teorema di prima).

- Teorema importante per cui forse serve sapere la dimostrazione: in $\mathbb{R}^n$ insieme compatto $\iff$ chiuso e limitato.

- A insieme denso in X se per ogni elemento x di X, ogni aperto di X che contiene x contiene anche un elemento di A. Equivalentemente, $A \subseteq B \Longrightarrow B \subseteq \overline{A}$. Spazio topologico X separabile: se esiste un insieme denso in X numerabile. X separabile $\iff$ esiste una base di aperti numerabile.

- Continuità: la definizione è che data $f : X \to Y$, f è continua in x se per ogni aperto V di Y che contiene $f(x)$ esiste un aperto U contente x tale che $U \subseteq f^{-1}(V)$, o equivalentemente $f(U) \subseteq V$. Teorema: f continua in x $\iff$ per ogni intorno W di f(x), la retroimmagine di W è intorno di x. Poi ci sono definizioni alternative, la più importante è che se f è continua, per ogni aperto A in Y, la sua retroimmagine è aperta in X. Definizione di funzione 1-1 e suriettiva ci siamo, omeomorfismo = quando sia f che la sua inversa sono continue, due spazi omeomorfi sono topologicamente uguali (perché abbiamo una funzione che manda da uno all'altro e viceversa insiemi aperti in aperti). Altro teorema sulla continuità brutto: f continua, se X è compatto anche f(X) è compatto. Questo è importante per il teorema di Weierstrass, che dice che se abbiamo una funzione reale e continua su un compatto allora f ammette massimo e minimo. Infatti f continua su un compatto $\to$ l'immagine è compatta. Ma siamo su $\mathbb{R}$, quindi insieme compatto = insieme limitato (ci sono max e min) e chiuso (f raggiunge questi valori all'interno dell'insieme).

- Successioni: successione convergente ad x se per ogni aperto che contiene x esiste un N tale che per ogni n > N x_n stanno nell'aperto di x. Ora, se non abbiamo separazione tra punti diversi possiamo avere più limiti per una successione, altrimenti è impossibile. Quindi se ho uno spazio di Hausdorff con una successione convergente, il limite è unico. Si dimostra rigorosamente e facilmente per assurdo: se ci fossero 2 limiti, potremmo prendere 2 intorni che non si intersecano, ma allora per n grande i punti della successione dovrebbero stare in due posti diversi, ma il dono dell'ubiquità gli spazi di Hausdorff non ce l'hanno.

- Legame convergenza e continuità: spazi topologici generici, se abbiamo f continua e $x_n \to x$, allora $f(x_n) \to f(x)$. Per il contrario serve stare più attenti e introdurre il concetto di base di intorni aperti: una famiglia di intorni di un punto x è una base di intorni aperti se ogni possibile intorno di x contiene un intorno della famiglia. Quando abbiamo questa base? Sicuramente negli spazi metrici, basta prendere $S(x, \frac{1}{n})$. Comunque se abbiamo questa base di intorni per x e se per ogni successione $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$, effettivamente f è continua. Anche qua la dim. si fa per assurdo, segue schemino esplicativo.


- Insieme sequenzialmente compatto: se da ogni successione contenuta nell'insieme possiamo estrarre sottosuccessione convergente. Il legame con la compattezza è dato da questo teorema: in uno spazio metrico, insieme compatto $\iff$ chiuso e sequenzialmente compatto. Dimostrazione solo da sx a dx: sappiamo già compatto $\Rightarrow$ chiuso, supponiamo per assurdo non sequenzialmente compatto. Abbiamo una successione, che non può avere un elemento ripetuto infinite volte (altrimenti si potrebbe finire qui). Ora se un punto x fosse il limite della successione, ogni suo intorno dovrebbe contenere un numero infinito di elementi della successione, quindi supponiamo l'opposto: un intorno di x che contenga un numero finito di punti x_n. Mettiamo insieme gli intorni di ogni punto e abbiamo un ricoprimento, estraiamo ricoprimento finito: abbiamo un numero finito di aperti che ricoprono l'insieme e ogni aperto contiene un numero finito di elementi della successione. Ma la successione è interamente contenuta nell'insieme, ecco l'assurdo.

- Completezza: definizione di successione di Cauchy, spazio metrico completo. Contrazione: $f : X \to X$, $d(f(x), f(y) \leq \alpha d(x, y)$, con $0 \leq \alpha < 1$. In uno spazio metrico **completo** in ogni contrazione esiste ed è unico un punto fisso.

- Continuità uniforme: nozione propria degli spazi metrici. f è uniformemente continua se $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in X$: $d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Se siamo in un compatto e una funzione continua è anche uniformemente continua.

- Estensione continua: X, Y spazi metrici, D denso in X. Sia $f : D \to Y$ uniformemente continua. Se Y è completo allora $\exists!\ \tilde{f} : X \to Y$ detta estensione continua tale che $\tilde{f}(x) = f(x) \, \forall x \in D$ e $\tilde{f}$ uniformemente continua. Per la dimostrazione si considera che ogni elemento di x è punto di aderenza di D e in quanto tale è limite di qualche successione. Se x appartiene a D prendiamo una successione stazionaria $x_n = x \, \forall n$, altrimenti prendiamo una successione di D convergente a x, che è anche di Cauchy, come è di Cauchy anche $f(x_n)$, visto che f è uniformemente continua. Ma Y è completo, $f(x_n)$ converge. Prendendo un'altra successione di D y_n convergente a x, vediamo che anche $f(y_n)$

converge. Sfruttando la distanza e l'uniforme continuità troviamo che il limite delle due successioni è lo stesso. Qualsiasi successione $x_n \to x$ scelga, $f(x_n)$ convergerà alla solita cosa: ho definito univocamente $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

- Isometria: applicazione tra due spazi metrici che lascia invariate le distanze. Se ho uno s.m. non completo, definiamo completamento uno s.m.c. se esiste un'isometria tra i due spazi tale che l'immagine del primo sia densa nel secondo. Il completamento esiste sempre e due completamenti sono omeomorfi tramite un'isometria.

3. Spazi lineari e normati

Dimostrazioni che sono state chieste: esistenza di una base con lemma di Zorn, disuguaglianza di Holder.

Domande 3

- Esempi di gruppi non abeliani: gruppo delle matrici $n \times n$ e l'operazione di moltiplicazione tra matrici, rotazioni nello spazio. Esempio di gruppo abeliano: numeri interi con l'addizione.
- Quando si parla di sottospazio lineare chiuso, cosa si intende? Per definizione, un insieme è sottospazio lineare se ha le proprietà di chiusura algebrica rispetto alla somma tra vettori e moltiplicazione per uno scalare, quindi l'aggettivo *chiuso* fa riferimento alla chiusura topologica, altrimenti sarebbe ridondante. Come fare a capire se un sottospazio è chiuso? Se abbiamo una base di intorni numerabile per ogni punto (e ce l'abbiamo se abbiamo uno spazio metrico) allora il sottospazio è chiuso se contiene i limiti di tutte le successioni contenute nel sottospazio, quindi chiusura = completezza.
- Perché ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio normato è chiuso? Risposta approssimativa: perché gli spazi di dimensione finita sono isomorfi a $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ che sono completi, quindi sono completi anche loro. Link da cui guardare meglio: `https://math.stackexchange.com/questions/1606442/how-to-prove-that-a-finite-dimensional-linear-subspace-is-a-closed-set`, `https://math.stackexchange.com/questions/168275/proof-that-every-finite-dimensional-normed-vector-space-is-comp`
- Che cos'è una funzione misurabile?
- Separabilità di l^2?
- Hausdorffità degli spazi normati: ogni spazio normato è anche spazio metrico e ogni spazio metrico è di Hausdorff, basta dire questo?

Schemino mentale 3

- Spazio vettoriale: sia $\mathbb{K}$ un campo e V un gruppo abeliano additivo i cui elementi sono detti vettori. Allora V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ se esiste un'operazione chiamata moltiplicazione per uno scalare: $\mathbb{K} \times V \to V$ che soddisfa le seguenti proprietà: due leggi distributive, proprietà associativa, l'unità 1 di $\mathbb{K}$ risulta anche elemento neutro per la moltiplicazione di uno scalare. Un sottoinsieme L di V è un sottospazio vettoriale se vale questa condizione: $\forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall x,\, y \in L \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$
- Insieme L.I.: la verifica coinvolge sempre una somma finita di vettori, anche se posso avere un insieme infinito di vettori L.I. Per spazi infinito dimensionali per dimostrare che esiste sempre una base e che ogni sistema di vettori L.I. può essere completato per formare una base serve il lemma di Zorn: se in un insieme X è definita una relazione di ordine parziale ed ogni sottoinsieme linearmente ordinato ammette limite superiore allora l'insieme X ammette un massimale. Nella dimostrazione il lemma si usa così: consideriamo la relazione di inclusione $\subseteq$ come relazione di ordine parziale e come insieme X l'insieme che ha come elementi tutti i sistemi di vettori linearmente indipendenti. Considerando un sottoinsieme linearmente ordinato, abbiamo che è limitato superiormente dall'unione di tutti gli elementi (cioè tutti i sistemi di vettori L.I., l'unione risulta essere uguale al sistema di vettori L.I. con più elementi). Allora applicando il lemma di Zorn possiamo affermare l'esistenza di un elemento massimale di X, cioè un insieme massimale di vettori L.I.

- Spazi L^p: dato Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $p > 0$, una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è detta p-sommabile se è una funzione misurabile e vale:
$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$$
Lo spazio delle funzioni p-sommabili è uno spazio vettoriale in quanto è chiuso rispetto all'operazione di moltiplicazione per uno scalare e la somma di due funzioni p-sommabili è ancora una funzione p-sommabile (la verifica di questo si fa separatamente per i casi $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq p < 1$). Notiamo che è più appropriato definire gli elementi degli spazi L^p come classi di equivalenza al posto di funzioni, dove la relazione di equivalenza è data dal fatto che due funzioni sono uguali su tutto Ω tranne che su un insieme di misura nulla. Possiamo estendere il concetto di funzioni p-sommabili e definire $L^\infty(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni misurabili e limitate quasi ovunque. A questo punto possiamo introdurre queste due operazioni:
$$||[f]||_p = ||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
e per gli spazi L^∞:
$$||f||_\infty = \inf\{k \in \mathbb{R}; |f(x)| < k \text{ q.o.} = \text{ess} \sup_{x\in\Omega} |f(x)|\}$$
dove l'ultima espressione indica l'estremo superiore essenziale, cioè il sup quasi ovunque, escludendo l'insieme di misura nulla in cui la funzione non è limitata. Ora gli spazi L^p con $p \geq 1$ (sono quelli rilevanti) sono spazi normati con norme così definite? La stretta positività e l'omogeneità sono garantite (notiamo che $||f||_p = 0 \iff [f] = 0$ è garantita dal fatto che il nostro spazio è composto da classi di equivalenza) e anche la disuguaglianza triangolare è vera, solo che ci vuole un po' per dimostrarla.

- Lemma per disuguaglianza di Holder, disuguaglianza di Holder e disuguaglianza di Minkowski (disuguaglianza triangolare della norma degli spazi L^p).

4. Spazi di Hilbert

Dimostrazioni chieste: perché nella disuguaglianza di Schwarz vale l'uguaglianza solo se i vettori sono proporzionali tra loro (in relazione ad esercizio 4.3), dimostrazione di ortogonalità e normalizzazione dei polinomi,

4.1. Schemino mentale 4

- Prodotto scalare: forma sesquilineare hermitiana definita positiva, definita in uno spazio vettoriale. Dal prodotto scalare possiamo definire una norma. Oltre a tutte le proprietà solite della norma, c'è anche la disuguaglianza di Schwarz:
$$| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$$
e la regola del parallelogramma:
$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

- Gli spazi con norma definita da prodotto scalare completi sono spazi di Hilbert. $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono spazi di Hilbert, ma quelli più interessanti sono quelli infinito dimensionali, come $L^2(\Omega)$, l'unico spazio L^p ad essere di Hilbert, si vede con la regola del parallelogramma.

- Ortogonalità: x e y sono ortogonali fra loro se il loro prodotto scalare è nullo. Dato un sottoinsieme di $\mathcal{H}$ definiamo il complemento ortogonale al sottoinsieme M come l'insieme formato dai vettori ortogonali a tutti gli elementi di quell'insieme, si denota con $M^\perp$. Il complemento ortogonale è un sottospazio vettoriale chiuso. Se anche l'insieme di partenza è un sottospazio chiuso allora lo spazio di Hilbert si può scomporre in una somma diretta: $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$

- Duale topologico e teorema di Fischer-Riesz. Il duale topologico, $\mathcal{H}^*$ è l'insieme di tutti i funzionali lineari continui da $\mathcal{H}$ a $\mathbb{C}$. Possiamo costruire una corrispondenza tra gli elementi dello spazio di Hilbert e il suo duale topologico considerando per ogni $x \in \mathcal{H}$ fissato il funzionale J_x che ad ogni y associa il prodotto scalare con x: $y \longrightarrow < x, y >$ (per Schwarz è un'applicazione lineare e limitata, quindi anche continua). La corrispondenza $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ che ad ogni x associa J_x preserva la norma, è antilineare, è iniettiva ma cosa più importante di tutti è suriettiva e viene detto nel teorema di Fischer Riesz, che dice che per ogni funzionale lineare continuo appartenente ad $\mathcal{H}^*$ esiste un unico elemento $x \in \mathcal{H}$ tale per cui $f(y) =< x, y >$, $\forall y \in \mathcal{H}$. Cioè ogni funzionale continuo può essere espresso come il prodotto scalare tra y e un vettore x fissato.
- Serie di Fourier: $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ è un sistema ortonormale in $L^2] - \pi, \pi[$, definiamo i coefficienti di Fourier come $\tilde{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \varphi_n, f >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx$. L'integrale scritto ha senso anche per funzioni sommabili, non solo 2-sommabili. Infatti anche se $f \in L^1(] - \pi, \pi[)$, e^{-inx} è una funzione limitata, quindi è L^∞, e allora per la disuguaglianza di Holder il loro prodotto è 1-sommabile. Si può far vedere anche che $L^2(] - \pi, \pi[) \subset L^1(] - \pi, \pi[)$. Se f appartiene a $L^2(] - \pi, \pi[)$ per il teorema della disuguaglianza di Bessel sappiamo che la serie di Fourier converge alla proiezione ortogonale della funzione sullo spazio generato da φ_n, se f appartiene ad $L^1(] - \pi, \pi[)$ il discorso è più complicato, ma possiamo dire che se i coefficienti di Fourier sono tutti identicamente nulli, allora f è la funzione nulla quasi ovunque. Però se i coefficienti di Fourier sono tutti nulli, vuol dire che la funzione è ortogonale alle funzioni φ_n, ma visto che la funzione è nulla quasi ovunque abbiamo trovato un sistema ortonormale completo.
- Polinomi ortogonali: il sistema in $L^2(]a, b[)$ formato dai monomi è un sistema ortonormale completo, si dimostra mostrando che se una funzione è ortogonale a tutti i monomi, allora è ortogonale anche al sistema di onde piane, che è completo, quindi è una funzione nulla quasi ovunque. Allora mediante la procedura di Gram-Schmidt è possibile a partire dai monomi formare un sistema ortonormale di polinomi completo.

5. Operatori negli spazi di Hilbert

Esempio di applicazioni non limitate definite in uno spazio di Hilbert, forse dimostrazione del teorema di convoluzione.

5.1. Schemino mentale 5

- Conseguenze teorema del punto fisso su spazi di Hilbert: in uno spazio di Hilbert, l'operatore identità è iniettivo, suriettivo e ha inversa continua. Si può dimostrare che tutte queste proprietà sono valide anche per operatori "vicini" tipo $(\mathbb{1} - T) : x \to y$, con $||T|| < 1$, cioè è iniettivo (e si vede sfruttando il fatto che T è una contrazione), suriettivo (si introduce $x = f(x) = y + Tx$ e si fa vedere che è una contrazione, quindi $\forall\, y\ \exists! \,; x$ tale che $(\mathbb{1} - T)x = y$), quindi invertibile con inversa continua ($||(\mathbb{1} - T)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||T||}$) e $\frac{1}{\mathbb{1}-T} = 1 + T + T^2 + ...$ (serie di Neumann, si fa vedere cercando il punto fisso per $f(x) = y + Tx$).
- Operatore aggiunto: estensione a spazi di Hilbert del concetto di "trasposto coniugato"di una matrice. La proprietà che lo identifica è $< A^+x, y >=< x, Ay >$. Per operatori lineari e continui esiste sempre, perché l'applicazione $y \to < x, Ay >$ è un funzionale lineare continuo, quindi appartiene ad $\mathcal{H}^*$ e per il teorema di Fischer Riesz esiste un unico x^* tale che $< x^*, y >=< x, Ay >$. Se A non è continuo bisogna stare più attenti perché non è detto che il funzionale di prima sia continuo, visto che non è composizione di funzioni continue. In questi casi quello che si fa è prendere un operatore A definito densamente su $\mathcal{H}$, considerare l'insieme $\mathcal{D}^* = \{x \in \mathcal{H} : \phi : y \to < x, Ay > \text{ è continua } \forall y \in \mathcal{D}(A)\}$. Allora possiamo estendere l'immagine di ϕ a tutto $\mathcal{H}$ e usare il teorema di Fischer Riesz. Così si crea una corrispondenza univoca tra gli elementi x di $\mathcal{D}^*$ e $x^* \in \mathcal{H}$ e in questo dominio possiamo definire l'operatore aggiunto.
- Operatore autoaggiunto e simmetrico: se A è definito in tutto $\mathcal{H}$ i due concetti coincidono, sennò in generale gli operatori autoaggiunti sono simmetrici. Un operatore A densamente definito su $\mathcal{H}$ è

autoaggiunto se $A = A^+$, cioè se i due domini coincidono e $Ax = A^+x \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$. A sempre densamente definito su $\mathcal{H}$ è simmetrico se A^+ è una sua estensione, cioè $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^+)$ e $Ax = A^+x \ \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$. Condizione necessaria e sufficiente ($\iff$) affinché A densamente definito su $\mathcal{H}$ sia simmetrico: $< x, Ax > \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$.

- Operatore unitario: U definito su tutto $\mathcal{H}$ è unitario se è suriettivo e conserva il prodotto scalare: $< Ux, Uy > = < x, y >$. Chiaramente se conserva il prodotto scalare, conserva anche la norma quindi è un'isometria, ma non tutte le isometrie sono operatori unitari: come controesempio basta prendere l'operatore di "shift" in uno spazio di Hilbert separabile, che ammette base ortonormale numerabile: è un'isometria ma non è suriettivo, quindi non è unitario. Inoltre vale: U unitario $\iff$ $U^+U = UU^+ = \mathbb{1}$, cioè U è invertibile e l'inverso coincide con l'aggiunto.

- Operatori di proiezione: tutti gli operatori di proiezione sono idempotenti, se abbiamo $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ allora l'operatore di proiezione ortogonale P è autoaggiunto e ha norma pari a 1 e $Q = \mathbb{1} - P$ è l'operatore di proiezione ortogonale su $M^{\perp}$.

- Trasformata di Fourier: trasformazione che si applica ad una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx$$

  Condizione sufficiente affinché la trasformata di una funzione esista: $f(x)$ sommabile. In questo caso la trasformata esiste, è limitata da $||f||_1$, è uniformemente continua e all'infinito tende a zero (lemma di Riemann Lebesgue). Per dimostrare il lemma di Riemann Lebesgue serve il teorema del sottografico, che dice che data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste una funzione $\varphi(x)$ semplice per cui $||f - \varphi||_1 < \varepsilon$.

- Convoluzione: operazione che ha moltissime applicazioni in fisica. Date due funzioni $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiamo il prodotto di convoluzione come:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

  Quando esiste? se f è sommabile e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ il prodotto di convoluzione esiste ed è p-sommabile e vale la disuguaglianza di Young:

$$||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p$$

  L'operazione di convoluzione è commutativa: basta fare il cambio di variabile $z = x - y$. In questo ambito la trasformata di Fourier è utilissima, perché trasforma l'operazione di convoluzione in un prodotto tra funzioni: secondo il teorema di convoluzione infatti la trasformata della convoluzione tra due funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è proporzionale al prodotto delle trasformate delle due funzioni, cioè:

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$$

- Funzioni a decrescenza di rapida: lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è costituito dalle funzioni $\varphi(x)$ di classe C^{∞} tali che per ogni multiindice α e β vale:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} D^{\beta} \varphi(x)| < \infty$$

  Cioè la funzione e tutte le sue derivate vanno a zero all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza. Un esempio di queste funzioni è la gaussiana, o qualsiasi monomio moltiplicato per la gaussiana. Sappiamo inoltre che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ ed è uno spazio chiuso rispetto alla trasformata di Fourier.

- Formula di inversione: $f(x) = (\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f))(x)$ ed è valida se f, $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f è continua e limitata.

- Relazione di Plancherel: sappiamo che se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\int (\mathcal{F}f)(x) g(x) dx = \int f(x)(\mathcal{F}g)(x)$. Possiamo applicare questa formula al seguente integrale (con $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ funzioni a decrescenza rapida, la loro appartenenza a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ci garantisce che possiamo usare con tranquillità la formula appena scritta): $\int \overline{(\mathcal{F}\varphi)(x)}(\mathcal{F}\psi)(x)dx$ e otteniamo la relazione di Plancherel:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{(\mathcal{F}\varphi)(\xi)}(\mathcal{F}\psi)(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\psi(x)dx$$

Da qui sfruttando la densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ possiamo estendere la conservazione del prodotto scalare a tutte le funzioni quadrato sommabili e si può dimostrare che la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ costituisce una trasformazione unitaria in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Submitted by Camilla Berti on 20 de marzo de 2024.