

14.6 Stabilität von Runge-Kutta-Methoden

11.02.16

Observation: Lokal Lösung für Test-System $\dot{y} = \lambda y$

$$\dot{y}_L(t_n; t) = \lambda y_L(t_n; t), \quad y_L(t_n; t_n) = y_n$$

$$\Rightarrow \underline{y_L(t_n, t_{n+1}) = e^{h\lambda} y_n}$$

$$\boxed{h = t_{n+1} - t_n}$$

Nedfolding (aliasing)

Test-system I

$$\dot{y} = \lambda y, \quad \lambda = \sigma + j\omega$$

$$y_L(t_n; t_{n+1}) = e^{h\lambda} y_n$$

Test system. II

$$\dot{y} = \mu y$$

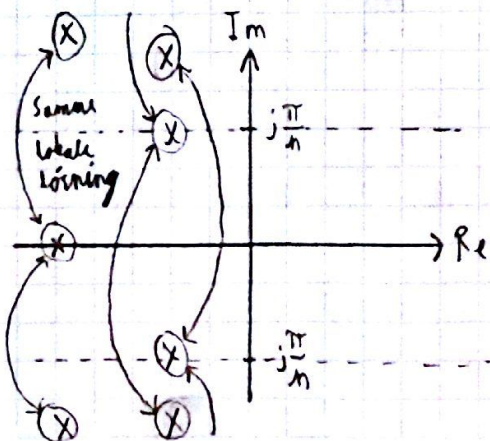
$$y_L(t_n; t_{n+1}) = e^{h\mu} y_n$$

När är dessa två de samma?

$$e^{h\mu} = e^{h\lambda} = e^{h\sigma} (\cos h\omega + j \sin h\omega)$$

$$h\mu = h\sigma + j(h\omega + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\boxed{\mu = \lambda + 2k\frac{\pi}{h}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$



$$\omega = \frac{\pi}{h} = \text{"Nyquist-frekvens"}$$

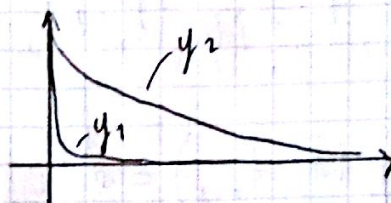
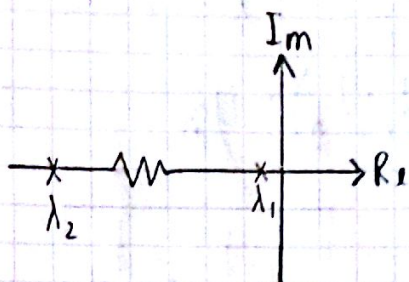
A-stabilitet

Skivt system

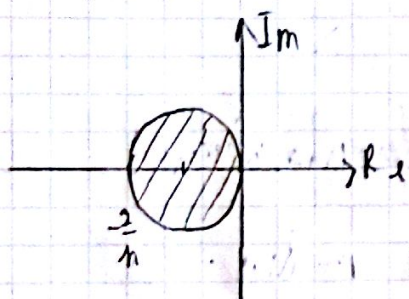
$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$$

$$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$$

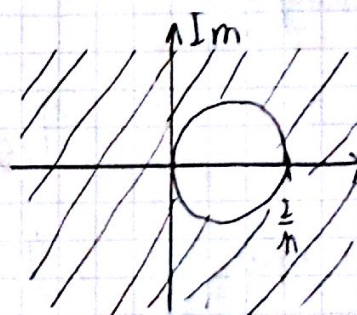
$$\lambda_2 \ll \lambda_1$$



Ekep. Euler



Imp. Euler



Def: En metode er A-stabil hvis

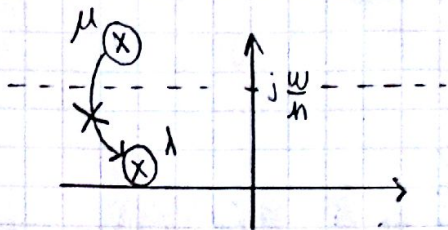
$$|R(h\lambda)| \leq 1 \text{ for } \operatorname{Re}[\lambda] \leq 0 \quad \forall h > 0$$

Eksplisitte metoder: $|R(h\lambda)| \rightarrow \infty$ når $|h\lambda| \rightarrow \infty$

- Ingen eksplisitte metoder er A-stabil
- Noen implisitte metoder er A-stabil

L-stabilitet

Anta μ som du vil undersøke



Ekstakt $\dot{y} = \mu y$

R-K

$$y_L(t_n; t_{n+1}) = e^{h\mu} y_n$$

$$= e^{h\lambda} y_n$$

$$\mu = \lambda \pm j 2k \frac{\pi}{h}, k=0, \pm 1, \dots$$

$$y_{n+1} = R(h\mu) y_n$$

$$R(h\mu) \approx R(h\lambda)$$

$$y_{n+1} \approx R(h\lambda) y_n$$

$$R(h\mu) \approx 0$$

$$y_{n+1} \approx 0$$

Def: En metode er L-stabil om den er A-stabil og
 $|R(hj\omega)| \rightarrow 0$ når $\omega \rightarrow \infty$

L-stabile metoder demper raske "fysiske" oscillasjoner

Eksempel:

ERK: Ikke A-stabil, derfor ikke L-stabil
(og $|R(hj\omega)| \rightarrow \infty$ når $\omega \rightarrow \infty$)

\Rightarrow

\Rightarrow Implisitt Euler: $R(s) = \frac{1}{1-s} \rightarrow 0$ når $s = j\omega \rightarrow \infty$
L-stabil!

Trapez - metoden:

$$R(s) = \frac{1+s/2}{1-s/2} \rightarrow 1 \text{ når } s = j\omega \rightarrow \infty$$

ikke L-stabil

Pade - approksimasjoner:

Test-system $\dot{y} = \lambda y$

Ekstakt $y_L(t_n; t_{n+1}) = e^{h\lambda} y_n$

R-K $y_{n+1} = R(s) y_n$

"Gode metoder" bør oppfylle $R(s) \approx e^s$

ERK: $p = \sigma \leq u$: $R(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \dots + \frac{s^p}{p!}$

Taylor ikke av e^s

IRK: $R(s) = \frac{1 + \beta_1 s + \dots + \beta_k s^k}{1 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_m s^m}$ $k, m \leq \sigma$

Def: Pade - approksimasjonen $P_m^k(s)$ av e^s er den rasjonale funksjonen $P_m^k(s) = \frac{1 + \beta_1 s + \dots + \beta_k s^k}{1 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_m s^m}$ som tilnærmer e^s best

Padé - approksimasjoner som stabilitetsfunksjoner

1. Anta $k \leq m \leq k+2$, Da er $P_m^k(s) \leq 1$ når $\operatorname{Re}[s] \leq 0$

2. $|P_m^m(j\omega)| = 1$

3. Anta $m > k$ Da holder

$$|P_m^k(j\omega)| \rightarrow 0 \text{ når } \omega \rightarrow \infty$$

En Hekrittsmetode med stabilitetsfunksjon

$$R(s) = P_m^k(s)$$

er A-stabil hvis $k=m$, og L-stabil hvis $m=k+1$
eller $m=k+2$