

SUJET :

**Mise en place et implémentation de méthodes
volumes finis pour la résolution des
équations de la dynamique des gaz 1D**

Sommaire

Introduction

I. Système d'équations et problématiques de résolution

1. Présentation du système d'équations d'Euler
2. Obtention des équations d'équilibre
3. Mise en place de résolution

II. Résolution numérique par la méthode des volumes finis

1. Un solveur de Riemann approché : HLL
2. Implémentation sur Matlab et résultats

Conclusion

Introduction

En mécanique des fluides, les équations d'Euler sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent l'écoulement des fluides. La description eulérienne consiste à observer un point fixe du fluide, contrairement à suivre une particule dans son mouvement. Nous allons ici étudier plus particulièrement le cas des gaz, et en une dimension. Notre système est composé de trois équations, dont nous verrons les difficultés que cela implique face à la résolution du problème de Riemann, ainsi que les recours possibles et l'illustration par une implémentation numérique.

I. Système d'équations et problématiques de résolution

I.1 Présentation du système d'équations d'Euler

Notre système de lois de conservation scalaires est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho e + p)u)}{\partial x} = 0 \end{cases} .$$

Les variables sont les suivantes :

- t est le temps, exprimé en secondes
- x est la position, en mètres
- $u(x,t)$ est la vitesse (vitesse avec direction), en m s^{-1}
- $\rho(x,t)$ la masse volumique, en kg m^{-3}
- $p(x,t)$ est la pression, en Pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$)
- $e(x,t)$ est l'énergie totale spécifique, en J kg^{-1} ($1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$).

Les équations ci-dessus sont respectivement les équations de bilan de la masse, de la quantité de mouvement (ou momentum) ainsi que de l'énergie du comportement du gaz observé. Ce sont des lois de conservation car elles sont de la forme $\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(f(v(x,t)))}{\partial x} = 0$, avec $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, et v l'inconnue. De plus, elles sont bien scalaires car nous nous plaçons dans le cas où $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire le cas en une dimension.

Il est important de préciser que dans le cas des gaz, nous négligeons certaines quantités, comme la viscosité ou encore la gravité dans les calculs.

1.2 Obtention des équations d'équilibre

Commençons par rappeler la relation suivante, qui décrit la dérivée par rapport au temps d'une quantité scalaire $K(x,t)$, dépendant de $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, et va permettre de décrire les phénomènes souhaités :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial x} u, \text{ car la dérivée de la position par rapport au temps est la vitesse, à savoir } u.$$

Nous obtenons une expression qui dépend donc des dérivées partielles de K .

On définit $I = [a ; b]$ un intervalle de \mathbb{R} , $a < b$, et F telle que : $F(t) = \int_a^b K(x,t) dx$.

Alors, la variation de cette quantité F par rapport au temps nous permet d'obtenir l'égalité suivante :

$$\frac{dF}{dt} = \int_a^b \frac{dK}{dt} dx = \int_a^b \frac{\partial K}{\partial t} dx + (Ku)(b) - (Ku)(a).$$

La dernière partie de cette égalité provient du fait que la quantité est évaluée sur le bord de notre domaine, ici en a et b , qui sont les extrémités du segment sur lequel l'intégrale est évaluée. De plus, remarquons que l'on utilise ici une notation simplifiée " $(Ku)(a)$ " pour exprimer la valeur de Ku sur la borne a , identiquement pour b , qui est en réalité aussi en fonction de t .

Nous allons désormais appliquer cette formule aux quantités qui nous intéressent pour obtenir nos équations.

Conservation de la masse

Définissons F comme la masse totale de la quantité de gaz étudiée. Cette masse va rester constante au cours du temps (rien n'est perdu ni créé), c'est-à-dire que sa variation au cours du temps est nulle : $\frac{dF}{dt} = 0$.

En appliquant la formule précédente à $K = \rho$, soit la densité, qui est bien une quantité scalaire dépendant de x et t , on obtient :

$$F(t) = \int_a^b \rho(x,t) dx, \text{ ce qui implique : } \frac{dF}{dt} = \int_a^b \frac{d\rho}{dt} dx = \int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + (\rho u)(b) - (\rho u)(a).$$

$$\text{Et comme la variation est nulle : } \int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = -(\rho u)(b) + (\rho u)(a).$$

Par suffisamment de régularité et en fixant notre intervalle, nous pouvons en déduire que :

$$-(\rho u)(b) + (\rho u)(a) = -[\rho u]_b^a = - \int_a^b \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx.$$

$$\text{En conclusion, nous avons l'égalité suivante : } \int_a^b \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) dx = 0.$$

Ceci est la forme intégrale de l'équation de la conservation de la masse.

Mais cela est vrai pour tout intervalle, puisque nous avons choisi le nôtre arbitrairement.

$$\text{On peut donc en déduire que : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0.$$

Nous obtenons l'équation de conservation de la masse voulue, sous forme différentielle, qui est équivalente à la forme intégrale.

Conservation du momentum

Définissons à présent F comme étant la quantité de mouvement totale de notre fluide sur l'intervalle $[a; b]$: $F(t) = \int_a^b \rho u \, dx$.

D'après la deuxième loi de Newton, la dérivée de la quantité de mouvement de notre objet d'étude est égale à la somme totale des forces appliquées sur celui-ci.

Ici, les forces comme la gravité sont négligeables car nous sommes dans le cas des gaz, en revanche nous considérons la pression p (comme ρ et u , une fonction représentant une quantité scalaire en fonction de x et t).

Cela se traduit donc par : $\frac{dF}{dt} = -p(b) + p(a) = - \int_a^b \frac{\partial p}{\partial x} \, dx = 0$.

Par la même méthode que pour la conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{dF}{dt} = \int_a^b \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \, dx + (\rho u^2)(b) - (\rho u^2)(a) = 0, \text{ car } K = \rho u \text{ dans ce cas précis.}$$

$$\text{On a : } (\rho u^2)(b) - (\rho u^2)(a) = \int_a^b \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} \, dx.$$

$$\text{Finalement : } \int_a^b \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \, dx = 0.$$

On retrouve alors bien notre équation : $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$, en regroupant les fonctions dérivées par rapport à x et en utilisant le fait que l'intégrale est nulle pour un intervalle quelconque.

Conservation de l'énergie

Afin d'obtenir la dernière équation de notre système de lois de conservation, nous considérons l'énergie totale du gaz : $F(t) = \int_a^b \rho e \, dx$, avec e l'énergie totale spécifique, comme vu auparavant dans la définition des variables.

La variation d'énergie dépend du travail des forces appliquées ainsi que de l'afflux d'énergie arrivant chaque seconde, ce qui dans notre cas, se résume au produit de la pression par la vitesse (pas de viscosité, ni de force de gravité, considérées comme négligeables pour les gaz).

$$\begin{aligned} \text{En appliquant les formules : } \frac{dF}{dt} &= \int_a^b \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \, dx + (\rho e u)(b) - (\rho e u)(a) = -(\rho u)(b) + (\rho u)(a) \\ &\Leftrightarrow \int_a^b \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \, dx = - \left[(\rho e + p)u \right]_a^b = - \int_a^b \frac{\partial((\rho e + p)u)}{\partial x} \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{En rassemblant les quantités, on retrouve : } \int_a^b \left(\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho e + p)u)}{\partial x} \right) \, dx = 0.$$

Par équivalence, nous obtenons donc la forme différentielle attendue de la loi de conservation de

$$\text{l'énergie : } \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho e + p)u)}{\partial x} = 0.$$

En conclusion, nous avons obtenu le système différentiel sous forme eulérienne des équations d'équilibre de la dynamique des gaz en une dimension.

1.3 Mise en place de résolution

Nous reformulons notre problème de la manière suivante, à l'aide de vecteurs et avec des conditions initiales :

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0, \text{ où } U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix} \\ U(x, t = 0) = U^0(x) \end{cases}$$

Nous adoptons ici une notation différente pour exprimer les dérivées partielles : les lettres t et x sont notées en indice des vecteurs pour montrer que la dérivation est appliquée à chaque composante de ceux-ci.

On rappelle que c'est un système non linéaire de lois de conservation scalaires hyperboliques. Nous proposons ici de le résoudre par la méthode numérique des volumes finis. C'est une méthode numérique utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Elle est basée sur l'approximation d'intégrales et fonctionne de manière itérative. La solution approchée est calculée de la manière suivante : $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}})$.

U est le vecteur contenant les solutions approchées, dont l'indice supérieur indique le moment et l'indice inférieur la position représentés. \mathcal{F} est la fonction flux, qui va nous permettre de calculer les valeurs de U à chaque instant, et dont l'enjeu principal est de la déterminer.

Plaçons-nous sur un segment I comme vu précédemment, que l'on partitionne en mailles $[x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}]$ centrées chacune en x_i . On considère également le domaine temporel $[0; T]$, $T > 0$, partitionné de t_0 à t_N . U_i^n est alors la valeur de $U(x, t)$ pour x dans l'intervalle centré en x_i , et au temps t_n , $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$. Enfin, Δx et Δt sont respectivement les pas de d'espace et de temps, et dépendent du choix du nombre de mailles.

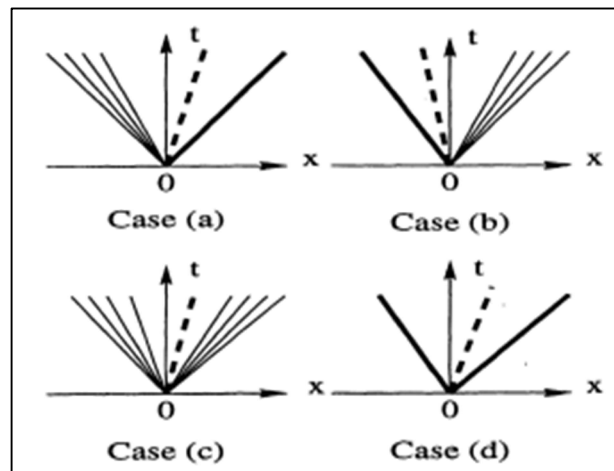
Nous sommes dans notre cas face à un problème de Riemann, de par la nature de nos équations et de la condition initiale. Face à ce problème, le schéma de Godunov propose de résoudre à chaque pas de temps le problème de Riemann sur chaque point. On se retrouve avec 2 états constants, à gauche et à droite de chaque $x_{i+\frac{1}{2}}$. Au temps t_n , on a :

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U(x, t_n) = \begin{cases} U_i^n & \text{si } x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ U_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

Le flux numérique provient alors de la solution du problème de Riemann en 0, notée $W(0, U_i^n, U_{i+1}^n)$, et s'écrit : $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = F(W(0, U_i^n, U_{i+1}^n))$.

Mais le problème de Riemann ainsi posé est complexe à résoudre car, même dans le cas plus simple où nous ne considérons qu'une seule équation à résoudre au lieu de 3, il y a quand même trois cas possibles d'ondes qui peuvent être observées sur chaque point : le choc, la détente et la discontinuité de contact. Nature dont il n'est pas possible de savoir à l'avance. Sachant, de plus, que chaque onde peut se trouver à gauche ou à droite, cela fait beaucoup de possibilités de cas.

Enfin, il faut évaluer le problème à chaque instant et sur chaque maille, ce qui explique la complexité pour trouver cette solution.



Cas possibles de combinaisons d'ondes
autour de 0

Par exemple, dans le cas (a) présenté ci-dessus, on peut observer : une détente à gauche, une discontinuité de contact et un choc à droite.

Pour résoudre notre problème, nous allons donc avoir recours à ce qui est appelé un solveur de Riemann approché, afin de pouvoir exprimer la fonction flux plus facilement.

II. Résolution numérique par la méthode des volumes finis

II.1 *Un solveur de Riemann approché : HLL*

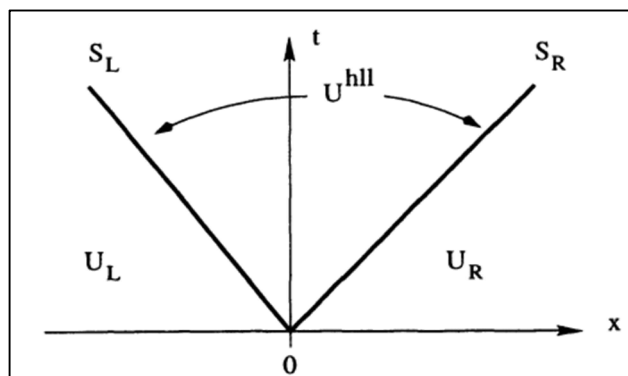
Il existe de nombreux solveurs de Riemann approchés différents. HLL est l'un d'entre eux, et son nom provient des 3 mathématiciens : Harten, Lax et van Leer. C'est un solveur de Riemann approché, c'est-à-dire une méthode numérique qui va permettre d'approcher la solution exacte. Le but est d'obtenir de façon plus simple la fonction flux, comme nous l'avons souligné précédemment.

HLL propose le modèle suivant :

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ F^{hll} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases}, \text{ correspondant au problème : } \tilde{U}(x,t) = \begin{cases} U_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq S_L \\ U^{hll} & \text{si } S_L \leq \frac{x}{t} \leq S_R \\ U_R & \text{si } \frac{x}{t} \geq S_R \end{cases}.$$

On exprime les deux quantités centrales de la façon suivante :

$$F^{hll} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \quad \text{et} \quad U^{hll} = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L}.$$



Représentation des positions des différents états
séparés par les ondes de vitesse S_L et S_R

Nous allons désormais préciser à quoi correspondent les différentes valeurs entrant en jeu dans les systèmes présentés plus haut.

F_L et F_R sont les notations pour, respectivement, $F(U_L)$ et $F(U_R)$, avec F la fonction comme vue précédemment dans la reformulation de notre problème.

U_L et U_R représentent les états constants respectivement à gauche, et à droite, comme indiqué sur le schéma ci-dessus. Ils contiennent les données suivantes : ρ_L, u_L, p_L et ρ_R, u_R, p_R .
On peut donc en déduire les valeurs de $F(U_L)$ et $F(U_R)$:

$$F_L = \begin{pmatrix} \rho_L * u_L \\ \rho_L * u_L^2 + p_L \\ (\rho_L * e_L + p_L)u_L \end{pmatrix} \text{ et } F_R = \begin{pmatrix} \rho_R * u_R \\ \rho_R * u_R^2 + p_R \\ (\rho_R * e_R + p_R)u_R \end{pmatrix}.$$

S_L et S_R sont les vitesses des ondes gauche et droite et se calculent à partir des données grâce aux formules :

$$\begin{cases} S_L = u_L - a_L \\ S_R = u_R - a_R \end{cases}, \text{ où } a \text{ est la vitesse du son.}$$

Avec les données précédentes, ainsi que les formules suivantes, nous pouvons facilement retrouver a et e lorsque nous en avons besoin :

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \text{ dans un gaz parfait, qui est un cas particulier et simplifié de fluide, et}$$

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho e - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \Leftrightarrow e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} u^2, \text{ par définition de la pression.}$$

Enfin, dans cette dernière expression, nous utilisons γ , qui est une constante qui, pour les gaz parfaits, vaut $\frac{7}{5} = 1,4$.

En résumé, nous possédons désormais tous les outils pour résoudre notre problème numériquement à partir aux conditions $\rho_L, u_L, p_L, \rho_R, u_R, p_R$, et grâce à la formule de flux numérique introduite.

II.2 Implémentation sur Matlab et résultats

Le but est d'implémenter la méthode introduite ci-dessus afin de voir l'évolution de la densité, de la pression, de la vitesse et de l'énergie du gaz observé selon les conditions initiales. Nous utiliserons le logiciel Matlab pour illustrer nos propos ici.

Pour commencer, il faut choisir un intervalle dans lequel évolue notre variable x . On peut ensuite créer un maillage en fonction du nombre de mailles voulues. On choisit également un temps maximum et on crée un maillage en temps. On obtient Δx et Δt et on crée nos vecteurs contenant les points d'espace et de temps.

```

% intervalles pour x et t
a = input('Borne gauche de l intervalle : ');
b = input('Borne droite de l intervalle : ');
L = b-a;
T = input('Temps maximal : ');

% maillage
Nx = input('Nombre de mailles : ');
Nt = input('Nombre de pas de temps : ');

deltax = L/Nx;
deltat = T/Nt;

% vecteurs t et x
x = zeros(1,Nx+1);
t = zeros(1,Nt+1);

for i = 1:Nx+1
    x(i) = a + (i-1)*deltax;
end

for n = 1:Nt+1
    t(n) = (n-1)*deltat;
end

```

Extrait de code provenant de Matlab
et illustrant la première étape

Il faut ensuite créer les variables, à savoir : ρ , u , p , e ainsi que les vitesses S et a . La constante $\gamma = 1,4$ est aussi implémentée, pour permettre les calculs de e , a et S (qui découlent de a et u). Nous allons donc créer des vecteurs car rappelons que chacune d'entre elles dépend de x et t et va évoluer en fonction du temps et de l'espace. Nous prendrons des vecteurs dont la taille correspondra à celle du vecteur x .

Il faut initialiser ces variables avec les valeurs initiales qui correspondent aux valeurs des vecteurs au temps $t = 0$. Il faudra ensuite les mettre à jour à chaque pas de temps pour pouvoir calculer la valeur suivante.

On entre également x_0 qui est le lieu de la discontinuité initiale de notre problème de Riemann, et dont vont dépendre les valeurs initiales (gauche ou droite selon les valeurs de x).

```

rho = zeros(Nx+1,1);
u = zeros(Nx+1,1);
p = zeros(Nx+1,1);
a = zeros(Nx+1,1);
e = zeros(Nx+1,1);

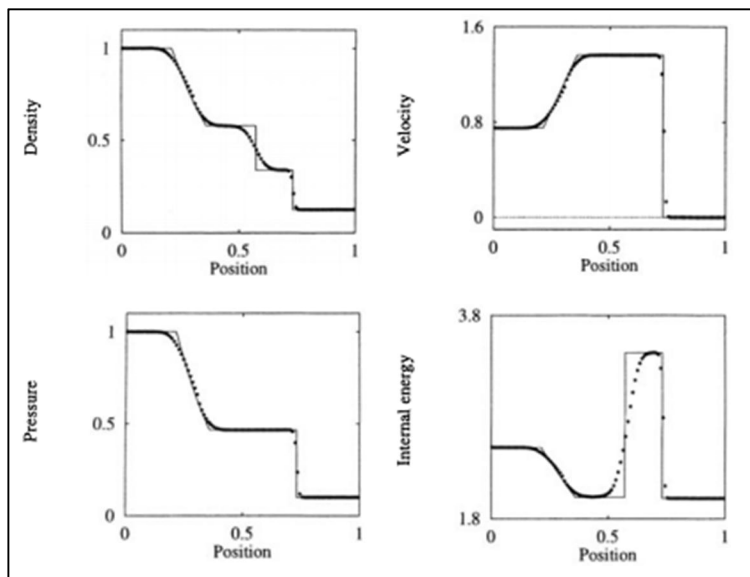
for i = 1:Nx+1
    if x(i) < x0
        rho(i) = rhoL;
        u(i) = uL;
        p(i) = pL;
    else
        rho(i) = rhoR;
        u(i) = uR;
        p(i) = pR;
    end
    a(i) = sqrt(gamma*p(i)/rho(i));
    e(i) = p(i)/(rho(i)*(gamma-1)) + 0.5*(u(i)^2);
end

```

Exemple d'implémentation des variables

Le but est d'utiliser cette formule : $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}})$, où U représente le vecteur des variables, afin de calculer à moment, l'évolution du vecteur en fonction de sa valeur au temps précédent. On doit donc implémenter la fonction flux \mathcal{F} auparavant. De plus, il faudra vérifier la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) qui est une contrainte sur le pas de temps Δt , afin de s'assurer de la justesse du résultat. Dans notre cas, nous devons avoir : $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_i(|U_i|, a_i)}$.

Lorsque toutes les valeurs de nos variables sont calculées, il suffit d'afficher les résultats en fonction de x en utilisant la commande "plot". Nous allons montrer différents exemples de résultats trouvés numériquement.



Deux états constants :

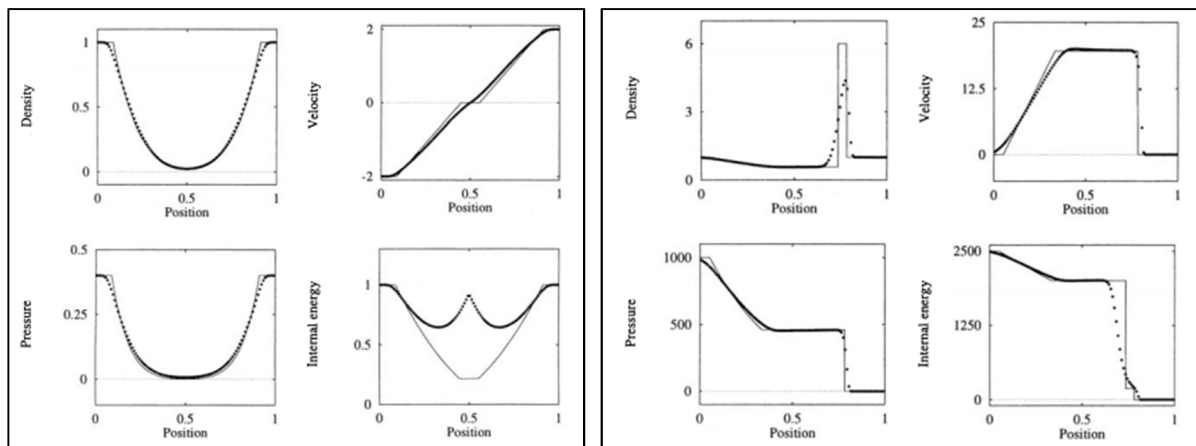
$\rho_L = 1$ et $\rho_R = 0,125$

$u_L = 0,75$ et $u_R = 0$

$p_L = 1$ et $p_R = 0,1$

Test n°1

Le test 1 affiche les résultats de la densité, la vitesse, la pression et l'énergie, pour les valeurs précisées à droite de l'image, en pointillés ainsi que la solution exacte en trait plein. Ce test a été réalisé en utilisant 100 points pour le maillage de l'espace, sur l'intervalle $[0 ; 1]$. x_0 vaut ici 0,3.



2 autres cas tests

Conclusion

Pour conclure, nous avons vu ici une méthode adaptée à la résolution d'équations aux dérivées partielles qui sont plus particulièrement des lois de conservation scalaires, mais il en existe bien d'autres qui permettent la modélisation numérique de comportements physiques.

Bibliographie

Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, Eleuterio F. Toro, 1999.