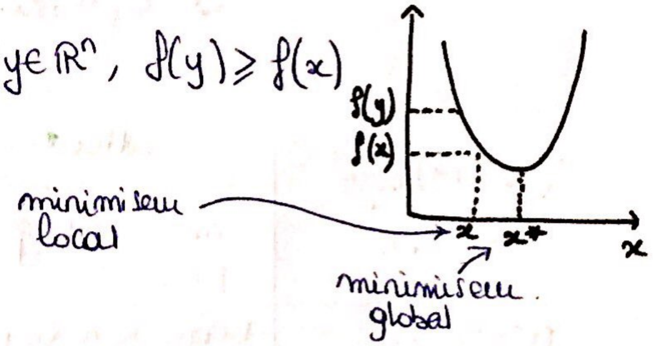
Rappel optimisation

On cherche $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) \geq f(x)$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

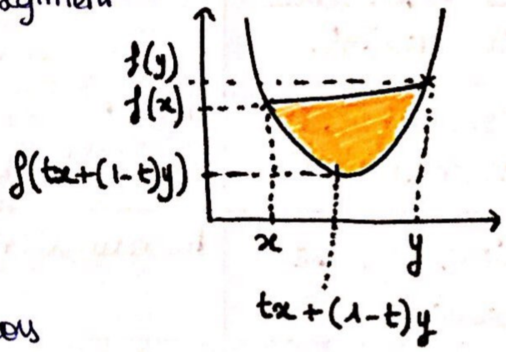


Fonction convexe :

si $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $\forall y \in \mathbb{R}^p$, $\forall t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

$\Rightarrow$ f se situe au dessous du segment $[(x, f(x)), (y, f(y))]$

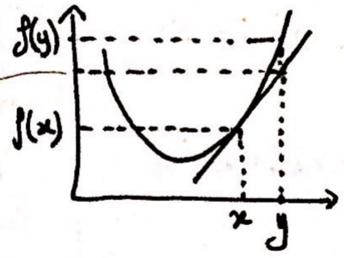


Si en plus elle est dérivable, alors

$\forall y \in \mathbb{R}^p$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

$\Rightarrow$ f est au dessous de sa tangente en x



Théorème 1 :

Si f est dérivable et x^* est un minimiseur de f,

alors $\nabla f(x^*) = 0$

Théorème 2 :

Si f est convexe et dérivable,

x^* un minimiseur de f $\Leftrightarrow$ $\nabla f(x^*) = 0$

Exemples de problèmes d'optimisation

Quadratique convexe	**MCO** $\min_{\beta \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|X\beta - y\|_2^2$ **Ridge** $\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2}\|X\beta - y\|_2^2 + \frac{\lambda}{2}\|\beta\|_2^2$
Dérivable convexe	**Régression logistique** $\min \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(1+\exp(-y_i(x_i^T w + w_0))) + \frac{\lambda}{2}\|w\|^2$
Convexe non dérivable	**Lasso** $\min \frac{1}{2}\|X\beta - y\|_2^2 + \lambda\|\beta\|_1$
Convexe avec contraintes	**SVM dual** $\min_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i X_{ij}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ s.c $\begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C \ \forall i \\ \sum y_i \alpha_i = 0 \end{cases}$
Non convexe avec contraintes	**NMF** $\min_{U \in \mathbb{R}^{n \times k}, V \in \mathbb{R}^{k \times p}} \|A - UV\|_F^2$ $U_{i,j} \geq 0$ $V_{j,l} \geq 0$
Non convexe dérivable	**Réseau de neurones** $\min_{w \in \mathbb{R}^{H+Hp}} \sum_{i=1}^{n} \|y_i - f(x_i, w)\|^2$
Non convexe non dérivable	**0/1 loss** $\min_{w \in \mathbb{R}^p, w_0 \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(y_i(x_i^T w + w_0) < 0)$
Combinatoire	**KNN** $\min_{s \in \mathbb{Z}^n} \sum_{i=1}^{n} s_i \|x_0 - x_i\|$ $0 \leq s_i \leq 1 \ \forall i$ et $\sum s_i = K$ **Kmeans** $\min_{S_1 \dots S_K} \sum_{k=1}^{K}\sum_{x_j \in S_i}\|x_j - \mu_k\|^2$ $\mu_k = \frac{1}{\|S_k\|}\sum_{x_j \in S_i} x_j \ \forall k$ $S_j \cap S_i = \emptyset \ \forall i,j$ $S_1 \cup \dots \cup S_K = \{1 \dots n\}$.