

# Dinámica de un Cohete

## Ecuaciones Diferenciales

Camilo Zuluaga

May 21, 2024

# Tabla de Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos de los Cohetes</b>	<b>3</b>
2.1	Definición de un Cohete . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Leyes de Newton Aplicadas a la Propulsión de un cohete</b>	<b>4</b>
3.1	Primera Ley de Newton . . . . .	4
3.2	Segunda Ley de Newton . . . . .	4
3.3	Tercera Ley de Newton . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Ecuaciones empíricas para el vuelo de cohetes</b>	<b>6</b>
4.1	Fuerza de Arrastre . . . . .	6
4.2	Máxima Presión Dinámica . . . . .	6
<b>5</b>	<b>El Giro Gravitatorio</b>	<b>7</b>
5.1	Definición . . . . .	7
5.2	Importancia del Giro Gravitatorio . . . . .	7
5.3	Derivación de las Ecuaciones Diferenciales . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Modelado Atmosférico y del Vehículo</b>	<b>11</b>
6.1	Densidad del Aire y Aceleración Gravitacional . . . . .	11
6.2	Dimensiones del Cohete . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>13</b>
7.1	Gráficos . . . . .	13
7.2	Conclusiones . . . . .	15

# Introducción

Uno de los aspectos más críticos y complejos de la ingeniería aeroespacial es la planificación y ejecución del lanzamiento para una inserción orbital. Este proceso implica una serie de maniobras que pueden ser expresadas por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias para conseguir una trayectoria óptima. La dinámica del vuelo de un cohete, está sujeta a principios físicos, derivados de las leyes de Newton, así como fuerzas de gravitación, masas variables, variabilidad del empuje, entre otras. En este contexto, estas ecuaciones de movimiento permiten modelar el comportamiento dinámico del cohete, desde el despegue hasta la inserción en una órbita terrestre baja (LEO).

El objetivo de este ensayo es desarrollar un modelo matemático de la dinámica de un cohete en su ascenso utilizando ecuaciones diferenciales previamente definidas y derivadas las cuales se abordarán en detalle. Se analizarán los factores que afectan los vuelos del cohete, como pueden ser: la aceleración de la gravedad, la presión dinámica, el coeficiente de arrastre, las masas decrecientes y el giro gravitatorio. En particular, se abordará el caso de un lanzamiento de dos etapas, lo que añade complejidad al análisis debido a las distribuciones de masas y empuje durante el ascenso.

Al comprender mejor los factores que influyen en el ascenso del cohete, nuestro modelado proporciona gráficas detalladas que representan cómo los principios orbitales y físicos interactúan durante el vuelo. Estas representaciones permiten visualizar el giro gravitatorio y su inserción en la órbita baja, acompañado de la velocidad, altura y fuerzas actuando en el cohete con un objetivo final.

# Fundamentos de los Cohetes

## 2.1 Definición de un Cohete

Para entrar en contexto, debemos tener una idea de qué es un cohete, en su forma más abstracta se le define como un vehículo que expulsa masa para acelerar, esto se puede aplicar a algo tan simple como un globo, cuando este expulsa el aire por su parte inferior, el globo acelera en dirección contraria al impulso del aire.



Figure 2.1: Representación de la función de un cohete

En el lado de su diseño, cuenta con partes principales, las cuales son:

- El cuerpo o fuselaje, que contiene los depósitos de combustible, la carga útil y otros componentes.
- Uno o varios motores cohete, que combinan y queman el combustible y el oxidante para crear empuje.
- Una zona o compartimento de carga útil para transportar satélites, naves espaciales, cápsulas de tripulación u otras cargas al espacio.
- Sistemas de guiado y control para dirigir el cohete.

Los cohetes pueden viajar hacia el espacio debido a sus motores, creando una gran cantidad de empuje expulsando masa como se explicaba anteriormente. Esto crea una fuerza opuesta e igual sobre el propio cohete, impulsándolo hacia arriba según la tercera ley del movimiento de Newton 3.3.

# Leyes de Newton Aplicadas a la Propulsión de un cohete

La propulsión y la trayectoria de un cohete se basan en los principios fundamentales descritos por las tres leyes del movimiento formuladas por Sir Isaac Newton en el siglo XVII. Estas leyes son cruciales para entender cómo un cohete puede despegar de la Tierra, viajar a través del espacio y llegar a su destino.

## 3.1 Primera Ley de Newton

Antes de que el motor del cohete se encienda, este permanece en reposo en la plataforma de lanzamiento o en movimiento rectilíneo uniforme si ya estaba en vuelo. Esta ley implica que el cohete permanecerá en su estado actual de movimiento (ya sea en reposo o en movimiento uniforme) a menos que una fuerza externa actúe sobre él. Esto significa que el cohete necesita una fuerza (el empuje del motor) para cambiar su estado de movimiento.

$$\sum F = 0$$

## 3.2 Segunda Ley de Newton

Esta ley establece que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa. En el contexto de un cohete, cuando el motor se enciende, genera una fuerza hacia abajo (llamada empuje) que es mayor que la resistencia del aire y la gravedad, permitiendo al cohete acelerar hacia arriba.

$$F = m \cdot a$$

Sin embargo, esta definición no aplica para un cohete en su totalidad, ya que la masa del cohete cambia constantemente, y la ecuación previamente definida solo aplica si la masa es constante, por lo tanto.

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

### 3.3 Tercera Ley de Newton

Esta ley establece que por cada acción hay una reacción igual y opuesta. En el caso de un cohete, el motor expulsa gases a alta velocidad hacia abajo (acción), y como resultado, el cohete experimenta una fuerza hacia arriba (reacción), lo que lo impulsa hacia arriba en el espacio.

En la Figura 3.1 podemos observar la ley en acción, observamos un vehículo en reposo con las fuerzas  $F_w$  siendo la fuerza gravitacional que está empujando el cohete, la cual se calcula con la segunda ley de Newton, y  $F_n$  representando la fuerza normal que es la tierra empujando hacia arriba el cohete. Al ser fuerzas iguales u opuestas estas se cancelan, haciendo que el cohete no se mueva de su posición, pero en el momento de la ignición de sus motores, una nueva fuerza aparece  $F_t$ , empujando hacia arriba el cohete, siendo la demostración de la tercera ley de Newton.

s

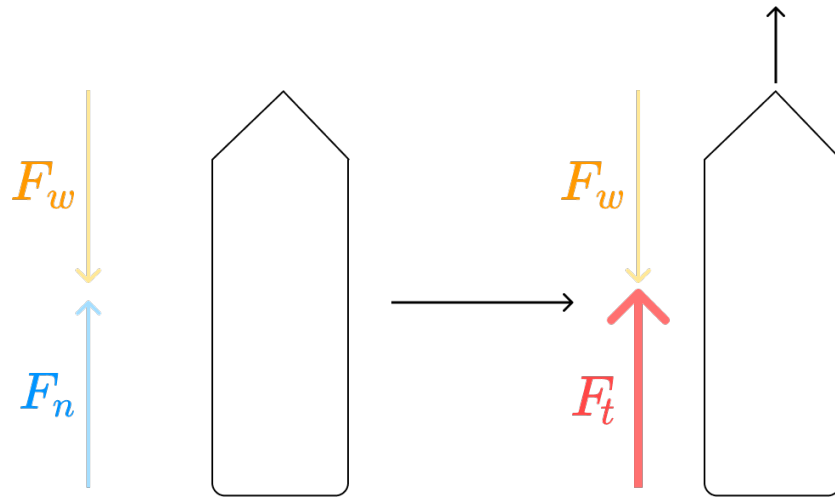


Figure 3.1: Representación de la Tercera Ley de Newton

# Ecuaciones empíricas para el vuelo de cohetes

## 4.1 Fuerza de Arrastre

A medida que el cohete se desplaza por el aire, encuentra la resistencia o fricción de las moléculas de aire, que se oponen a su movimiento, Esto significa que la aceleración del cohete y la velocidad máxima alcanzable se reducen debido a la fuerza de resistencia opuesta. Los cohetes en la base del propulsor producen el empuje  $T$  que actúa a lo largo del eje del vehículo en la dirección del vector de velocidad  $v$ . La fuerza de arrastre aerodinámico  $D$  está dirigida en dirección opuesta a la velocidad. Usando como constante  $C_d = 0.74$ , su magnitud se da por:

$$D = \frac{1}{2}C_d A \rho v^2$$

## 4.2 Máxima Presión Dinámica

En la ecuación que define la fuerza de arrastre podemos observar la máxima presión dinámica. Es el momento del vuelo en el que el cohete se somete al máximo estrés mecánico. Es una forma de decir que el cohete está sufriendo una gran presión física al atravesar todo el aire de la atmósfera a gran velocidad. Se define como:

$$q = \frac{1}{2}\rho v^2$$

En la que  $\rho$  es la densidad de la atmósfera y  $v$  es la velocidad, es decir, la magnitud de  $\mathbf{v}$ .

# El Giro Gravitatorio

## 5.1 Definición

Un giro gravitatorio, también conocido como giro de elevación cero, es una maniobra que utiliza la gravedad de la Tierra durante un lanzamiento para colocar un cohete en la trayectoria correcta estableciendo una órbita alrededor del planeta.

El sistema de guiado del cohete está programado para que la cantidad de cabeceo y aceleración utilice la atracción gravitatoria del planeta de tal manera que el vehículo ya se encuentre en las partes bajas del espacio en el momento en que se desplace en paralelo a la superficie.

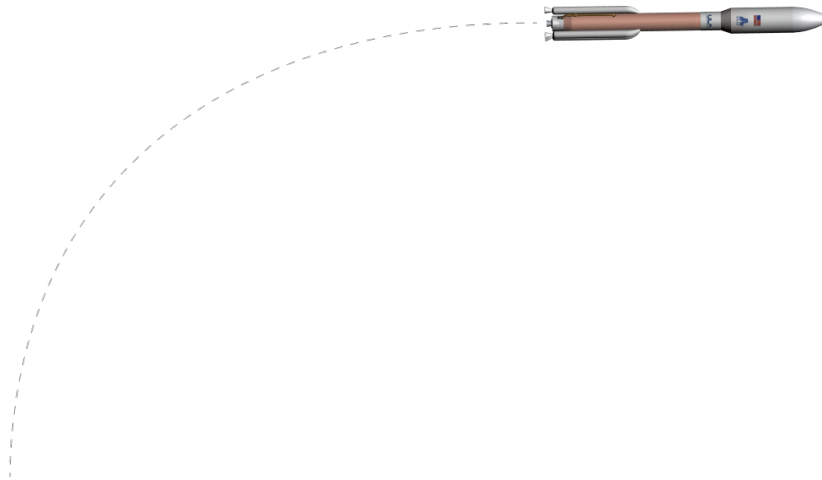


Figure 5.1: Trayectoria con giro gravitatorio

## 5.2 Importancia del Giro Gravitatorio

El propósito de un cohete orbital es alcanzar el espacio y entrar en órbita alrededor de la Tierra tan pronto y eficientemente como sea factible. Para lograrlo, no sólo deben aumentar su altitud y escapar de la atmósfera terrestre, sino también viajar a gran velocidad.



Un giro gravitatorio permite a un cohete alcanzar la órbita de la forma más rápida y eficiente desde el punto de vista del consumo de combustible, al tiempo que reduce la tensión a la que está sometido el vehículo durante su ascenso.

### 5.3 Derivación de las Ecuaciones Diferenciales

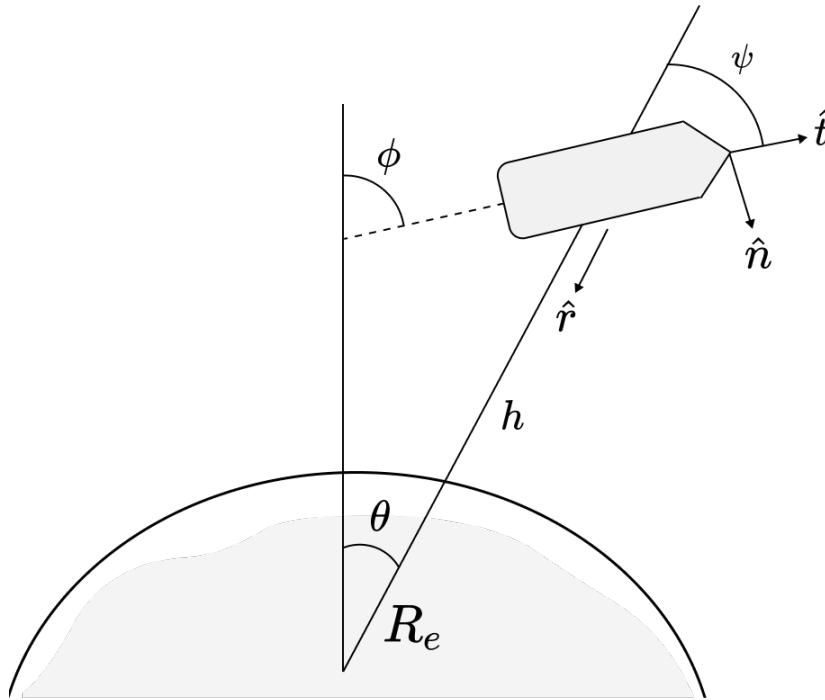


Figure 5.2: Fuerzas actuando en un giro gravitatorio

En la Figura 5.2 se grafican las fuerzas que actúan en el giro gravitatorio sobre el cohete, las siguientes ecuaciones diferenciales serán con respecto a esta representación, en el interés de la simplicidad, ignoraremos el giro de la Tierra y escribiremos las ecuaciones de movimiento relativas a una Tierra no giratoria.

La segunda ley de Newton nos da la siguiente ecuación  $F = ma$ , sin embargo, en este caso se representa como vectores, donde estos contienen la

magnitud, la dirección de la fuerza y la aceleración respectivamente.

## Derivación Paso a Paso

1. Segunda Ley de Newton representada por vectores:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

2. Descomposición de la Aceleración:

$$\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$$

Donde se escriben:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{r} = v\frac{v}{r} = v\frac{d\phi}{dt}$$

3. Componentes de la Fuerza Total:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{grav}} + \vec{F}_{\text{thrust}} + \vec{F}_{\text{drag}}$$

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -mg\hat{r} \quad \vec{F}_{\text{thrust}} = T\hat{t} \quad \vec{F}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2}\rho AC_d v^2\hat{t}$$

4. Dirección del Vector Unitario Radial:

$$\hat{r} = \cos(\psi)\hat{t} + \sin(\psi)\hat{n}$$

5. Combinación de Fuerzas y Aceleración:

$$m\left(\frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\phi}{dt}\hat{n}\right) = T\hat{t} - mg(\cos(\psi)\hat{t} + \sin(\psi)\hat{n}) - \frac{1}{2}\rho AC_d v^2\hat{t}$$

6. Separación de Componentes Tangenciales y Normales: Para el componente tangencial ( $\hat{t}$ ):

$$m\frac{dv}{dt} = T - mg\cos(\psi) - \frac{1}{2}\rho AC_d v^2$$

7. Para el componente normal ( $\hat{n}$ ):

$$mv \frac{d\phi}{dt} = -mg \sin(\psi)$$

8. Ecuaciones Diferenciales del Movimiento: Del componente tangencial, obtenemos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T}{m} - g \cos(\psi) - \frac{1}{2m} \rho A C_d v^2 \quad (5.1)$$

9. Del componente normal, obtenemos:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g}{v} \sin(\psi) \quad (5.2)$$

Ecuaciones adicionales para la altura ( $h$ ) y los ángulos ( $\theta, \psi$ ):  
Cambio en la posición vertical ( $h$ ):

$$\frac{dh}{dt} = v \cos(\psi) \quad (5.3)$$

Cambio en la distancia horizontal ( $\theta$ ):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v \sin(\psi)}{R_e + h} \quad (5.4)$$

Cambio en el ángulo de trayectoria de vuelo ( $\psi$ ):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \quad (5.5)$$

# Modelado Atmosférico y del Vehículo

## 6.1 Densidad del Aire y Aceleración Gravitacional

En el modelado atmosférico tendremos en cuenta la densidad del aire con respecto a la altitud  $h$ , y la aceleración gravitacional variando respecto a la altitud  $h$ .

El perfil de densidad atmosférica se supone exponencial,

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}}$$

donde  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$  es la densidad atmosférica a nivel del mar y  $h_0 = 7.5 \text{ km}$  es la altura de escala de la atmósfera. (La altura de escala es la altitud a la que la densidad de la atmósfera es aproximadamente el 37% de su valor a nivel del mar).

Por último, contamos con la aceleración gravitacional, la cual varía con la altitud y la podemos definir desde la ley de gravitación de Newton y la suposición de una Tierra esféricamente simétrica.

$$g = \frac{g_0}{(1 + h/R_e)^2} \quad (R_e = 6378 \text{ km}, g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2)$$

## 6.2 Dimensiones del Cohete

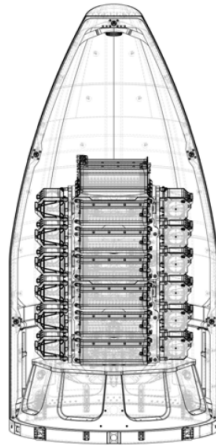
Para las dimensiones del vehículo, tomando en cuenta la masa estructural (masa del cohete al vacío en  $\text{kg}$ ), masa propelante (masa del combustible en  $\text{kg}$ ), masa de vuelo (masas sumadas al iniciar el vuelo en  $\text{kg}$ ), diámetro de 1.2 ( $\text{m}$ ), carga útil ( $\text{kg}$ ) y un aproximado del empuje de los motores ( $\text{kN}$ ), se toma de referencia el cohete orbital *Electron Rocket* de la empresa RocketLab, con la misión de dejar en órbita baja 27 Cubesats a una altitud aproximada de 184 km (Órbita terrestre baja, aproximadamente comienza a 160 km), con una altura máxima de 540 km y poder concretar una órbita inicial.

Durante el diseño y el análisis del vuelo de un cohete, es necesario considerar y calcular diversos parámetros. Estos parámetros son esenciales para comprender el rendimiento del cohete, la trayectoria y las características

generales de la misión. La siguiente tabla proporciona una visión general de algunos parámetros críticos que intervienen en el vuelo de un cohete, junto con sus descripciones y unidades típicas.

Parámetro	Primera Etapa	Segunda Etapa
Masa estructural (Kg)	900	300
Masa propelante (Kg)	10000	2000
Número de motores	9 (Motores para el nivel del mar)	1 (Motor de vacío)
Empuje del motor (kN)	24,33167	28.192

Table 6.1: Parametros para el vuelo del cohete



27 Cubesats

Figure 6.1: Representación carga útil de 300 Kg, Electron Rocket.

Para tener en cuenta otros datos importantes:

- Diámetro del Cohete  $diam = 1.2\ m$ , para calcular el área  $A = \frac{\pi}{4}diam^2$
- La carga útil a dejar en órbita (Payload), será de 300 Kg
- El giro gravitatorio comienza a una altura de 1.4 Km a un ángulo de  $10.489^\circ$

# Resultados y discusión

La simulación realizada en Python, por medio de las ecuaciones diferenciales previamente definidas, las cuales han sido resueltas con el método *Range Kutta* del modulo *Scipy* para una mayor precisión, nos arroja los siguientes resultados.

## 7.1 Gráficos

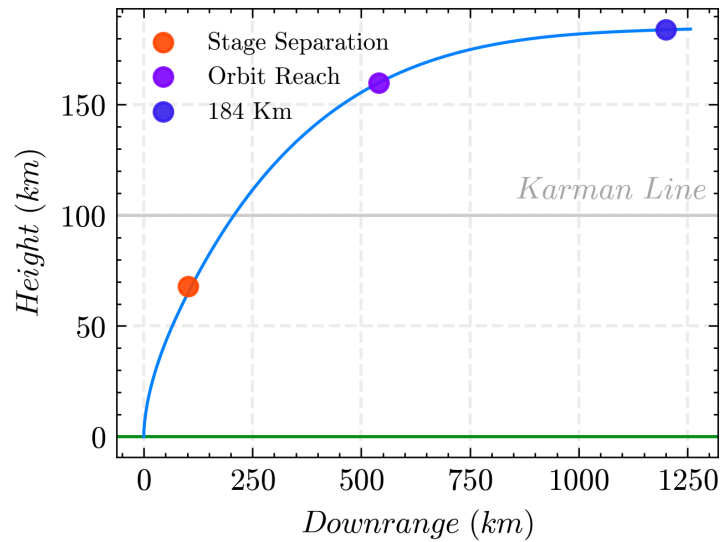


Figure 7.1: Altitud vs Desplazamiento

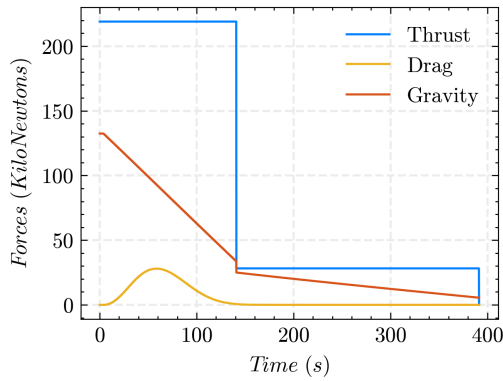


Figure 7.2: Fuerzas vs Tiempo

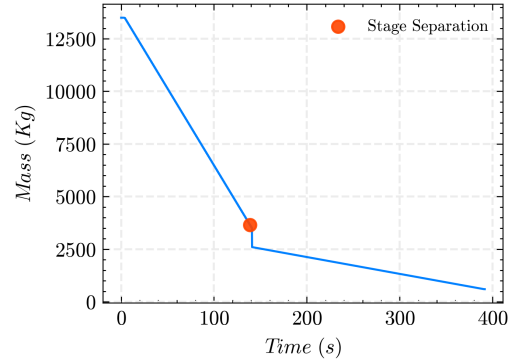


Figure 7.3: Masa vs Tiempo

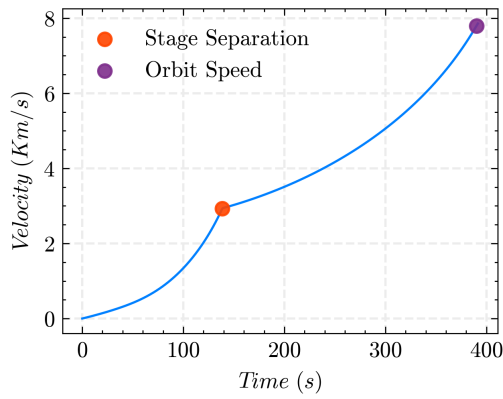


Figure 7.4: Velocidad vs Tiempo

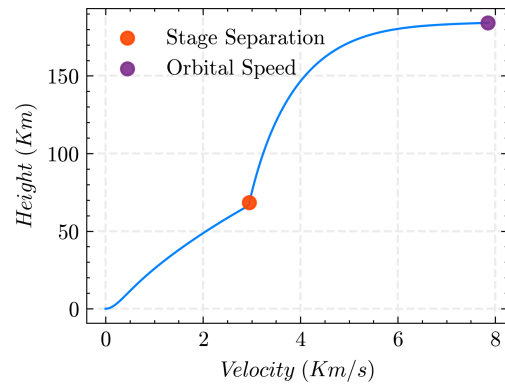


Figure 7.5: Altitud vs Velocidad

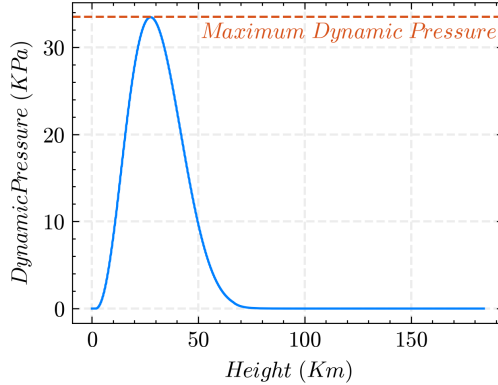


Figure 7.6: Max Q vs Tiempo

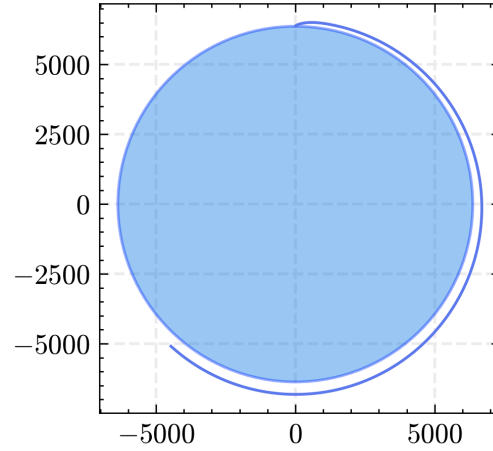


Figure 7.7: Órbita inicial después de 1 Hora

## 7.2 Conclusiones

A partir del análisis y elaboración de las graficas obtenidas, se puede tener en cuenta que nuestro objetivo fue alcanzado con el desarrollo del programa en Python y aplicando ecuaciones diferenciales ordinarias en un contexto aeroespacial.

Durante el estudio, se observa que el Electron Rocket, al disminuir su masa, alcanza una velocidad maxima para llegar hasta la LEO (Órbita terrestre baja). Es importante resaltar que este es el ultimo motor encargado de llevar la carga útil en la órbita deseada. Además, al estudiar las fuerzas en juego, se puede evidenciar la presencia de arrastre y una reducción gradual en la aceleración gravitacional respecto al tiempo.

Por último, al observar la Figura 7.1 se nota la inclinación y el giro gravitatorio del Electron Rocket, superando la línea de Kármán (donde se estima que comienza el espacio) y alcanzando un ángulo horizontal con respecto a la tierra, llegando a la Órbita terrestre baja, lo que confirma la eficacia del algoritmo implementado para simular de manera simple la dinámica de un cohete a una órbita espacial.

**Código Fuente:** <https://github.com/camilo-zuluaga/rocket-trajectory>



# Bibliography

- [1] Michael West Joanne West Konstantinos Kontis Sriram Rengarajan David Evans Andy Milne Stuart McIntyre Christie Alisa Maddock, Lorenzo Ricciardi. Conceptual design analysis for a two-stage-to-orbit semi-reusable launch system for small satellites. *Acta Astronautica*.
- [2] Howard D. Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. ELSEVIER, 3 edition, 2010.
- [3] Dr Gerald M Gregorek. Aerodynamic drag of model rockets. *National Association of Rocketry*.
- [4] Rahul Kumar Raj K. Singh Priyanshu Nailwal, Prakash N. Budhaulia. Designing of a two stage to orbit launch vehicle. *IJARET*, 14:1–13, Abril 2023.
- [5] RocketLab. *Payload User Guide*, 7.0 edition, Noviembre 2022.
- [6] M. A. Sharaf and L.A. Alaqal. Computational algorithm for gravity turn maneuver. *Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences*.