Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado

Título de la tesis, debe ser idéntico al registrado

Tesis para optar el grado académico de
Magíster en Matemáticas

Autor
Diego Camilo Arenas Mata

Asesor
Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez

Lima - Perú
mes - 2021

TÍTULO DE LA TESIS[1]

nombre completo del graduando[2]

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. nombre del presidente del jurado, XXXX
(Presidente del jurado)

Dr. nombre del asesor, PUCP
(Asesor)

Dr. nombre del jurado, YYYY
(Tercer miembro)

Lima - Perú
mes - año

[1]Version final con las correcciones del jurado
[2]proyecto dgi, apoyo financiero

Resumen

TÍTULO DE LA TESIS

nombre del graduando

año

Asesor: nombre del asesor
Título obtenido: Magíster en Matemáticas

Incluya el resumen de la tesis y tome en cuenta el contexto adecuado de los tópicos considerados en el trabajo de tesis, pero evite cualquier apreciación y juicio crítico. Es razonable que por medio del resumen se dé una descripción clara de los objetivos de la tesis, se indique cuales se lograron, se presenten los métodos que se utilizaron y se concluya con la presentación de los aportes del trabajo final, en el ámbito de las matemáticas. Si es posible, cite la referencia principal. De acuerdo con [dV16], el resumen se escribe en un único párrafo (200 a 300 palabras) y en tiempo verbal presente.

Palabras clave: palabra clave 1, palabra clave 2, palabra clave 3

Las palabras clave en castellano deben incluirse con minúscula inicial (salvo que se trate de nombres propios o siglas).

Abstract

Haga y escriba aquí una traducción precisa del resumen del trabajo de tesis. Para presentar adecuadamente las palabras clave junto a la clasificación universalmente aceptada, se debe utilizar la información presentada en la siguiente enlace: *https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html*

Key words and phrases. Inlcluir las palabras claves en ingles, estas podrian aparecer con mayusculas.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 00A35, 00A15; Secondary 97E99, 00A06.

. . . dedicatoria. . .

Índice general

Índice de figuras

.

Agradecimiento

En esta parte se escribe cada agradecimiento y su razón a todos aquellos a los que se decida hacer presente un agradecimiento, ya que hicieron posible que la tesis se termine. Cuando sea el caso, se incluyen a las instituciones que financiaron el desarrollo de la tesis.

A Dios, por ...
A mis padres, por ...
A mis abuelitos ...
A mis profesores y compañeros ...
A los funcionarios de la facultad ...

Otro ejemplo:

Agradezco a Dios por bendecirme, por guiarme, por ser apoyo y fortaleza en momentos de dificultad y de debilidad; por regalarme el don de saber que siempre está a mi lado y por permitir que concluya un proyecto más en la vida.

Introducción

Se escribe aquí la introducción del trabajo de tesis, que presenta las actividades académicas que se han realizado para dar a conocer la presente disertación. La cual, además de ser una evidencia verificable sobre la iniciación científica de un investigador en matemáticas, permitirá al autor no sólo aprender conceptos nuevos, sino también utilizar los métodos adecuados que le permitan presentar distintas estrategias y técnicas matemáticas que son propias de la natualeza de ésta ciencia. De este modo, el granduando tendrá la oportunidad de crear literatura matemática en castellano, sobre distintos tópicos matemáticos que están fuera del plan de estudios de la maestría y presentarlo de modo accesible a los estudiantes de bachillerato en Matemáticas, pero sin llegar a tener la amplitud, enfoque y detalle de un libro texto [Cc12].

La investigación matemática que se desarrolla dentro del rango de una determinada maestría, generalmente empieza con un estudio y análisis que se basa en diversas fuentes bibliográficas, sobre un determinado tema que en la mayoría de los casos lo asigna el asesor. Por tal motivo, es apropiado y conveniente no sólo tomar en cuenta las normas más comunes para el registro bibliográfico, sino también considerar la descripción que se hace en la Guía de Investigación publicada por la PUCP, a la cual se accede por medio del siguiente enlace: *http://cdn02.pucp.education/investigacion/2016/06/22200146/Guia-de-Investigacion-en-Matematicas.pdf.*

Nombre completo del graduando
Lima, Perú.
año de la sustentación

Capítulo 1

Incluir el título completo del primer capítulo

`pude introducir una cita`
`de su elección.`
Autor de la cita.

Escribir aquí un resumen del primer capítulo en el cual se describe el contenido, el objetivo y las principales referencias que se utilizaron. Se incluye una adecuada justificación de porqué es necesaria la presentación y desarrollo de este capítulo.

1.1 Presentación de la tesis

Para una adecuada redacción de la tesis es útil recordar algunos aspectos formales en la presentación final. Por ejemplo, no sólo es preferible usar el lenguaje formal, sino también tomar en cuenta que el estilo objetivo de los documentos académicos prioriza la redacción en tercera persona: «los autores consideran» o «se considera». En este contexto, una vez terminada la redacción formal es necesario realizar una revisión final del trabajo, con una relectura crítica de todo el manuscrito para eliminar las posibles incoherencias en la redacción, corregir y presentar el adecuado uso de los signos de puntuación y el acento, revisar el uso correcto de las reglas de la ortografía, presentar adecuadamente los conectores y las preposiciones, etc. En esta etapa, vale la pena revisar los aspectos formales tales como la forma adecuada de citar las referencias bibliograficas, entre otros.

1.1.1 Ortografía

En la redacción correcta de los párrafos que componen la disertación final, se debe buscar la claridad y coherencia del texto, tomando en cuenta no solo al jurado, sino también a cualquier lector interesado de la tesis. Para lograr este objetivo es conveniente evitar la aparición de errores ortográficos y el mal uso de los signos de puntuación. Al respecto, la pequeña guía [Gut12] es de gran utilidad en la revisión del estilo y la ortografía del texto matemático; esta guia, entre otras cosas, incluye con claridad el uso adecuado de las letras mayúsculas. De modo similar, en el libro [dCF16] se recomienda que las palabras clave en castellano deben incluirse con minúscula inicial (salvo que se trate de nombres propios o siglas). Finalmente, se sugiere analizar y leer en detalle la sección 10 del tercer capítulo de [dCF16], en la cual se presentan algunas recomendaciones prácticas y apropiadas para evitar algunos errores lingüísticos frecuentes. Por ejemplo, en la siguiente oración «el teorema de Gauss–Bonnet, *aparece* en el capítulo 2» se hace un uso incorrecto de la coma (la elección del idioma en la plantilla induce al uso adecuado de las comillas bajas, también conocidas como latinas, españolas o angulares).

1.1.2 Orden de presentación

Las siguientes componentes son que se deberian incluir como parte de la tesis. Algunas de ellas son opcionales y sólo se consideran cuando sean necesarias.

(a) Caratula.
(b) Hoja de presentación y aprobación.
(c) Resumen ejecutivo (máximo 500 palabras).
(d) Dedicatoria (opcional).
(e) Índice o Contenido.
(f) Lista de figuras (opcional).
(g) Agradecimientos (opcional).
(h) Introducción.
(i) Cuerpo de la tesis.
(j) Conclusiones.
(k) Apéndices (opcional).
(l) Bibliografía
(m) Índice alfabético (opcional).

1.1.3 Numeración y márgenes

En la descripción anterior, los primeros ítems a, b, c, d, f y g tienen que ocupar **una página** (con excepción del contenido) las que deben ser numeradas en romanos y con minúsculas, i, ii, iii, iv, etc. Específicamente, la numeración empieza en la introducción y se hace con números arábigos, los cuales se colocan automáticamente en la parte superior derecha. Además, la introdución y las conclusiones deben estar igualmente citadas en (e), el contenido de la tesis.

Respecto a los márgenes, la presentación final del trabajo de tesis debe hacerse en el formato $A4$ (210×297 mm), a una sola cara en letra de tamaño 12, en espacio simple con margen superior e inferior de 2,5 cm y margen en los lados de 3 cm. Cada uno de estos requerimientos formales, para la version digital del documento final de la disertación, se heredan directamente cuando se utiliza la presente plantilla y los comandos con los que ha sido diseñada.

1.1.4 Tablas y figuras

Las tablas y figuras deben estar numeradas y citadas en el desarrollo del texto, además se incorporan dentro del texto y no al final del capítulo o en apéndices. Para ilustrar esta idea, a continuación se presenta la figura 1.1 que incluye una tabla con algunos ejemplos del uso incorrecto de las mayúsculas dentro de la literatura matemática. Este ejemplo permite también que se incluya, sin dificultad, la lista de figuras en las primeras páginas de la tesis.

Cuadro 1: Ejemplos de uso inadecuado de mayúsculas en textos de matemáticas en español.

Forma correcta	Forma incorrecta
Título: Derivación en espacios normados	☹Título: Derivación en Espacios Normados
. . . por el teorema de Rolle. . .	☹. . . por el Teorema de Rolle. . .
. . . por tanto, el lema de Fatou· · ·	☹. . . por tanto, el Lema de Fatou· · ·
Henri Cartan nació el 8 de julio de 1904	☹Henri Cartan nació el 8 de Julio de 1904
El análisis matemático estudia. . .	☹El Análisis Matemático estudia. . .
El curso de Topología Algebraica. . .	☹El curso de topología algebraica. . .
El algoritmo minimax es un procedimiento. . .	☹El algoritmo Minimax es un procedimiento. . .
Por definición de variedad riemanniana. . .	☹Por definición de variedad Riemanniana. . .
Se define la constante de Lipschitz. . .	☹Se define la constante de lipschitz. . .
... lo cual se establece en la sección 1.3. . .	☹... lo cual se establece en la Sección 1.3. . .
...por el teorema 1.4. . .	☹...por el Teorema 1.4. . .

Figura 1.1: Tabla tomada de [Gut12]

1.1.5 Capítulos y apéndices

Los capítulos se enumeran con un número arábigo y se recomienda incluir una mini-página con una descripción del respectivo capítulo. Los apéndices se ordenan con letras mayúsculas $A, B, C \ldots$ y debe aparecer en el contenido.

Los niveles que se deben considerar son capítulo, sección, subsección y párrafo; los cuales deben incluir lemas, proposiciones, teoremas y colorarios. Además, vale la pena ilustrar la exposición con útiles ejemplos. Una herramienta que enriquece la redacción consiste en enumerar los párrafos no solo para citarlos y simplificar la exposición, sino también para incluir solo aquellos que son necesarios en la redacción clara y concisa del trabajo de tesis.

Observación 1.1.1. Para ilustrar el uso se escribe a modo de observación que las modificiones de la nueva carátula ya no incluyen el nombre de los jurados. Sin embargo, estas deben aparecer en la hoja de presentación y para citar el nombre de cada uno se debe tener en cuenta la página ORCID de cada integrante el jurado. Consulte `https://orcid.org/` o bien `https://www.scopus.com/freelookup/form/author.uri`

Las conclusiones aparecen al final con el comando `chapter*` y debe aparecer en el índice general.

1.1.6 Bibliografía

La bibliografía se recomienda usar BibTEX en el estilo `amsalpha`, que produce etiquetas usando el nombre del autor y el año de la publicación. El estilo `amsplain` genera números, pero en ambos casos se genera de modo automático sólo la bibliografia citada y con la información precisa para ubicarla en la literatura.

Capítulo 2

Guía para formato y citado de documentos de tesis y trabajos de investigación – Escuela de Posgrado

`pude introducir una cita`
`de su elección.`
Autor de la cita.

A modo de ejemplo en el empledo de la plantilla se ***transcribe*** *todo el documento intitulado «Guía para formato y citado de documentos de tesis y trabajos de investigación – Escuela de Posgrado» que se encuentra en intranet. Las recomendaciones del primer capítulo son las adecuadas para el programa y se construyeron siguiendo parte de la guia. La carátula y el resumen que cita la guia es la que se utiliza en el presente formato*

La siguiente es una guía con una lista de recomendaciones para la elaboración de los documentos de tesis y trabajos de investigación. Esta lista no se considera exhaustiva, por lo que el cumplimiento de estas recomendaciones no excluye la posibilidad de que su documento sea observado por alguna causa no contemplada en la misma.

2.1 En materia de formato

Sobre la Carátula:

- Sírvase utilizar la plantilla de Carátula adjunta a este documento, prestando atención a reemplazar todo texto entre corchetes – incluyendo los corchetes – con la información correspondiente a su documento de tesis y programa. *Nota:* Algunas tesis requieren de la utilización de carátulas específicas, las cuáles pueden emplear según lo indicado por su programa.
- No numere su Carátula.

Sobre el Resumen:

- Su documento de tesis debe contar con un Resumen.
- Las pautas para la elaboración del Resumen se encuentran junto con la plantilla de carátula.
- La ubicación recomendada para el Resumen es en la página inmediatamente siguiente a la Carátula.
- La extensión ideal para el resumen es de 200-300 palabras; se aceptarán resúmenes de hasta una página de extensión.

Sobre el Índice:

- Es necesario que el Índice indique las páginas del cuerpo de su tesis correspondientes a las secciones que menciona.
- Es necesario que el Índice mencione las páginas correctas. Sírvase revisar que este sea el caso, y corregir su Índice si realiza alguna modificación al cuerpo de su tesis que altere su cantidad de páginas o el orden de las secciones.

Indicaciones generales:

- No utilice páginas en blanco o «de respeto».
- No utilice encabezados ni pies de página mencionando su nombre, el título de la tesis, la sección o capítulo, etc (para matemáticas se ha modificado).
- No utilice marcas de agua.

- No entregue su documento con resaltados y comentarios.
- Su documento debe ser entregado en formato PDF.
- Debe entregar un solo archivo para su revisión; no está permitido entregar la tesis y los anexos en archivos separados.

2.2 En materia de citado

Sobre la revisión de su documento:

- La EP no se encargará de realizar revisiones de su documento de tesis previas a su revisión formal. Para este fin, cada programa tiene acceso a una cuenta de Turnitin, con la cual puede revisar su documento.

Sobre las citas textuales:

- Toda cita textual deberá hacer un uso adecuado de comillas o de sangría, acorde a su extensión.
- *Modificar las primeras palabras de un párrafo y/o reemplazar algunos verbos, sustantivos o adjetivos por sus sinónimos no convierte un extracto textual en una paráfrasis. Los extractos que sigan este patrón de modificación serán tratados como citas textuales, y será requerido un citado acorde.*
- Si tiene dudas adicionales sobre citado, puede usar como referencia la Guía PUCP disponible en el siguiente enlace:
  http://files.pucp.edu.pe/homepucp/uploads/2016/06/08105745/Guia_PUCP_para_el_registro_y_citado_de_fuentes-2015.pdf
  En particular, el citado para extractos textuales y paráfrasis se encuentra en las pp. 83 y 84 del documento.

Conclusiones

Incluya las conclusiones finales del trabajo.

- El principal resultado...
- De acuerdo al capítulo ...

Capítulo 3

El Teorema de Hodge

pude introducir una cita
de su elección.
Autor de la cita.

El objetivo de este capítulo es demostrar el Teorema de descomposición de Hodge. Este dice que toda p-forma sobre una variedad riemanniana compacta se puede escribir como la suma de una componente α, solución de la ecuación $\Delta\alpha = \omega$, donde Δ es el operador de Laplace-Beltrami, y una componente armónica (en el núcleo de Δ). Como corolario de este teorema se verá además que existe una única forma armónica para cada clase de cohomología. La demostración de este teorema es extensa y hace uso de de la teoría de operadores elípticos y de espacios de Sobolev.

3.1 El operador de Laplace-Beltrami

3.2 Espacios de Sobolev

Definición 3.2.1. Sea S el espacio vectorial complejo de sucesiones de vectores en $\mathbb{C}^m$ con índice dado por una n-tupla $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dado un entero s, el espacio de Sobolev H_s es el subespacio de S dado por

$$H_s = \{u \in S : \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s \, |u_\xi|^2 < \infty\}$$

.

3.3 Operadores elípticos

Definición 3.3.1. Sea L un operador diferencial parcial de orden l. escribimos L como

$$L = P_1(D) + \ldots + P_l(D)$$

. Donde $P_j(D)$ es una matriz $m \times m$, que tiene en cada una de sus entradas un operador diferencial $\sum\limits_{[\alpha]=j} a_\alpha D^\alpha$, homogéneo de orden j, y donde los a_α son funciones C^∞ sobre $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{C}$.
Denótese $P_j(\xi)$ la matriz obtenida al sustituir ξ^α para D^α en $P_j(D)$, donde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es un punto en $\mathbb{R}^n$. Se dice que L es **elíptico en el punto x** $\in \mathbb{R}$ si la matriz $P_j(\xi)$ es no singular en x para todo $\xi \neq 0$. L es **elíptico** si es elíptico en todo x.

Lema 3.3.2. *Un operador diferencial parcial L es elíptico si y solo si,para todo $x \in M$, toda función C^∞ $\phi \colon M \to \mathbb{R}$ con $\phi(x) = 0$ y $d\phi(x) \neq 0$ y toda forma α en M se tiene*

$$\Delta(\phi^2\alpha)(x) \neq 0 \tag{3.1}$$

Demostración. Poo poo pee pee □

3.4 Elipticidad del operador de Laplace-Beltrami

Resta un último ingrediente para la finalizar la demostración del Teorema de Hodge: la prueba de que, como se aseguró previamente, este es un operador elíptico. Con este fin, se presentan los siguientes lemas.

Lema 3.4.1. *Dada una secuencia exacta de espacios vectoriales con producto interno, $U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$, con $T^* \colon V \to U$ y $S^* \colon W \to V$ aplicaciones adjuntas de T y S respectivamente. Se tiene que $S^*S + TT^*$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $v \in V$ diferente de 0, se mostrará que $S^*S + TT^*$ es diferente de 0. Se tiene que

$$\langle (S^*S+TT^*)v, v\rangle = \langle S^*Sv, v\rangle + \langle TT^*v, v\rangle = \langle Sv, Sv\rangle + \langle T^*v, T^*v\rangle = \|Sv\|^2 + \|Tv\|^2,$$

Entonces, si $Sv \neq 0$, $\|Sv\|^2 + \|T^*v\|^2 > 0$.

Si $Sv = 0$, $v \in kerS$, y como la secuencia es exacta, $v \in ImT$. Nótese, por otro lado, que T^* es inyectivo en ImT (pues, si $T^*w = 0$, para $w = Tu$, para algún $u \in V$, entonces $\langle Tu, Tu\rangle = 0$ y $w = Tu = 0$). De ahí se obtiene que $T^*v \neq 0$, lo que implica, de nuevo, que $\|Sv\|^2 + \|T^*v\|^2 > 0$.

$\square$

Sea $\hat{\xi}\colon \bigwedge T_xM \to \bigwedge T_xM$ la aplicación lineal dada por $\hat{\xi}\,(\omega) = \xi \wedge \omega$, para $\xi \in T_x^*M$, y sea $\hat{\xi}_k$ su restricción a $\bigwedge^k T_xM$. El lema anterior será aplicado a la secuencia de espacios vectoriales

$$\bigwedge^{p-1} T_xM \xrightarrow{\hat{\xi}_{p-1}} \bigwedge^{p} T_xM \xrightarrow{\hat{\xi}_p} \bigwedge^{p+1} T_xM \tag{3.2}$$

Estos espacios vectoriales tienen un producto interno dado por

$$\langle \eta, \omega\rangle = \star(\eta \wedge \star\omega)$$

Esta expresión resulta de aplicar la estrella de Hodge a ambos lados de $\eta \wedge \star\omega = \langle \eta, \omega\rangle \mathrm{vol}$ y del hecho que $\star\mathrm{vol} = 1$. Por supuesto, primero se debe verificar que dicha secuencia sea exacta.

Lema 3.4.2. *La secuencia (3.2) es exacta.*

Demostración. Debido que $\xi \wedge \xi \wedge \omega = 0$, para algún $\xi \wedge \omega$ en $\mathrm{Im}(\xi_{p-1})$, se tiene que también pertenece a $\mathrm{Ker}(\xi_p)$.
Para la otra inclusión se considera el producto interno previamente definido en $\bigwedge^k T_xM$. Se toma una base ortonormal $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ y se elige ϕ_1 de modo que $\xi = \|\xi\|\,\phi_1$. Como $\eta = \sum a_I\,\phi_I$, (donde $I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ y $\phi_I = \phi_{i_1} \wedge \phi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \phi_{i_p}$) se tiene que $\xi \wedge \eta = \sum a_I\,\xi \wedge \phi_I$.
Si $1 \in I$, $\xi \wedge \phi_I = \|\xi\|\,\phi_1 \wedge \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_{i_p} = 0$. En caso contrario, $\xi \wedge \phi_I = \|\xi\|\,\phi_1 \wedge \phi_I$, que es múltiplo de un elemento de la base de $\bigwedge^{p+1} T_xM$. De estas observaciones, $\xi \wedge \eta = \sum a_I\,\xi \wedge \phi_I$ es combinación lineal de elementos de la base de $\bigwedge^{p+1} T_xM$. Como $\xi \wedge \eta = 0$, por independencia lineal, cada elemento de la suma debe ser igual a 0, lo que solo puede ocurrir si $\phi_1 = \xi/\|\xi\|$ es un factor de ϕ_I, para todo I y por tanto un factor de η. Es decir, si $\eta = \xi \wedge \nu$, para algún ν. $\square$

Lema 3.4.3. *La adjunta de $\hat{\xi}_p\colon \bigwedge^p T_xM \to \bigwedge^{p+1} T_xM$ es*

$$(-1)^{np} \star \hat{\xi} \star\colon \bigwedge^{p+1} T_xM \to \bigwedge^{p} T_xM$$

Demostración. De las propiedades básicas del operador estrella de Hodge se tiene:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\xi}_p \eta, \omega\rangle = \langle \xi \wedge \eta, \omega\rangle = \star(\xi \wedge \eta \wedge \star\omega) &= (-1)^p \star (\eta \wedge \xi \wedge \star\omega) \\ &= (-1)^p (-1)^{p(n-p)} \star (\eta \wedge \star\star (\hat{\xi} \star \omega)) \\ &= (-1)^{np} \langle \eta, \star(\hat{\xi} \star \omega)\rangle\end{aligned}$$

Así, $(-1)^{np} \star \hat{\xi} \star$ es la adjunta de $\hat{\xi}_p$ □

De los tres lemas previos, se obtiene que

$$(-1)^{np} \star \hat{\xi} \star \hat{\xi} + (-1)^{n(p-1)} \hat{\xi} \star \hat{\xi} \star \tag{3.3}$$

es un isomorfismo sobre $\bigwedge^p T_x M$.

Ahora, se vio anteriormente que un operador diferencial parcial sobre una variedad M es elíptico si y solo si, para todo $x \in M$, toda función $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ con $\phi(x) = 0$ y $d\phi(x) \neq 0$ y toda forma α en M se tiene

$$\Delta(\phi^2 \alpha)(x) \neq 0 \tag{3.4}$$

Sea α una p-forma y $d\phi(x) \neq 0 = \xi \in T_x^* M$ y recuérdese que el operador de Hodge está dado por:

$$\Delta = (-1)^{np+1} \star d \star d + (-1)^{n(p+1)+1} d \star d \star$$

Aplicando esta fórmula en (3.4) obtenemos, primero, para el primer término:

$$\begin{aligned}\star d \star d(\phi^2 \alpha) &= \star d \star (2\phi\, d\phi \wedge \alpha + \phi^2 d\alpha) \\ &= \star d(2\phi \star (d\phi \wedge \alpha) + \phi^2 \star d\alpha) \\ &= \star(2d\phi \wedge \star(d\phi \wedge \alpha) + \cancel{2\phi\, d \star (d\phi \wedge \alpha)} + \cancel{d(\phi^2 \star d\alpha)}) \\ &= 2 \star \hat{\xi} \star (\hat{\xi}\, \alpha)\end{aligned}$$

Y para el segundo término:

$$\begin{aligned}d \star d \star (\phi^2 \alpha) = d \star d(\phi^2 \star \alpha) &= d \star (2\phi\, d\phi \wedge \star\alpha + \phi^2 d(\star\alpha)) \\ &= d(2\phi \star (d\phi \wedge \star\alpha) + \phi^2 \star d(\star\alpha)) \\ &= 2d\phi \wedge \star(d\phi \wedge \star\alpha) + \cancel{2\phi\, d \star (d\phi \wedge \star\alpha)} + \cancel{d(\phi^2 \star d(\star\alpha))} \\ &= 2\hat{\xi} \star (\hat{\xi} \star \alpha)\end{aligned}$$

En el punto x, se tiene, entonces:

$$\Delta(\phi^2\alpha)(x) = -2[(-1)^{np} \star \hat{\xi} \star \hat{\xi} + (-1)^{n(p-1)}\hat{\xi} \star \hat{\xi}\star](\alpha(x)) \tag{3.5}$$

Como el término entre corchetes es el isomorfismo (3.3), hallado gracias a los lemas, y como $\alpha(x) \neq 0$, entonces $\Delta(\phi^2\alpha)(x) \neq 0$. **Es decir, Δ es elíptico**.

3.5 Demostración final

Teorema 3.5.1 (Regularidad)**.** *Sea $\alpha_n \in \Omega^p(M)$ y sea l una solución débil de $\Delta\omega = \alpha$. Entonces existe $\omega \in \Omega^p(M)$ tal que*

$$l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle$$

para todo $\beta \in \Omega^p(M)$. Por lo tanto, $\Delta\omega = \alpha$.

Teorema 3.5.2. *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de p-formas en M tales que $\|\alpha_n\| \leq c$ y $\|\Delta\alpha_n\| \leq c$ para todo n y para alguna constante $c > 0$. Entonces, existe una subsucesión de $\{\alpha_n\}$ que es sucesión de Cauchy en $\Omega^p(M)$.*

Con esto, tenemos ahora una versión puramente analítica del teorema **??**:

Teorema 3.5.3 (Regularidad)**.** *Dado $p \in \mathbb{R}^n$, existe una vecidad U_p de p y un elemento u_p de $\mathcal{P}$ tales que $l(\phi) = \langle u_p, \phi \rangle$, para todo $\phi \in C_0^\infty(U_p)$*

3.6 Consecuencias

A continuación se utilizará el Teorema de Hodge para la demostración de algunos teoremas.

Capítulo 4

Tópicos Adicionales

`pude introducir una cita`
`de su elección.`
Autor de la cita.

BLABLABLABLBALBALBLABLABALBALBALBALBABLALBA LALABLABALBABALBABAB LABLABLABLABALABLA-BLABALBALBLABALBLABLABLLABL ABLBALBALBAL-BALBALBALBALBALBABLABLABALBBALBAL

4.1 Autovalores y autofunciones

4.2 Complejo de de Rham

4.3

Bibliografía

[Cc12] Montserrat Castello (coord.), *Escribir y comunicarse en contextos científicos y académicos: conocimientos y estrategias*, Crítica y fundamentos **15**, Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L., 2012, Prólogo de Anna Camps.

[dCF16] Iria da Cunha Fanego, *El trabajo de fin de grado y de máster: redacción, defensa y publicación*, Lingüística y traducción, Universitat Oberta de Catalunya, UOC, 2016, Prólogo de M. Teresa Cabré.

[dV16] M.ª Ángeles Fernández & Julio del Valle, *Cómo iniciarse en la investigación académica. una guía práctica*, PUCP - Fondo Editorial, 2016, Prefacio Pablo Quintanilla.

[Gut12] Olivia Gutú, *Pequeña guia de ortografía y estilo para escribir matemáticas en español*, Miscelánea Mat. (2012), no. 54, 69–80. MR 3052697

Índice alfabético