

Localización óptima de colegios en Medellín

Un enfoque de Optimización Lineal

Camilo Bermúdez
Jesús Cantellón
Luis Baena

Departamento de Ciencias e Ingeniería
Universidad EAFIT

9 de enero de 2025

Tabla de contenidos

1 Introducción y planteamiento

- Introducción
- Planteamiento

2 Procesamiento de datos

- Obtención de datos
- Tratamiento de datos

3 Simulated Annealing (SA)

- Algoritmo
- Función objetivo
- Función de perturbación

4 Resultados y Conclusiones

- Resultados
- Conclusiones

Resumen

Recapitulación

Distribución Colegios en Medellín:

- La distancia de las residencias a los colegios influye en la deserción, inasistencia y la experiencia educativa.
- Minimizar Distancias Totales (Sin considerar estrato y calidad de colegios).

Metodología Pasada:

- Solo distancia Euclidiana.
- Branch and Bound.

Actualización:

- Se considera el estrato y la calidad de los colegios.
- Simulated Annealing.

Propósito

Meta

Establecer un modelo de Optimización Lineal Entero Mixto y resolverlo usando Simulated Annealing y clustering para descubrir la localización óptima de los colegios de Medellín de tal manera que se minimice la distancia total ponderada por el estrato y la calidad de los colegios, esto para verificar la optimalidad de la distribución actual de los colegios.

Planteamiento del Problema de Programación Lineal

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i d_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \sum_{j \in J} X_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} Y_j = p \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} a_i X_{ij} \leq c_j Y_j \quad \forall j \in J \quad (4)$$

$$X_{ij} \leq Y_j \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (5)$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (6)$$

$$Y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (7)$$

Donde

i = Índice de los nodos de demanda

j = Índice de los nodos de localización potenciales

d_{ij} = Distancia mas corta entre el nodo i y el nodo j

p = Numero de colegios a ser localizados

a_i = Demanda en el nodo i

c_j = Capacidad colegio j

X_{ij} = Porcentaje de demanda i suplido por el colegio j (continuo)

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } j \text{ es seleccionado para colegio} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Fuentes



Proceso

1. Carga de datos de manzanas con la población estudiantil
 - Población estudiantil por barrio
 - Barrios
 - Usos del Suelo
 - Estrato de los predios
 - Manzanas censales
2. Carga de datos de colegios.
 - Calidad educativa
 - Dirección
 - Número de matriculados
3. Generación de puntos aleatorios.
4. Cálculo de distancias ajustadas ($p_{ij} = d_{ij} - \text{calidad}_j * \text{estrato}_i$).
5. Configuración del problema de optimización.

Simulated Annealing (Pseudocódigo)

```
input :T: float, x: list, E: float,  $\alpha$ : float  
output :x: list  
1 while iter<=iter_max do  
2    $\mathbf{x}_{new} \leftarrow$  Generar una nueva solución candidata;  
3    $E_{new} \leftarrow$  Calcula la energía del nuevo candidato  $\mathbf{x}_{new}$ ;  
4    $\Delta E \leftarrow E_{new} - E$ ;  
5   if Accept( $\Delta E, T$ ) then  
6      $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_{new}$ ;  
7      $E \leftarrow E_{new}$ ;  
8   end  
9    $T \leftarrow \alpha T$  Enfría la temperatura;  
10 end  
11 return x
```

Algorithm 1: Algoritmo *Simulated Annealing*

Función objetivo (Planteamiento Alternativo)

Minimizar
$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i d_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a
$$\sum_{j \in J} X_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} a_i X_{ij} \leq c_j \quad \forall j \in J$$

$$X_{ij} \in [0, 1] \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J$$

Donde

i = Índice de los nodos de demanda

j = Índice de los nodos de localización seleccionados

d_{ij} = Distancia mas corta entre el nodo i y el nodo j

a_i = Demanda en el nodo i

c_j = Capacidad colegio j

X_{ij} = Porcentaje de demanda i suplido por el colegio j (continuo)

Función objetivo (Pseudocódigo)

input : índices, demanda & capacidad: list, distancia: matrix

output : óptimo: float

```
1 Problema ← Minimizar;  
2 n ← len(demanda);  
3 Variables ← dicts([(i, j) for i in (0, n-1) for j in indices]) ∈ [0,1];  
4 Problema += Sumar(variables[(i, j)] × distancia[i, j] for i in (0, n-1)  
   for j in indices);  
5 for i in (0, n-1) do  
6 |   Problema += Sumar(variables[(i, j)] for j in indices) == 1  
7 end  
8 for j in indices do  
9 |   Problema += Sumar(variables[(i, j)] * demanda[i] for i in (0,  
   |   n-1) ≤ capacidad[j])  
10 end  
11 return ValorObjetivo(Problema.solve())
```

Función de perturbación (Pseudocódigo)

```
input : Actual: list, n: int  
output : Nuevo: list  
1 Nuevo  $\leftarrow$  Actual;  
2 Indice  $\leftarrow$  Aleatorio(0, len(Actual));  
3 Grupo  $\leftarrow$  Mayor multiplo de 10 a la izquierda del índice;  
4 b  $\leftarrow$  Grupo + Aleatorio(0, n);  
5 while b == Actual[Indice] do  
6 | b  $\leftarrow$  Grupo + Aleatorio(0, n)  
7 end  
8 Nuevo[Indice] = b;  
9 return Nuevo
```

Algorithm 2: *Función de perturbación*

Función de aceptación (Pseudocódigo)

```
input :T: float,  $\Delta E$ : float
output :booleano
1 if ( $\Delta E < 0$ ) then
2   | return True
3 else
4   |  $r \leftarrow$  aleatorio entre  $[0, 1)$ 
5   | if ( $r < e^{-\Delta E/T}$ ) then
6   |   | return True
7   | else
8   |   | return False
9   | end
10 end
```

Algorithm 3: *Función de aceptación*

Resultados



- Simulación 1: $-1319,88$
- Simulación 2: $-2763,38$
- Simulación 3: $-3199,76$

Valor real: $-3121,55$

Posiciones encontradas

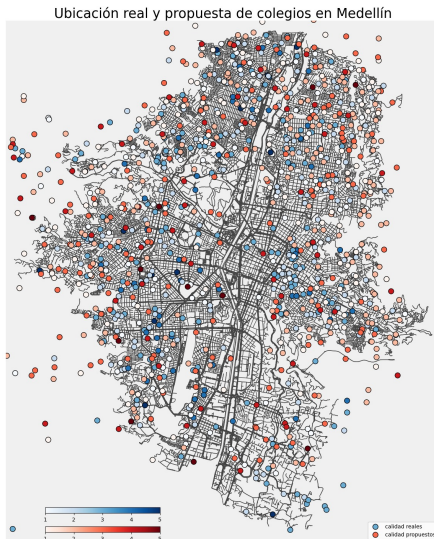


Figura: Posición y calidad de los colegios reales y propuestos.

Conclusiones

- La distribución actual de colegios en Medellín no es óptima en términos de calidad educativa, estrato socioeconómico y distancia. Existen distribuciones donde la distancia total ponderada es menor.
- Este resultado puede impulsar investigaciones de planificación urbana en Medellín, optimizando la construcción y reubicación de colegios mediante algoritmos de localización óptima.
- Futuras investigaciones pueden considerar los medios de transporte de los estudiantes y algoritmos más eficientes.

Referencias I

- [1] Isabel Gac, Francisco Martinez y Andres Weintraub. «Modelo De Optimización Lineal Determinístico Para La Localización De Colegios». En: **Revista Ingeniería de Sistemas XX** (2006), págs. 25-43. URL: https://dii.uchile.cl/~ris/RISXX/IGac_RIS.pdf.
- [2] **Banco documentos - Alcaldía de Medellín**. Alcaldía de Medellín. URL: <https://www.medellin.gov.co/es/centro-documental/proyecciones-poblacion-viviendas-y-hogares/>.
- [3] **Datos abiertos - Ministerio de Educación Nacional**. Ministerio de Educación Nacional. URL: <https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-institucionales/Modelo-Integrado-de-Planeacion-y-Gestion/Datos-abiertos/349303:Datos-Abiertos>.

Referencias II

- [4] Isabel Margarita Gac Serei. «Modelo de optimización lineal determinístico para la localización de colegios». Español. Tesis (magíster en gestión de operaciones)—Universidad de Chile, 2006. Tesis (ingeniero civil industrial)—Universidad de Chile, 2006. Bibliografía: h. 131-135. Santiago de Chile: Universidad de Chile. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Escuela de Postgrados, 2006, págs. vi, 149.
- [5] Pudy Prima y Aniati Murni Arymurthy. «Optimization of school location-allocation using Firefly Algorithm». En: **Journal of Physics: Conference Series**. The 3rd International Conference on Computing and Applied Informatics 2018 18–19 September 2018, Medan, Sumatera Utara, Indonesia 1235 (2019). Published under licence by IOP Publishing Ltd, pág. 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/1235/1/012002.
- [6] Yulong Chen. «Optimizing Locations of Primary Schools in Rural Areas of China». En: **Volume 2021** (2021). Ed. por Fengtai Zhang. Open Access. DOI: 10.1155/2021/7573700.

Referencias III

- [7] Cong Liao et al. «Optimizing the spatial assignment of schools to reduce both inequality of educational opportunity and potential opposition rate through introducing random mechanism into proximity-based system». En: **Socio-Economic Planning Sciences** 72 (dic. de 2020). Version of Record 25 November 2020, pág. 100893. DOI: 10.1016/j.seps.2020.100893. URL: <https://doi.org/10.1016/j.seps.2020.100893>.
- [8] Teqi Dai, Cong Liao y Shaoya Zhao. «Optimizing the spatial assignment of schools through a random mechanism towards equal educational opportunity: A resemblance approach». En: **Computers, Environment and Urban Systems** 76 (jul. de 2019). Version of Record 23 March 2019, págs. 24-30. DOI: 10.1016/j.compenvurbsys.2019.03.004. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compenvurbsys.2019.03.004>.

Referencias IV

- [9] Luiz A.N. Lorena y Edson L.F. Senne. «A column generation approach to capacitated p-median problems». En: **Computers & Operations Research** 31.6 (mayo de 2004). FEG/UNESP, Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Departamento de Matemática, Caixa Postal 205, 12515-410 Guaratinguetá, SP, Brazil, págs. 863-876. DOI: 10.1016/S0305-0548(03)00137-5. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054803001375>.
- [10] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt y M. P. Vecchi. «Optimization by Simulated Annealing». En: **Science** 220.4598 (mayo de 1983), págs. 671-680. DOI: 10.1126/science.220.4598.671. URL: <https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>.
- [11] Baeldung. **Simulated Annealing Explained**. Ed. por Michal Aibin. Last updated: March 18, 2024. Baeldung. 2024. URL: <https://www.baeldung.com/cs/simulated-annealing>.

Referencias V

- [12] Fernando Chiyoshi y Roberto D. Galvão. «A statistical analysis of simulated annealing applied to the p-median problem». En: **Annals of Operations Research** 96.1 (nov. de 2000), págs. 61-74. DOI: 10.1023/A:1018982914742.
- [13] A.A. Chaves, F. de Assis Correa y L.A.N. Lorena. «Clustering Search Heuristic for the Capacitated p-Median Problem». En: **Innovations in Hybrid Intelligent Systems**. Ed. por E. Corchado, J.M. Corchado y A. Abraham. Vol. 44. Advances in Soft Computing. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-74971-4. DOI: 10.1007/978-3-540-74972-1_19. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-74972-1_19.

**¡Muchas gracias
por su atención!**