Simulación de flujo monetario como fénomeno físico

Proyecto Final

Francisco Maldonado P.   Víctor Sáez M.

22 de diciembre de 2021

MA4402 - Simulación Estocástica

Tabla de Contenidos

Preliminares Teóricos

Presentación de la Idea

Se suponen N agentes económicos, cada uno con su riqueza $w_i \geq 0$.

$W = \sum_{i=1}^{N} w_i$ es la cantidad total de riqueza para el conjunto de agentes.

A partir de esto se construye la variable aleatoria W_i correspondiente al stock del agente i.

Presentación de la Idea

Podemos normalizar la riqueza total del sistema , $X_i = \frac{W_i}{W}$ y el vector $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_N)$ se corresponde con una partición finita aleatoria del intervalo $(0, 1)$.

El vector $\mathbf{X}$ vive en el simplex de dimensión $N - 1$ definido por

$$\Delta_{N-1} := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N) : x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., N \text{ y } \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \right\}$$

Modelos Estocásticos

Definimos en base a este esquema un modelo que incorpora una evolución temporal estocástica para la distribución de riqueza de los agentes.

1. Tiempo Discreto - Espacio Continuo

Sea $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ el estado actual de la variable aleatoria $\mathbf{X}$. Para cualquier par ordenado de índices $i, j \in [1, N]$ escogidos aleatoriamente de forma uniforme, se definen las operaciones *coagulación* y *fragmentación*:

- $coag_{ij}(\mathbf{x}) : \Delta_{N-1} \to \Delta_{N-2}$ crea un nuevo agente $x = x_i + x_j$ mientras la proporción de riqueza para el resto permanece inalterado.
- $frag(\mathbf{x}) : \Delta_{N-2} \to \Delta_{N-1}$ toma el x definido previamente y lo divide en dos agentes nuevamente, definiendo $x_i = ux$ y $x_j = (1-u)x$, con $u \sim U[0, 1]$.

1. Tiempo Discreto - Espacio Continuo

En cada tiempo el estado del proceso $\mathbf{X} \in \Delta_{N-1}$ cambia de acuerdo a la composición de una coagulación con una fragmentación y la secuencia de operadores coagulación y fragmentación define una cadena de Markov homogénea en Δ_{N-1}.

1. Tiempo Discreto - Espacio Continuo

Sea $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_i(t), ..., x_j(t), ..., x_N(t))$ el estado de la cadena en el tiempo t con i, j los estados elegidos, entonces el estado en tiempo $t + 1$ corresponde a

$$\mathbf{x}(t+1) = (x_1(t+1), ..., x_i(t+1) = u \cdot (x_i(t) + x_j(t)), ..., \\ x_j(t+1) = (1-u) \cdot (x_i(t) + x_j(t)), ..., x_N(t+1))$$

Sin embargo el kernel de este proceso es degenerado, ya que cada paso sólo afecta una medida de Lebesgue 0 del simplex. Esto se evita al considerar un simplex discreto.

Sea N el número de categorías (agentes) entre los cuales se clasifican M objetos (monedas o tokens). En la descripción estadística o frecuencial de este sistema, un estado es una lista $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_N)$ con $\sum_{i=1}^{N} n_i = M$, el cual entrega el número de objetos que pertenecen a cada categoría.

2. Tiempo Discreto - Espacio Discreto

El estado del proceso en tiempo $t \in \mathbb{N}_0$ es denotado $\mathbf{X}(t)$ y su espacio de estados es el simplex entero escalado

$$\begin{aligned} S_{N-1}^{(M)} &:= (M \cdot \Delta_{N-1}) \cap \mathbb{Z}^N \\ &= \left\{ \mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_N) : 0 \leq n_i \leq M,\ \sum_{i=1}^{N} n_i = M,\ \ n_i \in \mathbb{N}_0 \right\} \end{aligned}$$

En este contexto, una coagulación se modela tomando un par de enteros ordenados i, j aleatoriamente sin reposición de $1 \leq ... \leq N$ y creando una nueva categoría con $n_i + n_j$ objetos. Una fragmentación toma esta categoría y la divide en dos nuevas categorías reetiquetadas como i, j donde n'_i es un entero uniformemente aleatorio entre 0 y $n_i + n_j$ y $n'_j = n_i + n_j - n'_i$.

Es directo que las probabilidades de transición para $\mathbf{X}$ están dadas por

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{X}(t+1)=\mathbf{n}' \middle| \mathbf{X}(t)=\mathbf{n}\right)=\sum_{i,j:i\neq j}\left[\frac{1}{N}\frac{1}{N-1}\frac{1}{n_i+n_j+1}\delta_{n_i+n_j,n_i'+n_j'}\prod_{k\neq i,j}\delta_{n_k',n_k}\right]$$

Donde $\mathbf{n},\mathbf{n}'\in S_{N-1}^{(M)}$ y la notación refiere a que se suma sobre todos los pares ordenados $(i,j), i\neq j$ donde la primera coordenada indica que el índice i fue escogido primero.

La cadena es homogénea, aperiódica e irreducible, además como el conjunto de estados es finito, también es recurrente positiva.

Con esto concluimos que la cadena $\{\mathbf{X}(t)\}\ t \in \mathbb{N}_0$ tiene una una distribución de equilibrio única.

Desarrollo

Planteamiento

En este proyecto nos restringiremos a estudiar la forma de la distribución marginal de los agentes para el estado límite

$$\pi(x) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_1(t) = x)$$

.

Planteamiento

En particular existe una distribución conocida en mecánica estadística que buscaremos aproximar:

- Relación Física-Economía.
- Ley fundamental de equilibrio en mecánica estadística.
- Justificación: conservación cuantitativa.

Ley de Boltzmann-Gibbs

La distribución de equilibrio $\pi(x)$ se puede derivar de la misma forma que la función de distribución de equilibrio de la energía en física [3].

Ley de Boltzmann-Gibbs

Para el caso con estados continuos, de las condiciones de normalización y riqueza promedio en el sistema

$$\int_0^{\infty} \pi(x)\, dx = 1 \quad \int_0^{\infty} x \cdot \pi(x)\, dx = \frac{M}{N}$$

Se obtiene que $C = \frac{1}{T}$ y $T = \frac{M}{N}$. Por tanto la temperatura efectiva T del sistema es la riqueza promedio por agente.

Para el caso con estados discretos la normalzación se calcula de acuerdo a los estados.

Un primer modelo

La coagulación y fragmentación en el caso discreto se expresan implícitamente en la conservación de dinero en cada transacción. Por simplicidad se reemplaza la variable aleatoria por una cantidad de dinero fijo.

Se escogen dos personas i, j al azar con dinero m_i y m_j, terminando la transacción con $m_i - \Delta m$ y $m_j + \Delta m$ respectivamente.

Para las simulaciones se consideraron $N = 500$ personas, $M = 500.000$ unidades de dinero y $\Delta m = 50$.

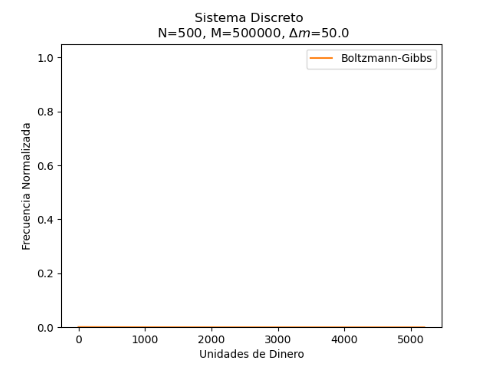
Métricas

La precisión del modelo en relación a las simulaciones se observa en los gráficos correspondientes a los estados del sistema simulado y la curva correspondiente a la distribución de Boltzmann-Gibbs.

Para cuantificar la similitud entre los resultados de las simulaciones y la distribución correspondiente al modelo se utiliza el Error Cuadrático Medio en función del tiempo de simulación.

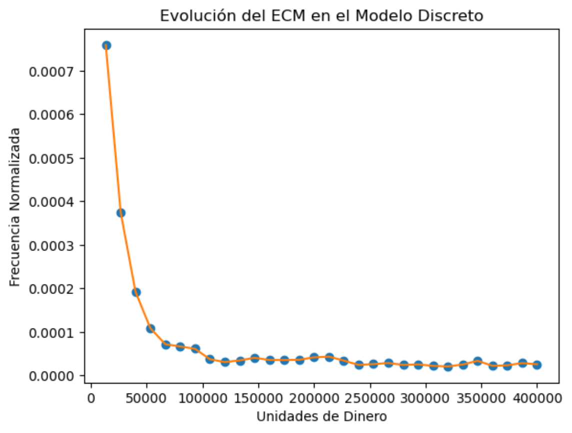
Resultados

Tiempo Discreto - Espacio Discreto

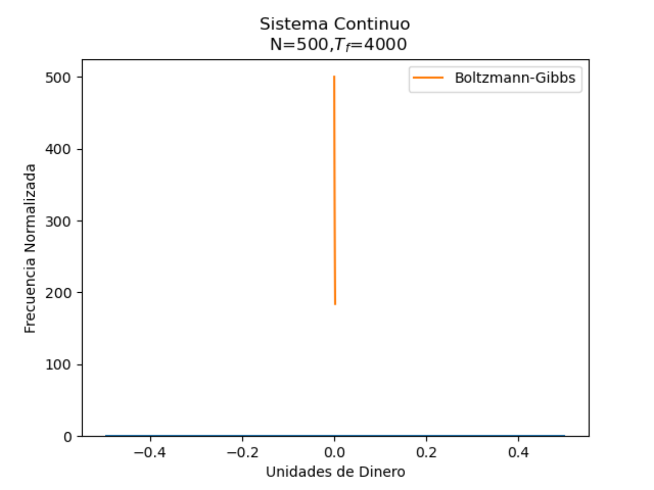


Error Cuadrático Medio: $2.76 \cdot 10^{-5}$

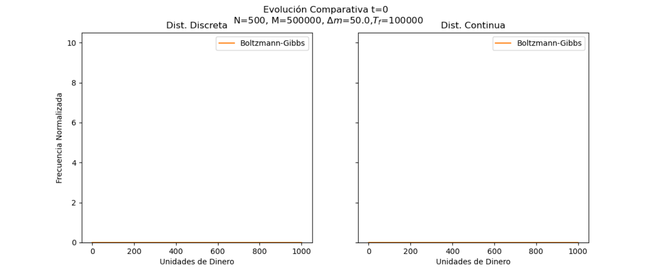
Tiempo Discreto - Espacio Discreto



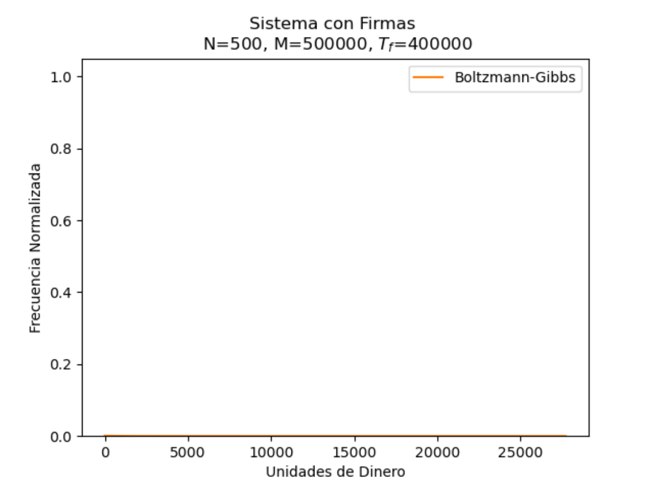
Tiempo Discreto - Espacio Continuo



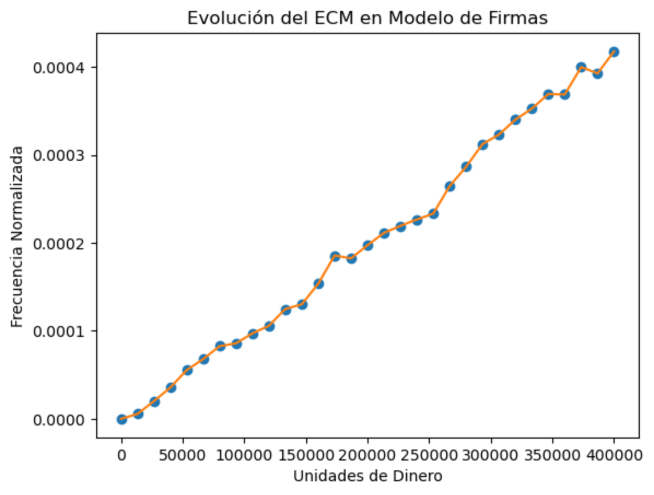
Comparativa de Evolución Modelo Discreto - Modelo Continuo



Modelo de Firmas



Modelo de Firmas



Conclusiones

Resultados Obtenidos

- Modelo Discreto
- Modelo Continuo
- Modelo Firmas

Trabajo Futuro

- Profundización Teórica
- Métricas
- Simulaciones

Referencias

- A. Drăgulescu, V.M. Yakovenko. (2000). Statistical mechanics of money.
- Bertram Düring, Nicos Georgiou and Enrico Scalas. (2016) A stylized model for wealth distribution.
- G.H. Wannier. (1987) Statistical Physics.

Simulación de flujo monetario como fénomeno físico

Proyecto Final

Francisco Maldonado P.   Víctor Sáez M.

22 de diciembre de 2021

MA4402 - Simulación Estocástica