Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Pre-laboratorio 1

Métodos de Monte Carlo

MA4402 Simulación Estocástica
29 agosto 2022

Índice

Inversa Generalizada

Definition (Inversa Generalizada)

Sea X v.a. real, F_X su función distribución. Definimos la inversa generalizada de $F_X : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$,

$$F_X^{-}(t) := \inf\{x \in : F_X(x) > t\} \text{ con } t \in [0,1] .$$

Proposition

Sea X variable aleatoria real y F_X^{-} su inversa generalizada.
Si $U \sim \mathbb{U}([0,1])$, entonces tenemos:

$$F_X^{-}(U) \sim Ley(X) .$$

Algoritmo

Dada F función de distribución de la variable aleatoria X que deseamos simular, tenemos el siguiente algoritmo para calcular F_X^{-}.

1. Simular $u \sim \mathbb{U}([0,1])$
2. Para computar $F_X^{-}(u)$ ejecutamos
   2.1 Tomar $n = 0$
   2.2 Mientras $F(n) < u$:
   2.3 Hacer $n = n + 1$
3. Retornar n

Método de Newton-Raphson

Dado $U \in [0,1]$ queremos encontrar el único $\bar{x}$ tal que $F_X(\bar{x}) = U$ (de este modo $\bar{x} = F^{-}_{X(U)}$). Es decir, buscamos la única raiz de $G(x) = F_X(x) - U$
Luego usando la aproximación de Newton:

$$x_n := x_{n-1} - \frac{G(x_{n-1})}{G'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{(F_X(x_{n-1}) - U)}{f_X(x_{n-1})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$$

e iterar hasta que $(F_X(x_k) - U) \leq \delta$ para δ pequeño.

Algoritmo

Dada F función de distribución de la variable aleatoria X que deseamos simular y dado una tolerancia $\epsilon > 0$, tenemos el siguiente algoritmo para estimar $F_X^{-}(u)$.

1. Simular $u \sim \mathbb{U}([0,1])$
2. Para computar $F^{-}(u)$ ejecutamos
   - 2.1 Tomar $x_n = 0$
   - 2.2 Mientras $F(x_n) - u > \epsilon$:
   - 2.3 $\quad x_n = x_n - \frac{F(x_n) - u}{f(x_n)}$
   - 2.4 $\quad$ Hacer $n = n + 1$
3. Retornar x_n

Simulaciones

La idea será simular una variable **geométrica** de parámetro $p = \frac{1}{2}$:

$$X = \inf\{k \geq 1 : U_k \leq \frac{1}{2}\}$$

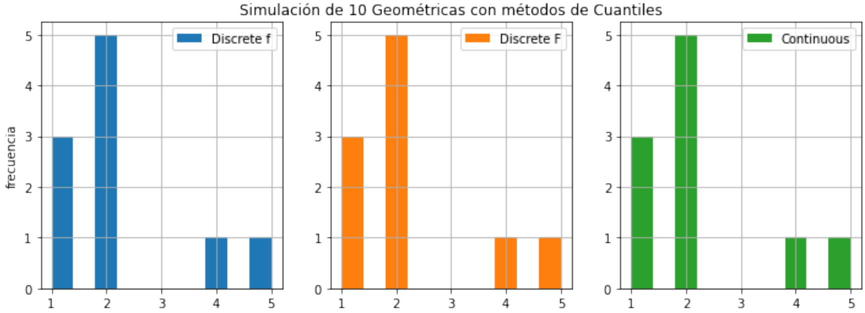
Esta distribución cumple

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 2, \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p} = 2$$

Simularemos $n = 10^k$ réplicas para $k = 1, \ldots, 5$

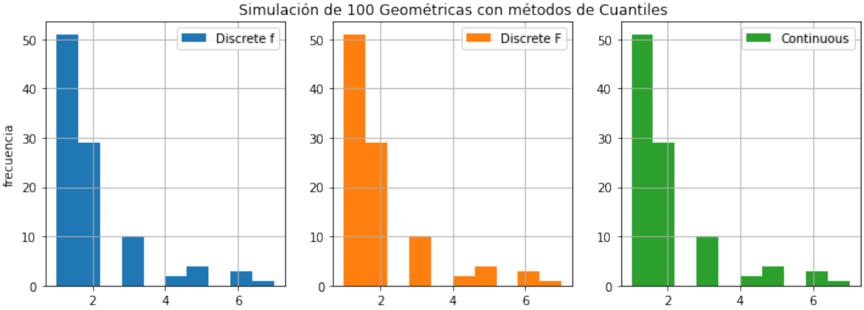
Simulaciones

Para $k = 10$



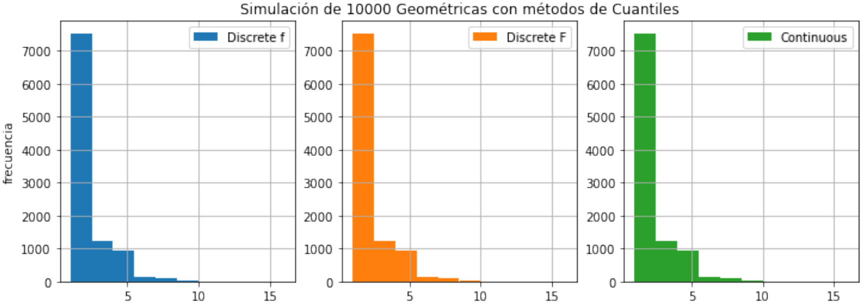
Simulaciones

Para $k = 100$



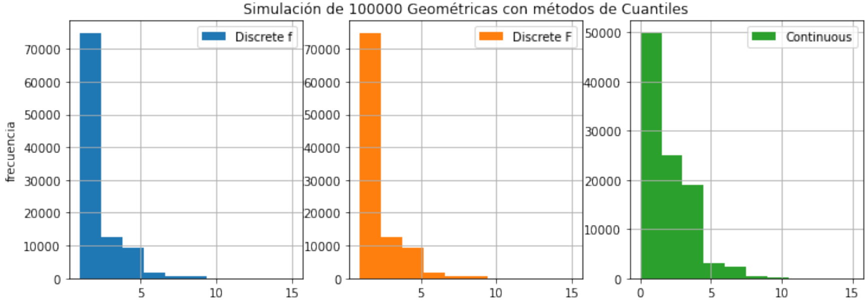
Simulaciones

Para $k = 1000$



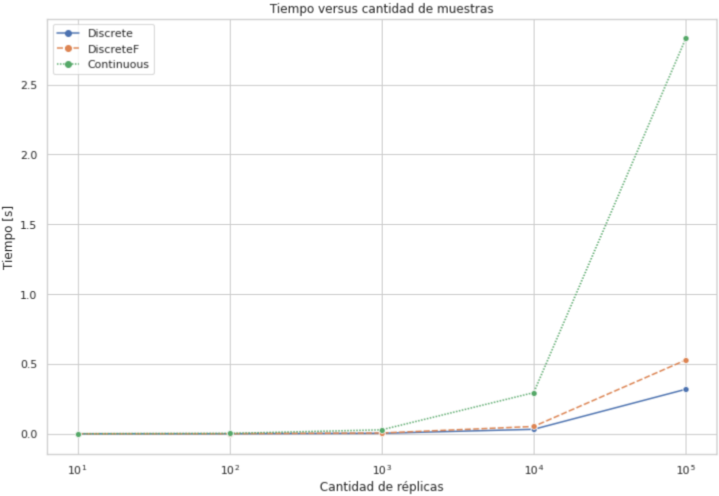
Simulaciones

Para $k = 100000$



Costo de simulación

Observemos el gráfico de tiempo versus cantidad de muestras.



Costo de simulación

Calculamos el costo de simulación por réplica, que vimos que está dado por:

$$C \approx \frac{T_N}{N}$$

Donde N es un número de réplicas suficientemente grande y T_N es el tiempo que toma simularlas, para cada uno de los tres métodos. Obtendremos lo siguiente

	Costo de simulación por réplica [s]
Discrete	$0.3882 \cdot 10^{-5}$
DiscreteF	$0.6316 \cdot 10^{-5}$
Continuous	$2.9595 \cdot 10^{-5}$

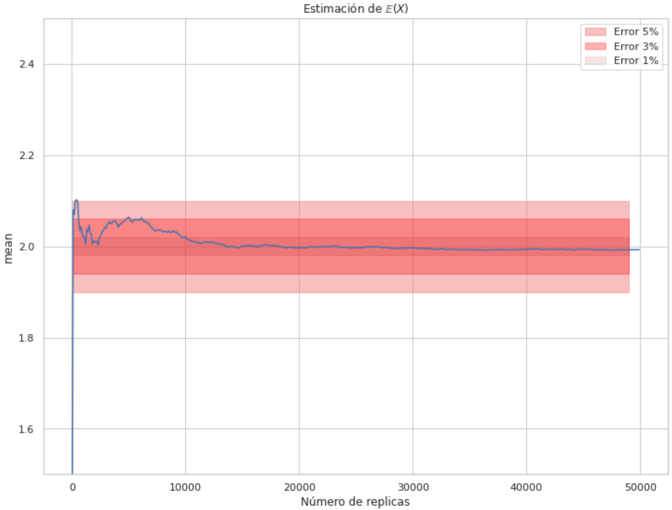
Estimación de media y varianza

Dado que el método Discrete es aquel con mejor costo por réplica, lo usaremos para estimar la media ya la varianza. Los resultados, para cada $k = 1, \ldots, 5$ se muestra en la siguiente tabla:

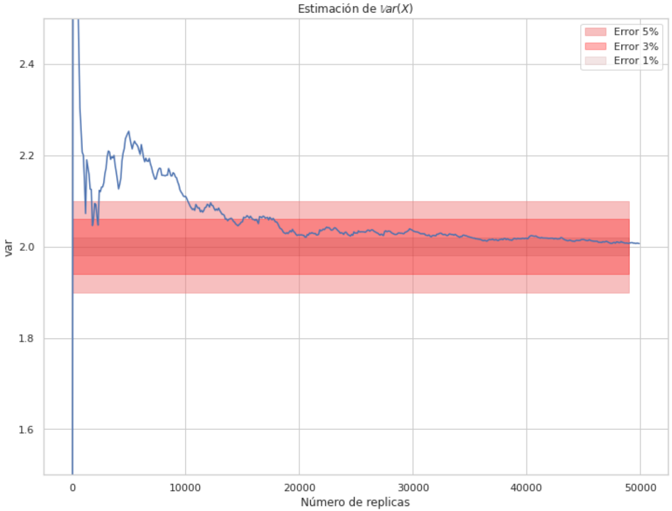
	10e1	**10e2**	**10e3**	**10e4**	**10e5**	**teórica**
media	2.6000	1.9200	1.995	2.0179	2.0065	2.0
varianza	3.3777	1.3268	2.135	2.0131	2.0116	2.0

Se aprecia una convergencia hacia el valor teórico a medida que sube la cantidad de muestras.

Estimación de media y varianza



Estimación de media y varianza



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Pre-laboratorio 1

Métodos de Monte Carlo

MA4402 Simulación Estocástica
29 agosto 2022