Resolución de Fisher-KPP usando BBM

Karim Saud, Benjamín Tardy D.

7 de diciembre del 2022

Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (FKPP)

- $$FKPP \begin{cases} v_t - \frac{1}{2} v_{xx} = v^2 - v \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

- Interpretación como proceso de reacción-difusión

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = v - v^2 \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

$$A + B \to 2A$$

Aplicaciones de FKPP

- Genética, gen dominante
- Biología, impulsos nerviosos
- Física, combustión
- Química cinética, ondas de concentración
- Plasma, Duffing oscillators

Solución de referencia

- Considere el problema

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{2} v_{xx} = v - v^2 \\ v(x,0) = v_0(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{1 + (\sqrt{2}-1) e^{\frac{-\sigma_1 x}{2}}} \right)^2 \end{cases}$$

- Su solución es de la forma

$$v(x,t) = 1 - \left(\frac{1}{1 + (\sqrt{2}-1) e^{\frac{-\sigma_1 (x + \lambda_1 t)}{2}}} \right)^2$$

Movimiento Browniano Ramificado (BBM)

- Def (rama): Un MB X que parte en cierto (t, x) y se detiene después de avanzar un tiempo $\Delta t \sim exp(1) \perp\!\!\!\perp X$.
- Def (BBM): Proceso B que parte en $(0, x)$ con una rama. Donde una rama termina, parten dos ramas independientes.

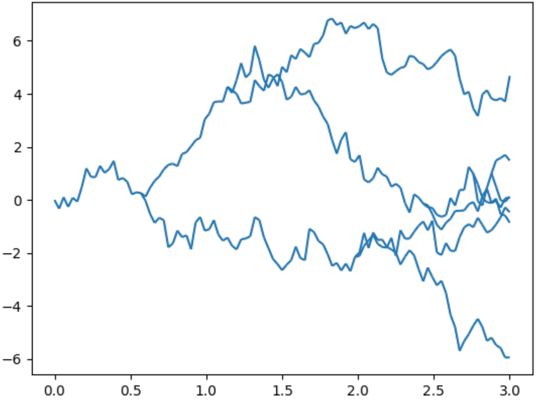
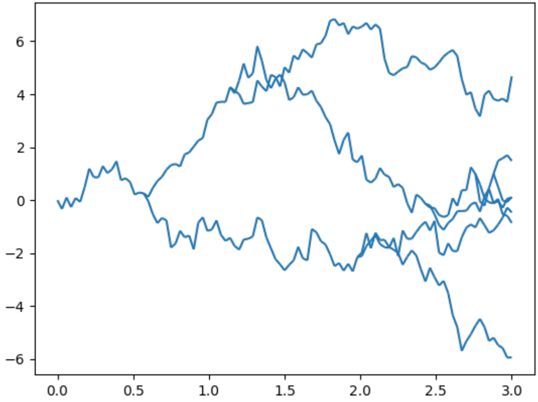


Figura: Ejemplo de la trayectoria de un BBM

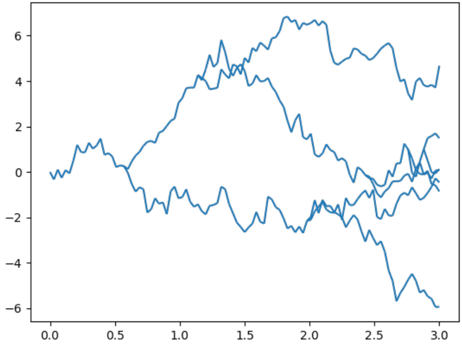
Movimiento Browniano Ramificado (BBM)

- Interpretación como límite de proceso de reacción-difusión: $A \to 2A$.



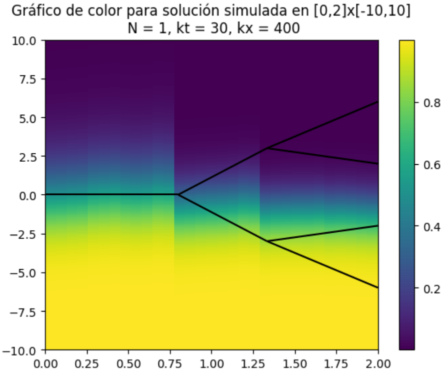
Relación entre BBM y FKPP

- Sean $x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}_+$ y consideremos un BBM B que parte en x_0. Sean $y_1, \ldots, y_m$ los puntos de B que intersectan a la recta $t = t_0$ y definimos $v(x,t) := \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} v_0(y_i)\right]$.



Implementación computacional

- Función `branch(K,step)`: Crea ramas.
- Función `BBM(T0,Ko)`: Construye un BBM recursivamente usando `branch`.
- Función `simSol(g,T,x1,x2,kt,kx,N)`: Corre N BBMs, discretiza $[0, T] \times [x_1, x_2]$ y calcula con MC una solución aproximada para condición inicial g.



Resultados para N = 700

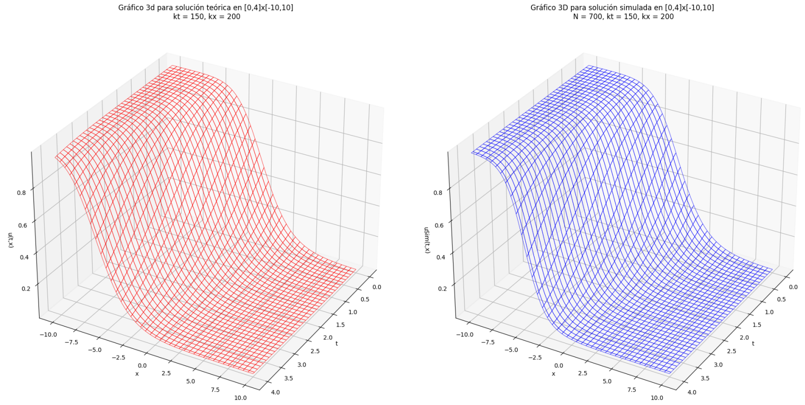


Figura: Comparativa: Teórica, Simulada

Resultados para N = 700

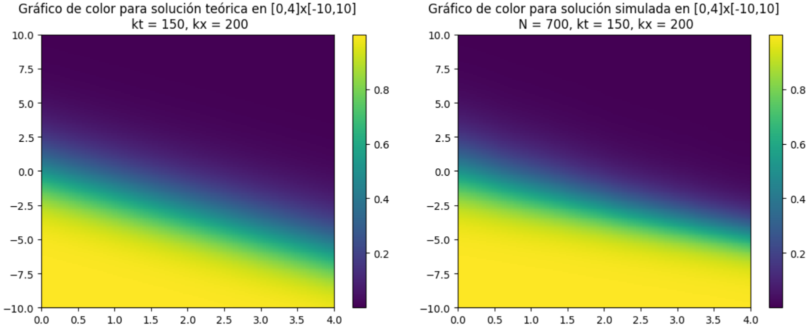
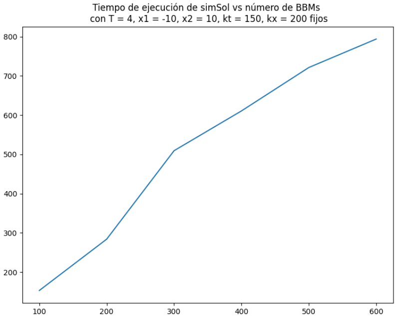


Figura: Comparativa: Teórica, Simulada

Error medio: 0.0243.

Análisis de resultados



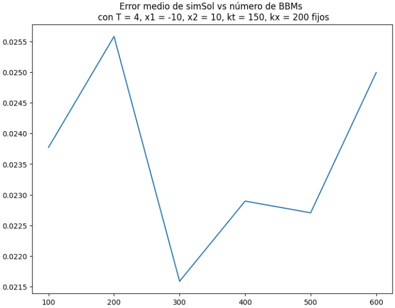


Figura: Crecimiento lineal del tiempo con respecto al número de BBMs: $1.32s$ por BBM.

Comentarios finales

- Error bajo en general pero discretización puede estar distorsionando resultado.
- Complejidad temporal aparentemente lineal en N fijando lo demás.
- Aumento exponencial de número de hojas $\Rightarrow$ complica computaciones para tiempos altos.
- Posible reducción de varianza por variables antitéticas.
- Extrapolando, se podría encontrar soluciones para otras condiciones iniciales.
- Analizar caso para dimensión mayor.

Bibliografía

[1] Chorin, A., Hald, H. (2013). Stochastic Tools in Mathematics and Science (3rd ed.). Springer.
[2] Brunet, E. (2016). Some aspects of the Fisher-KPP equation and the branching Brownian motion.
[3] Ma, W. X., Fuchssteiner, B. (1996). Explicit and exact solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation. Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 31, No. 3, pp. 329-338.
[4] Moon, B., Dai, Y., Kota, T. (2022). A Majority Voting Model on Branching Brownian Motion.