Simulación del Fenómeno de cutoff en Cadenas de Markov

Proyecto final

Martín Berríos

Diego Céspedes

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

22 de Noviembre, 2022

Contenidos

1 Introducción

2 Marco Teórico

3 Modelo de urna de Ehrenfest

4 Biased Random Walk

Marco Teórico

Recuerdo:

Convergencia al equilibrio

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una cadena de Markov sobre E irreducible aperiódica con distribución invariante π. Entonces

$$d(n) := \sup_{x_0\in E} ||P^n_{x_0} - \pi||_{TV} \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

En algunos casos, podemos decir más sobre la convergencia de $d(n)$. Esto es importante pues diversos métodos dependen de la convergencia al equilibrio de cadenas de Markov.

P. Diaconis y el fenómeno cutoff

Persi Diaconis introdujo en 1986 el término de cutoff para referirse a la convergencia abrupta de ciertas cadenas de Markov.
Esto fue en el contexto del estudio de métodos para revolver cartas. Diaconis probó que para revolver un mazo de 52 cartas bastan 7 iteraciones.

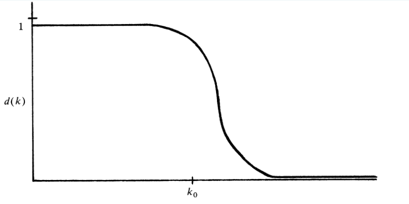


Figura: Persi Diaconis y figura del artículo original

Definición de cutoff

Mixing Time

Sea $(X_k)_{k\geq 1}$ una cadena de Markov sobre E con distribución invariante π. Definimos la *distancia al equilibrio* por $d(k) = \sup_{x_0 \in E} ||P^k_{x_0} - \pi||_{TV}$ y el *mixing time* de la cadena como

$$t_{mix} = \text{mín}\{k \colon d(k) \leq 1/4\}$$

Cutoff

Consideremos una secuencia de cadenas de Markov indexada por $n = 1, 2, \ldots$. Sean $t^{(n)}_{mix}$ y d_n los mixing time y distancia al equilibrio, respectivamente, de la $n-$ésima cadena en esta secuencia. Decimos que la secuencia tiene un *cutoff* si

$$\lim_{n\to\infty} d_n(kt^{(n)}_{mix}) = \begin{cases} 1 & , k < 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$

Urna de Ehrenfest(floja)

La urna de Ehrenfest con d bolas, es un modelo que busca ilustrar la segunda ley de la termodinámica:

$$\begin{cases} P(i, i-1) = \frac{i}{d+1} \\ P(i, i) = \frac{1}{d+1} \\ P(i, i+1) = \frac{d-i}{d+1} \end{cases}$$

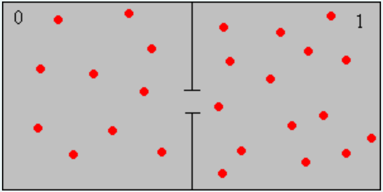


Figura: Urna de Ehrenfest con 28 bolas después de cierto numero de iteraciones

Esta cadena de Markov tiene la distribución invariante:

$$\pi(i) = \frac{\binom{i}{d}}{2^d} \text{ con } 0 \leq i \leq d$$

Cutoff en urna de Ehrenfest

Se demostró que la urna de Ehrenfest con distribución inicial concentrada en 0, presenta cutoff, con un mixing time de $t_{mix}^{n} = \frac{1}{4} n \log n$

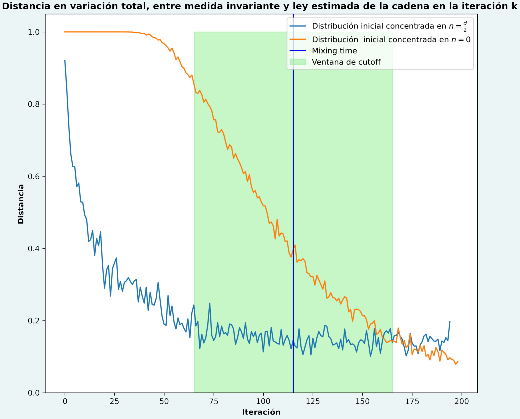


Figura: Simulación con 200 replicas y 100 pelotas

Biased Random Walk

Un paseo aleatorio sesgado es un paseo aleatorio en $\{0, \ldots, n\}$ con matriz de transición

$$\begin{cases} P(i, i-1) = 1/3 - \beta \\ P(i, i) = 1/3 \\ P(i, i+1) = 1/3 + \beta \end{cases}$$

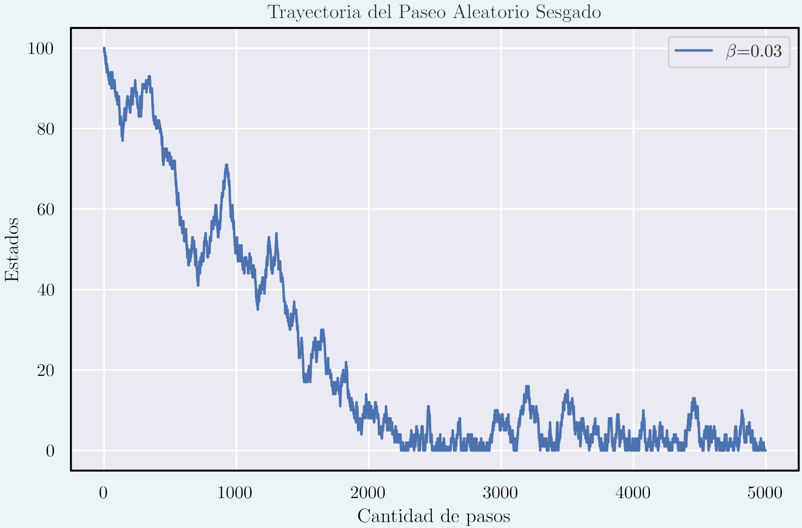
para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y con condiciones de borde usuales. Aquí $\beta \in (0, 1/3)$ es el *sesgo* y representa una tendencia de la cadena de ir hacia la izquierda. Esta cadena tiene una distribución invariante

$$\pi_n(i) = \frac{2\beta}{1/3 + \beta} \left(\frac{1/3 - \beta}{1/3 + \beta} \right)^i$$

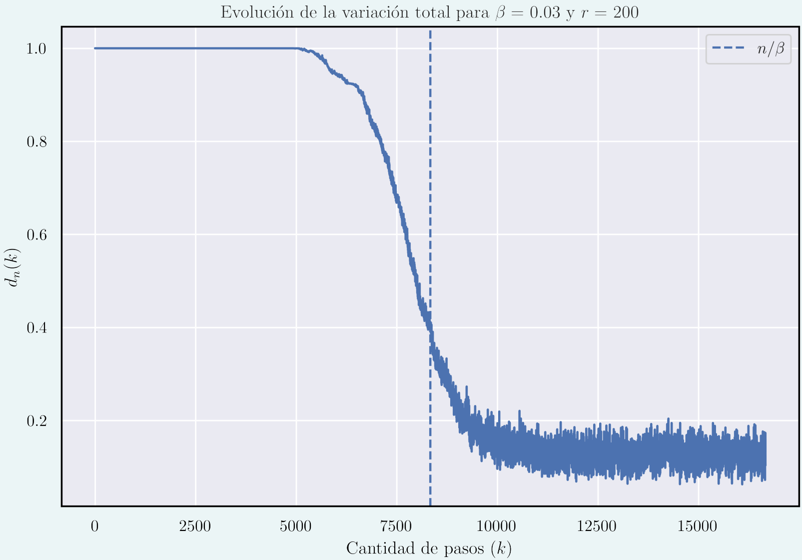
Cutoff para el paseo aleatorio sesgado

El paseo aleatorio sesgado en $\{0, \ldots, n\}$ con sesgo β tiene un cutoff en n/β.

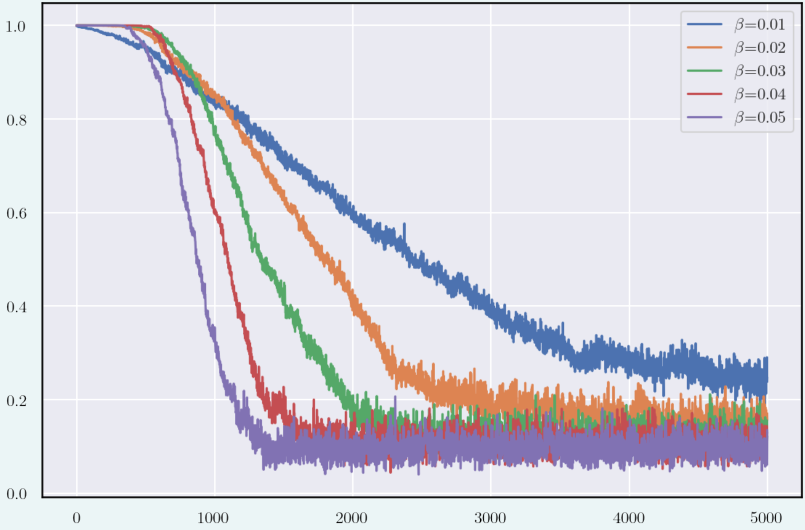
Realización de la cadena



Resultados


Evolución de la variación total para $\beta = 0.03$ y $r = 200$
n/β
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
$d_n(k)$
0
2500
5000
7500
10000
12500
15000
Cantidad de pasos (k)

Dependencia de β



Conclusión

- Logramos apreciar el fenómeno de cutoff.
- Sigue siendo un problema relevante y con una gran cantidad de problemas abiertos.
- Por ejemplo, hay métodos de revolver cartas que no se sabe si presentan cutoff o no.

Referencias

[1] P Diaconis. "The cutoff phenomenon in finite Markov chains.". En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 93.4 (1996), págs. 1659-1664. DOI: 10.1073/pnas.93.4.1659.

[2] C. Lancia. "Looking through the cutoff window". Tesis doct. Technische Universiteit Eindhoven, 2013.

[3] D Aldous y P Diaconis. "Shuffling Cards and Stopping Times". En: *The American Mathematical Monthly* 93.5 (1986), págs. 333-348. DOI: 10.2307/2323590.

[4] Levin y Peres. *Markov Chains and Mixing Times*. 2.ª ed. AMS, 2017.