Movimiento Browniano y Ecuación de Calor

Simulación Estocástica: Teoría y Laboratorio

Maximiliano S. Beltrán - David Astudillo,

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

22 de diciembre de 2022

Contenidos

Veremos a lo largo de la presentación

- Breve introducción a la ecuación de calor
- Teoremas y conexión con el Movimiento Browniano
- Simulaciones

Breve introducción a la ecuación de calor

Estudiamos el problema desde su formulación analítica
Consideramos la formulación

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \delta(x) \end{cases}$$

La cual modela la temperatura a posición x en tiempo t, donde la condición inicial denota que el calor del sistema se encuentra concentrado en $x = 0$ (sentido distribucional)
Definimos la solución fundamental al problema (kernel de calor) como

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(\frac{x^2}{4kt}\right)$$

que resuelve la formulación.

Breve introducción a la ecuación de calor

Para la formulación con condición inicial general

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Se tiene que

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)g(y)dy$$

es una solución del problema

Comentario, extensión a $\mathbb{R}^n$

Se puede extender para el caso en $\mathbb{R}^n$, tenemos la formulación

$$\begin{cases} u_t(x,t) - k\Delta u(x,t) = 0 & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \delta(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

La solución n-fundamental viene dada por el producto de las soluciones en cada variable,

$$\Phi_n(x,t) = \Phi(x_1,t)\dots\Phi(x_n,t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi kt)^n}} exp(-\frac{|x|^2}{4kt})$$

Comentario, extensión a $\mathbb{R}^n$

Y entonces, el problema general

$$\begin{cases} u_t(x,t) - k\Delta u(x,t) = 0 & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

tiene solución

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(x-y,t)g(y)dy$$

Observación

Para la ecuación en $\mathbb{R}$ con parámetro $k = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(0, x) = \delta(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tenemos el kernel de calor

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{x^2}{2t})$$

Contexto Browniano

El movimiento Browniano es un proceso de Markov en el sentido que

$$\mathbb{P}(B_{t+s} \in A | B_u, u \leq s) = \mathbb{P}(B_{t+s} \in A | B_s)$$

siendo la función de transición

$$\hat{p}(t; x, A) = \mathbb{P}(B_{t+s} \in A | B_s = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A e^{-(x-y)^2/2t} dy$$

y función de densidad de transición

$$p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}, t > 0, x, y \in \mathbb{R}$$

la cual proporciona la probabilidad de alcanzar en un tiempo t desde la posición x al conjunto A

Observación

Propiedad (Función de densidad de transición)

Observamos que la función de densidad de transición para el Browniano estándar

$$p(t;x,y) = \Phi(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}, t > 0, x, y \in \mathbb{R}$$

y por lo tanto satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Teorema y conexión con el Movimiento Browniano

Teorema (Representación de soluciones)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua Borel-medible tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} |f(x)| dx < 0$$

para algún $a > 0$. *Entonces*

$$\hat{u}(t, x) \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{E}^x[f(B_t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(t; x, y)dy$$

está definida para $0 < t < \frac{1}{2a}$, $x \in \mathbb{R}$ *y es tal que soluciona la ecuación del calor, además* $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Teorema y conexión con el Movimiento Browniano

Demostración

Omitimos la demostración del porque t está definida en dicho intervalo (funciones de crecimiento lento).
Dadas las condiciones de regularidad de f podemos deducir que

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p(t; x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t; x, y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p(t; x, y) dy = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

Por lo demás, usando Teorema de la Convergencia Dominada

$$u(0, x) = \lim_{t \to 0} \mathbb{E}^x[f(B_t)] = \lim_{t \to 0} \mathbb{E}^0[f(x + B_t)] = f(x)$$

Concluimos que $\hat{u}$ así definida, es solución del problema

Teorema y conexión con el Movimiento Browniano

Teorema

Dadas soluciones de la ecuación de calor $u_1, u_2 \in C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R}))$ *para las cuales existe* K *tal que*

$$\sup_{0<t\leq T} |u(t,x)| \leq Ke^{ax^2}$$

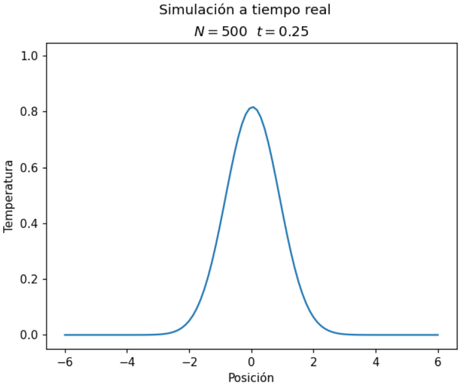
Entonces tenemos que $u_1 = u_2$, *es decir, para ciertas condiciones de regularidad la solución es única.*

Simulaciones

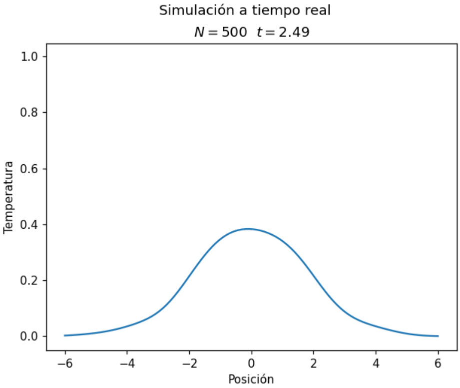
Consideramos la condición inicial dada por $f(x) = e^{-x^2}$, debido al comportamiento radial de la función esperamos que la temperatura se disipe de forma simétrica.

Simulaciones

Para $N = 500$ tenemos



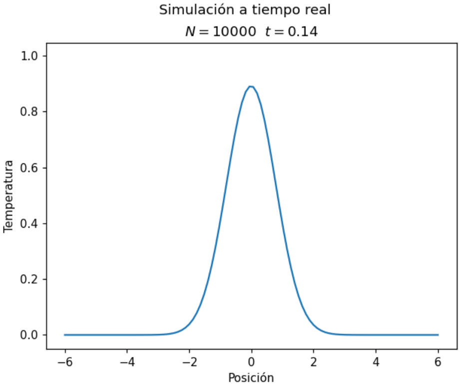
Simulaciones



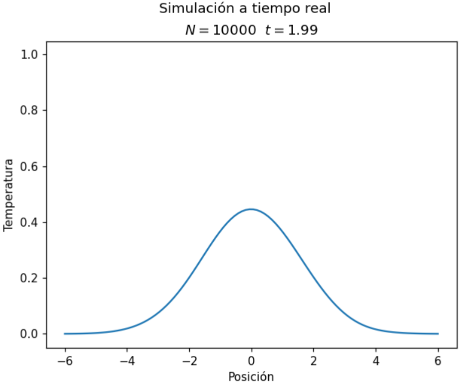
Notamos que la falta de simetría se debe a que el Browniano B_t aumenta su varianza cuando aumenta t, luego debemos más muestras para aproximar $\mathbb{E}^x[f(B_t)]$

Simulaciones

Para $N = 10000$ tenemos



Simulaciones



Simulación

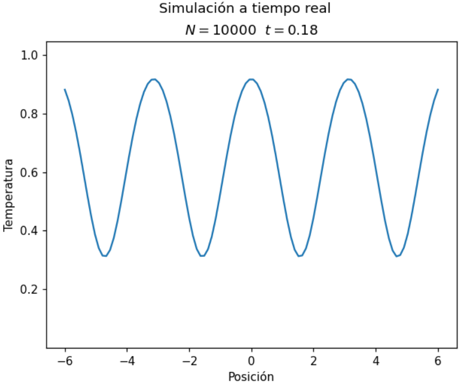
Tomamos la función $f(x) = |cos(x)|$ notamos que dicha función es simétrica respecto del 0 y está definida positiva

Sin perdida de generalidad notemos que para el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ (para $\mathbb{R}$ tomamos límite sobre $[-r, r]$ con $r \to \infty$) el valor promedio de temperatura está dado por

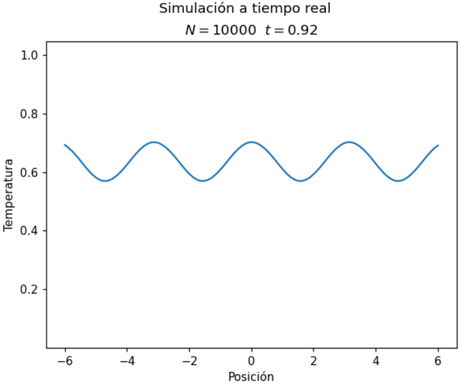
$$\frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} |cos(x)| dx = \frac{8}{4\pi} \approx 0.6366$$

En la simulación notamos como la temperatura de la barra converge cuando $t \to \infty$ a una temperatura constante en cada punto $\lim_{t\to\infty} u(t, x) \approx 0.6366$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Simulación

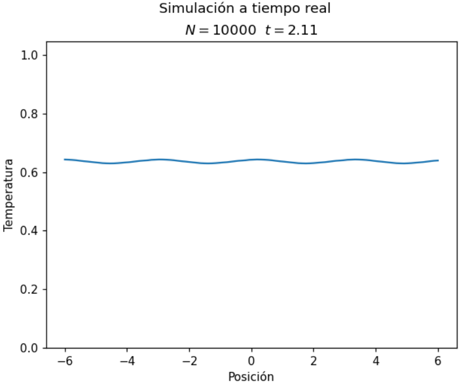

Simulación a tiempo real
$N = 10000$ $t = 0.18$
Temperatura
Posición
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−6
−4
−2
0
2
4
6

Simulación



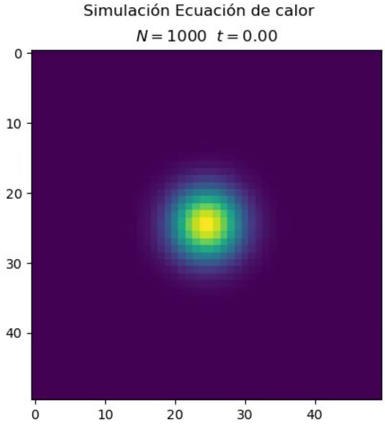
Simulación a tiempo real
N = 10000 t = 0.92
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
Temperatura
−6
−4
−2
0
2
4
6
Posición

Simulación

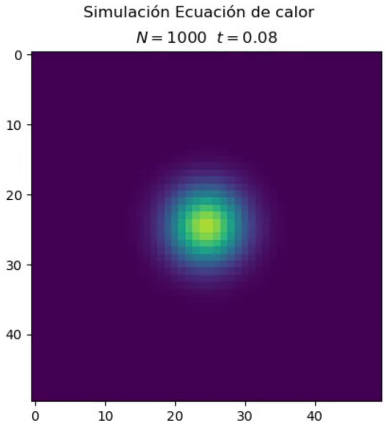

Simulación a tiempo real
$N = 10000$ $t = 2.11$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Temperatura
−6
−4
−2
0
2
4
6
Posición

Simulación

Para el caso 2-dimensional usando la condición inicial $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, radial y definida positiva tenemos

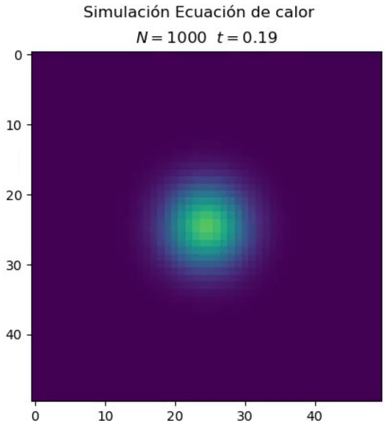


Simulación



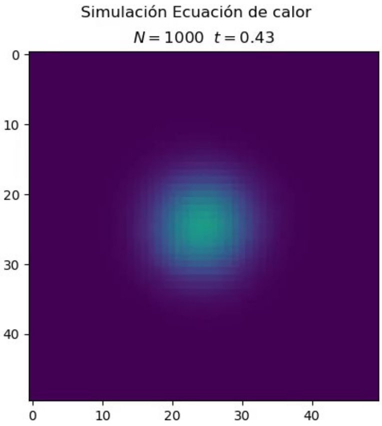
Simulación Ecuación de calor
$N = 1000 \quad t = 0.08$
0
10
20
30
40
0
10
20
30
40

Simulación



Simulación Ecuación de calor
$N = 1000 \quad t = 0.19$
0
10
20
30
40
0
10
20
30
40

Simulación



Simulación Ecuación de calor
$N = 1000 \quad t = 0.43$
0
10
20
30
40
0
10
20
30
40

Gracias por su atención!