

# Strategic Planning of Aircraft Trajectories

## MA4402 Simulación Estocástica: Teoría y Laboratorio

Fabián A. Ulloa y Catalina Lizana G.

22 diciembre 2022

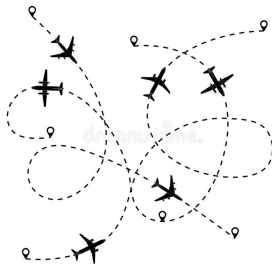


**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Introducción

- Simulación y optimización de trayectorias de aviones
- Implementación de Simulated annealing
- Simplificaciones con respecto al caso real



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Trayectorias

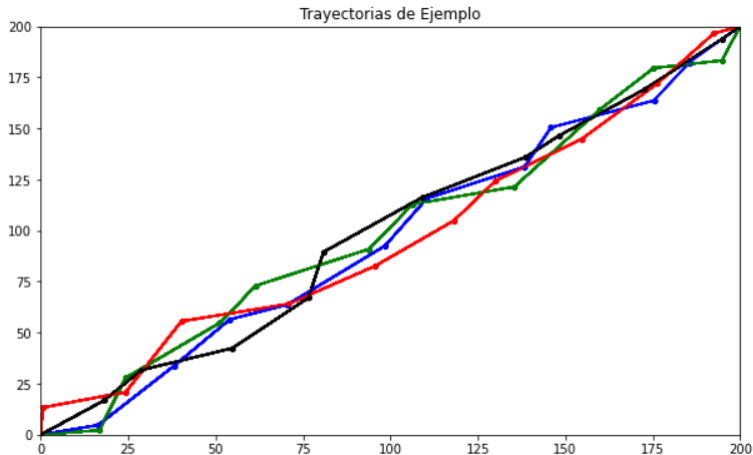
- Determinista sin incertidumbre.
- Consideramos de 2+1 dimensiones (2 de espacio y 1 de tiempo). El espacio es de  $200 \times 200$  (en km.), y el intervalo de tiempo de despegue es de 60 (minutos).
- Velocidad de un avión: 200 km/h.
- Cada avión tiene una trayectoria asociada que consiste en una lista de  $n$  coordenadas que conecta ambos aeropuertos.
- Cada coordenada será de la forma  $(x, y, t) \in [0, 200]^2 \times [0, \infty]$
- Para obtener los puntos intermedios consideramos puntos “al azar por cuadrantes”.



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Trayectorias

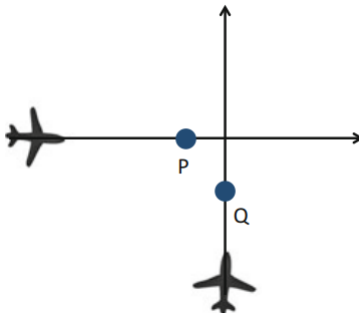


**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Interacciones

- Se denomina interacción cuando dos puntos de dos trayectorias diferentes están lo suficientemente cerca en el espacio en un intervalo de tiempo.



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

- Se quiere minimizar:

$$\phi_{tot}(u) := \sum_{i=1}^N \phi_i(u) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{K_i} \phi_{i,k}(u)$$

Donde  $u$  es un set de trayectorias,  $\phi_i$  es el total de interacciones de la trayectoria  $i$ -ésima calculada como  $\sum_{k=1}^{K_i} \phi_{i,k}(u)$ , con  $\phi_{i,k}(u)$  el número de interacciones en el punto  $k$ -ésimo y  $K_i$  es la cantidad de puntos con los que se discretiza la trayectoria del vuelo  $i$



# Algoritmo de Grilla

- Se discretiza el espacio y el tiempo formando una grilla.
- Se itera sobre cada punto de cada trayectoria.
- Cada punto se guarda en la celda que corresponda y se chequean las celdas adyacentes a ella.
- Se verifica si hay interacción o entre puntos que interactúan.



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Grafo y Vecinos

- El grafo a considerar para el algoritmo SA tiene como vértices todos los posibles set de trayectorias  $u$ .
- Dos vértices son vecinos si difieren en un punto espacial de una trayectoria.
- Para efectos de esta implementación, un vecino de un vértice  $u$  se obtendrá cambiando un punto al azar, moviéndolo (también al azar) en ambas direcciones espaciales.



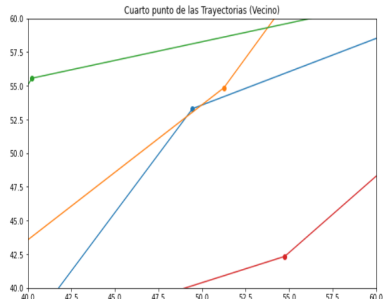
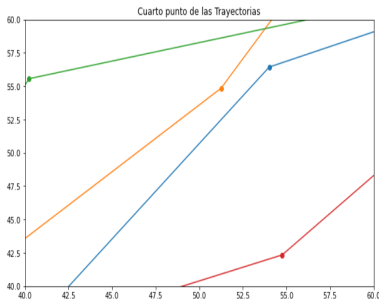
**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# Grafo y Vecinos

## ● Ejemplo:

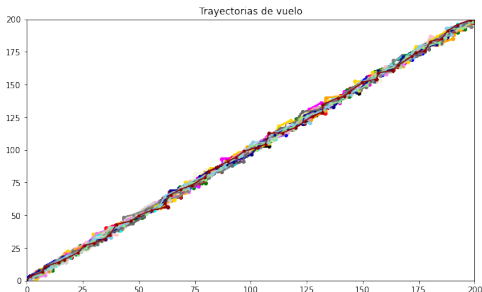


**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Resultados

Consideramos un aeropuerto de salida en  $(0,0)$  y uno de llegada en  $(200,200)$ . Además simulamos 20 trayectorias, de 50 puntos.



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

Para implementar Simulated Annealing debemos usar una sucesión  $\beta_n$  :

- Cuadrático:

$$\beta_n = n^2$$

- Exponencial:

$$\beta_n = 3^n$$

- Lineal:

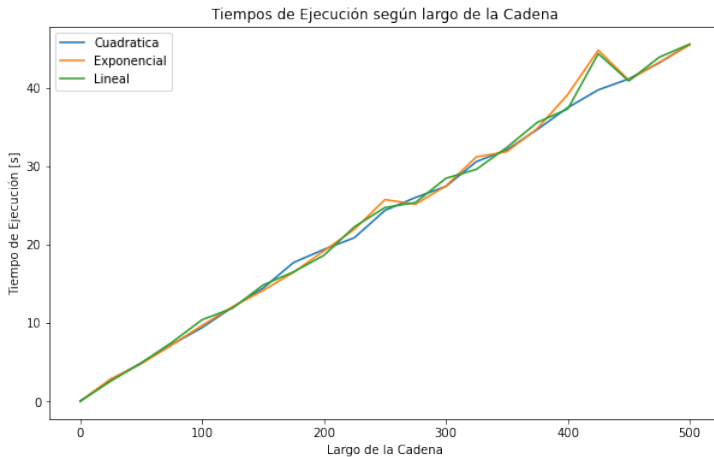
$$\beta_n = 2n$$



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

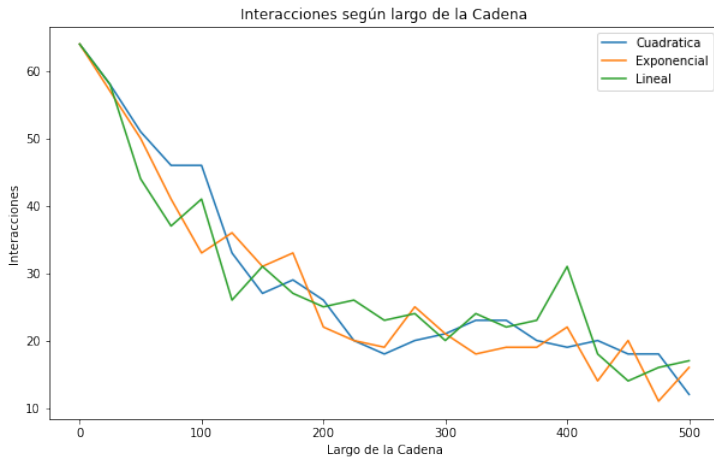
# Resultados



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Resultados



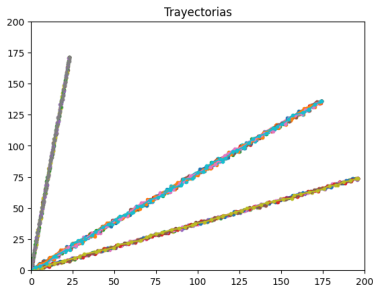
**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Resultados

Consideramos un aeropuerto de salida en y múltiples aeropuertos de llegada que estarán en:

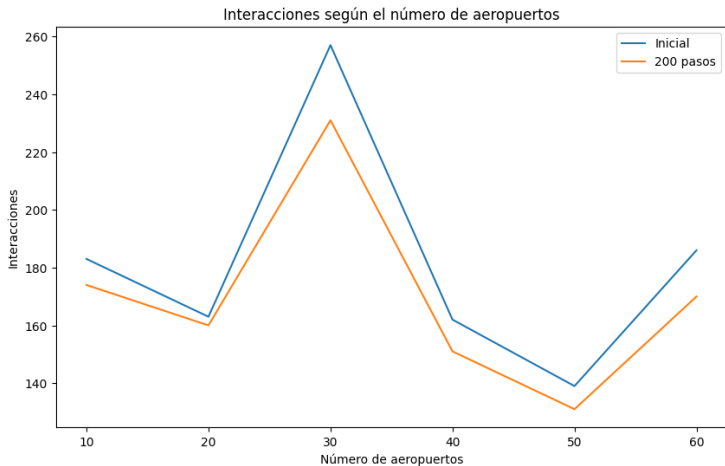
- $(x, y) \in [0, 200] \times [160, 200]$
- $(x, y) \in [160, 200] \times [0, 200]$



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Resultados



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Resultados reales

**Table 3** Initial and final total interaction between trajectories for the national-size air traffic, considering different dimensions for the deterministic uncertainty set

Case	Uncertainty set dimensions	Initial $\Phi_{tot}^D$	Final $\Phi_{tot}^D$	Solved interactions	CPU time (minutes)	No. of iterations
1	$R_h = 0$ NM.	2,282,436	5,934	99.7%	1,093.8	1,083,215
	$R_v = 0$ ft.					
	$t_\epsilon = 180$ s.					
2	$R_h = 1$ NM.	765,448	0	100.0%	101.1	97,400
	$R_v = 100$ ft.					
	$t_\epsilon = 60$ s.					
3	$R_h = 1$ NM.	1,425,384	4,314	99.7%	1,809.0	1,791,000
	$R_v = 100$ ft.					
	$t_\epsilon = 120$ s.					
4	$R_h = 1$ NM.	2,821,706	37,290	98.7%	2,213.3	2,191,970
	$R_v = 100$ ft.					
	$t_\epsilon = 240$ s.					
5	$R_h = 2$ NM.	5,000,430	110,021	97.9%	2,289.8	2,266,956
	$R_v = 100$ ft.					
	$t_\epsilon = 240$ s.					



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# Conclusiones

- Por medio de algunas simplificaciones fue posible simular el problema.
- Minimizamos la cantidad de interacciones entre trayectorias con diferentes funciones  $\beta_n$ .
- Se evidencia que a medida que el número de iteraciones del algoritmo aumenta, disminuyen las interacciones entre aviones.
- Mientras menor sea la discretización de las trayectorias, existirán choques que no se detecten.
- La mayor limitante al simular el problema fue la complejidad computacional del caso real.



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Bibliografía

ARIANIT ISLAMI, SUPATCHA CHAIMATANAN, DANIEL DELAHAYE.  
*Large Scale 4D Trajectory Planning. Air Traffic Management and Systems – II* , 420, Springer, pp 27-47, 2016, *Lecture Notes in Electrical Engineering*



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Strategic Planning of Aircraft Trajectories

## MA4402 Simulación Estocástica: Teoría y Laboratorio

Fabián A. Ulloa y Catalina Lizana G.

22 diciembre 2022



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE