

# Resolución de la ecuación FKPP usando el Movimiento Browniano Ramificado

Karim Saud, Benjamín Tardy D.

7 de diciembre del 2022

## Ecuación de Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov La conexión

La ecuación de FKPP es una variación no-lineal de la ecuación de calor y corresponde a una ecuación de reacción-difusión. Fue formulada originalmente dentro del área de la genética y actualmente cuenta con variadas aplicaciones en distintas ciencias naturales. Específicamente, nos concentraremos en la formulación

$$(\text{FKPP}) \begin{cases} v_t - \frac{1}{2}v_{xx} = v^2 - v, & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ v(x, 0) = v_0(x), & \mathbb{R} \end{cases}$$

para cierta  $v_0$  que nos da la condición inicial.

## Movimiento browniano ramificado

El movimiento browniano ramificado (BBM de sus siglas en inglés) corresponde a un proceso definido recursivamente. Se parte con un movimiento browniano unidimensional que es detenido según un reloj exponencial de parámetro 1. En el punto en el que se detiene, parten dos brownianos independientes, cada uno con su propio reloj exponencial. Estos se comportan de igual manera que el primero.

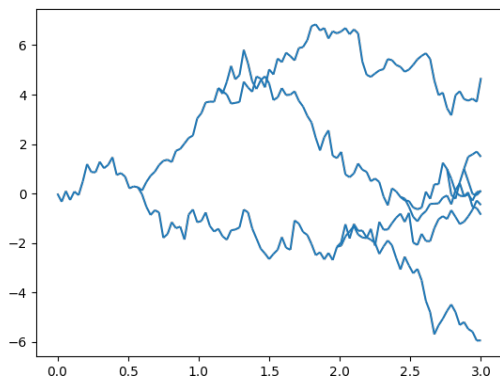


Figura 1: Ejemplo de la trayectoria de un BBM

Sean  $x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}_+$  y consideremos un BBM  $B$  que parte en  $x_0$ . Sean  $y_1, \dots, y_m$  los puntos de  $B$  que intersectan a la recta  $t = t_0$  y definimos

$$v(x, t) := \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^m v_0(y_i) \right].$$

Se tiene que  $v$  definida así es solución de (FKPP).

## Aplicación

En el presente trabajo, se utilizó dicha relación entre la ecuación FKPP y el BBM para implementar, utilizando Python, una función que genere soluciones aproximadas para el problema FKPP. Más específicamente, la función simula cierta cantidad (grande) de BBMs hasta un tiempo máximo  $T$  y luego, en cada punto de una discretización de  $[x_1, x_2] \times [0, T]$ , se utilizan estos BBMs para aproximar la solución  $v$  mediante Montecarlo.

Para probar la efectividad de este método, se hicieron comparaciones con una solución teórica obtenida de [3] la cual es para un caso particular de  $v_0$ .

## Bibliografía

- [1] Chorin, A., Hald, H. (2013). Stochastic Tools in Mathematics and Science (3rd ed.). Springer.
- [2] Brunet, E. (2016). Some aspects of the Fisher-KPP equation and the branching Brownian motion.
- [3] Ma, W. X., Fuchssteiner, B. (1996). Explicit and exact solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation. Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 31, No. 3, pp. 329-338.
- [4] Moon, B., Dai, Y., Kota, T. (2022). A Majority Voting Model on Branching Brownian Motion.