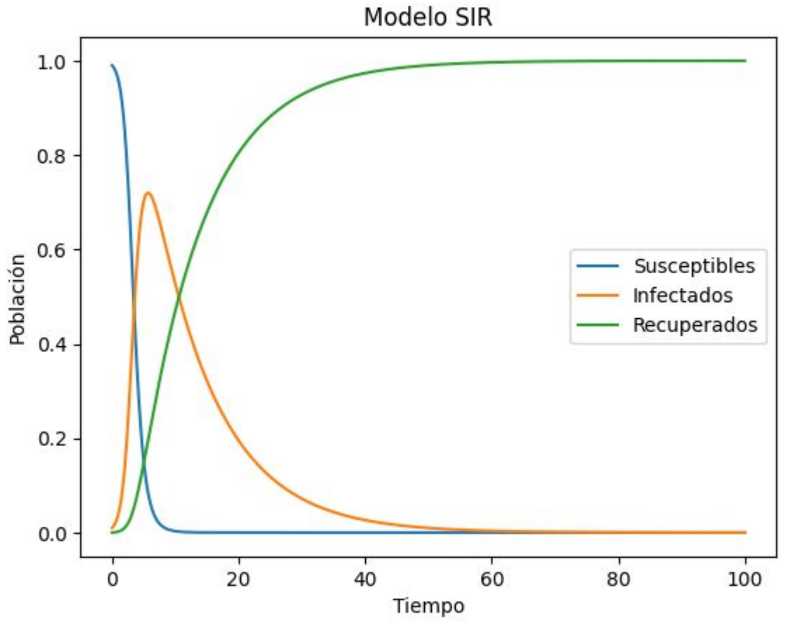
# Proyecto Final: SIR generalizado para modelo epidemiológico





**Leila Reyes G. - Cristóbal Ramos S.**

**MA 4402 - Simulación Estocástica**

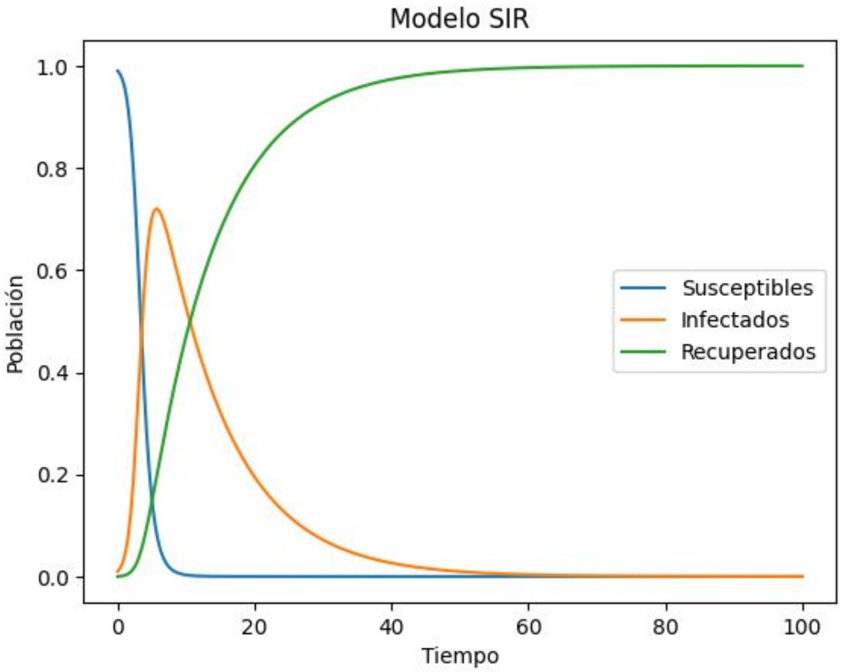
**Profesor: Joaquín Fontbona**

**Auxiliar Tutor: Pablo Zúñiga**

# Contexto: Modelo SIR

1. Modelo SIR clásico.

$$s' = -\beta s i$$
$$i' = \beta s i - \gamma i$$
$$r' = \gamma i$$



# Contexto: Modelo SIR

2. Modelo SIR generalizado (with “social gatherings”).

$$
\begin{aligned}
s' &= -\mu\theta s\left(1-(1-pi)^{\theta-1}\right)\\
i' &= \mu\theta s\left(1-(1-pi)^{\theta-1}\right)-\gamma i\\
r' &= \gamma i
\end{aligned}
$$

3. Modelo SIR generalizado con tamaño de reunión aleatorio.

$$
\begin{aligned}
s' &= -\mu s B(i)\\
i' &= \mu s B(i)-\gamma i\\
r' &= \gamma i
\end{aligned}
$$

# Contexto: Dinámica Estocástica de Población Finita (and "Mean-Field Limit")

- Interpretación probabilística exacta mediante simulación con cadenas de Markov.

- Tamaños aleatorios en las reuniones (Variables aleatorias con distribución Binomial y Poisson).

- Población finita de tamaño N.

- **Objetivo:** "Demostrar numéricamente que para una población considerablemente grande, dicha simulación converge a la solución del sistema de EDO's asociado".

# Planteamiento

- Simulamos el modelo con cadenas de Markov a tiempo continuo.
- Cadena de Markov: $X_t^N = (S_t^N, I_t^N, R_t^N)$
- Discretizamos el tiempo considerando ciertos delta_t.
- A tasa $\gamma$ * I : Se recupera un individuo, o sea (S,I,R) $\longrightarrow$ (S, I - 1, R).

# Planteamiento

- A tasa $\mu$*N :
  - Si $\Theta$ > N no ocurre nada.
  - Hacer muestreo de *(S,I,R)*
  - Cada *S* seleccionado tiene $I^N$ posibilidades de contagiarse con probabilidad *p.* Sea $J_k$ v.a. que es *1* si algún *S* se contagia y *0* si no, o sea $1 - J_k \sim Ber((1-p)^{I^N})$.
  - Si $J = \sum_{k=1}^{S^N} J_k$ es el nuevo número de infecciones, entonces $(S, I, R) \longrightarrow (S - J, I + J, R)$

# Planteamiento

- El modelo tiene como fundamento teórico el siguiente teorema:

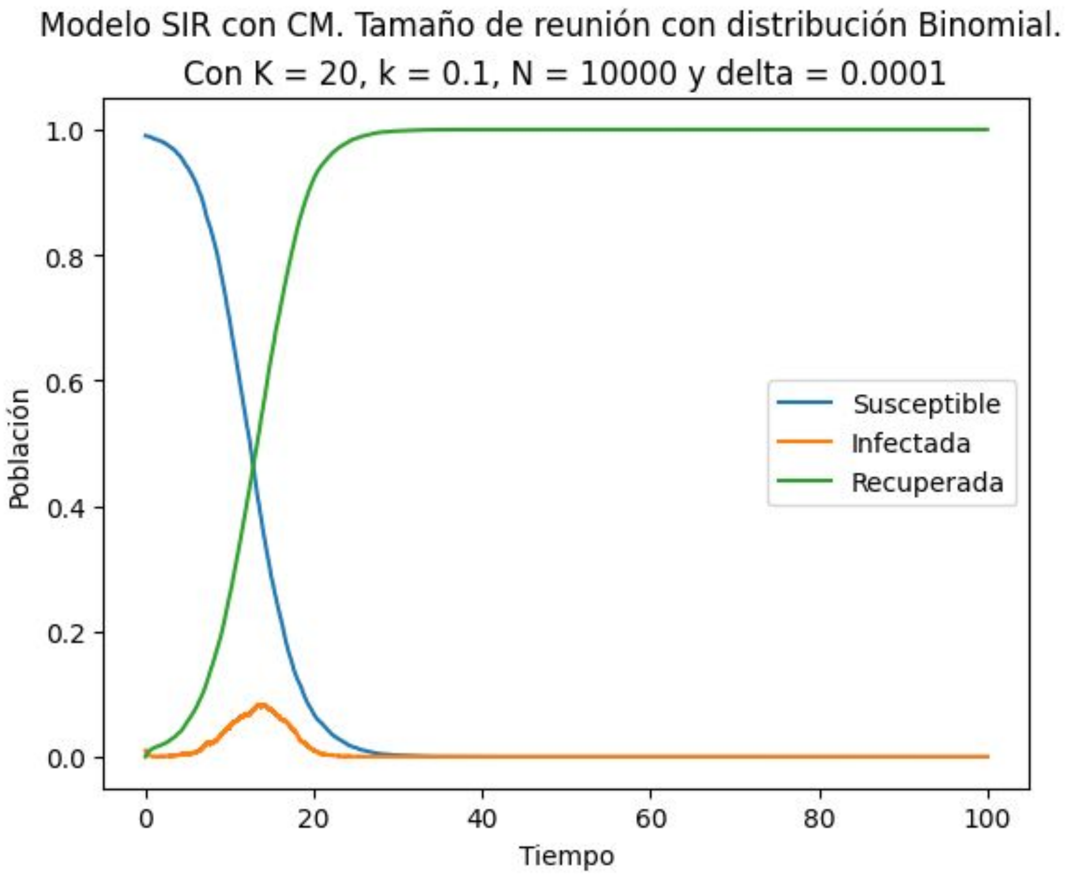
**Theorem 13.** *Let $X_t^N$ be the Markov process on $\{0,\ldots,N\}^3$ described in Section 1.5, and also in Example 9. Denote $Z_t^N = \frac{1}{N}X_t^N$, and let $z_t = (s_t, i_t, r_t)$ be the solution to (3). Assume that $\lim_N Z_0^N = z_0$. Then, for all $T \geq 0$,*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\leq T} |Z_t^N - z_t| = 0 \quad a.s.$$

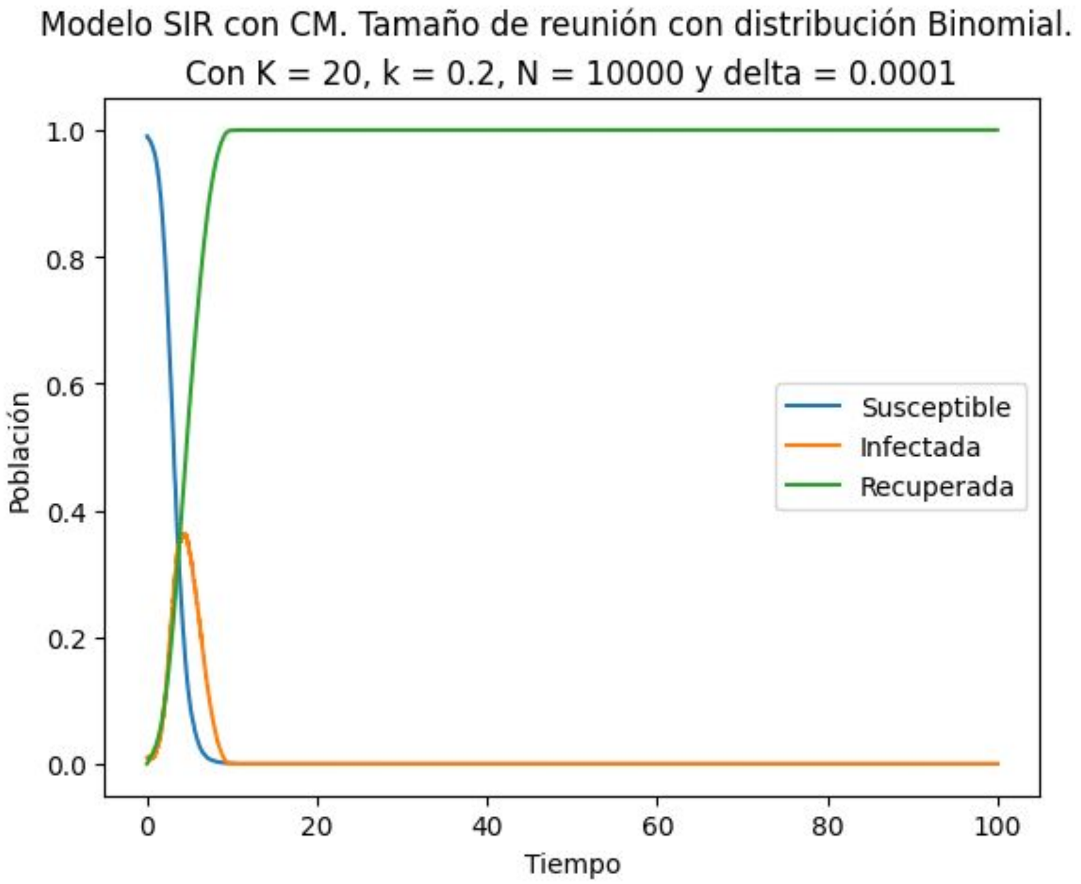
- En lo que sigue se considerarán los siguiente parámetros:
  - $\mu = 0.5$
  - $p = 0.2$
  - $\gamma = 0.1$
  - $i_0 = 0.01 * N$

# SIR generalizado con $\Theta \sim \mathrm{Bin}(K,k)$

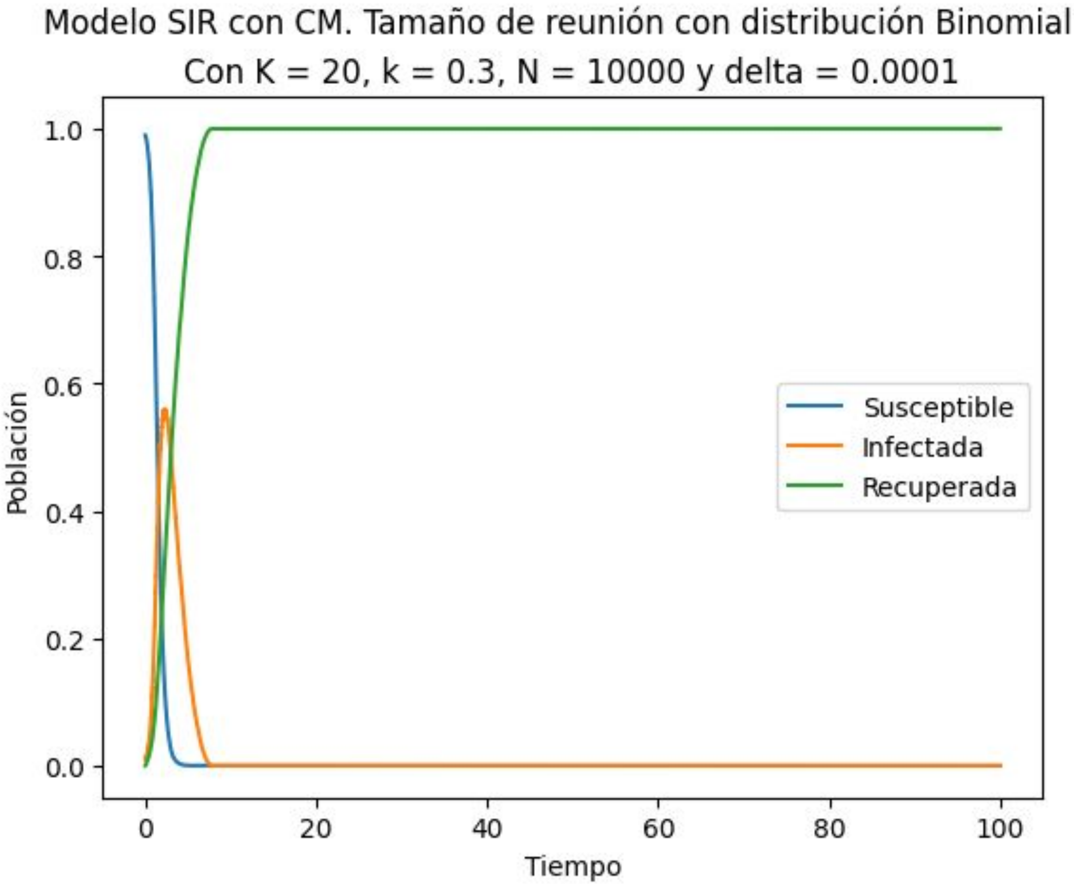
$K = 20$
$k = 0.1$
$E(\Theta) = 2$



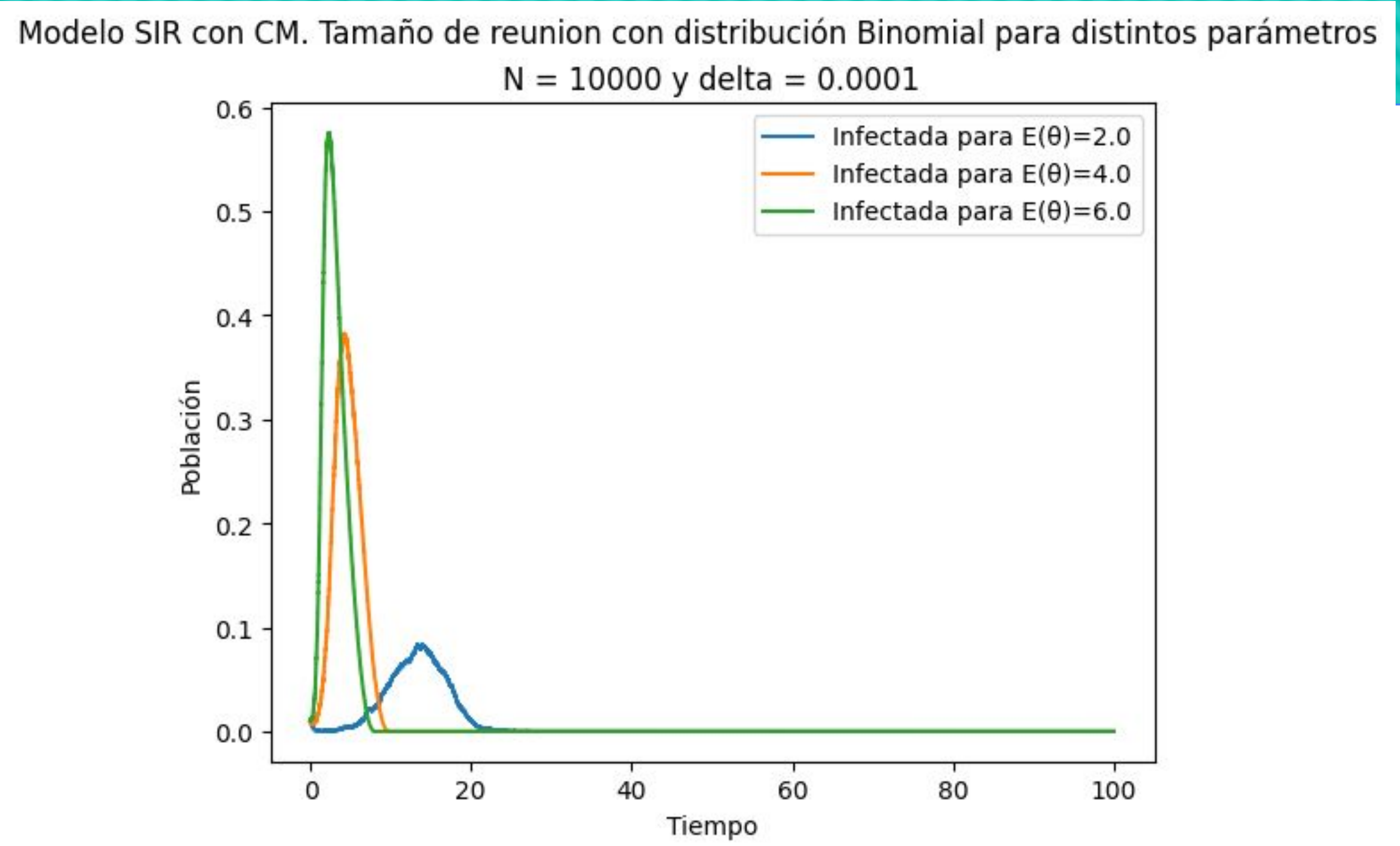
$K = 20$
$k = 0.2$
$E(\Theta) = 4$



$K = 20$
$k = 0.3$
$E(\Theta) = 6$

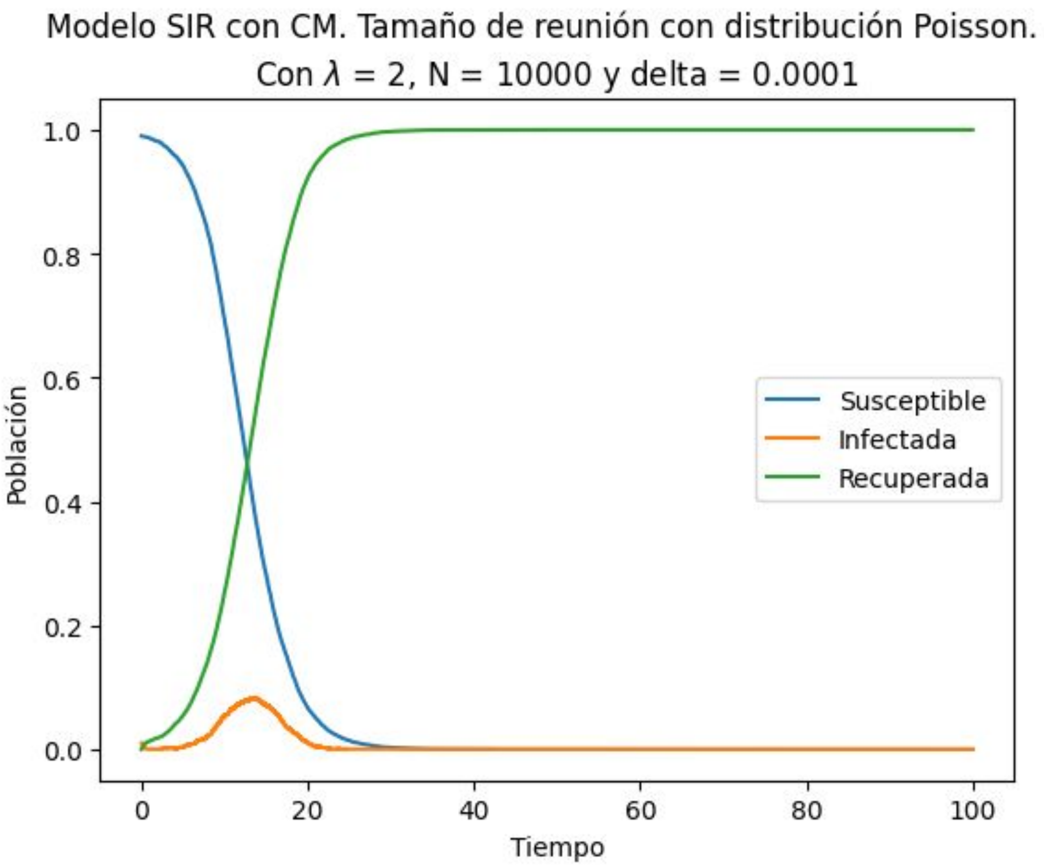


# Comparación curva 'Infectados'



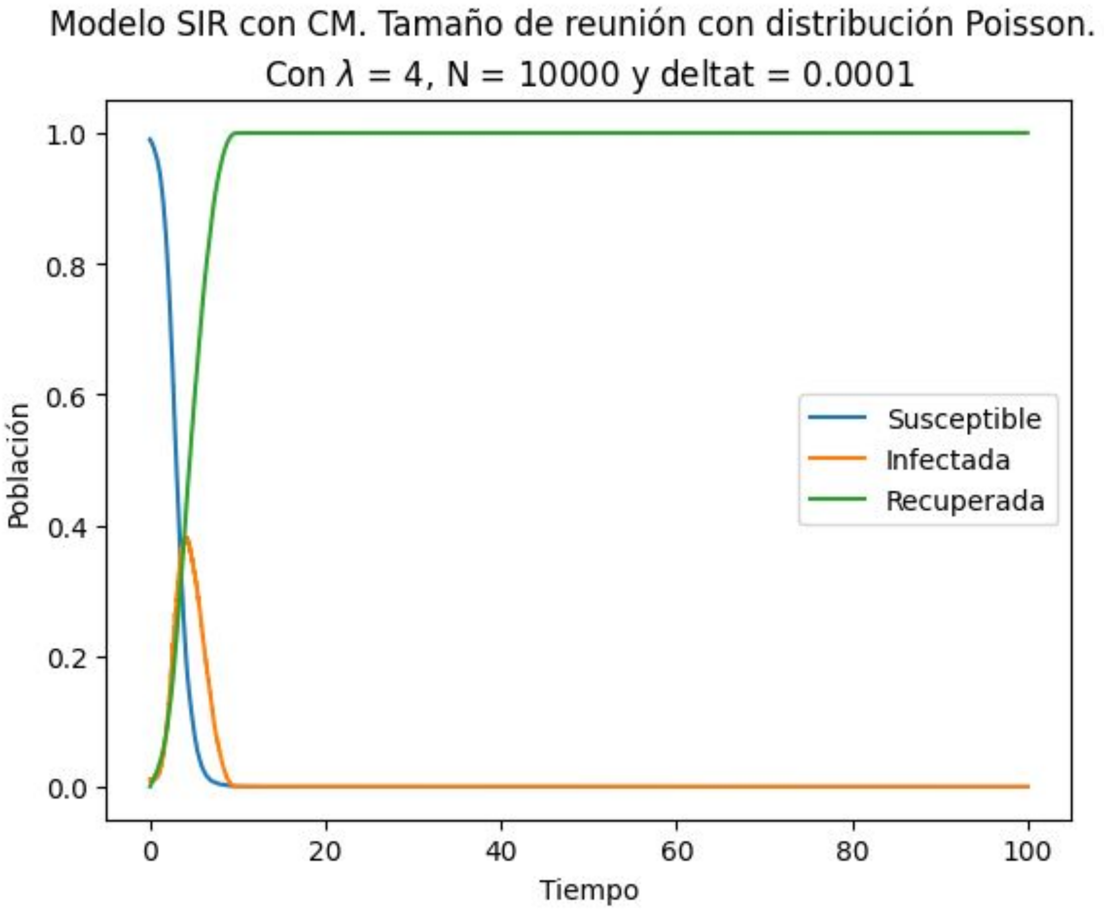
# SIR generalizado con $\Theta \sim \text{Poiss}(\lambda)$

$\lambda = 2$
$E(\Theta)=2$



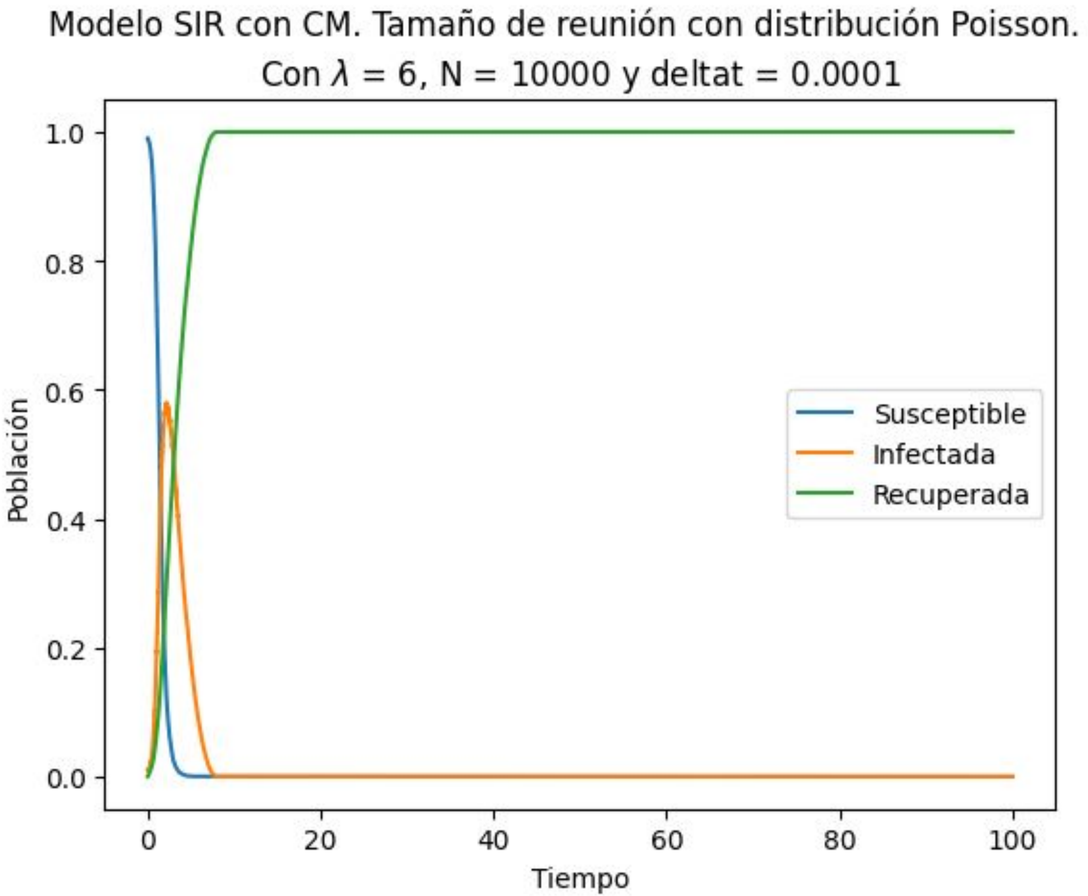
$\lambda = 4$

$E(\Theta)=4$

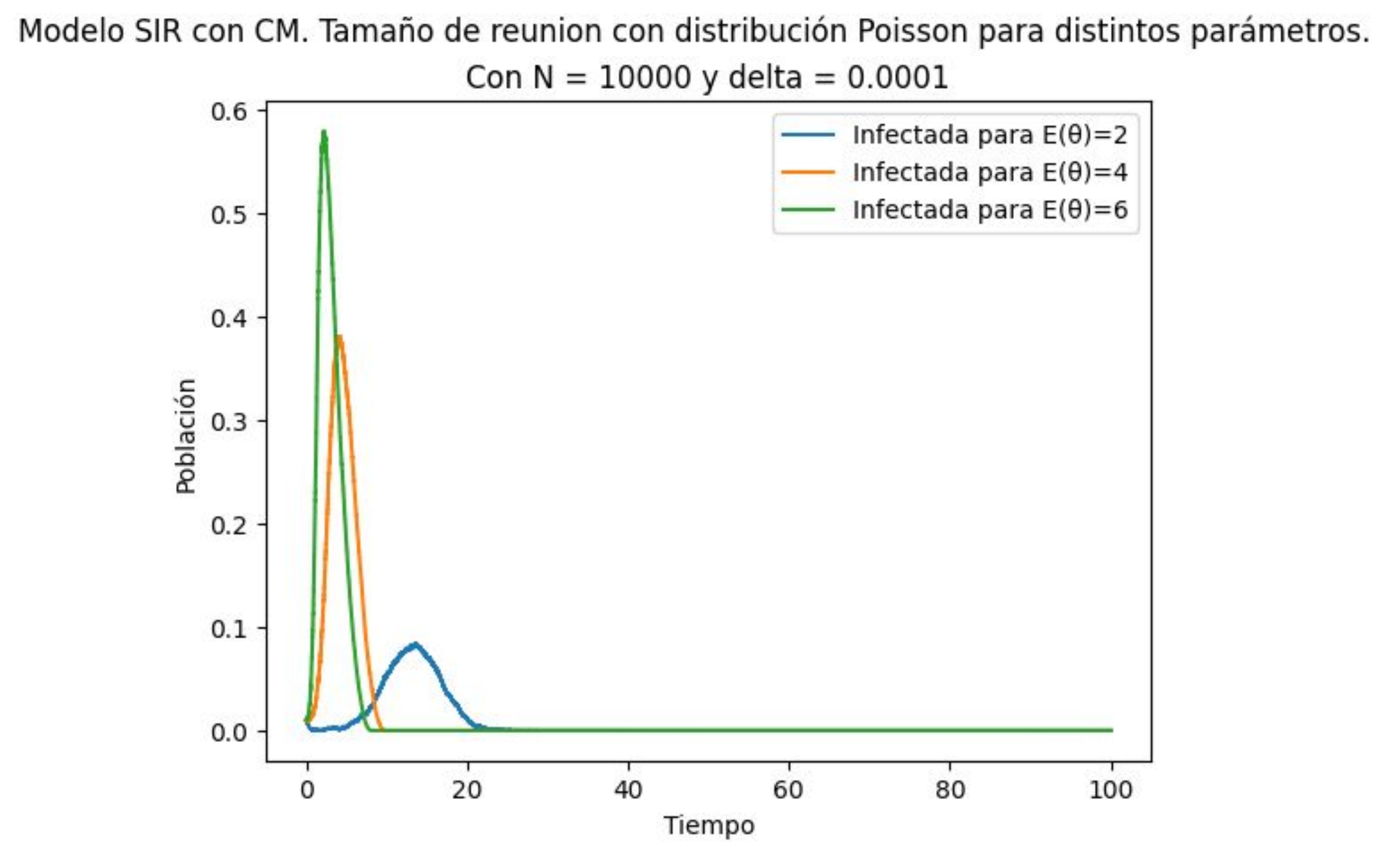


$\lambda = 6$

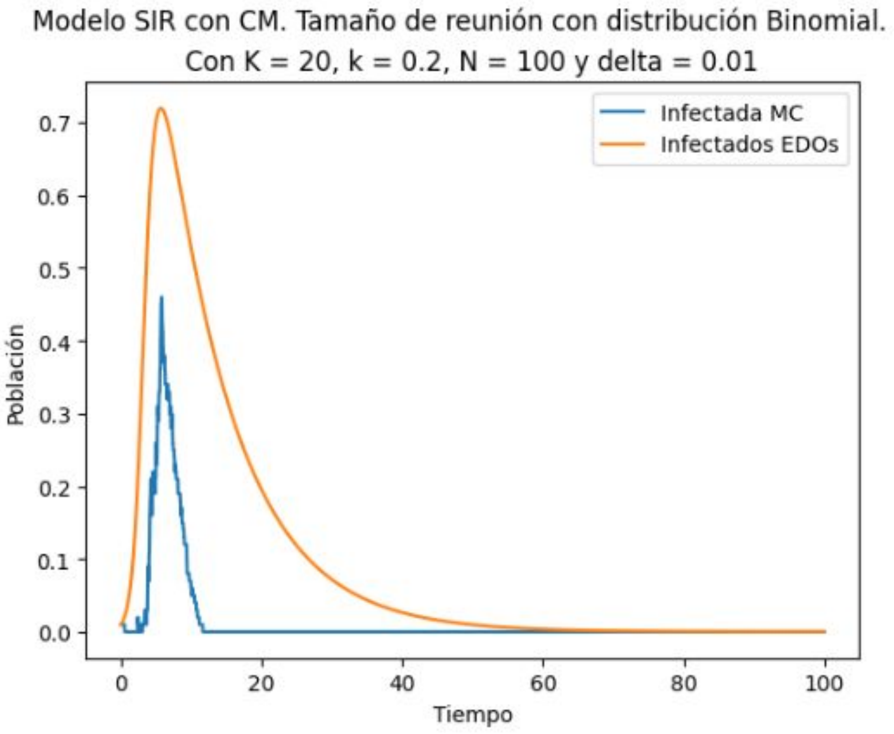
$E(\Theta)=6$



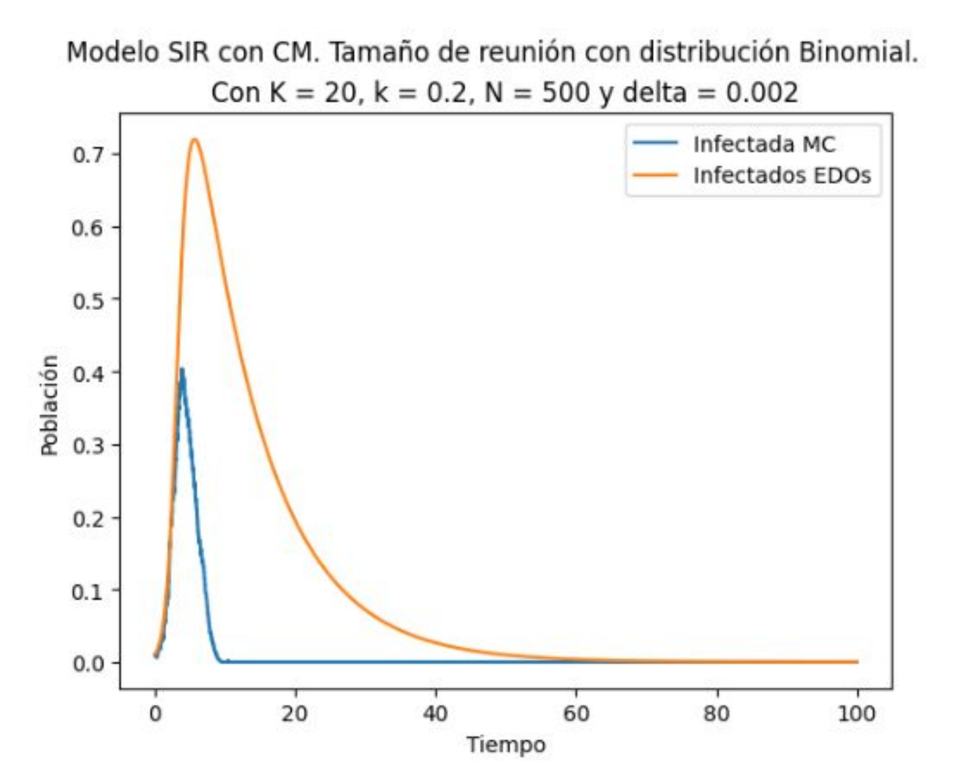
# Comparación curva ‘Infectados’



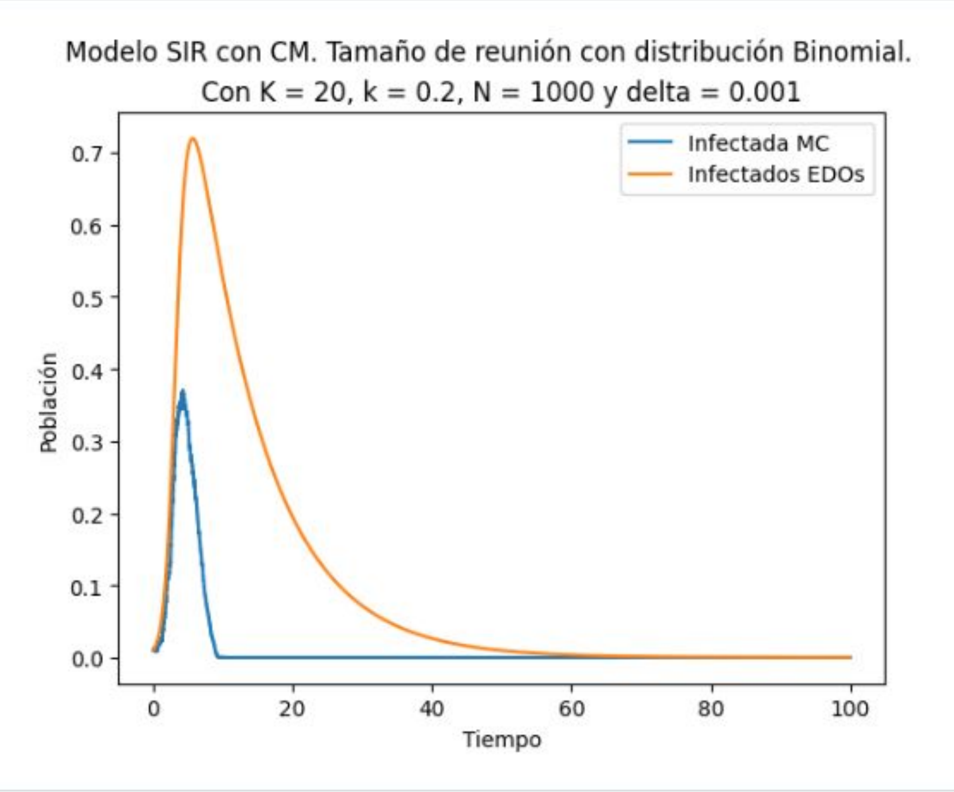
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Bin(*20*, *0.2*)



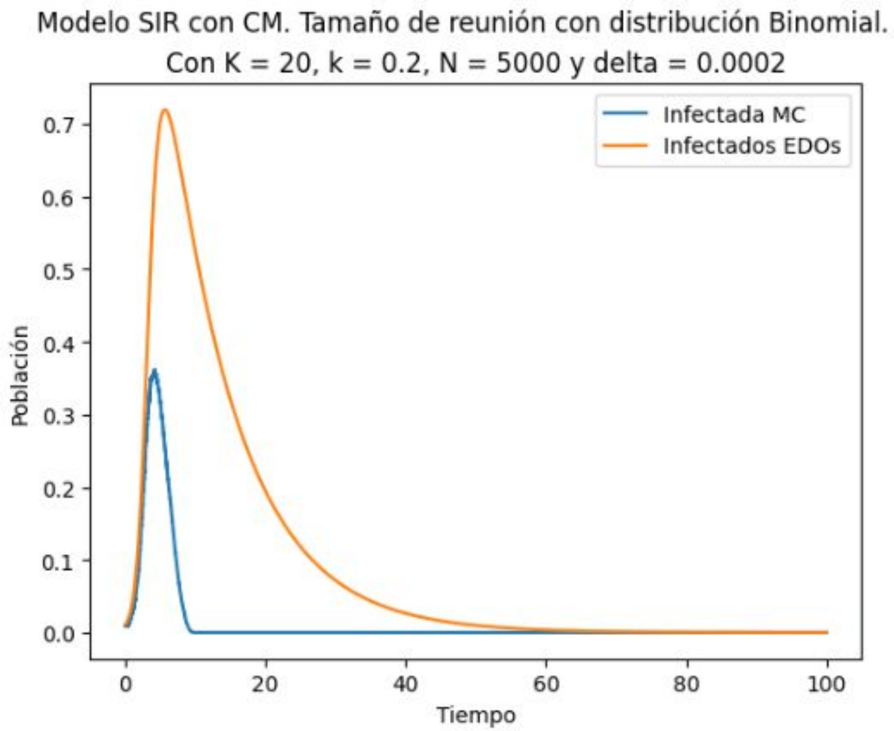
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Bin(*20, 0.2*)



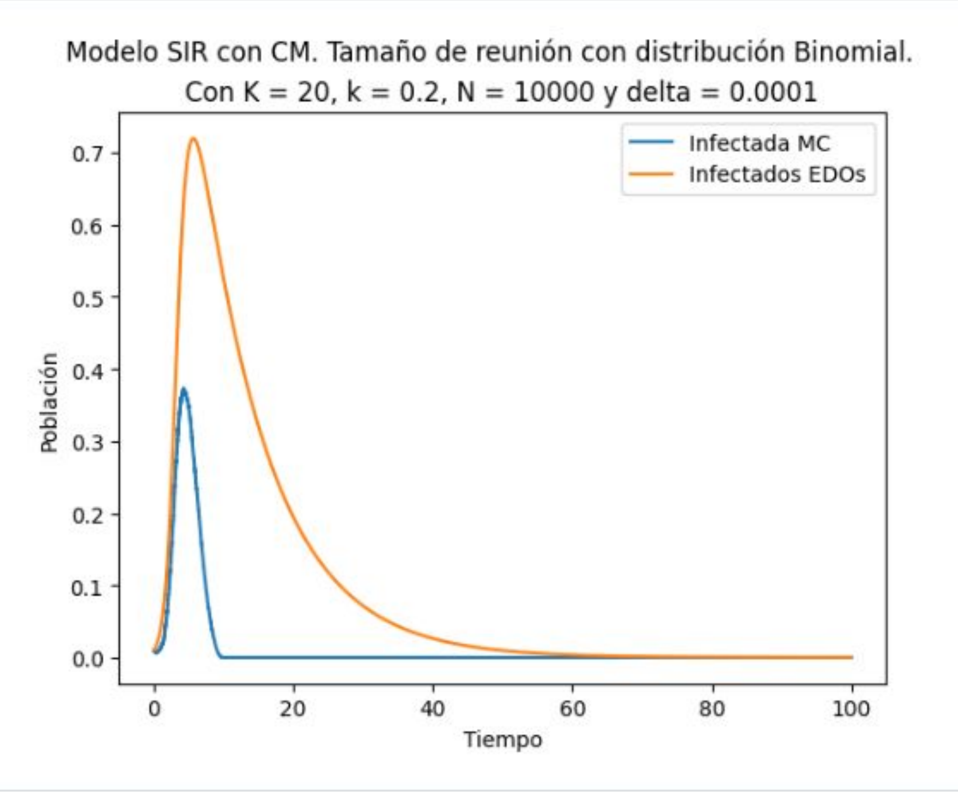
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO’s para Θ ~ Bin(*20, 0.2*)



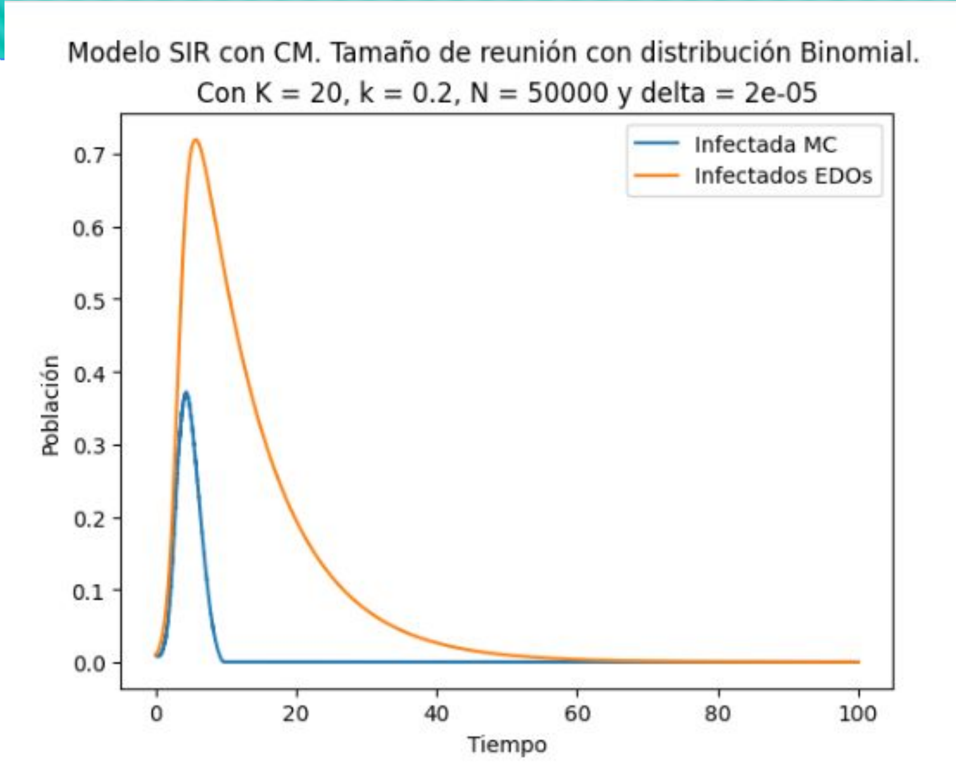
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Bin(*20, 0.2*)



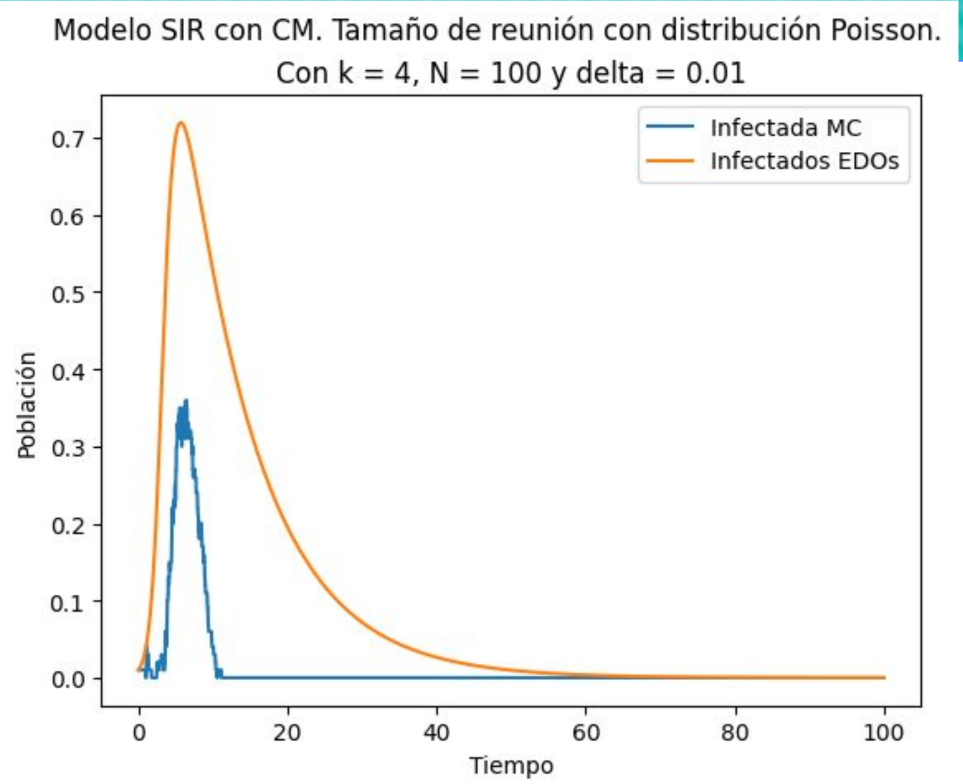
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO’s para Θ ~ Bin(*20, 0.2*)



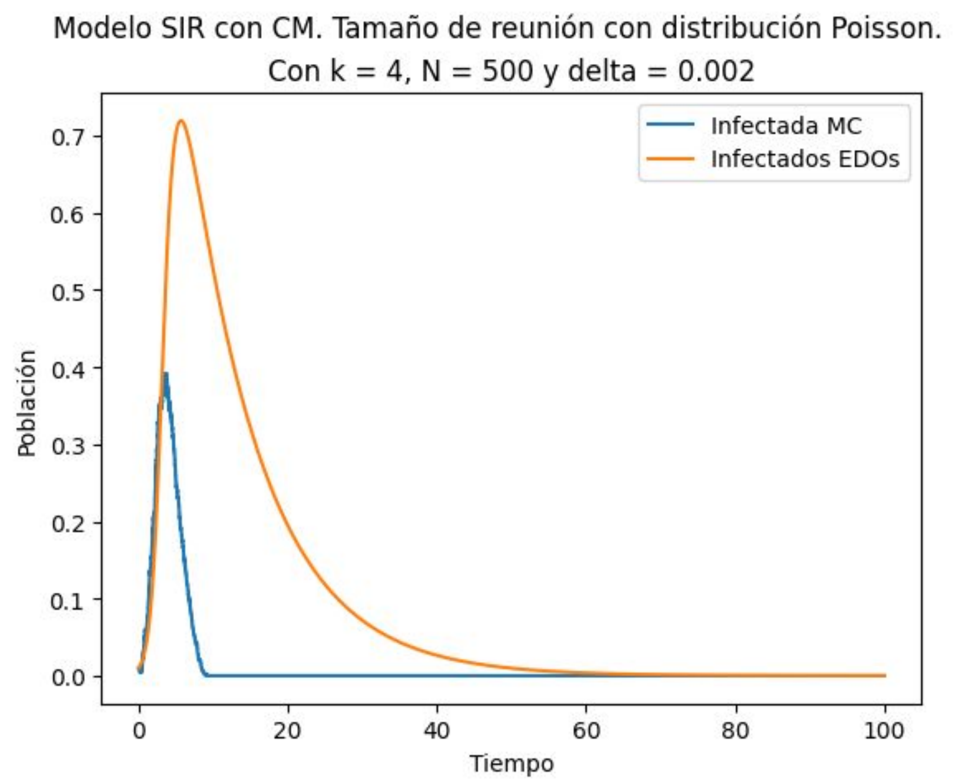
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO’s para Θ ~ Bin(*20, 0.2*)



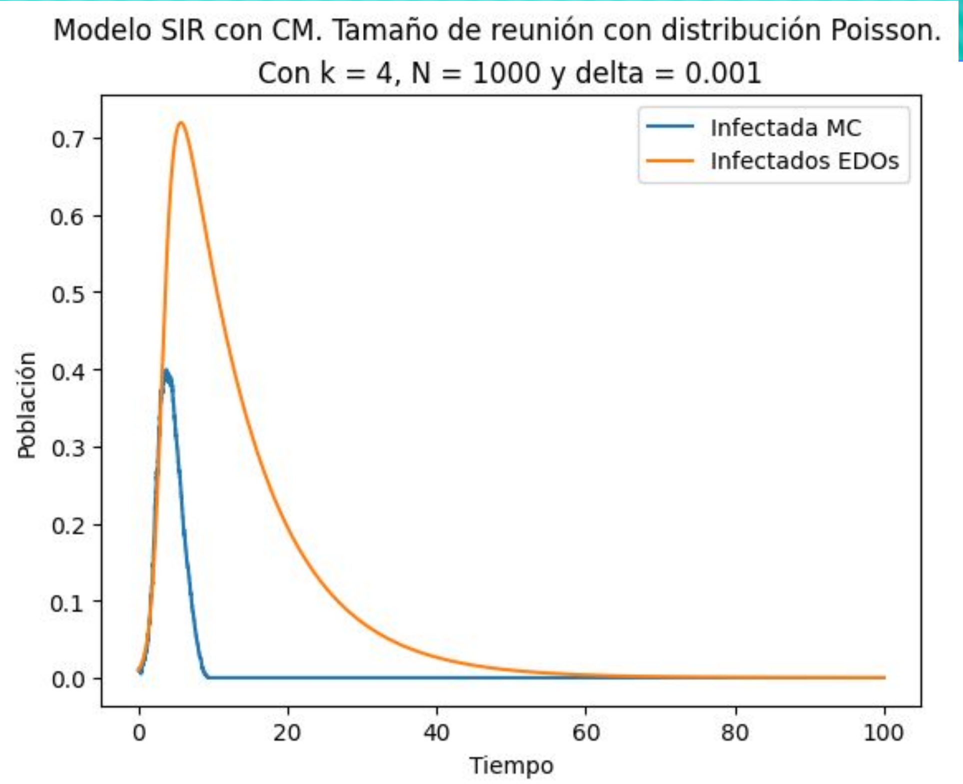
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Poiss(*4*)



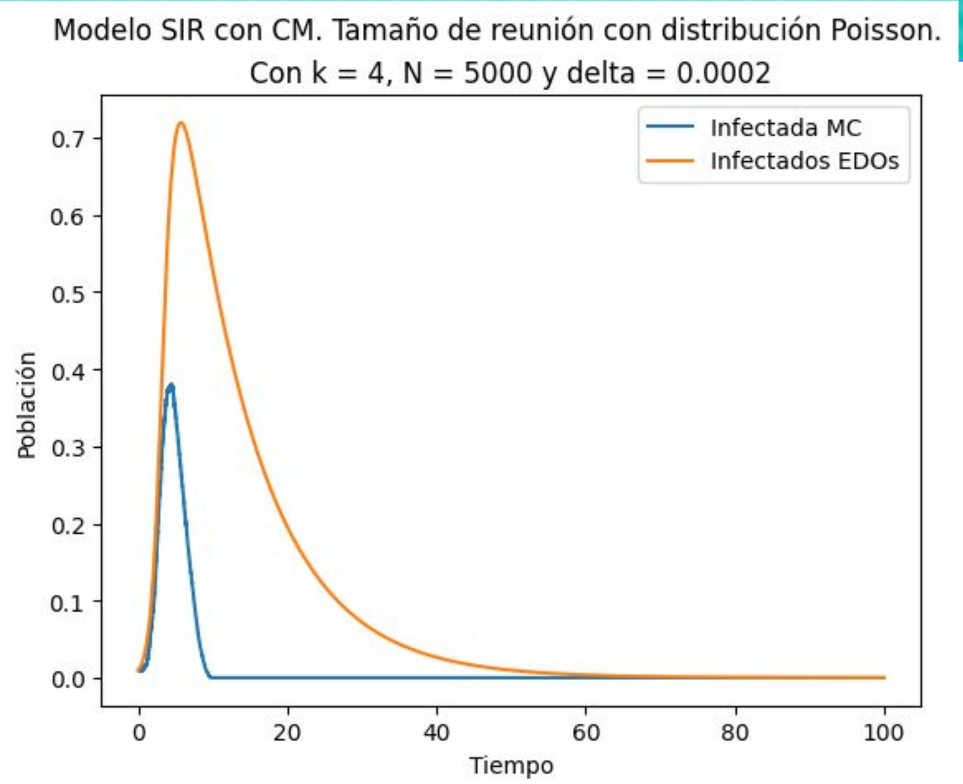
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Poiss(*4*)



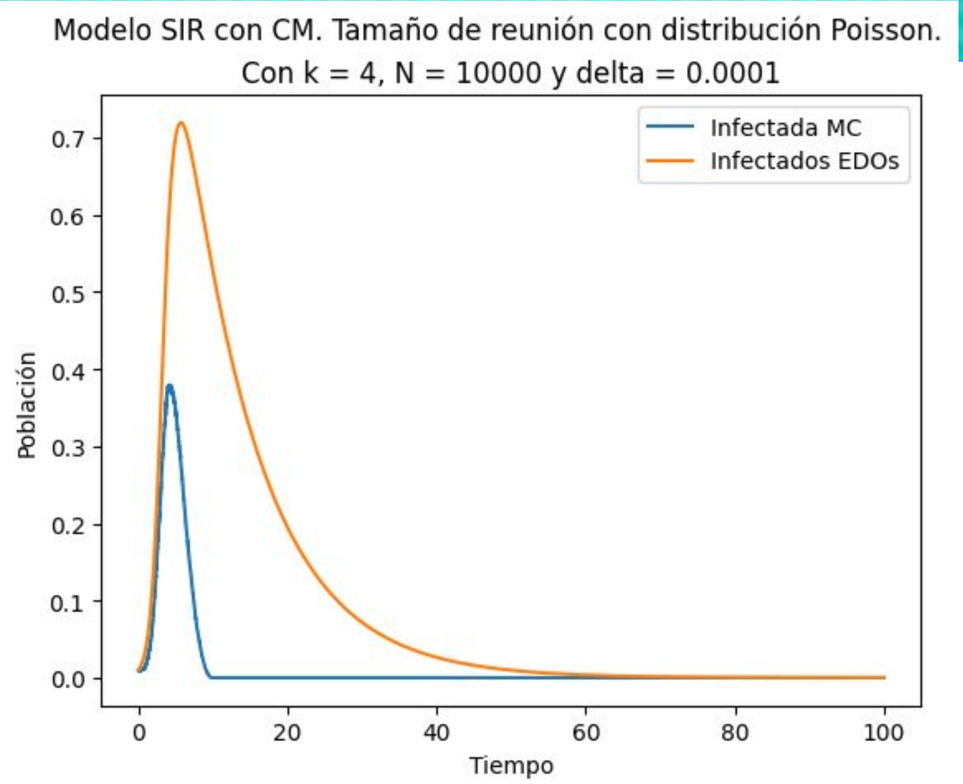
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Poiss(*4*)



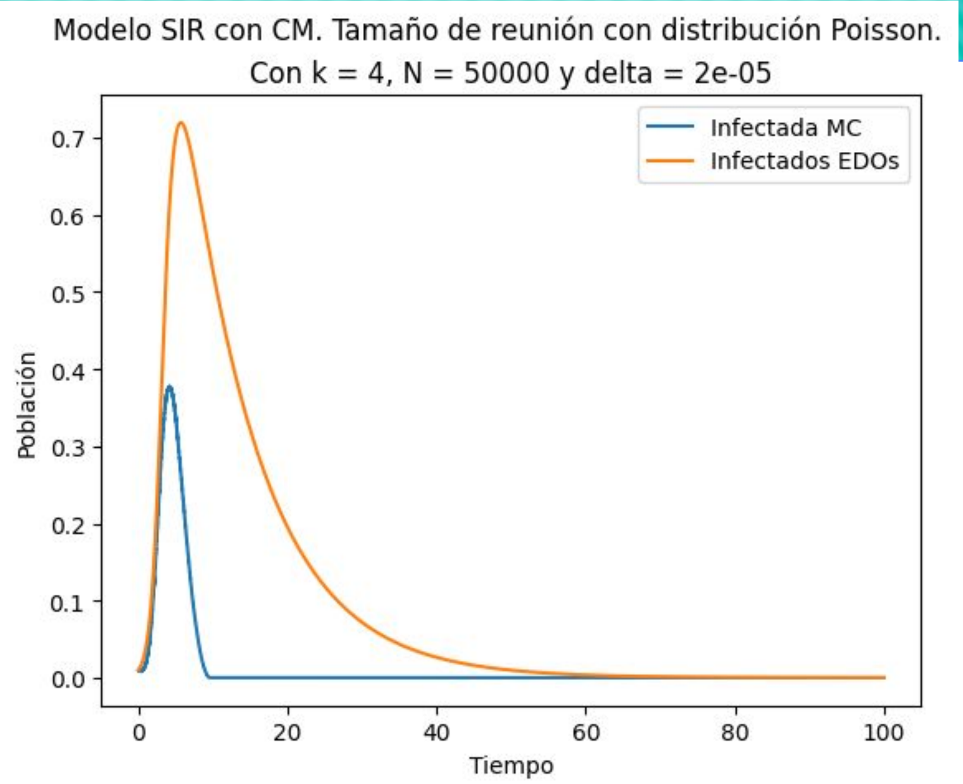
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Poiss(*4*)



# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Poiss(*4*)

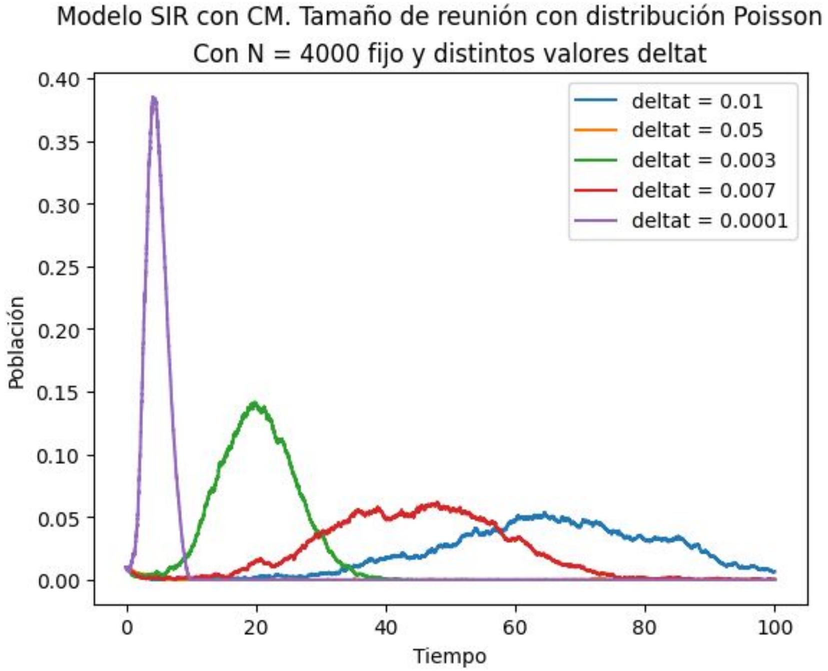


# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO's para Θ ~ Poiss(*4*)



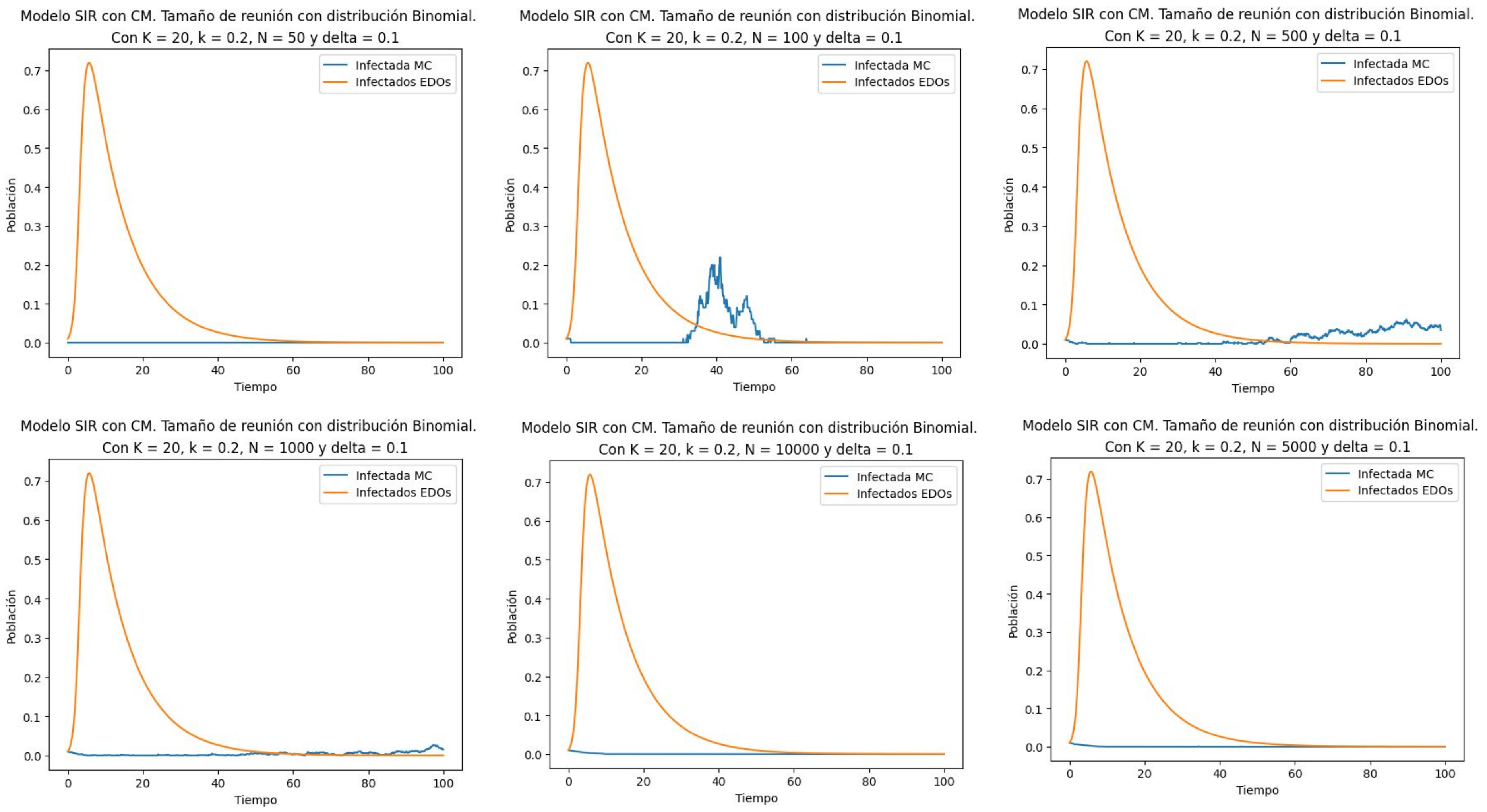
# N fijo y variación de delta_t

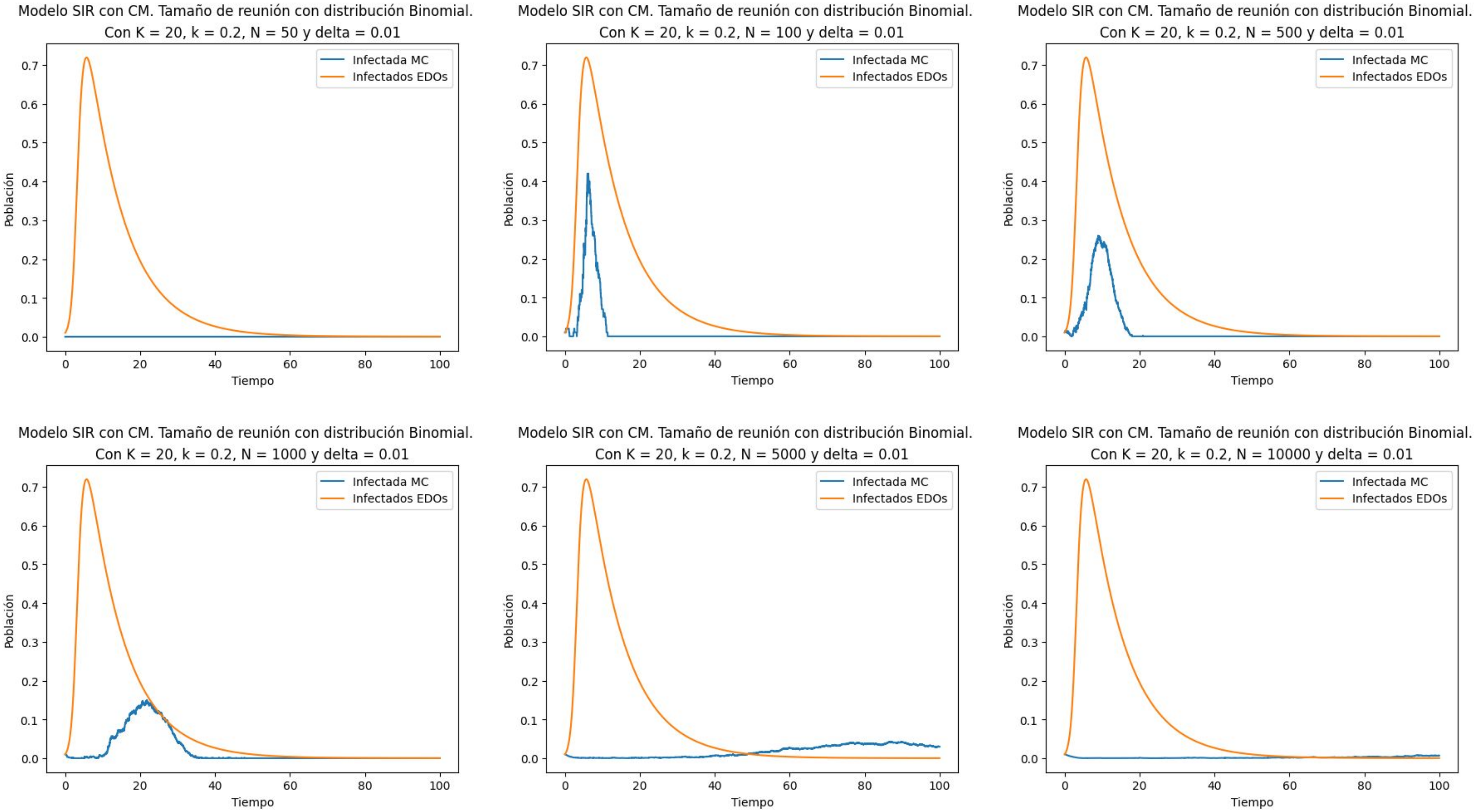
- Consideramos los siguiente parámetros:
  - N = 4000
  - delta_t = [0.01,0.05,0.003,0.007,0.0001]
  - λ = 4



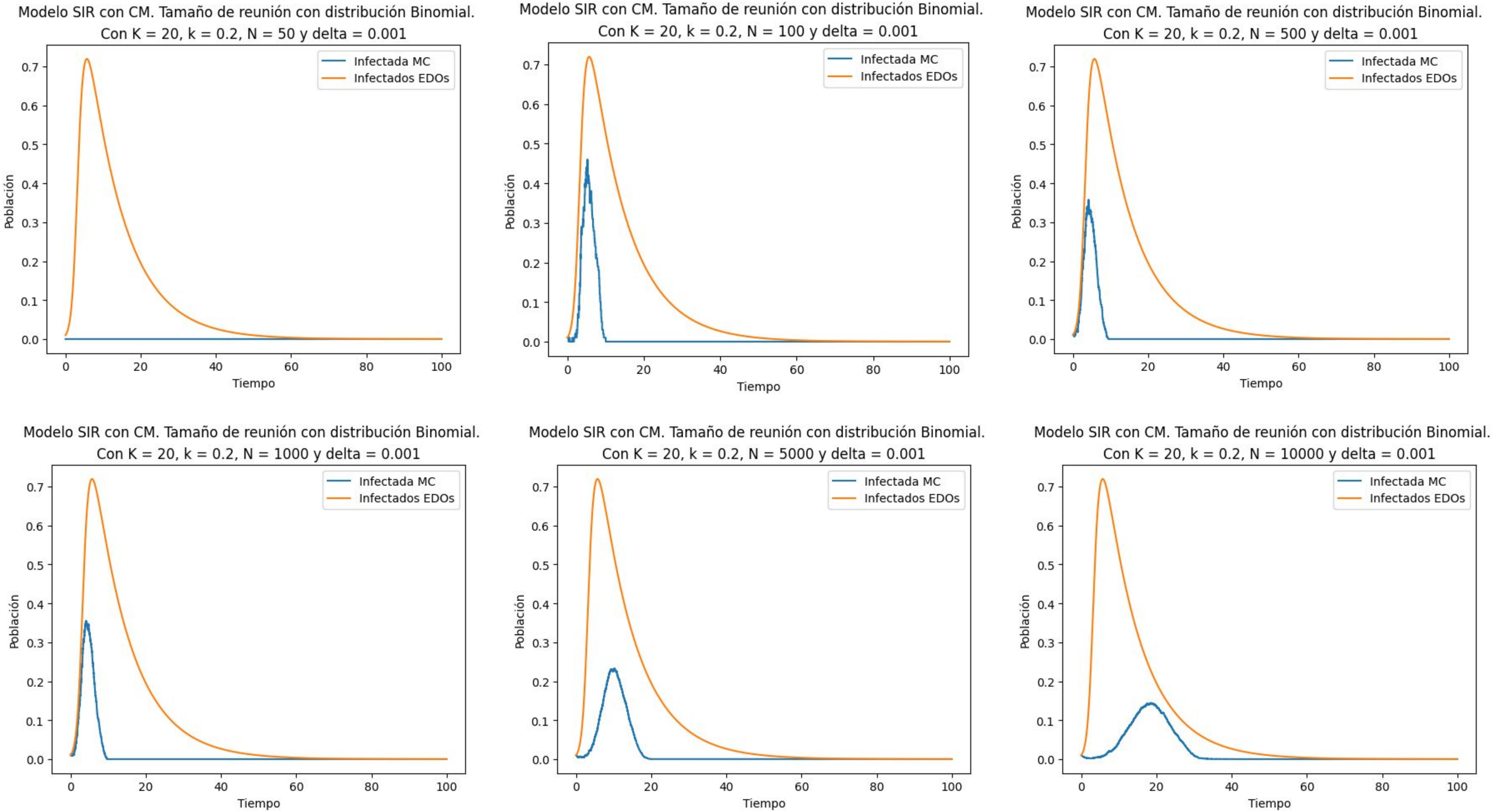
# Convergencia modelo CM en N y sol. sistema de EDO’s para $\Theta \sim \mathrm{Bin}(20, 0.2)$, con valores de delta_t constantes.

delta_t en {0.1, 0.01, 0.001}


Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 50 y delta = 0.1
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 100 y delta = 0.1
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 500 y delta = 0.1
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 1000 y delta = 0.1
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 10000 y delta = 0.1
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 5000 y delta = 0.1
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo

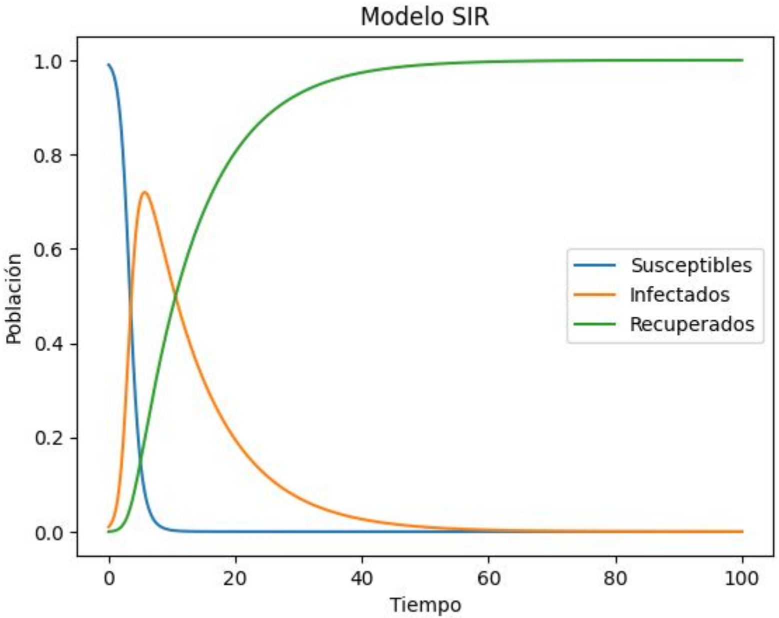


Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 50 y delta = 0.01
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 100 y delta = 0.01
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 500 y delta = 0.01
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 1000 y delta = 0.01
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 5000 y delta = 0.01
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 10000 y delta = 0.01
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo


Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 50 y delta = 0.001
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 100 y delta = 0.001
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 500 y delta = 0.001
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 1000 y delta = 0.001
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 5000 y delta = 0.001
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo
Modelo SIR con CM. Tamaño de reunión con distribución Binomial.
Con K = 20, k = 0.2, N = 10000 y delta = 0.001
Infectada MC
Infectados EDOs
Población
Tiempo

# Conclusiones

# Proyecto Final:
# SIR generalizado para modelo epidemiológico




**Leila Reyes G. - Cristóbal Ramos S.**

**MA4402 - Simulación Estocástica**

**Profesor: Joaquín Fontbona**

**Tutor: Pablo Zúñiga**