ANÁLISIS NUMÉRICO

RETO DEL PERRO

Autores

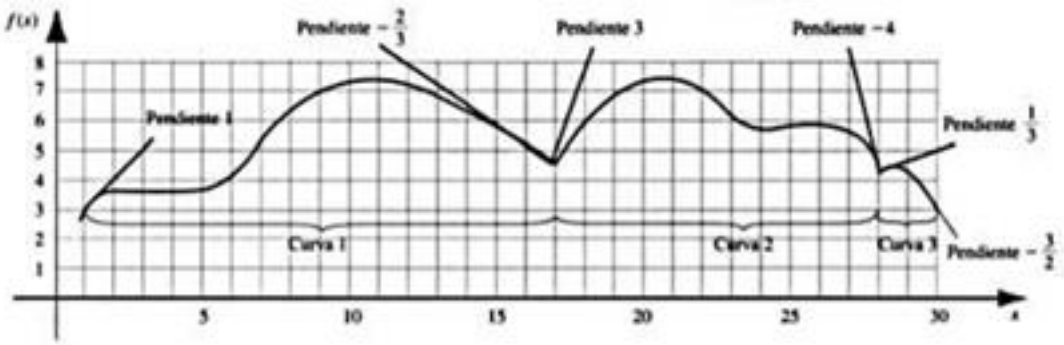
CAMILO EDUARDO CRUZ GUTIERREZ
ESTEBAN CASAS
JOHAN FERNEY GARCIA PACHON

Profesora
EDDY HERRERA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BOGOTA D.C.

Problema

Construir un Interpolador (no necesariamente en forma polinómica) utilizando la menor cantidad de puntos k (parte superior y/o inferior o en total) y reproducir el dibujo del contorno completo del perrito sin bigotes (mejor exactitud) con la información dada



coordenadas

y=c(3,3.7,3.9,4.5,5.7,6.69,7.12,6.7,4.45,7,6.1,5.6,5.87,5.15,4.1,4.3,4.1,3)

x=c(1,2,5,6,7.5,8.1,10,13,17.6,20,23.5,24.5,25,26.5,27.5,28,29,30)

length(x)

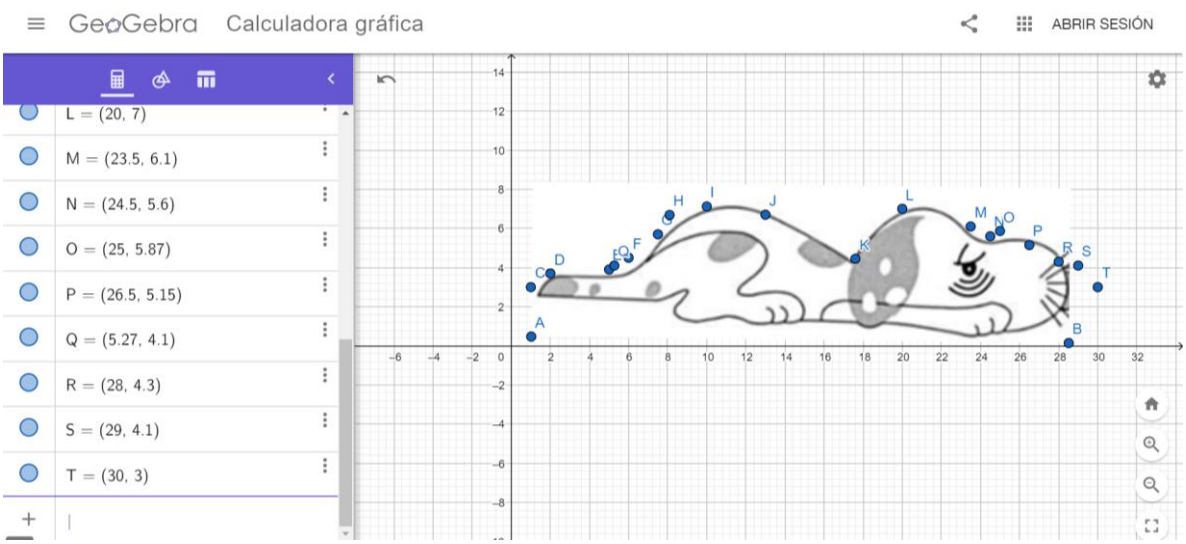
length(y)plot(x,y, pch=19, cex=0.5, col = "red", asp=1,xlab="X", ylab="Y",

main="Diagrama ")

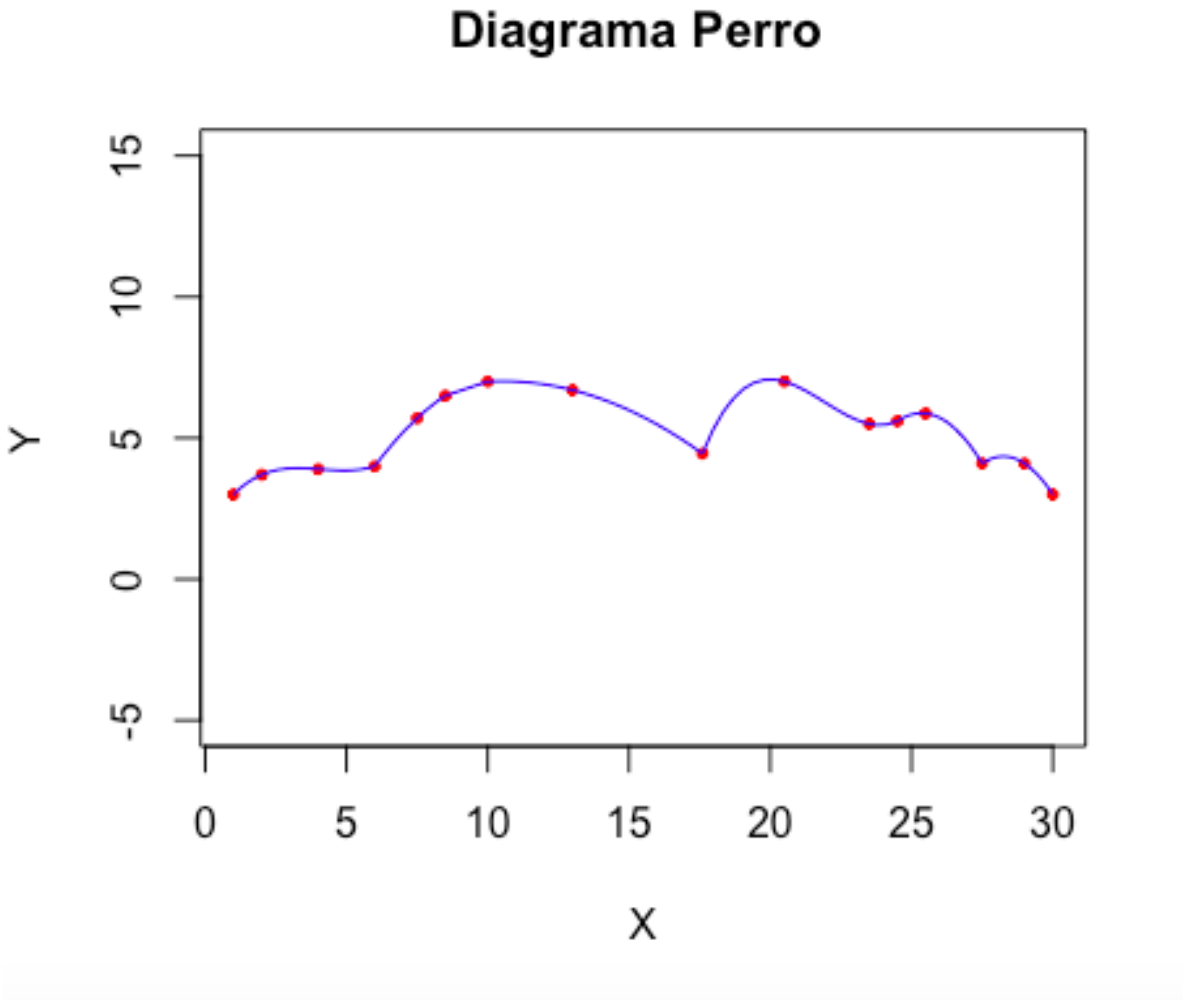
Metodología

Colocamos las coordenadas dadas por la profesora en Geogebra para luego hallar los puntos de abajo de la figura, y así el perro quedara lo más parecido posible a la imagen.

1. Generamos trayectorias suaves con funciones polinomicas a trozos(splines) a partir de las coordenadas de geogebra.
2. Determinamos un polinomio distinto entre cada par de puntos consecutivos del conjunto de datos iniciales (mediante el metodo de spline).
3. Verificamos la primera y segunda derivada (que surguen a medida que hallamos los coeficientes del polinomio interpolador en el metodo de spline, que sera explicado mas adelante) en busca de la concavidad y maximos y minimos en el intervalo, para hallar el punto mas adecuado para el contorno del perro.
4. Debido a que el polinomio es de grado 3 se imponen 4 condiciones.
   a. $qi(x_i) = y_i$
   b. $q_i(x_i + 1) = y_i + 1$
   c. $q_i'(x_i + 1) = q_{i+1}'(x_i + 1)$
   d. $q_i''(x + 1) = q_{i+1}''(x_i + 1)$ donde $i = 1,2, \dots, n$



Puntos sacados de geogebra



Parte superior de la figura

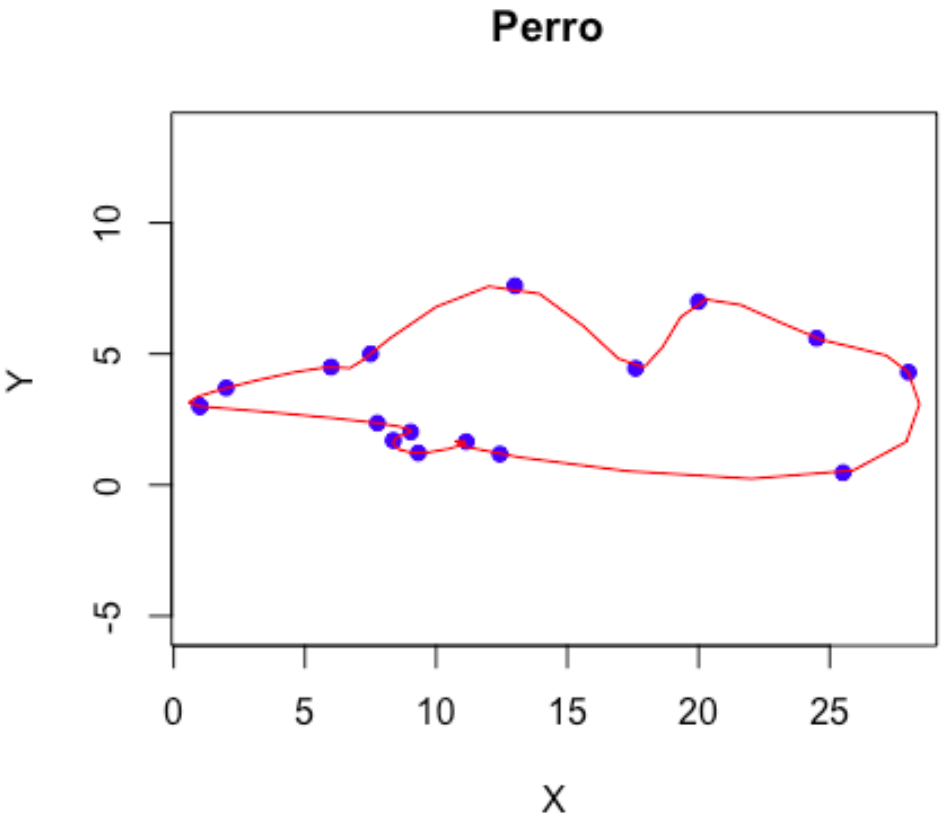


Imagen interpolada con 16 puntos

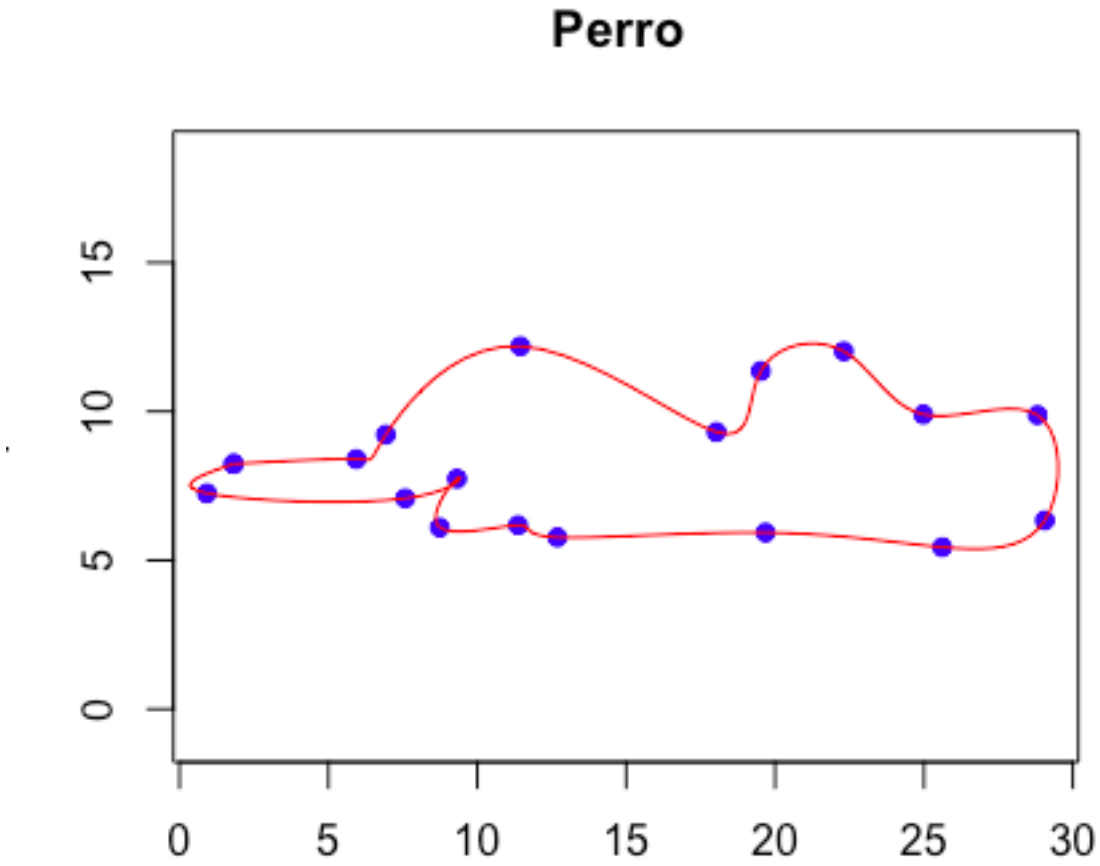


Diagrama final.

Algoritmo utilizado

Spline cubico:

Los trazadores cúbicos (cubic splines) son usados para generar una función que interpola un conjunto de puntos de datos. Esto por medio de la unión de polinomios cúbicos -uno por cada intervalo-. Que genera una función con primera y segunda derivada continua. Del mismo modo el spline cubico tiene segunda derivada igual a 0 en la coordenada x del primer punto y el último punto de la tabla de datos.

De este modo supongamos que tenemos $n+1$ puntos (x_0, y_0) ..., (x_n, y_n) con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, se realiza la interpolación de la función f en cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ con un polinomio cúbico (en realidad de grado ≤ 3) $s_k(x)$ de tal manera que el polinomio cúbico (o trazador cúbico) $s_i(x)$ en $[x_i, x_{i+1}]$ y el trazador cúbico $s_{i+1}(x)$ en $[x_{i+1}, x_{i+2}]$, coincidan en x_{i+1} y que también sus derivadas primera y segunda coincidan en este punto. Cada trazador cúbico coincide con f en los extremos de cada intervalo. [1]

Definición formal: Dado el conjunto de datos (t_0, y_0) , (t_1, y_1) , (t_n, y_n), se define función spline de grado k a la función s: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

i) S es un polinomio de grado menor o igual que k en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

ii) S tiene $k-1$ derivadas continuas en $[t_0, t_n]$.Esto es, sobre cada intervalo S que está definido por un polinomio diferente de grado k.

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Implementación

Con el fin de construir el spline cubico, se necesita encontrar cada $s_J(x)$, lo cual es en realidad encontrar los coeficientes a_J, b_J, c_J, d_J donde $0 \leq J \leq n-1$ y n es el total de datos. De este modo un spline definido en un intervalo que es dividido en n subintervalos, requiere encontrar $4n$ constantes.

De acuerdo a lo anteriormente expuesto se implementó un algoritmo que generaba estos coeficientes para cada x_i. (El algoritmo será agregado como un anexo al final del documento).

Coeficientes generadores del spline cubico:

j	x_J	a_j	b_J	c_J	d_J
0	1	3	0.784	0	-0.0839
1	2	3.7	0.532	-0.251	0.0421
2	6	4.5	0.542	0.254	-0.0479
3	9	7.12	0.774	-0.177	0.00109
4	14	6.7	-0.914	-0.161	0.0669
5	17.6	4.45	0.531	0.562	-0.142
6	20	7	0.775	-0.461	0.04895
7	23	6.5	-0.669	-0.0202	0.0436
8	24.5	5.6	-0.434	0.1760	0.0245
9	26.85	5.87	0.799	0.3487	-0.551
10	28.7	5.05	-3.57	-2.712	-0.887
11	29	3.71	-5.439	-3.510	-0.483
12	25.51	0.47	1.414	1.546	0.100
13	11.15	1.65	19.122	-2.779	-7.160
14	9.32	1.22	-42.63	36.532	85.142
15	8.37	1.7	118.463	-206.121	44.580
16	9.03	2.92	-95.353	-117.853	-33.405
17	7.76	2.36	42.357	9.419	0.464
18	1	3	0	0	0

Luego de esto ya con los coeficientes resueltos, se forma el polinomio interpolador que tiene la siguiente forma:

$s_J(x) = a_J + b_J(x - x_J) + c_J(x - x_J)^2 + d_J(x - x_J)^3$ Donde $0 \leq J \leq n - 1$

Finalmente, de acuerdo a cada polinomio interpolador se grafica el contorno del perro.

Validacion de resultado

Es posible verificar el resultado por medio de la grafica generada por el metodo utilizado, debido a que no existe ningun tipo de deformacion en cuanto a la imagen del perro original.

Lo cual permite verificar la forma del perro.

Algoritmo

```
library(polynom)
library(PolynomF)
x=c(1,2,6,9,14,17.6,20,23,24.5,26.85,28.7,29,25.51,11.15,9.32,8.37,9.03,7.76,1)
y=c(3,3.7,4.5,7.12,6.7,4.45,7,6.5,5.6,5.87,5.05,3.71,0.47,1.65,1.22,1.7,2.92,2.36,3)
plot(x,y, pch=19, cex=0.9, col = "blue", asp=1,xlab="X", ylab="Y", main="Perro ")
n=19
pint<-function(x,y){
  t = 1:length(x)
  sx = spline(t,x)
  sy = spline(t,y)
  lines(sx[[2]],sy[[2]],type='l', col="red")
}
pint(x,y)
```

Codificación

- tabla donde está la interpolación en los n-k puntos (no seleccionados):

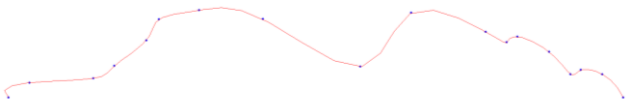
x	y	$f(x)$
5	3.9	1.335817
6	4.5	4.5
7.5	5.7	6.221004
8.1	6.69	-3.003772
10	7.12	17.13745
13	6.7	-0.429965
17.6	4.45	4.45
20	7	7
23.5	6.1	6.94484
24.5	5.6	5.6
25	5.87	2.654599
26.5	5.15	4.001707
27.5	4.1	7.49181
28	4.3	7.189713
29	4.1	3.71
30	3	-0.8941601

- el polinomio o la función interpolante:

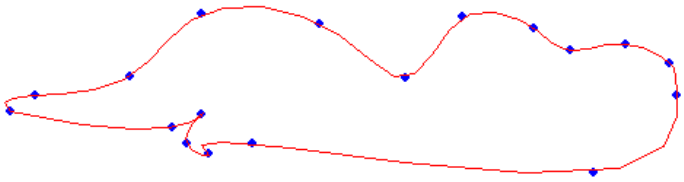
La funcion interpolante tiene la forma :

$s_J(x) = a_J + b_J(x - x_J) + c_J(x - x_J)^2 + d_J(x - x_J)^3$ Donde $0 \le J \le n - 1$

- Puntos y contorno original



- Puntos y contorno interpolado:



Cota de error

La fomula para calcular la cota de error del metodo spline cubico es la siguiente:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5M}{384} max\left(x_{J+1} - x_J\right)^4 \text{ Donde } 0 \leq J \leq n-1$$

Donde M es el valor relacionado a la cuarta derivada en el intervalo [j,j+1]. Para calcular la cota de error sumamos todos estos valores por cada par de puntos -intervalos- (tanto en los valores originales como los interpolados) para encontrar la cota de error total. Luego reemplazamos en la ecuacion y obtuvimos los valores buscados.

- Valores interpolados:

x	y	f^4
1	3	1
2	3.7	256
6	4.5	81
9	7.12	625
14	6.7	167.961
17.6	4.45	33.178
20	7	81
23	6.5	5.063
24.5	5.6	30.498
26.85	5.87	11.714
28.7	5.05	0.0081
29	3.71	148.354
25.51	0.47	42522.4
11.15	1.65	11.215
9.32	1.22	0.815
8.37	1.7	0.189
9.03	2.92	2.601
7.76	2.36	2088.271

Total		46066.27

- Valores originales:

x	y	f^4
1	3	1
2	3.7	81
5	3.9	1
6	4.5	5.0625
7.5	5.7	0.1296
8.1	6.69	13.0321
10	7.12	81
13	6.7	447.7456
17.6	4.45	33.1776
20	7	150.0625
23.5	6.1	1
24.5	5.6	0.0625
25	5.87	5.0625
26.5	5.15	1
27.5	4.1	0.0625
28	4.3	1
29	4.1	1
total		822.3974

$$822.3974 - 46066.27 \leq \frac{5*822.3974}{384}$$

$$-45243.87 \leq 10.71$$

Tabla valores interpolados

- Los valores interpolados (tenga en cuenta los que no utilizo), los originales y el error relativo, calcule un error relativo total como la suma de los errores relativos .

Debido a que usamos la función spline en R esta solo nos da los puntos x,y que necesitamos, mas no los valores interpolados como tal. Debido a esto usamos la función splinefun, la cual nos retorna una función en la cual podemos evaluar el interpolador cubico de spline para hallar el valor interpolado. Esta implementación será hallada en el apartado de anexos en la parte final del documento.

- Valores interpolados:

x	y	$f(x)$	Error
1	3	3	0
2	3.7	3.7	0
5	3.9	1.335817	65.74828
6	4.5	4.5	0
7.5	5.7	6.221004	9.140428
8.1	6.69	-3.003772	144.8994
10	7.12	17.13745	140.6946
13	6.7	-0.429965	106.4174
17.6	4.45	4.45	0
20	7	7	0
23.5	6.1	6.94484	13.84983
24.5	5.6	5.6	0
25	5.87	2.654599	54.77684
26.5	5.15	4.001707	22.29695
27.5	4.1	7.49181	82.72707
28	4.3	7.189713	67.20263
29	4.1	3.71	9.512195
30	3	-0.8941601	129.8053
Error Relativo total			847.071

- Valores originales :

x	y	$f(x)$	Error
1	3	3	0
2	3.7	3.7	0
6	4.5	4.5	0
9	7.12	7.287	2.347
14	6.7	6.0307	9.989
17.6	4.45	4.45	0
20	7	7	0
23	6.5	6.514	0.211
24.5	5.6	5.6	0
26.85	5.87	4.664	20.543
28.7	5.05	4.285	15.156
29	3.71	4.1	10.512
25.51	0.47	5.936	1163.055
11.15	1.65	7.018	325.343
9.32	1.22	7.274	496.236
8.37	1.7	7.00	311.801
9.03	2.92	7.289	149.631
7.76	2.36	6.134	159.907
Error Relativo			3511.803

total			

$$\varepsilon = \frac{f(x)}{s(x)}$$

$$\varepsilon = \frac{3511.803}{847.07}$$

$$\varepsilon = 4.14$$

De acuerdo a esto el valor del error relativo total fue menor al de la cota de error.

Eficiencia de su método

Para el análisis de la eficiencia del método implementado se realizó una comparación entre el número de operaciones que realiza nuestro método (Splines cúbicos) respecto al número de puntos con los que se quería interpolar

NUMERO DE PUNTOS	NUMERO DE OPERACIONES
18	126
17	116
16	113
15	105
14	98
13	91

Como Podemos ver la disminución de operaciones dado el número de puntos se puede expresar de la forma ($\frac{1}{3}$On)

Índice Jaccard

El método elaborado consiste en recibir todos los puntos, tanto los originales, como los modificados para contar el número de puntos que se mantuvieron, es decir, los puntos que están presentes tantos en los puntos originales como en los modificados, este método calcula el número de aciertos tanto para los puntos del eje x como para los puntos de eje y

```
Jaccard<-function(x,y,x1,y2){
  buenosx=0
  malosx=0
  buenosy=0
  malosy=0
  for (i in x)
    for(j in x1)
      if(i==j)
        buenosx++
    malosx=length(x)-buenosx
  for (i in y)
    for(j in y1)
      if(i==j)
        buenosy++
    malosy=length(y)-buenosy
}
```

La forma en la que estamos calculando el índice de jaccard es obteniendo el número de aciertos “Puntos que se mantuvieron”, sobre puntos totales.

Obtenemos que:

Puntos Totales: 18

Numero de Aciertos: 7

Incide = 7/18 =38.89%

Como podemos ver el índice nos dio relativamente bajo, pero esto no indica la confiabilidad de los puntos, debido a que, para la elaboración de este proyecto, se agregaron un mayor número de puntos que los que había inicialmente además de cambiar o

descartar algunos puntos originales. Este índice encontrado nos expresa el grado de similitud entre los dos conjuntos de puntos.

Preguntas

1. ¿El origen se puede modificar?

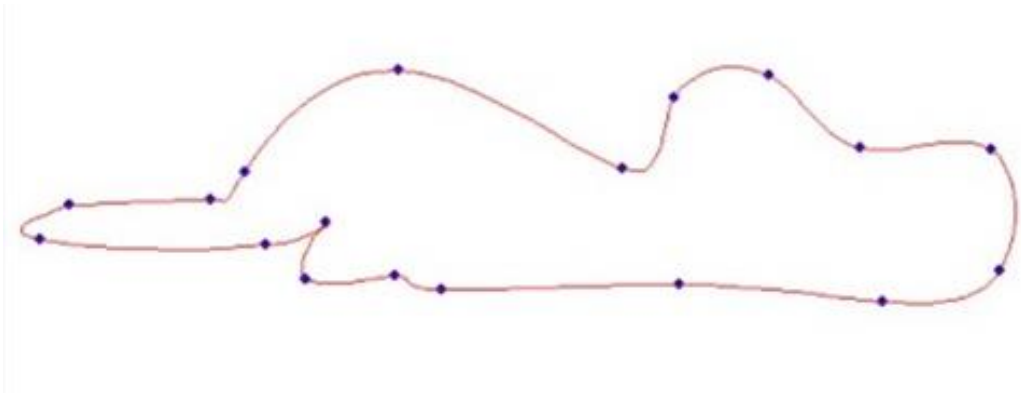
Para la realización de nuestra gráfica, tomamos como punto de inicio, el punto más extremo de la cola del perro, la figura obtenida fue a nuestro parecer muy aproximada a la buscada, a excepción de algunos puntos donde la figura original presentaba uno picos muy pronunciados muy difícil de reproducir por el método que estábamos usando:

Los puntos tomados inicialmente fueron:

x=c(1.,2,6,7.5,13,17.6,20,24.5,28,25.51,4.88,12.43,11.15,9.32,8.37,9.03,7.76)

y=c(3,3.7,4.5,5,7.6.7,4.45,7,5.6,4.3,0.47,1.37,1.18,1.65,1.22,1.7,2.02,2.36)

Y la figura obtenida fue:

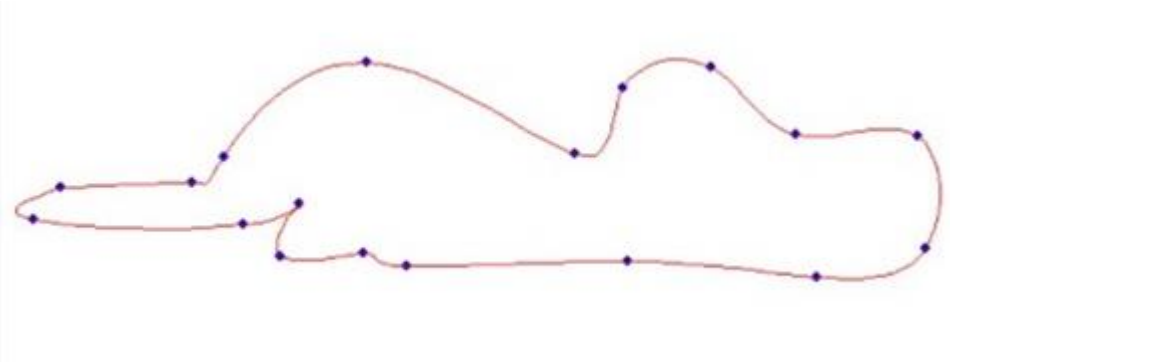


Ahora bien, cambiamos el origen de los puntos, pero manteniendo un orden lógico

x=c(13,17.6,20,24.5,28,25.51,4.88,12.43,11.15,9.32,8.37,9.03,7.76,1.,2,6,7.5)

y=c(5,7.6.7,4.45,7,5.6,4.3,0.47,1.37,1.18,1.65,1.22,1.7,2.02,2.36, 3,3.7,4.5)

Y la figura obtenida fue:



Como podemos ver, no afecta desde que punto iniciemos, siempre y cuando mantengamos un orden lógico entre los puntos.

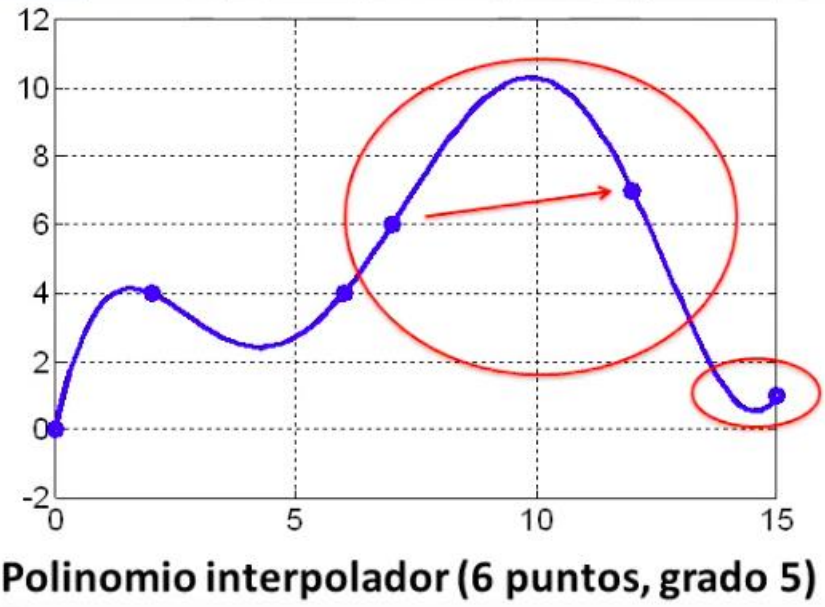
2. ¿Si tenemos nueva información ósea nodos como podemos implementar esa información en el algoritmo de interpolación?

A Partir de realizar cierto número de pruebas, encontramos que nuestra imagen original no sufre cambios al ingresar los nuevos puntos si estos están sobre la curva generada por el método de spline cúbico en la imagen original, cabe aclarar que se debe tener muy en cuenta el orden de inserción de estos puntos ya que si se pasa esto por alto, la imagen puede quedar muy distinta a la deseada, además de que los puntos que se desea ingresar deben pertenecer al conjunto de puntos por los cuales la línea pasa, de lo contrario obtendremos una imagen errónea.

3. ¿Su método es robusto, en el sentido que si se tienen más puntos la exactitud no disminuye?

La exactitud no disminuiría si se tienen más puntos que antes, solo decaería la exactitud si los puntos no estuvieran en orden, las abscisas no estuvieran de menor a mayor por ejemplo, otra forma la cual decaería la exactitud seria si utilizamos un único polinomio que pase exactamente por dichos puntos, lo que puede ocurrir es que al representar dicha trayectoria se observen oscilaciones indeseadas.

x	0	2	6	7	12	15
y	0	4	4	6	7	1



Ejemplo de oscilaciones no deseadas por interpolar dichos puntos.

4. ¿Suponga que tiene más puntos con más cifras significativas como se comporta su algoritmo? la exactitud decae?

La exactitud no decaería, al contrario, la exactitud aumentaría debido a que la ubicación de los puntos en el grafica fueran más precisas por lo que la imagen del perro podría ser aún más parecida. Si se tienen aún más puntos puede mejorar la exactitud de la interpolación si se sabe bien dónde ubicar los puntos de forma estratégica en el Spline que le corresponde, y si además los puntos tienen más cifras significativas podría mejorarse un poco más la exactitud.

Anexo

- Pruebas realizadas antes de escoger el metodo de spline cubico :

Para la solución del problema del perro, nuestro grupo encontró conveniente usar una interpolación por el método de spline cúbico, esto debido a que se realizaron varias pruebas con el fin de reducir el número de puntos originalmente dados a través de tres métodos distintos, el primero que se usó fue el método de Lagrange baricéntrico, este método no nos daba una aproximación muy exacta a la figura real, con el mismo número de puntos generaba una versión muy modificada del perro (véase al final del párrafo). Por lo tanto, no optamos por este método ya que, además, uno de los criterios para la realización de este taller, era trabajar con el polinomio de menor grado posible, y encontramos que el método de la Lagrange baricéntrico maneja un polinomio muy alto igual al número de datos manejados menos uno (al final en el apartado de anexos se encontrará el resultado generado con este método), otro método utilizado fue el de newton, pero a este no le hicimos muchas pruebas y no logramos avanzar mucho.

```
x=c(1,2,6,9,14,17.6,20,23,24.5,26.85,28.7,29,25.51,11.15,9.32,8.37,9.03,7.76,1)
y=c(3,3.7,4.5,7.12,6.7,4.45,7,6.5,5.6,5.87,5.05,3.71,0.47,1.65,1.22,1.7,2.92,2.36,3)
require(pracma)
plot(x,y, pch=19, cex=0.5, col = "red", asp=1,xlab="X", ylab="Y", main="Diagrama Perro ")
Graficar<-function(x0, xn){
  xi = x[x0:xn]
  yi = y[x0:xn]
  x <- seq(x[x0], x[xn], len=20)
  y <- barylag(xi, yi, x)
  lines(x, y, col="blue")
}
Graficar (1,4)
Graficar (4,6)
Graficar (6,7)
Graficar (7,9)
Graficar (9,12)
Graficar (12, 14)
Graficar (14, 16)
```

Código de la implementación con Lagrange baricentrico

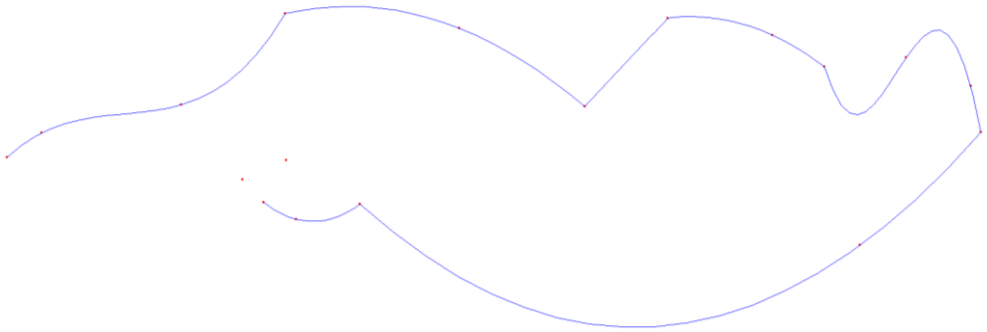


Imagen generada del perro por el método de Lagrange baricentrico

- Codigo de como se generaron los coeficientes del polinomio $s_J(x)$:

```
n=19
x=c(1,2,6,9,14,17.6,20,23,24.5,26.85,28.7,29,25.51,11.15,9.32,8.37,9.03,7.76,1)
a=c(3,3.7,4.5,7.12,6.7,4.45,7,6.5,5.6,5.87,5.05,3.71,0.47,1.65,1.22,1.7,2.92,2.36,3)
h=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
l=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
alpha=c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19)
z=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
b=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
c =c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
d=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
mu=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)

for(i in 1:n){
  h[c(i)]=x[c(i+1)]-x[c(i)]
}
aux1=((3/h[c(2)])*(a[c(2+1)]-a[c(2)]))- ((3/h[c(2-1)])*(a[c(2)]-a[c(2-1)]))
for(i in 2:n){
  aux1=((3/h[c(i)])*(a[c(i+1)]-a[c(i)]))- ((3/h[c(i-1)])*(a[c(i)]-a[c(i-1)]))
  alpha[c(i)]=aux1
}
l[c(1)]=1
mu[c(1)]=0
z[c(1)]=0
for(i in 2:n){
  l[c(i)]=  (2*(x[c(i+1)] - x[c(i-1)]))-(h[c(i-1)]*mu[c(i-1)])
  mu[c(i)]=h[c(i)]/l[c(i)]
  z[c(i)]=(alpha[c(i)]-(h[c(i-1)]*z[c(i-1)]))/l[c(i)]
}

l[c(n)]=1
z[(n)]=0
c[(n)]=0
j=n-1
while(j>0){
  c[c(j)]=z[c(j)]- (mu[c(j)]*c[c(j+1)])
  b[c(j)]=((a[c(j+1)]-a[c(j)]))/h[c(j)])- (h[c(j)]*(c[c(j+1)]+2*c[c(j)]))/3
  d[c(j)]=(c[c(j+1)]-c[c(j)]))/(3*h[c(j)])
  j=j-1;
  }
cat("x[]", "    " , "a[]" , "    " , "b[]" , "    ", "c[]" , "    ", "d[]", "\n")
val=0
for (i in 1:n){
  cat(i-1,",",x[c(i)], "," , a[c(i)] , "," , b[c(i)] , ",", c[c(i)] , ",", d[c(i)],"\n")
}
```

- Codigo de como se generaron los errores relativos con los valores originales e interpolados :

```
yx=c(3,3.7,3.9,4.5,5.7,6.69,7.12,6.7,4.45,7,6.1,5.6,5.87,5.15,4.1,4.3,4.1,3)
xx=c(1,2,5,6,7.5,8.1,10,13,17.6,20,23.5,24.5,25,26.5,27.5,28,29,30)
#error relativo valores interpolados
cat("x    ","y    ","s(x)    ","   error relativo")
inter = splinefun(x,y,method = "natural")
acumerrorrela=0
for(i in 2:n-1){
  valorinter = inter(xx[i])
  errabs=abs(yx[i]-valorinter)
  error = errabs/yx[i] * 100
  acumerrorrela=acumerrorrela+error
  cat(xx[i],",",yx[i],",",valorinter,",",error,"\n")
}
cat("error total:   ", acumerrorrela)
#error relativo valores originales
inter = splinefun(xx,yx,method = "natural")
for(i in 2:n-1){
  valorinter = inter(x[i])
  errabs=abs(y[i]-valorinter)
  error = errabs/y[i] * 100
  acumerrorrela=acumerrorrela+error
  cat(x[i],",",y[i],",",valorinter,",",error,"\n")
}
cat("error total:   ", acumerrorrela)
```

- Codigo de como se sacaron los valores no utilizados :

```
#valores no seleccionados
inter = splinefun(x,y,method = "natural")
i=0
cat(x[c(i)],"       ",xx[c(i)])
for(i in 2:n-1){
if(x[c(i)]!=xx[c(i)]){
  valorinter = inter(xx[i])
  cat(xx[i],",",yx[i],",",valorinter,"\n")
}
```

Bibliografía

[1] (Mora,Walter).2017. Introducción a los Métodos Numéricos. pg 203.