5. De acuerdo a la función dada consideramos a $f(x)$ como la función a interpolar, donde además se conocen todas sus derivadas, adicionalmente se considera $p(x)$ como el polinomio interpolante de $f(x)$. Además se tiene que el error absoluto del polinomio interpolante es: $\varepsilon = f(x) - p_n(x)$ donde $a \leq n \leq b$.

Según la definición de error para la interpolación de Lagrange tenemos que:

$$\varepsilon = \frac{f^{n+1}\big(\xi(x)\big)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

De acuerdo a esto podemos decir que:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}\big(\xi(x)\big)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

Además consideramos que $f^{n+1}\xi(x)$ tiene una cota máxima que se denominara $M$:

$$max_{a\leq x\leq b}|f^{n+1}\xi(x)| = M$$

Teniendo en cuenta lo anterior podemos concluir que:

$$f(x) - p_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad \text{donde } a \leq x \leq b$$

Ahora teniendo en cuenta que $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ es un polinomio Mónico (el mayor de sus coeficientes es acompañado por un 1) de grado $(n+1)$. Se tiene que:

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = \overline{T}_{n+1}(x) \quad \text{donde } a \leq x \leq b$$

Donde $\overline{T}_{n+1}(x)$ es un polinomio de Chebyshev que es derivado de los polinomios de Chebyshev $T_{n+1}(x)$por medio de la división del coeficiente $2^{n-1}$, donde además este es el valor mínimo. Lo que nos genera:

$$f(x) - p_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!}\overline{T}_{n+1}(x) \quad \text{donde } a \leq x \leq b$$

Ahora, debido a que $max_{a\leq x\leq b}|\overline{T}_{n+1}(x)| = 2^{-n}$ . esto también implica que:

$$f(x) - p_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}$$

Del mismo modo consideramos un $\bar{x}_{k+1}$ que nos ayudara a encontrar el máximo valor de $|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$.

$$\bar{x}_{k+1} = cos\left(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi\right) donde\ i = 1, 2, \dots, n$$

Por lo que se puede concluir que:

$$f(x^*) - p_n(x^*) \leq \frac{M}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}\ si\ \left|f^{n+1}(x)\right| \leq M\ \ para\ a \leq x \leq b$$