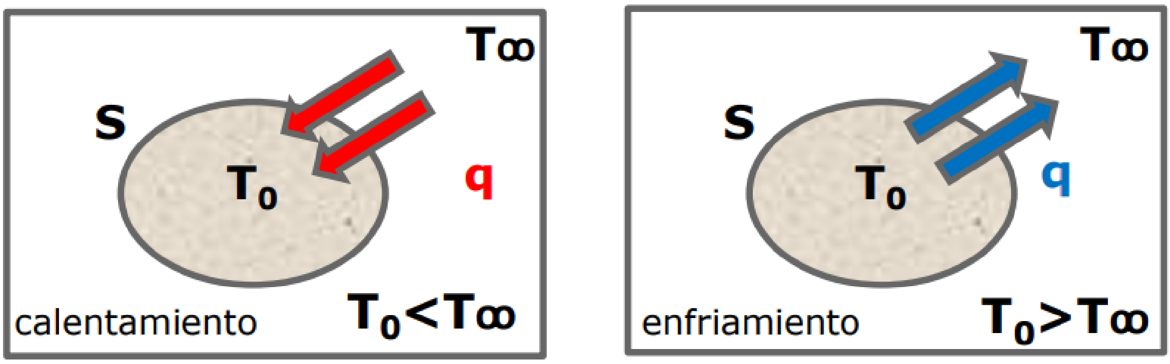
Facultad de Ingeniería | Universidad de Buenos Aires

1er. Cuatrimestre | 2022

95.10 | Modelación numérica
75.12 | Análisis numérico I A
95.13 | Métodos matemáticos y numéricos

Trabajo Práctico #3

Modelación térmica: transferencia de calor entre un fluido y un cuerpo



Problema

Un cuerpo de masa *m*, con calor especifico *C* y superficie *S* está sumergido en un fluido a temperatura T_∞. La transferencia de calor por convección entre el fluido y el cuerpo viene dada por el coeficiente h_c. Si inicialmente la temperatura del cuerpo es T_0 se puede calcular la temperatura del cuerpo en función del tiempo *T(t)*.

Modelo matemático

La ley que determina la temperatura de un cuerpo en función del tiempo (*T*) es la conservación de energía. La tasa de energía interna que absorbe o cede un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas en cada instante.

$$\frac{dE_{int}}{dt} \sim (T - T_\infty)$$

La energía interna es proporcional a la masa del cuerpo *m*, a su calor especifico *C* y a su temperatura *T* en cada instante.

$$E_{int} = m \cdot C \cdot T$$

Cuanta mayor superficie *S* del cuerpo, mayor flujo de calor *q* a transferir. Se propone entonces una constante de proporcionalidad h_c según las condiciones particulares del ambiente fluido.

$$m \cdot C \cdot \frac{dT}{dt} = -h_c \cdot S \cdot \ (T - T_\infty)$$

Si se considera la contante $\tau = (m\ C\ /\ h_c\ S)$, la ecuación diferencial resultante es la siguiente:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}T = \frac{T_\infty}{\tau}$$

La solución exacta de esta ecuación se presenta a continuación:

$$T(t) = T_\infty + (T - T_\infty) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Resolver

Desde la modelación numérica se puede resolver este problema particular como un *Problema de Valor Inicial (PVI)*, asignando un valor al coeficiente τ y ofreciendo una solución inicial. Considerar para el problema base que T_0 = 40°C, T_∞=20°C y τ=1. En este trabajo práctico se resolverán los siguientes problemas:

a) Discretizar el PVI con tres esquemas numéricos diferentes: uno de orden 1 (Euler), otro de orden 2 (Crank-Nicholson) y otro de orden 4 (Runge-Kutta 4). Plantear las ecuaciones en diferencias de cada caso. Resolver con un paso temporal de 0.1 segundos. Determinar, en cada caso, en qué momento la diferencia de temperaturas es menor a 0.1 °C. Graficar.

b) Repetir la resolución del item a), pero con una condición de temperatura en el fluído variable en el tiempo: T_∞ (t) = 10 + sen (10 * t). Determinar criteriosamente hasta qué momento resolver el PVI. Graficar.

c) Repetir la resolución del ítem a) pero con los siguientes pasos temporales: 0.05 seg, 0.01 seg, 0.005 seg y 0.001 seg. Estimar, para estos pasos temporales y los tres métodos numéricos utilizados, el error de truncamiento de forma experimental. Graficar.

d) Analizar la estabilidad numérica del modelo. Repetir la resolución del ítem a) con al menos tres pasos temporales mayores a 0.1 seg forzando la inestabilidad del modelo. Realizar este análisis para cada uno de los tres métodos utilizados. Graficar.

e) Realizar un análisis de sensibilidad respecto de las condiciones del ítem a) sobre tres variables diferentes: coeficiente t, temperatura del cuerpo y temperatura del fluido.

Proponer tres variantes por cada variable. Analizar con sentido físico los resultados. Graficar.

f) Utilizando la solución exacta de la ecuación diferencial obtenida cada 0.1 seg, calcular la derivada de T(t) en t=1, t=2 y t=3 con tres esquemas en diferencias distintos: i) dos nodos – centrada, ii) tres nodos – centrada, y iii) cuatro nodos - centrada. Evaluar precisión y justificar experimentalmente. Repetir los mismos cálculos proponiendo un esquema en adelanto y uno en atraso, ambos de alta precisión. Resumir resultados y establecer comparaciones y conclusiones.