Bitacoras del Seminario de Física Teórica

2025

Programa Académico de Física
Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

CONTENTS

1 PARTICIPANTES DEL SEMINARIO

En este seminario participaron:

- Profesor Alfonso Leyva
- Yerly Zaudi Gomez Contreras
- Camilo Andres Huertas Archila
- Julian Leonardo Avila Martinez
- Manuel Adriano Parada Ospina
- David Santiago Rodriguez Ortiz
- Eric Arciniegas Barreto
- Jose Luis Zamora Alvarado
- Laura Yeraldin Herrera Martinez
- Sebastian Rodriguez
- Juan Sebastian Acuña Tellez

2 PROBLEMA DE 2 CUERPOS:

2.1 GOLDSTEIN, CAPITULO 3:

Considere un sistema de dos partículas m_1 y m_2 de la misma clase, con fuerzas centrales mutuas, cuyas posiciones están dadas en términos de los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. En primera, las fuerzas que actúan sobre cada partícula será función del vector distancia entre ellas definido por $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, por ende asociamos un potencial en función de la magnitud r de forma $U(r, \dot{r}, ...)$, así nuestro sistema de 6 grados de libertad estará dado por el lagrangiano:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - U(r, \dot{r}, ...)$$

Ahora conviene escribir $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en términos del centro de masa $\vec{R}$ y el vector $\vec{r}$, efectuando una transformación en las ecuaciones de Lagrange que preserva su forma, reescribimos entonces los vectores de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \vec{r'}_1 \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \vec{r'}_2 \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{r'}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \vec{r'}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Es necesario transformar el lagrangiano en función de $\vec{R}$ y $\vec{r}$ usando las ecuaciones de transformación previamente escritas. Notemos que, en el sistema primado donde se definen $\vec{r'}_1$ y $\vec{r'}_2$ (vectores que van del centro de masas hasta la partícula), el centro de masas coincide con el vector nulo:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{R}^2 + \dot{r'}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{R}^2 + \dot{r'}_2^2) + \dot{\vec{R}} \cdot \frac{d}{dt}(m_1\vec{r'}_1 + m_2\vec{r'}_2) - U(r, \dot{r}, ...)$$

Así el tercer termino es nulo y el lagrangiano toma la forma, en la que es necesario aplicar álgebra para dejarlo totalmente en función de $\vec{r}$:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}(m_1\dot{r'}_1^2 + m_2\dot{r'}_2^2) - U(r, \dot{r}, ...)$$

$$\dot{r'}_1^2 = \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}\dot{r}^2 \quad \dot{r'}_2^2 = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\dot{r}^2 \qquad m_1\dot{r'}_1^2 + m_2\dot{r'}_2^2 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left[\frac{m_2\dot{r}^2 + m_1\dot{r}^2}{m_1 + m_2}\right]$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{r}^2 - U(r, \dot{r}, ...)$$

Podemos notar que R es cíclica, es decir, la lagrangiana no contiene R (no tomar como definición) y por ende tendrá una cantidad de movimiento que se conserva, lo restante define un sistema de una sola partícula (con 3 grados de libertad) de masa reducida μ cuya posición esta definida por $\vec{r}$:

$$L = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{r}^2 - U(r, \dot{r}, ...) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r, \dot{r}, ...)$$

Consideraremos ahora fuerzas conservativas, es decir $U = U(r)$, y la simetría esférica del sistema, note que se pueden hacer rotaciones alrededor de la esfera que define el vector r sin alterar el lagrangiano del sistema, es decir, se conserva el momentum angular total:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \vec{L}(l, \theta, \phi)$$

De aquí se sigue que $\vec{r}$ esta dado sobre el plano que define $\vec{L}$, si se fija θ y ϕ de $\vec{L}$ el numero de grados de libertad disminuye a 2 y contamos así con dos cantidades conservadas para solucionar el problema, E y l. Ahora escribimos el lagrangiano en coordenadas polares y junto a las dos ecuaciones de movimiento:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

Notamos que θ es cíclica pero no se puede ignorar, aunque igual tiene una cantidad conservada asociada $p_\theta \equiv l$, esta primera ecuación de movimiento se puede escribir de manera tal que se llegue a una de las leyes de Kepler, áreas iguales en tiempos iguales:

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\theta}\right) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}rr\dot{\theta}\right) = 0 \qquad dA = \frac{1}{2}rrd\theta \quad \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dt}\right) = 0$$

En cuanto a la segunda ecuación de movimiento, es posible reescribirla usando el momentum angular $l = mr^2\dot{\theta}$, donde $f(r)$ es la fuerza efectuada sobre la partícula que no esta en el centro de coordenadas:

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} = f(r) \qquad \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = f(r) \quad \Longrightarrow \quad \mu\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3}$$

El segundo termino lo podemos reescribir como la derivada respecto a r de cierta cantidad, en cuanto al primer termino, si multiplicamos la ecuación por $\dot{r}$, es posible escribirlo como una derivada respecto al tiempo:

$$f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{d}{dr}\left(U + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}\right) \qquad \mu\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right)$$

$$\mu\ddot{r}\dot{r} = \left(f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3}\right)\dot{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dr}\left(U + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}\right)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}\right) = 0$$

Es así como llegamos a otra cantidad conservada que ya mencionamos en algún momento, la energía E. Es importante notar que ya hicimos la primera integral de cada una de las ecuaciones de movimiento, y no fue necesario acudir a los valore iniciales $\dot{r}_0$ y $\dot{\theta}_0$, es posible efectuar la segunda integral para las dos ecuaciones y determinar el estado del sistema con las cantidades (E, l, r_0, θ_0).

2.2 SIMMONS, SECCION 21:

2.2.1 La ley de la gravitación de Newton y el movimiento de los planetas

Propósito: Deducir las leyes de Kepler a partir de la ley de la gravitación universal de Newton. Para ello, se analiza el movimiento de una partícula de masa m (un planeta) bajo la atracción de una partícula fija de masa M mucho mayor (el sol).

En problemas de movimiento bajo una fuerza dirigida a un punto fijo, conviene descomponer los vectores en componentes radiales y perpendiculares a esta. El vector posición es:

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

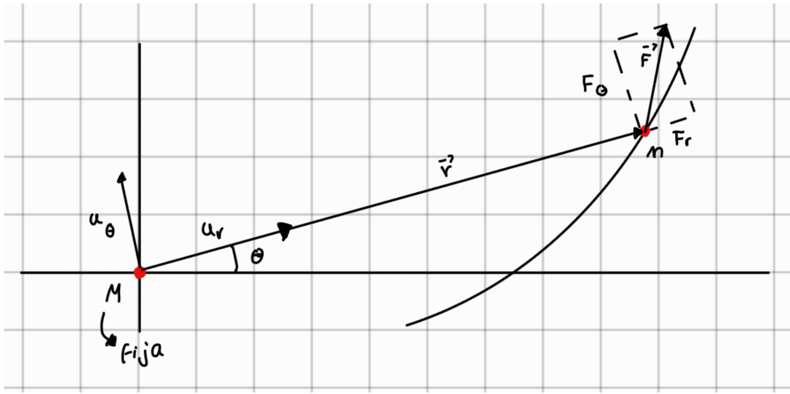

Figure 1: Diagrama de cuerpo libre para el problema de dos cuerpos.

cuyo vector unitario es:

$$\vec{u}_r = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$$

y su vector perpendicular, en la dirección de θ creciente, es:

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath} = \vec{u}_\theta$$

De la derivación se obtienen las relaciones esenciales:

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$$

Estas relaciones nos permiten obtener los vectores velocidad y aceleración.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Por regla de la cadena, ya que $\vec{u}_r$ depende de θ y θ de t:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

Y el vector aceleración, tras un cálculo directo a partir de $\vec{v}$, es:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{u}_\theta$$

Si $\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre m, entonces $\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta$. Recordando la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, se concluye que:

$$m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta \tag{1}$$

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = F_r \tag{2}$$

Estas ecuaciones diferenciales gobiernan el movimiento de la partícula, sea cual sea la naturaleza de la fuerza.

2.2.2 Fuerzas centrales y segunda ley de Kepler

Se dice que $\vec{F}$ es una fuerza central si está siempre dirigida a lo largo de la línea que une la partícula con el origen, es decir, si no tiene componente perpendicular, $F_\theta = 0$. Bajo esta hipótesis, la ecuación (1) queda como:

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

Multiplicando por r, la expresión se puede reconocer como la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

Integrando ambos lados, se obtiene que:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{3}$$

donde h es una constante de integración. Si $A = A(t)$ es el área barrida por el radio vector, el diferencial de área es $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$. La tasa con que se barre el área es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2}$$

Como h es constante, la velocidad areolar también lo es. Al integrar entre dos instantes de tiempo, se obtiene que $A(t_2) - A(t_1) = \frac{h}{2}(t_2 - t_1)$. Esta es la **Segunda Ley de Kepler**: el radio vector barre áreas iguales en intervalos iguales de tiempo[1].

2.2.3 Fuerzas gravitacionales centrales y primera ley de Kepler

Ahora se especializa el análisis para una fuerza central atractiva cuya magnitud sigue la ley de la gravitación de Newton:

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2} = -\frac{km}{r^2}$$

donde $k = GM$. La ecuación (2) pasa a ser:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2} \tag{4}$$

El siguiente paso es obtener la ecuación de la órbita en forma polar $r = f(\theta)$, para lo cual se debe eliminar el tiempo t y considerar θ como la variable independiente. Usando la ecuación (3) en la (4):

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2} \tag{5}$$

El libro de Simmons describe este paso como "difícil de motivar, ya que requiere considerable ingenio técnico". La presencia de potencias de $1/r$ sugiere el cambio de variable $z = 1/r$. Se expresa $\frac{d^2r}{dt^2}$ en términos de z y θ:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) = -h\frac{dz}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}$$

Al insertar esta expresión en (5) y sustituir $r = 1/z$, queda:

$$-h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2} - h^2z^3 = -kz^2$$

que se simplifica a la EDO lineal:

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}$$

1 Kepler (1571-1630) destiló sus tres leyes tras trabajar incesantemente durante veinte años con la gran cantidad de datos observacionales heredados del astrónomo danés Tycho Brahe.

La solución general es inmediata:

$$z = A \sin\theta + B\cos\theta + \frac{k}{h^2} \tag{6}$$

Por simplificar, se desplaza el eje polar de modo que r sea mínimo (perihelio) cuando $\theta = 0$. Esto implica que z es máximo, y por tanto $\frac{dz}{d\theta}|_{\theta=0} = 0$, lo cual fuerza a que $A = 0$. Despejando $r = 1/z$:

$$r = \frac{h^2/k}{1 + (Bh^2/k)\cos\theta}$$

Si se define la excentricidad $e = Bh^2/k$ (una constante positiva), la ecuación de la órbita se convierte en:

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e\cos\theta} \tag{7}$$

Esta es la ecuación polar de una sección cónica con foco en el origen y excentricidad e. Puesto que los planetas permanecen en el sistema solar, sus órbitas son cerradas y la elipse ($e < 1$) es la única posibilidad. Esto constituye la **Primera Ley de Kepler**: la órbita de cualquier planeta es una elipse con uno de sus focos en el Sol.

2.2.4 Significado físico de la excentricidad y Tercera Ley de Kepler

La energía total del sistema E (cinética + potencial) es constante:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{km}{r}$$

Se puede demostrar que la excentricidad depende directamente de la energía total del sistema:

$$e = \sqrt{1 + E\left(\frac{2h^2}{mk^2}\right)}$$

Resulta claro que la naturaleza de la órbita queda completamente caracterizada por su energía total E. La órbita es una elipse si $E < 0$, una parábola si $E = 0$ y una hipérbola si $E > 0$. Los planetas del sistema solar tienen energía negativa.

Para la Tercera Ley, se relaciona la dinámica con la geometría de la elipse. En astronomía, el semieje mayor a se conoce como la distancia media. Es la semisuma de las distancias máxima y mínima de r. Un cálculo muestra que:

$$a = \frac{h^2}{k(1 - e^2)}$$

Usando la propiedad geométrica de la elipse $b^2 = a^2(1 - e^2)$, se encuentra una relación para el semieje menor b:

$$b^2 = \frac{h^2 a}{k}$$

Si T es el período de la órbita, y el área de la elipse es πab, de la segunda ley de Kepler se sigue que $\pi ab = hT/2$. Elevando al cuadrado y sustituyendo b^2:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{h^2}\left(\frac{h^2 a}{k}\right) = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)a^3$$

Como $k = GM$ es la misma constante para todos los planetas, se obtiene la **Tercera Ley de Kepler**: los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias.