Simulación del Oscilador de Fermi en C++

Camilo Andres Huertas Archila[1]

[1]20212107049

15 de octubre del 2024

1 Movimiento antes de colisión:

1.1 Bloque:

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Siendo $v_0 = 0$, $x_0 = h$.

$$y_b = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_b = -gt$$

1.2 Plataforma:

$$\vec{F}_e - \vec{F}_g = 0$$
$$m\vec{g} = k\vec{y}$$

Posición de equilibro de la plataforma:

$$y_{0p} = -mgk^{-1}$$

2 1ra colisión:

2.1 Tiempo primera colisión:

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = -mgk^{-1}$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 = -mgk^{-1} - h$$

$$t^2 = \frac{(mgk^{-1} + h)2}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{(mgk^{-1} + h)2}{g}}$$

2.2 Velocidades después de colisión:

Por conservación de $\vec{p}$:

$$mv_{ib} + Mv_{ip} = mV_{fb} + MV_{fp}$$

$$m(v_{ib} - V_{fb}) = M(V_{fp} - v_{ip})$$

Por conservación de E:

$$\frac{1}{2}mv_{ib}^2 + \frac{1}{2}Mv_{ip}^2 = \frac{1}{2}mV_{fb}^2 + \frac{1}{2}MV_{fp}^2$$

$$m(v_{ib}^2 - V_{fb}^2) = M(V_{fp}^2 - v_{ip}^2)$$
$$m(v_{ib} - V_{fb})(v_{ib} + V_{fb}) = M(V_{fp} - v_{ip})(v_{ip} + V_{fp})$$

$$v_{ib} + V_{fb} = v_{ip} + V_{fp}$$

2.2.1 Velocidad final de la plataforma:

Despejamos V_{fb} de la segunda expresion y sustituyendo en la primera:

$$V_{fb} = v_{ip} + V_{fp} - v_{ib}$$

$$m(v_{ib} - (v_{ip} + V_{fp} - v_{ib})) = M(V_{fp} - v_{ip})$$
$$mv_{ib} - mv_{ip} - mV_{fp} + mv_{ib} = MV_{fp} - Mv_{ip}$$
$$MV_{fp} + mV_{fp} = Mv_{ip} + mv_{ib} - mv_{ip} + mv_{ib}$$
$$V_{fp} = \frac{2mv_{ib} + v_{ip}(M - m)}{(M + m)}$$

2.2.2 Velocidad final del bloque:

Despejamos V_{fp} de la segunda expresión y sustituyendo en la primera:

$$V_{fp} = v_{ib} + V_{fb} - v_{ip}$$

$$m(v_{ib} - V_{fb}) = M(v_{ib} + V_{fb} - v_{ip} - v_{ip})$$
$$mv_{ib} - mV_{fb} = Mv_{ib} + MV_{fb} - Mv_{ip} - Mv_{ip}$$
$$MV_{fb} + mV_{fb} = -Mv_{ib} + Mv_{ip} + Mv_{ip} - mv_{ib}$$
$$V_{fb} = \frac{2Mv_{ip} + v_{ib}(m - M)}{(M + m)}$$

3 Movimiento despues de colisión:

3.1 Para el bloque:

$$y = y_0 + v_{0b} - \frac{1}{2}gt^2$$
$$v = v_0 - gt$$

3.2 Para la plataforma:

$$M\vec{a} = -\vec{F}_g + \vec{F}_e$$
$$M\vec{a} = -Mg - k\vec{y}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = -g$$

Cuya solución homogenea es:

$$y_1 = A\sin(wt) + B\cos(wt)$$

Y la solucion particular:

$$y_2 = c$$

Reemplazando esta ultima en la E.D.

$$\omega^2 C = -g$$
$$C = -\frac{g}{\omega^2}$$

Ahora construimos la solución general $y = y_1 + y_2$:

$$y = -\frac{g}{\omega^2} + A\sin(wt) + B\cos(wt)$$

$$v = Aw\cos(wt) - Bw\sin(wt)$$

Calculamos las constantes A y B sabiendo que en $t = 0, y = y_0$ y $v = v_0$:

$$y(0) = -\frac{g}{\omega^2} + A\sin(0) + B\cos(0)$$
$$y(0) = -\frac{g}{\omega^2} + B$$
$$B = y(0) + \frac{g}{\omega^2}$$

Ahora para $v(0)$:

$$v(0) = A\omega\cos(0) - B\omega\sin(0)$$
$$v(0) = \omega A$$
$$A = \frac{V_0}{\omega}$$

Para al final obtener las ecuaciones de movimiento:

$$y = -\frac{g}{\omega^2} + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\sin(wt) + \left(y_0 + \frac{g}{\omega^2}\right)\cos(wt)$$
$$v = v_0\cos(wt) - \left(y_0\omega + \frac{g}{\omega}\right)\sin(wt)$$

4 2da y siguientes colisiones:

Es necesario encontrar el tiempo donde ambas posiciones vuelven a ser las mismas.

$$y_0 + v_{0b} - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{g}{\omega^2} + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\sin(wt) + \left(y_0 + \frac{g}{\omega^2}\right)\cos(wt)$$

Se usará Newton-Raphson para aproximar a la solución aproximada.

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$