Examen Final

John Díaz

February 2025

1. Modificación problemas hechos en clase:

   (a) Estudiar el movimiento de una partícula confinada dentro de:

      i. Un triángulo equilátero de lado L.
      `(Camilo Huertas)`
      ii. Un paralelogramo de altura h y base B.
      `(Jhousua Albadan y Angela Malagon)`
      iii. Un pentágono regular de lado L inscrito en un círculo de radio R.
      `(Luder Espitia y Valentina Bernal)`
      iv. Un hexágono regular de lado L inscrito en un círculo de radio R.
      `(Joan Tovar y Issabela Ortiz)`
      v. Un círculo de radio R.
      `(Laura Isabel Nieto)`

   Las colisiones de la partícula con el las formas geométricas en el plano $2D$ son perfectamente elásticas.
   Debe modificar el código hecho en clase `Particle_2D_Box.cpp`

   (b) Modifique el programa `Particle_1D_Box.cpp` para que pueda estudiar colisiones no elásticas $v' = -ev$, con $0 < e \leq 1$, con las paredes. `(Todos los estudiantes)`

2. Problema de aplicación:

   (a) Estudia el movimiento de una partícula puntual en la "mesa de billar" de la Figura 1. Cuente el número de colisiones con las paredes antes de que la partícula entre en un agujero. El programa debe imprimir por qué agujero la partícula salió de la mesa. `(Camilo Huertas)` `(Jhousua Albadan y Angela Malagon)` `(Laura Isabel Nieto)`

   (b) Escribe un programa para estudiar el movimiento de una partícula en la caja de la figura 2.
   En el centro de la caja hay un disco sobre el cual la partícula rebota elásticamente. `(Luder Espitia y Valentina Bernal)` `(Joan Tovar y Issabela Ortiz)`

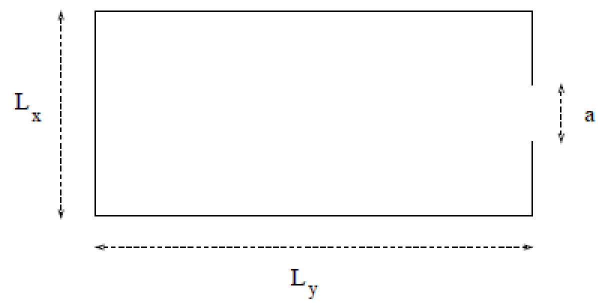

Figure 1: “Mesa de billar”

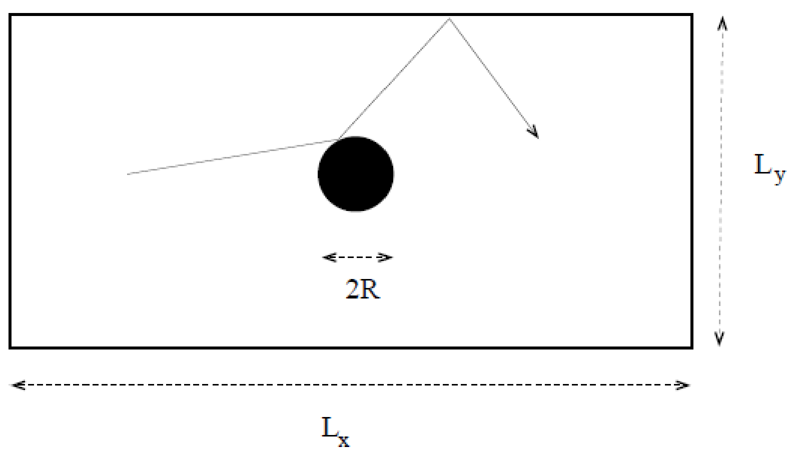

Figure 2: “Billar con obstaculo ”

3. Extensión del Método Runge-Kutta

   (a) Escribir un programa en C++ que simule el comportamiento de dos osciladores armónicos acoplados mediante un resorte utilizando el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. El sistema está descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_c(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 + k_c(x_1 - x_2) \quad (2)$$

   El objetivo es comparar los resultados obtenidos mediante la simulación con la solución teórica exacta, eligiendo condiciones iniciales aleatorias para cada oscilador.Compare las trayectorias de los osciladores en el espacio-tiempo teóricas con las numéricas. Además, se debe implementar una función derivadora para calcular sus velocidades en función del tiempo y comparar.

`(Todos los estudiantes)`

(b) El problema de dos cuerpos en mecánica celeste describe la interacción gravitacional entre dos masas, como una estrella y un planeta. En este caso consideraremos que la masa de la estrella M es mucho mayor que la del planeta m ($m \ll M$), lo que nos permite suponer que la estrella permanece fija en el origen de coordenadas y el planeta orbita alrededor de ella bajo la influencia de la gravedad.

La aceleración del planeta debido a la gravedad de la estrella está dada por la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

donde:

- $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$ es la constante de gravitación universal.
- $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del sol.
- $m = 5.99 \times 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra.
- r es la distancia entre el planeta y la estrella.
- $\mathbf{r} = (x, y)$ es la posición del planeta en el plano orbital.

Las ecuaciones de movimiento se expresan en términos de velocidad y posición:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \tag{4}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \tag{5}$$

donde $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ es la velocidad del planeta.

Implementar un programa en C++ que resuelva estas ecuaciones utilizando el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener la trayectoria del planeta en un intervalo de tiempo determinado.Permitir la configuración de las condiciones iniciales (posición y velocidad del planeta).Generar un archivo de salida con los datos de la trayectoria.Usar Gnuplot para graficar la órbita resultante. Para una órbita elíptica cercana a la circular, se pueden usar las siguientes condiciones iniciales en unidades del Sistema Internacional:

- Posición inicial: $(r_0, 0)$ con $r_0 = 1.5 \times 10^{11}$ m (aproximadamente la distancia media Tierra-Sol).
- Velocidad inicial: $(0, v_0)$ con $v_0 = 29.78 \times 10^3$ m/s (velocidad orbital de la Tierra).

`(Todos los estudiantes)`