Ecuación de Laplace en un Cuarto de Disco

Separación de Variables y Condiciones de Contorno

Camilo Huertas[1] and Isabel Nieto[1]

[1] *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

8-05-2025

Planteamiento del problema

Resolver la ecuación de Laplace en coordenadas polares en el dominio del cuarto de disco

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 < r < a,\ 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}\}$$

sujeto a las condiciones de contorno:

$$u(r,0) = 0, \quad u\big(r, \tfrac{\pi}{2}\big) = 0, \quad u(a,\theta) = V(\theta).$$

1. Método de separación de variables

Buscamos soluciones de la forma

$$u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta).$$

Sustituyendo en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

obtenemos

$$R''(r)\,\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\,\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\,\Theta''(\theta) = 0.$$

Dividiendo por $R(r)\,\Theta(\theta)$:

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0.$$

2. Reordenamiento y constante de separación

Reescribimos como

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Ambos lados dependen de variables distintas, por lo que introducimos la constante de separación λ^2 y obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda^2\,\Theta = 0, \quad r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda^2 R = 0.$$

3. Solución detallada de la parte angular

La ecuación

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda^2\,\Theta = 0$$

es una EDO lineal con solución general

$$\Theta(\theta) = A\cos(\lambda\theta) + B\sin(\lambda\theta).$$

Imponemos condiciones homogéneas:

- $\Theta(0) = 0 \implies A = 0.$
- $\Theta(\pi/2) = 0 \implies B\sin(\frac{\lambda\pi}{2}) = 0$. Para $B \neq 0$, se requiere

$$\sin(\tfrac{\lambda\pi}{2}) = 0 \implies \lambda = 2n-1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Por tanto, los autovalores son $\lambda_n = 2n - 1$ y las autofunciones:

$$\Theta_n(\theta) = \sin\bigl((2n-1)\theta\bigr).$$

4. Solución detallada de la parte radial y combinación

La ecuación radial asociada a λ_n es

$$r^2R'' + rR' - (2n-1)^2R = 0,$$

que es Euler–Cauchy. Proponiendo $R = r^m$ obtenemos $m = \pm(2n-1)$, por lo que

$$R_n(r) = A_n r^{2n-1} + B_n r^{-(2n-1)}.$$

La regularidad en $r = 0$ impone $B_n = 0$, de modo que

$$R_n(r) = C_n r^{2n-1}.$$

Combinando ambas partes, la solución general que satisface los bordes radiales es

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, r^{2n-1} \sin\bigl((2n-1)\theta\bigr).$$

5. Cálculo de los coeficientes C_n

Imponiendo la condición en $r = a$:

$$V(\theta) = u(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, a^{2n-1} \sin\bigl((2n-1)\theta\bigr).$$

Multiplicamos por $\sin((2m-1)\theta)$ y usamos la ortogonalidad:

$$\int_0^{\pi/2} V(\theta)\sin((2m-1)\theta)\, d\theta = C_m\, a^{2m-1}\frac{\pi}{4}.$$

De donde

$$C_n = \frac{4}{\pi\, a^{2n-1}} \int_0^{\pi/2} V(\theta)\sin\bigl((2n-1)\theta\bigr)\, d\theta.$$

6. Integración numérica

Definimos

$$I_n = \int_0^{\pi/2} V(\theta) \sin\big((2n-1)\theta\big)\, d\theta.$$

Con el método del trapecio (paso $h = (\pi/2)/M$, nodos $\theta_j = jh$):

$$I_n \approx h\Big[\tfrac{1}{2} f_0 + \sum_{j=1}^{M-1} f_j + \tfrac{1}{2} f_M\Big], \quad f_j = V(\theta_j) \sin((2n-1)\theta_j).$$

Con Simpson (M par):

$$I_n \approx \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{impar}}}^{M-1} f_j + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{par}}}^{M-2} f_j + f_M\Big].$$

Luego

$$C_n = \frac{4}{\pi\, a^{2n-1}} I_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

La solución aproximada truncada a N términos es

$$u_N(r,\theta) = \sum_{n=1}^{N} C_n\, r^{2n-1} \sin\big((2n-1)\theta\big).$$