

Ecuación de Laplace en un Cuarto de Disco

Separación de Variables y Condiciones de Contorno

Camilo Huertas¹ and Isabel Nieto¹

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas

8-05-2025

Planteamiento del problema

Resolver la ecuación de Laplace en coordenadas polares en el dominio del cuarto de disco

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 < r < a, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$$

sujeito a las condiciones de contorno:

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad u(a, \theta) = V(\theta) = V_0 \sin(2\theta).$$

1. Método de separación de variables

Buscamos soluciones de la forma

$$u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta).$$

Sustituyendo en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

obtenemos

$$R''(r) \Theta(\theta) + \frac{1}{r} R'(r) \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) = 0.$$

Dividiendo por $R(r) \Theta(\theta)$:

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0.$$

2. Reordenamiento y constante de separación

Reescribimos como

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Ambos lados dependen de variables distintas, por lo que introducimos la constante de separación λ^2 y obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda^2 \Theta = 0, \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda^2 R = 0.$$

3. Solución detallada de la parte angular

La ecuación

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda^2 \Theta = 0$$

es una EDO lineal con solución general

$$\Theta(\theta) = A \cos(\lambda\theta) + B \sin(\lambda\theta).$$

Imponemos condiciones homogéneas:

- $\Theta(0) = 0 \implies A = 0.$
- $\Theta(\pi/2) = 0 \implies B \sin(\frac{\lambda\pi}{2}) = 0.$ Para $B \neq 0$, se requiere

$$\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) = 0 \implies \lambda_n = 2n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto, los autovalores son $\lambda_n = 2n - 1$ y las autofunciones:

$$\Theta_n(\theta) = \sin((2n - 1)\theta).$$

4. Solución detallada de la parte radial y combinación

La ecuación radial asociada a λ_n es

$$r^2 R'' + r R' - (2n - 1)^2 R = 0,$$

que es de tipo Euler–Cauchy. Proponiendo $R = r^m$ obtenemos $m = \pm(2n - 1)$, por lo que

$$R_n(r) = A_n r^{2n-1} + B_n r^{-(2n-1)}.$$

La regularidad en $r = 0$ impone $B_n = 0$, de modo que

$$R_n(r) = C_n r^{2n-1}.$$

Combinando ambas partes, la solución general que satisface los bordes radiales es

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{2n-1} \sin((2n - 1)\theta).$$

5. Cálculo de los coeficientes C_n para $V(\theta) = V_0 \sin(2\theta)$

Imponiendo la condición en $r = a$:

$$V_0 \sin(2\theta) = u(a, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^{2n-1} \sin((2n - 1)\theta).$$

Usando ortogonalidad de las funciones $\sin((2n - 1)\theta)$ en $[0, \pi/2]$:

$$C_n = \frac{4}{\pi a^{2n-1}} \int_0^{\pi/2} V_0 \sin(2\theta) \sin((2n - 1)\theta) d\theta.$$

Este integral puede evaluarse en forma cerrada (usando identidades de producto a suma) para obtener cada C_n .

6. Solución truncada

La solución aproximada truncada a N términos es

$$u_N(r, \theta) = \sum_{n=1}^N C_n r^{2n-1} \sin((2n - 1)\theta).$$