Matemáticas Discretas I

Sistemas Lógicos

Juan Francisco Díaz Frias

Profesor Titular (1993-hoy)
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Edif. 331 - 2111
Universidad del Valle

Agosto 2018

Plan

Plan

Plan

Introducción

- Los sistemas lógicos son sistemas formales cuyas fórmulas son afirmaciones que pueden ser ciertas o falsas.
  Los axiomas son fórmulas verdaderas por definición.
  Las reglas de inferencia derivan fórmulas ciertas a partir de fórmulas ciertas.
- Un sistema lógico clásico maneja dos valores de verdad posibles: verdadero y falso.
- Terminología:
  - Axioma: verdad asumida
  - Teorema: verdad demostrada
  - Lema: teorema de importancia menor
  - Corolario: aserción que se deduce fácilmente de un teorema
  - Proposición: teorema, lema
  - Conjetura: afirmación que se cree que es cierta. Si se prueba es un teorema.

Introducción

- Los sistemas lógicos son sistemas formales cuyas fórmulas son afirmaciones que pueden ser ciertas o falsas.
  Los axiomas son fórmulas verdaderas por definición.
  Las reglas de inferencia derivan fórmulas ciertas a partir de fórmulas ciertas.
- Un sistema lógico clásico maneja dos valores de verdad posibles: verdadero y falso.
- Terminología:
  - Axioma: verdad asumida
  - Teorema: verdad demostrada
  - Lema: teorema de importancia menor
  - Corolario: aserción que se deduce fácilmente de un teorema
  - Proposición: teorema, lema
  - Conjetura: afirmación que se cree que es cierta. Si se prueba es un teorema.

Introducción

- Los sistemas lógicos son sistemas formales cuyas fórmulas son afirmaciones que pueden ser ciertas o falsas.
  Los axiomas son fórmulas verdaderas por definición.
  Las reglas de inferencia derivan fórmulas ciertas a partir de fórmulas ciertas.
- Un sistema lógico clásico maneja dos valores de verdad posibles: verdadero y falso.
- Terminología:
  - Axioma: verdad asumida
  - Teorema: verdad demostrada
  - Lema: teorema de importancia menor
  - Corolario: aserción que se deduce fácilmente de un teorema
  - Proposición: teorema, lema
  - Conjetura: afirmación que se cree que es cierta. Si se prueba es un teorema.

Plan

El concepto de verdad

- Diferentes acepciones de verdad: legal, autoritaria, científica, probable, filosófica, matemática.
- En computación: la verdad es matemática, es decir, demostrable mediante una prueba formal.
- Una fórmula puede ser verdadera en toda realidad (tautologías), o verdadera en unos casos pero no en otros.
- El aparato deductivo del sistema lógico debe permite dilucidar la verdad o falsedad de una fórmula en una realidad.

El concepto de verdad

- Diferentes acepciones de verdad: legal, autoritaria, científica, probable, filosófica, matemática.
- En computación: la verdad es matemática, es decir, demostrable mediante una prueba formal.
- Una fórmula puede ser verdadera en toda realidad (tautologías), o verdadera en unos casos pero no en otros.
- El aparato deductivo del sistema lógico debe permite dilucidar la verdad o falsedad de una fórmula en una realidad.

El concepto de verdad

- Diferentes acepciones de verdad: legal, autoritaria, científica, probable, filosófica, matemática.
- En computación: la verdad es matemática, es decir, demostrable mediante una prueba formal.
- Una fórmula puede ser verdadera en toda realidad (tautologías), o verdadera en unos casos pero no en otros.
- El aparato deductivo del sistema lógico debe permite dilucidar la verdad o falsedad de una fórmula en una realidad.

El concepto de verdad

- Diferentes acepciones de verdad: legal, autoritaria, científica, probable, filosófica, matemática.
- En computación: la verdad es matemática, es decir, demostrable mediante una prueba formal.
- Una fórmula puede ser verdadera en toda realidad (tautologías), o verdadera en unos casos pero no en otros.
- El aparato deductivo del sistema lógico debe permite dilucidar la verdad o falsedad de una fórmula en una realidad.

Plan

El método axiomático

Es la forma en que los sistemas lógicos modelan la verdad y las deducciones.

Sobre los axiomas

- No se demuestran, pero sí se justifican: argumentos para afirmar que es una verdad.
- Cuidado con los axiomas falsos
- Cuidado con axiomas que son teoremas.

Sobre las reglas de inferencia

- Corrección: Si se aplican a fórmulas verdaderas, deben producir fórmulas verdaderas.
- En general no se puede demostrar la corrección.

El método axiomático

Es la forma en que los sistemas lógicos modelan la verdad y las deducciones.

Sobre los axiomas

- No se demuestran, pero sí se justifican: argumentos para afirmar que es una verdad.
- Cuidado con los axiomas falsos
- Cuidado con axiomas que son teoremas.

Sobre las reglas de inferencia

- Corrección: Si se aplican a fórmulas verdaderas, deben producir fórmulas verdaderas.

El método axiomático

Es la forma en que los sistemas lógicos modelan la verdad y las deducciones.

Sobre los axiomas

- No se demuestran, pero sí se justifican: argumentos para afirmar que es una verdad.
- Cuidado con los axiomas falsos
- Cuidado con axiomas que son teoremas.

Sobre las reglas de inferencia

- Corrección: Si se aplican a fórmulas verdaderas, deben producir fórmulas verdaderas.
- En general no se puede demostrar la corrección

El método axiomático

Es la forma en que los sistemas lógicos modelan la verdad y las deducciones.

Sobre los axiomas

- No se demuestran, pero sí se justifican: argumentos para afirmar que es una verdad.
- Cuidado con los axiomas falsos
- Cuidado con axiomas que son teoremas.

Sobre las reglas de inferencia

- Corrección: Si se aplican a fórmulas verdaderas, deben producir fórmulas verdaderas.
- En general no se puede demostrar la corrección

El método axiomático

Es la forma en que los sistemas lógicos modelan la verdad y las deducciones.

Sobre los axiomas

- No se demuestran, pero sí se justifican: argumentos para afirmar que es una verdad.
- Cuidado con los axiomas falsos
- Cuidado con axiomas que son teoremas.

Sobre las reglas de inferencia

- Corrección: Si se aplican a fórmulas verdaderas, deben producir fórmulas verdaderas.
- En general no se puede demostrar la corrección

El método axiomático

Es la forma en que los sistemas lógicos modelan la verdad y las deducciones.

Sobre los axiomas

- No se demuestran, pero sí se justifican: argumentos para afirmar que es una verdad.
- Cuidado con los axiomas falsos
- Cuidado con axiomas que son teoremas.

Sobre las reglas de inferencia

- Corrección: Si se aplican a fórmulas verdaderas, deben producir fórmulas verdaderas.
- En general no se puede demostrar la corrección

Plan

Proposiciones y predicados

- Los sistemas lógicos no hacen otra cosa que modelar la forma en que los discursos del lenguaje natural se construyen y se entienden.
- Una proposición es una frase declarativa que puede o no ser verdad. En lógica, una proposición se concibe de manera atómica, de manera que no tiene partes que la compongan.
  Ejemplo de proposiciones:
  $p \equiv$ Está lloviendo
  $q \equiv$ Adán es el padre de Abel
- Una lógica proposicional es un sistema lógico que representa frases declarativas con proposiciones (atómicas).
- Hay sistemas lógicos que se apoyan en la estructura gramatical de lo que se afirma, e incluso -por mencionar un ejemplo- en reconocer que lo que se afirma sea cierto para una colección de individuos ("todos", .ªlgunos", ...). Esto da lugar a lo que se llamará lógica de predicados.
  Ejemplo de predicados:
  $m(A, E) \equiv$ La madre de A es E
  $s(n) \equiv \forall n | n \geq 0 : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Proposiciones y predicados

- Los sistemas lógicos no hacen otra cosa que modelar la forma en que los discursos del lenguaje natural se construyen y se entienden.
- Una proposición es una frase declarativa que puede o no ser verdad. En lógica, una proposición se concibe de manera atómica, de manera que no tiene partes que la compongan.
  Ejemplo de proposiciones:
  $p \equiv$ Está lloviendo
  $q \equiv$ Adán es el padre de Abel
- Una lógica proposicional es un sistema lógico que representa frases declarativas con proposiciones (atómicas).
- Hay sistemas lógicos que se apoyan en la estructura gramatical de lo que se afirma, e incluso -por mencionar un ejemplo- en reconocer que lo que se afirma sea cierto para una colección de individuos ("todos", .ªlgunos", ...). Esto da lugar a lo que se llamará lógica de predicados.
  Ejemplo de predicados:
  $m(A, E) \equiv$ La madre de A es E
  $s(n) \equiv \forall n | n \geq 0 : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Proposiciones y predicados

- Los sistemas lógicos no hacen otra cosa que modelar la forma en que los discursos del lenguaje natural se construyen y se entienden.
- Una proposición es una frase declarativa que puede o no ser verdad. En lógica, una proposición se concibe de manera atómica, de manera que no tiene partes que la compongan.
  Ejemplo de proposiciones:
  $p \equiv$ Está lloviendo
  $q \equiv$ Adán es el padre de Abel
- Una lógica proposicional es un sistema lógico que representa frases declarativas con proposiciones (atómicas).
- Hay sistemas lógicos que se apoyan en la estructura gramatical de lo que se afirma, e incluso -por mencionar un ejemplo- en reconocer que lo que se afirma sea cierto para una colección de individuos ("todos", .ªlgunos", ...). Esto da lugar a lo que se llamará lógica de predicados.
  Ejemplo de predicados:
  $m(A, E) \equiv$ La madre de A es E
  $s(n) \equiv \forall n | n \geq 0 : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Proposiciones y predicados

- Los sistemas lógicos no hacen otra cosa que modelar la forma en que los discursos del lenguaje natural se construyen y se entienden.
- Una proposición es una frase declarativa que puede o no ser verdad. En lógica, una proposición se concibe de manera atómica, de manera que no tiene partes que la compongan.
  Ejemplo de proposiciones:
  $p \equiv$ Está lloviendo
  $q \equiv$ Adán es el padre de Abel
- Una lógica proposicional es un sistema lógico que representa frases declarativas con proposiciones (atómicas).
- Hay sistemas lógicos que se apoyan en la estructura gramatical de lo que se afirma, e incluso -por mencionar un ejemplo- en reconocer que lo que se afirma sea cierto para una colección de individuos ("todos", .ªlgunos", ...). Esto da lugar a lo que se llamará lógica de predicados.
  Ejemplo de predicados:
  $m(A, E) \equiv$ La madre de A es E
  $s(n) \equiv \forall n | n \geq 0 : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Plan

Patrones de prueba

- Prueba directa: mostrar un resultado desde axiomas, usando reglas de inferencia.
- Prueba por contradicción: mostrar que lo contrario de lo que se quiere probar conlleva a un absurdo (la afirmación de algo flagrantemente falso).
- Prueba por hipótesis: cuando se quiere mostrar una implicación, v.gr., $p \implies q$, se supone que p es cierto y se demuestra q.
- Prueba por contrarrecíproca o contrapositiva: si se quiere mostrar que $p \implies q$, esto es equivalente a mostrar que $\neg q \implies \neg p$.
- Prueba por casos: si se identifican casos que cubran todas las posibilidades y, en cada caso, se logra mostrar que un resultado es verdadero, se puede afirmar que el resultado es siempre verdadero.

Patrones de prueba

- Prueba directa: mostrar un resultado desde axiomas, usando reglas de inferencia.
- Prueba por contradicción: mostrar que lo contrario de lo que se quiere probar conlleva a un absurdo (la afirmación de algo flagrantemente falso).
- Prueba por hipótesis: cuando se quiere mostrar una implicación, v.gr., $p \implies q$, se supone que p es cierto y se demuestra q.
- Prueba por contrarrecíproca o contrapositiva: si se quiere mostrar que $p \implies q$, esto es equivalente a mostrar que $\neg q \implies \neg p$.
- Prueba por casos: si se identifican casos que cubran todas las posibilidades y, en cada caso, se logra mostrar que un resultado es verdadero, se puede afirmar que el resultado es siempre verdadero.

Patrones de prueba

- Prueba directa: mostrar un resultado desde axiomas, usando reglas de inferencia.
- Prueba por contradicción: mostrar que lo contrario de lo que se quiere probar conlleva a un absurdo (la afirmación de algo flagrantemente falso).
- Prueba por hipótesis: cuando se quiere mostrar una implicación, v.gr., $p \implies q$, se supone que p es cierto y se demuestra q.
- Prueba por contrarrecíproca o contrapositiva: si se quiere mostrar que $p \implies q$, esto es equivalente a mostrar que $\neg q \implies \neg p$.
- Prueba por casos: si se identifican casos que cubran todas las posibilidades y, en cada caso, se logra mostrar que un resultado es verdadero, se puede afirmar que el resultado es siempre verdadero.

Patrones de prueba

- Prueba directa: mostrar un resultado desde axiomas, usando reglas de inferencia.
- Prueba por contradicción: mostrar que lo contrario de lo que se quiere probar conlleva a un absurdo (la afirmación de algo flagrantemente falso).
- Prueba por hipótesis: cuando se quiere mostrar una implicación, v.gr., $p \implies q$, se supone que p es cierto y se demuestra q.
- Prueba por contrarrecíproca o contrapositiva: si se quiere mostrar que $p \implies q$, esto es equivalente a mostrar que $\neg q \implies \neg p$.
- Prueba por casos: si se identifican casos que cubran todas las posibilidades y, en cada caso, se logra mostrar que un resultado es verdadero, se puede afirmar que el resultado es siempre verdadero.

Patrones de prueba

- Prueba directa: mostrar un resultado desde axiomas, usando reglas de inferencia.
- Prueba por contradicción: mostrar que lo contrario de lo que se quiere probar conlleva a un absurdo (la afirmación de algo flagrantemente falso).
- Prueba por hipótesis: cuando se quiere mostrar una implicación, v.gr., $p \implies q$, se supone que p es cierto y se demuestra q.
- Prueba por contrarrecíproca o contrapositiva: si se quiere mostrar que $p \implies q$, esto es equivalente a mostrar que $\neg q \implies \neg p$.
- Prueba por casos: si se identifican casos que cubran todas las posibilidades y, en cada caso, se logra mostrar que un resultado es verdadero, se puede afirmar que el resultado es siempre verdadero.

Plan

Esquemas de pruebas (1)

Existen varias notaciones para desplegar pruebas. Suponga que estamos en el lenguaje de la aritmética, y que contamos con los siguientes axiomas y reglas de inferencia:

$$
\begin{array}{lllll}
(\mathrm{Ax}) & 0 < 1 & & & \\
(R_1) & a < b & \vdash & a + c < b + c \\
(R_2) & a < b, b < c & \vdash & a < c \\
(R_3) & a = b & \vdash & E[a] = E[b]
\end{array}
$$

Demostración $2 < 3$

Teo: $2 < 3$
Dem:

$$
\begin{array}{lll}
 & & < Ax > \\
 & 0 < 1 & \\
\Longrightarrow & & < R_1, c := 1 > \\
 & 0 + 1 < 1 + 1 & \\
\Longrightarrow & & < \text{Aritmética} > \\
 & 1 < 2 & \\
\Longrightarrow & & < R_1, c := 1 > \\
 & 1 + 1 < 2 + 1 & \\
\Longrightarrow & & < \text{Aritmética} > \\
 & 2 < 3 &
\end{array}
$$

◇

A destacar:

- **Teo:**
- $2 < 3$: el teorema a demostrar
- Dem: inicio de la demostración
- Un renglón por paso
- Una razón para cada paso entre $<>$: axiomas, reglas, teoremas, argumento no formal, indicando reemplazos
- ◇: fin de la demostración

Esquemas de pruebas (1)

Existen varias notaciones para desplegar pruebas. Suponga que estamos en el lenguaje de la aritmética, y que contamos con los siguientes axiomas y reglas de inferencia:

$$\begin{array}{llll}
(\mathrm{Ax}) & 0 < 1 & & \\
(R_1) & a < b & \vdash & a + c < b + c \\
(R_2) & a < b, b < c & \vdash & a < c \\
(R_3) & a = b & \vdash & E[a] = E[b]
\end{array}$$

Demostración $2 < 3$

Teo: $2 < 3$
Dem:

$$\begin{array}{lll}
 & & < Ax > \\
 & 0 < 1 & \\
\Longrightarrow & & < R_1,\ c := 1 > \\
 & 0 + 1 < 1 + 1 & \\
\Longrightarrow & & < \text{Aritmética} > \\
 & 1 < 2 & \\
\Longrightarrow & & < R_1,\ c := 1 > \\
 & 1 + 1 < 2 + 1 & \\
\Longrightarrow & & < \text{Aritmética} > \\
 & 2 < 3 &
\end{array}$$

◇

A destacar:

- Teo:
- $2 < 3$: el teorema a demostrar
- Dem: inicio de la demostración
- Un renglón por paso
- Una razón para cada paso entre $<>$: axiomas, reglas, teoremas, argumento no formal, indicando reemplazos
- ◇: fin de la demostración

Esquemas de pruebas (1)

Existen varias notaciones para desplegar pruebas. Suponga que estamos en el lenguaje de la aritmética, y que contamos con los siguientes axiomas y reglas de inferencia:

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{Ax}) & 0 < 1 & & \\
(R_1) & a < b & \vdash & a + c < b + c \\
(R_2) & a < b, b < c & \vdash & a < c \\
(R_3) & a = b & \vdash & E[a] = E[b]
\end{array}
$$

Demostración $2 < 3$

Teo: $2 < 3$
Dem:

$$
\begin{array}{lll}
 & & < Ax > \\
 & 0 < 1 & \\
\Longrightarrow & & < R_1,\ c := 1 > \\
 & 0 + 1 < 1 + 1 & \\
\Longrightarrow & & < \text{Aritmética} > \\
 & 1 < 2 & \\
\Longrightarrow & & < R_1,\ c := 1 > \\
 & 1 + 1 < 2 + 1 & \\
\Longrightarrow & & < \text{Aritmética} > \\
 & 2 < 3 &
\end{array}
$$

$\diamond$

A destacar:

- **Teo:**
- $2 < 3$: el teorema a demostrar
- Dem: inicio de la demostración
- Un renglón por paso
- Una razón para cada paso entre $<>$: axiomas, reglas, teoremas, argumento no formal, indicando reemplazos
- $\diamond$: fin de la demostración

Esquemas de pruebas (2)

Demostración $1 < 3$

Teo: $1 < 3$

Dem:

$$
\begin{array}{lll}
 & & < Ax > \\
 & 0 < 1 & \\
\Longrightarrow & & < R_1,\ c := 1 > \\
 & 0 + 1 < 1 + 1 & \\
\Longrightarrow & & < \text{Aritmética} > \\
 & 1 < 2 & \\
\Longrightarrow & & < R_2,\ \text{Teo:}2 < 3 > \\
 & 1 < 3 &
\end{array}
$$

$\diamond$

Demostración $1 < 3$

Teo: $1 < 3$

Dem:

(1)	$0 < 1$	Axioma
(2)	$0 + 1 < 1 + 1$	R_1 (1)
(3)	$1 < 2$	R_3 (2)
(4)	$1 + 1 < 2 + 1$	R_1 (3)
(5)	$2 < 3$	R_3 (4)
(6)	$1 < 3$	R_2 (3,5)

$\diamond$

Esquemas de pruebas (2)

Demostración $1 < 3$

Teo: $1 < 3$
Dem:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \langle Ax \rangle \\
 & 0 < 1 & \\
\Longrightarrow & & \langle R_1,\ c := 1 \rangle \\
 & 0+1 < 1+1 & \\
\Longrightarrow & & \langle \text{Aritmética} \rangle \\
 & 1 < 2 & \\
\Longrightarrow & & \langle R_2,\ \text{Teo:}2 < 3 \rangle \\
 & 1 < 3 &
\end{array}
$$

◇

Demostración $1 < 3$

Teo: $1 < 3$
Dem:

(1)	$0 < 1$	Axioma
(2)	$0+1 < 1+1$	R_1 (1)
(3)	$1 < 2$	R_3 (2)
(4)	$1+1 < 2+1$	R_1 (3)
(5)	$2 < 3$	R_3 (4)
(6)	$1 < 3$	R_2 (3,5)

◇

Plan

Buenas prácticas

- Establecer lo que se va a probar
- Definir un plan de prueba
- Mantener un flujo lineal de argumentación
- No olvidar las razones
- Cuidado con el simbolismo excesivo
- Revisar y simplificar

- Introducir notación de manera inteligente
- Estructurar las pruebas largas
- Usar lemas
- Cuidado con lo obvio
- Marcar el final

Buenas prácticas

- Establecer lo que se va a probar
- Definir un plan de prueba
- Mantener un flujo lineal de argumentación
- No olvidar las razones
- Cuidado con el simbolismo excesivo
- Revisar y simplificar
- Introducir notación de manera inteligente
- Estructurar las pruebas largas
- Usar lemas
- Cuidado con lo obvio
- Marcar el final

Plan

Ojo con los errores en las pruebas

Causas comunes de errores:

- Partir de hechos falsos: las reglas suponen la verdad de las hipótesis
- Usar mal una regla: usarla aunque no sea aplicable

Ejemplo (1)

Teo A: 1/8 > 1/4
Dem:

⟨Aritmética⟩
$3 > 2$
$\Rightarrow$ ⟨ $x>y \Rightarrow x*a>y*a$ ⟩
$3*\log_{10}(1/2) > 2*\log_{10}(1/2)$
$\Rightarrow$ ⟨ $u*\log_{10}v = \log_{10} u^v$, dos veces ⟩
$\log_{10}(1/2)^3 > \log_{10}(1/2)^2$
$\Rightarrow$ ⟨ $\log_{10} x > \log_{10} y \Rightarrow x>y$ ⟩
$(1/2)^3 > (1/2)^2$
$\Rightarrow$ ⟨Aritmética⟩
$1/8 > 1/4$

Ejemplo (2)

Teo B: ¢1 = $1

Dem:

¢1 = $0.01 = ($0.1)^2 = (¢10)^2 = ¢100 = $1

Ejemplo (3)

Teo C: $a = b \Rightarrow a = 0$

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle \text{Hipótesis} \rangle \\
 & a = b \\
\Rightarrow & \langle\ x = y \ \Rightarrow\ u*x = u*y;\ a*a = a^2\ \rangle \\
 & a^2 = a*b \\
\Rightarrow & \langle\ x = y \ \Rightarrow\ x-u = y-u\ \rangle \\
 & a^2-b^2 = a*b-b^2 \\
\Rightarrow & \langle\ a^2-b^2 = (a-b)*(a+b);\ \ a*b-b^2 = (a-b)*b\ \rangle \\
 & (a-b)*(a+b) = (a-b)*b \\
\Rightarrow & \langle\ x*y = x*z \ \Rightarrow\ y = z\ \rangle \\
 & a+b = b \\
\Rightarrow & \langle\ x+c = c \ \Rightarrow\ x = 0\ \rangle \\
 & a = 0
\end{array}
$$