

Lógica proposicional: El chancuco

Definiciones:

Símbolo(s)	Nombre	Lectura
<i>true</i> , <i>Verdadero</i>	Verdadero	“Verdadero”
<i>false</i> , <i>Falso</i>	Falso	“Falso”
\neg	Negación	“no ...”
\equiv , \iff	Equivalencia	“... equivale a ...”
\vee	Disyunción	“... o ...”
\oplus	Disyunción exclusiva	“... o esto, o ...”
\wedge	Conjunción	“... y ...”
\implies	Implicación	“... implica ...”
\vdash	Teorema	“... es un teorema.”

Precedencia de operación: \neg , (\wedge, \vee, \oplus) , \implies , \equiv

Verdadero, Falso y doble negación:

Regla	Nombre
$\neg\neg p \equiv p$	Doble negación
$false \equiv \neg true$	Definición de false
$\neg false \equiv true$	Negación de false

Propiedades de la **conjunción** \vee :

Regla	Nombre
$p \vee false \equiv p$	Identidad \vee
$p \vee true \equiv true$	Dominación \vee
$p \vee p \equiv p$	Idempotencia \vee
$p \vee q \equiv q \vee p$	Conmutatividad \vee
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Asociatividad \vee
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributividad \vee sobre \wedge
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan \vee
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Absorción \vee sobre \wedge
$p \vee \neg p \equiv true$	Tautología (medio excluido)

Propiedades de la **disyunción** \wedge :

Regla	Nombre
$p \wedge true \equiv p$	Identidad de \wedge
$p \wedge false \equiv false$	Dominación \wedge
$p \wedge p \equiv p$	Idempotencia \wedge
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	Conmutatividad \wedge
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Asociatividad \wedge
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributividad \wedge sobre \vee
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	De Morgan de \wedge
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorción de \wedge sobre \vee
$p \wedge \neg p \equiv false$	Contradicción

Sobre \implies , \oplus , \equiv :

Regla	Nombre
$p \implies q \equiv \neg p \vee q$	Definición \implies
$(p \equiv q) \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$	Definición \equiv
$p \oplus q \equiv \neg(p \equiv q)$	Definición \oplus
$true \equiv (p \equiv p)$	Identidad \equiv
$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$	Conmutatividad \equiv
$((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$	Asociatividad \equiv
$p \implies q \equiv \neg q \implies \neg p$	Contrarecíproca
$p \vee q \equiv \neg p \implies q$	Definición de \vee con \implies
$p \wedge q \equiv \neg(p \implies \neg q)$	Definición de \wedge con \implies
$\neg(p \implies q) \equiv p \wedge \neg q$	Negación de \implies
$(p \implies q) \wedge (p \implies r) \equiv (p \implies (q \wedge r))$	Distributividad izquierda de \implies sobre \wedge
$(p \implies q) \vee (p \implies r) \equiv (p \implies (q \vee r))$	Distributividad izquierda de \implies sobre \vee
$(p \implies r) \wedge (q \implies r) \equiv (p \vee q) \implies r$	Distributividad derecha de \implies sobre \wedge
$(p \implies r) \vee (q \implies r) \equiv (p \wedge q) \implies r$	Distributividad derecha de \implies sobre \vee
$p \implies (q \implies r) \equiv (p \wedge q) \implies r$	Asociatividad izquierda de \implies
$p \equiv q \equiv \neg p \equiv \neg q$	Contrarrecíproca \equiv
$\neg(p \equiv q) \equiv \neg p \equiv q$	Negacion ₁ \equiv
$\neg(p \equiv q) \equiv p \equiv \neg q$	Negación ₂ \equiv
$p \equiv q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	Definición ₂ \equiv
$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	Definición ₂ \oplus

Reglas ecuacionales:

Regla	Nombre
$\frac{p \equiv p}{true}$	Reflexividad \equiv
$\frac{p \equiv q}{q \equiv p}$	Simetría \equiv
$\frac{q \equiv p, p \equiv r}{p \equiv r}$	Transitividad \equiv
$\frac{E \equiv r}{E[x:=p]}$	Sustitución
$\frac{E_1 \equiv E_2}{E[x:=E_1] \equiv E[x:=E_2]}$	Leibniz

Formato de demostración ecuacional:

Lema: ⟨Proposición necesaria para la demostración posterior⟩

Dem:

...

Teo: ⟨Proposición a demostrar⟩

Dem:

Exp.	Regla (razón)
E_0	
$\equiv E_1$	r_1
$\equiv E_2$	r_2
\vdots	\vdots
$\equiv E_{i-1}$	r_{i-1}
$\equiv E_i$	r_i
\vdots	\vdots
$\equiv E_k$	r_k
	\diamond

$[r_i \text{ justifica la equivalencia } E_{i-1} \equiv E_i.]$