4 LÓGICA DE PREDICADOS

Aristóteles, en el s. IV A.C., describió el primer sistema de inferencia de que se tiene noticia, con el que podía justificar la corrección de argumentos como

p: *Todos los hombres son mortales*.

q: *Sócrates es hombre*.

Entonces,

r: *Sócrates es mortal*.

La lógica proposicional no es suficiente para aseverar que esta argumentación es correcta. De hecho, si se usara lógica proposicional para modelar este argumento, habría que definir un símbolo de proposición para cada frase separada, como está señalado arriba, y debería poderse verificar que la fórmula

$$p \wedge q \Rightarrow r$$

fuera una tautología. Esto, claramente, no es cierto.

¿Qué tienen los silogismos de Aristóteles que no maneje la lógica proposicional? Hay dos características de lo que se afirma en los argumentos que la lógica proposicional deja de aprovechar.

En primer lugar, si se observa con más detalle la estructura de las frases, hay relaciones entre ellas que el modelaje con proposiciones simples no considera: "ser hombre" es parte de lo afirmado en la primera y la segunda premisas; así como "ser mortal" se afirma en la primera premisa y en la conclusión. O sea, con los símbolos que se han definido, es como si p y q, así como p y r, tuvieran algo en común que el modelaje proposicional deja de lado.

En segundo lugar, la primera frase es una afirmación de algo que debe ser cierto para una colección de individuos. El poder mencionar características de colecciones y, más adelante, inferir de allí verdades sobre los miembros de estas colecciones, tampoco es aprovechado por la lógica proposicional.

La discusión anterior ilustra la necesidad de aumentar el poder expresivo y deductivo de la lógica que se use en la práctica, de manera que estos razonamientos sean también justificables como lo fueron los ya estudiados en el caso proposicional. No se trata de desechar la lógica proposicional: por el contrario, se trata de enriquecer el lenguaje (para poder expresar, por ejemplo, afirmaciones sobre colecciones) y el aparato deductivo (para poder inferir aprovechándose de la estructura de lo afirmado). Esto va a dar lugar a un sistema lógico de más poder llamado *lógica de predicados*.

El lenguaje de la lógica de predicados añade los siguientes elementos al lenguaje:

- *términos* : objetos o descripciones de ellos, de los que se afirman o se niegan aseveraciones;
- *predicados* : afirmaciones sobre términos;
- *cuantificaciones* : afirmaciones sobre los elementos de una colección de términos.

Los *términos* se refieren a lo que en gramática de lenguaje natural son los sustantivos o frases sustantivadas (v.gr., "Sócrates", "el padre de Sócrates", "x" (un hombre cualquiera), etc.). Constituyen los sujetos de las frases que se afirman.

Los *predicados* afirman una relación entre términos. Corresponden, en lenguaje natural, a lo que se afirma de los sujetos ("… es hombre", "… es mortal", etc.).

Las *cuantificaciones* son categorías de frases que afirman algo sobre los elementos de una colección. En lógica de predicados es usual disponer de dos formas de cuantificaciones:

- *universal* : para denotar una cualidad que debe ser cierta para todos los elementos de una colección;
- *existencial* : para denotar una cualidad que debe ser cierta para algún miembro de una colección.

El aparato deductivo debe extenderse para manipular las nuevas fórmulas. Deben incluirse nuevas reglas de inferencia que permitan justificar la corrección de las argumentaciones que involucren las nuevas fórmulas.

La buena noticia es que las cuantificaciones necesarias para definir una lógica de predicados como la que se quiere pueden ser definidas como operaciones de alto orden, originadas de las operaciones $\wedge$ y $\vee$ (asociativas, conmutativas y con unidad), en el sentido del Cap. 3. Esto hace que la sintaxis de las nuevas fórmulas bien formadas sea la de cuantificaciones concretas, en el sentido ya conocido. Además, los axiomas y las reglas de inferencia de las cuantificaciones genéricas del Cap. 3 son aplicables a todo lo que se diga de cuantificaciones universales y existenciales.

4.1 EL LENGUAJE DE LA LÓGICA DE PREDICADOS

En el cálculo o lógica proposicional se ha trabajado con expresiones construidas a partir de variables y operadores booleanos. El *cálculo* o *lógica de predicados* aumenta la expresividad del lenguaje a expresiones en las que hay variables de otros tipos[1] y se permiten cuantificaciones sobre estas variables.

Los tipos pueden pensarse, intuitivamente, como colecciones de objetos que –eventualmente- pueden operarse mediante funciones o métodos que los transforman. La colección de los objetos de un tipo constituye el *universo* del tipo.

Para expresar el hecho de que un elemento del lenguaje `x` es de tipo `T`, se escribe `x:T`. En la práctica es corriente omitir el tipo de los elementos involucrados en una fórmula, a menos que sea conveniente por resaltar cuál es la situación.

4.1.1 Términos

Supóngase que se conocen algunos tipos básicos $T_1, \ldots, T_r$. Es usual contar con tipos básicos como **B** (`bool`: valores booleanos), **Z** (`int`: números enteros) , **N** (`nat`: números naturales), etc. Toda variable tiene un tipo, i.e., una colección donde puede asumir valores.

El lenguaje tiene unos símbolos especiales, denominados *símbolos de constante*, con los que se pretende representar elementos específicos de un tipo, v.gr., `true`, `0`, etc. Cada símbolo de constante tiene un tipo, v.gr., `true: bool`, `0: int`, etc.

El lenguaje permite el uso de símbolos especiales, denominados *símbolos de función*. Por ejemplo, +, *, etc. son símbolos de función. A cada símbolo de función `f` se asocia un tipo, de la forma

$$D \to T$$

donde `D` es un producto cartesiano de tipos (llamado el *dominio*) y `T` es un tipo (llamado el *codominio*). Por ejemplo, es usual definir el símbolo de función + como de tipo $\texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int}$. Entonces, se escribe

$$+: \texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int}$$

Un *término de tipo* `T` es una construcción sintáctica que cabe dentro de alguna de las siguientes posibilidades:

- `x`, donde `x` es una variable o un símbolo de constante, con `x:T` ;
- $f(t_1,\ldots,t_n)$, donde $f:T_1 \times \ldots \times T_n \to T$ y, para $k=1,\ldots,n$: $t_k:T_k$.

[1] La noción de *tipo* se da aquí de manera intuitiva, de manera similar a como este concepto se aprende y se usa al entender un lenguaje de programación. Hay tipos numéricos (v.gr., números enteros, números reales, etc.), caracteres (v.gr., el tipo `char`), etc. Se entiende que toda expresión que denote un objeto debe tener un tipo al que pertenece.

En el último caso, los `t`$_k$'s se llaman *argumentos* del símbolo de función `f`. Cuando hay uno solo se puede evitar el uso de paréntesis y escribir, en cambio, `f.x` .

Ocasionalmente se usan símbolos de función binarios (de dos argumentos) en notación infija. En este caso, se prefiere escribir `x+y` en lugar de `+(x,y)`. En general, por legibilidad se permite el uso de notaciones usuales, v.gr., `log x`, `(n+1)!`, etc., siempre que no haya lugar a confusiones o ambigüedades.

Ejemplo A: Términos

Términos numéricos

Las expresiones aritméticas

```
0
3+45
m+1
log x + fib.n
```

son términos, si se entiende que las constantes `0`, `3` y `45` están en el lenguaje, así como la variable `m`, la operación binaria de suma `+` y las operaciones unarias `log` y `fib`.

Términos de otros tipos

El modelaje de una realidad específica puede requerir definir símbolos de predicado específicos. Por ejemplo, si se piensa en un universo `Persona`, para modelar conjuntos de personas, se pueden considerar símbolos de constante o de función como

```
padre    : Persona → Persona
abuelo   : Persona → Persona
Sócrates : Persona
```

Y se pueden construir términos de tipo `Persona`, como (`x` es una variable de tipo `Persona`):

```
x
Sócrates
padre(x)
abuelo(padre(Sócrates))
```

§

4.1.2 Predicados

El lenguaje tiene *símbolos de predicado*, que son símbolos de funciones booleanas, i.e., símbolos de funciones cuyo codominio es **B**.

Ejemplo A: Símbolos de predicados

Los siguientes son ejemplos de símbolos de predicado

```
eq      : T × T             → bool
<       : int × int         → bool
≥       : nat × nat         → bool
hombre  : Persona           → bool
mortal  : Persona           → bool
hermano : Persona × Persona → bool
```

§

Se puede usar una notación prefija, como en eq, hombre, mortal y hermano, v.gr. (nótese cómo se usan términos de tipos como los introducidos en el Ejemplo A de 4.1.1):

```
eq(7+x,12)
hombre(Sócrates)
mortal(abuelo.x)
hermano(padre.Sócrates,Juan)
```

o una notación infija como en

```
23 < 12
x+4 ≥ 23
```

[]

Un *predicado atómico* es una construcción sintáctica que cabe dentro de alguna de las siguientes posibilidades:

- una de las constantes booleanas true o false
- x, donde x es una variable, con x:bool
- $P(t_1,\ldots,t_n)$, donde $P:T_1 \times \ldots \times T_n \rightarrow bool$ y $t_k:T_k$, para $k=1,\ldots,n$.

Un *predicado* es una construcción sintáctica que cabe dentro de alguna de las siguientes posibilidades:

- p , donde p es un predicado atómico
- $(\neg p)$, donde p es un predicado
- $(p \nabla q)$, donde p, q son predicados, ∇ es un operador binario de lógica proposicional.
- $(\oplus x \mid R : P)$, donde R, P son predicados, y $\oplus$ puede ser $\wedge$ o $\vee$.

Para los casos de cuantificación, se consideran los axiomas correspondientes de cuantificaciones que se han presentado en el Cap. 3. Además, se prefiere la notación:

$(\forall x \mid R : P) \equiv (\wedge x \mid R : P)$

$(\exists x \mid R : P) \equiv (\vee x \mid R : P)$

Las precedencias se definen como en lógica proposicional, de manera que se puedan omitir paréntesis sin ambigüedad.

4.1.2.1 Significado pretendido

Un predicado es una frase que afirma algo. Por tanto, puede considerarse como verdadero o como falso, aunque no las dos cosas a la vez. Así, si los términos corresponden a los sujetos de las oraciones en lenguaje natural, los predicados son oraciones, como lo son las proposiciones simples. La novedad es que se pueden usar variables y, además, que se pueden expresar cuantificaciones sobre ellas.

El significado de una fórmula α, que no use cuantificadores, se puede calcular si se conoce el valor de verdad de las fórmulas atómicas que aparecen en α. Para explicarlo de manera simple, cada fórmula atómica se considera como un símbolo proposicional que toma el valor de verdad de cada caso; y se procede a evaluar el valor de verdad de α como si fuera una fórmula proposicional.

Por ejemplo, si se sabe que hombre(Sócrates) y mortal(padre(Sócrates)) son verdaderas, entonces se quiere que:

```
   hombre.Sócrates ⇒ mortal(padre.Sócrates)
=     ⟨Hip: hombre.Sócrates ≡ true, mortal(padre.Sócrates) ≡ true ⟩
   true ∧ true
=
   true
```

El significado pretendido para las fórmulas con cuantificadores es el siguiente:

$(\forall x \mid R : E)$ $\approx$ "para todo x tal que R, vale E"

$(\exists x \mid R : E)$ $\approx$ "existe x tal que R, que cumple E"

Como convención, si $R \equiv true$, se omite, es decir:

$(\forall x \;|\!: E)$ abrevia $(\forall x \mid true : E)$

$(\exists x \;|\!: E)$ abrevia $(\exists x \mid true : E)$.

La notación de cuantificaciones que aquí se usa es algo diferente de la usualmente utilizada en textos de matemáticas. Allí es corriente encontrar notaciones como, por ejemplo, $\forall x\!: E$ y $\exists x\!: E$. Las ventajas de la notación que se ha escogido aquí son las siguientes:

- Es claro cuál es el *alcance* de la variable de cuantificación, i.e., el significado de la variable que cuantifica es el mismo dentro del paréntesis externo de la cuantificación.
- La posibilidad de expresar rangos da lugar a fórmulas que podrían considerarse más legibles.
- Se incluirán axiomas que permitan interpretar fórmulas que manejan rangos en términos de fórmulas con rangos universales (`true`), lo que corresponde a las notaciones usuales de otros textos. Es decir, la notación "estándar" es expresable en términos de la notación que aquí se usa[2].

4.1.2.2 Variables libres / acotadas

Obsérvese que el lenguaje permite hablar de predicados como

$x+4 \geq 23$

Con la idea de la sección anterior, si se quiere saber el valor de verdad de este predicado, se vería que esto depende del valor que se dé a la variable x. Así, si $x=0$, el predicado es falso. Pero si $x=20$, es verdadero. O sea, en principio no se podría decir si el predicado es falso o no.

Una variable *libre* es una variable que aparece en un predicado, pero que no está cuantificada (o sea, no es una variable de una cuantificación). Una variable *acotada* es una que no aparece o que aparece cuantificada.

Por ejemplo, en los siguientes predicados la variable x es libre y la variable y es acotada:

$x+24\geq 23$

$x+24\geq 23 \;\Rightarrow\; (\exists y|\!: y>0)$

$x+24\geq 23 \;\Rightarrow\; (\exists x|\!: x>0)$

En los dos primeros ejemplos, la variable x claramente no está cuantificada. En el último, aunque lo está en una subfórmula, no lo está en todo el predicado. La variable y no está en la primera ni en la tercera fórmula, de modo que es acotada allí. En la segunda es acotada porque aparece cuantificada.

Intuitivamente, si la variable x aparece libre en el predicado α, entonces α depende de x.

Nótese que, como en el tercer ejemplo, una variable puede aparecer libre y acotada en una fórmula. Aunque esto es sintácticamente posible, puede dar lugar a confusiones semánticas. De hecho, parece natural –y el aparato deductivo puede garantizarlo- que la segunda y la tercera fórmulas tengan el mismo valor de verdad. Y, si esto es así, mejor preferir la segunda fórmula a la tercera. La receta es simple: usar variables de cuantificación diferentes para cada cuantificación y diferentes de las variables que no estén cuantificadas. Esta buena práctica simplifica la interpretación de las fórmulas involucradas.

La discusión anterior parece indicar que no hay manera de dar significado a los predicados que tengan variables libres. Sin embargo, hay una convención que resulta útil y que es muy usada en la práctica: si en una fórmula α aparece una variable libre x, se conviene que α es una abreviatura de

$$(\forall x \;|\!: \alpha)$$

[2] Parecería que la notación que aquí se usa pudiera ser más expresiva que la "estándar". Pero no: se mostrará que son igualmente expresivas, de modo que todo lo que se pueda expresar en una notación se podrá expresar en la otra.

Ejemplo B: Predicados

Los siguientes ejemplos usan predicados como en el Ejemplo A de esta sección y términos como argumentos, a partir de las definiciones del Ejemplo A de 4.1.1.

Predicados atómicos

Se puede usar notación prefija, como en `eq`, `hombre`, `mortal` y `hermano`, v.gr.:

```
eq(7+x,12)
hombre(Sócrates)
mortal(abuelo.x)
hermano(padre.Sócrates,Juan)
```

o notación infija como en

```
23 < 12
x+4 ≥ 23
```

Predicados

Los predicados atómicos ya son predicados, de modo que los ejemplos anteriores son también de predicados. Sin embargo, el lenguaje permite expresar fórmulas mucho más complicadas, v.gr.,

```
eq(7+x,12) ∧  x+4≥23
¬hombre.x ⇒ (mortal.x ≡ ¬mortal.x)
(∀x | hombre.x : mortal.x)
hombre.Sócrates ∧ (∀x | hombre.x : mortal.x) ⇒ mortal.Sócrates
(∀ε |ε>0 : (∃δ | δ>0 : (∀x | |x-a|<ε : |f(x)-f(a)|<ε )))
```

Obsérvese cómo el lenguaje se ha enriquecido para expresar enunciados que pueden ser útiles para la deducción de la verdad de argumentaciones como el silogismo aristotélico que empieza este capítulo. El último enunciado se puede interpretar como la expresión formal de la propiedad de la continuidad de una función `f` en un punto a.

Predicados con variables libres

Al hablar de relaciones algebraicas, es usual encontrar afirmaciones como

```
x + 0 = x
x – x = 0
x + (y + z) = (x + y) +z
```

En realidad, se quiere decir que:

```
(∀x|: x+0 = x)
(∀x|: x – x = 0)
(∀x,y,z| x + (y + z) = (x + y) +z)
```

§

Ejercicios 4.1

1 Con el siguiente conjunto de símbolos de predicado y de función, cuyos significados pretendidos se explican informalmente, escriba fórmulas de lógica de predicados que expresen los enunciados que se piden a continuación.

`arq.x`	≈ "x es arquitecto"
`ing.x`	≈ "x es ingeniero"
`empleado(x,e)`	≈ "x trabaja en la empresa e"
`amigo(x,y)`	≈ "x es amigo de y"
`jefe(x,y)`	≈ "x es jefe de y"

- **a** Pedro trabaja en CSA.
- **b** Juan es amigo de un trabajador de CSA.
- **c** Todo trabajador de CSA es arquitecto o ingeniero.
- **d** Hay trabajadores de CSA que no son amigos.
- **e** Hay trabajadores de CSA que no son amigos, pero cuando son amigos, ambos son arquitectos o ambos son ingenieros.
- f Hay trabajadores de CSA que no son amigos de su jefe.
- g En ninguna empresa hay jefes que son amigos de los empleados.

2 En cada caso, decidir si x, y, z son variables libres o acotadas en la fórmula.

- **a** `(∀x| x<5 : x+3<8)`
- **b** $(\forall x,y,z|: x^2+y^2\neq z^2)$
- **c** `x<5 ⇒ (∀y,z|y+z=x: y<x)`
- **d** `¬(x=2*y ⇒(∀x,y|:x=2*y))`

4.2 EL CÁLCULO DE PREDICADOS

En lógica proposicional, la verdad de una fórmula se puede determinar, así sea muy dispendioso, mediante una tabla de verdad. En lógica de predicados esto es usualmente imposible.

El problema de poder definir lo que podría hacer las veces de una tabla de verdad radica en que los tipos de las variables no son finitos, en general. Si lo fueran, se podría definir la verdad de cada predicado atómico con una tabla que permitiera, como se explica en 4.1.2.1, calcular la verdad de todos los predicados[3].

La alternativa está en calcular la verdad de los predicados, a partir de axiomas y de reglas de inferencia que deben justificarse de manera intuitiva, a partir del significado pretendido para las fórmulas. Es esencial conocer el cálculo proposicional, porque todo axioma de éste sirve como axioma del cálculo de predicados, si se remplazan variables proposicionales por predicados. Por ejemplo, son axiomas del cálculo de predicados:

```
true
hombre.x ∨ ¬hombre.x ≡ true
false ⇒ (∀x|: mortal.x)
```

porque son instancias de los axiomas (cambiando símbolos de proposición por predicados):

```
true
p ∨ ¬p ≡ true
false ⇒ p
```

Y por tanto, todo teorema de lógica proposicional en el que se remplacen los símbolos de proposición por predicados, es también un teorema de lógica de predicados.

Se quedan por fuera de este modo de decidir su verdad, los predicados que contengan cuantificaciones universales y existenciales. Como cuantificaciones que son, las fórmulas que usan "para todo" y "existe" se rigen por los axiomas y reglas de cuantificaciones genéricas que se introdujeron en el Cap. 3. Sin embargo, hay peculiaridades de la lógica de predicados que se reflejan en axiomas propios de este aparato deductivo y que se explican en secciones posteriores.

Todas las técnicas y formas de demostración introducidas en 2.4 (pruebas con hipótesis, casos, contradicción, contrapositiva) se extienden a la lógica de predicados.

---

[3] Algo como esto se aprovecha en la práctica informática, cuando se usan bases de datos llamadas relacionales, para representar realidades finitas, v.gr., los empleados de una empresa, sus edades, su salario, etc.

4.2.1 Cuantificación universal

Las reglas genéricas de cuantificación son aplicables a las cuantificaciones universales. En particular, la partición de rango siempre es posible, porque el operador $\wedge$ es idempotente, i.e., $p \wedge p \equiv p$.

El siguiente axioma permite reducir fórmulas que manipulen rangos (como el predicado R, en el axioma) a otras equivalentes que no los usen. Así, usar rangos no da más expresividad a esta lógica de predicados frente a otro sistema deductivo no los permita.

Axioma: Trueque

$$(\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid : R \Rightarrow P)$$

[]

El siguiente axioma relaciona la disyunción con la cuantificación universal y puede demostrarse en el caso de rangos finitos. Sin embargo, es preciso postularlo como axioma para el caso general.

Axioma: Distributividad $\vee/\forall$

Si P no depende de x:

$$P \vee (\forall x \mid R : Q) \equiv (\forall x \mid R : P \vee Q)$$

[]

Nótese que la distributividad de $\vee/\forall$ expresa el hecho de "sacar de la cuantificación" un elemento que no depende de la variable que cuantifica, o bien, que la variable que cuantifica no aparece libre en él.

El siguiente resultado es un caso especial del axioma:

Teo:

Si P no depende de x:

$$P \vee (\forall x \mid : \neg R) \equiv (\forall x \mid R : P)$$

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x \mid R : P) \\
= & \quad \langle\ a \vee false \equiv a\ \rangle \\
 & (\forall x \mid R : P \vee false) \\
= & \quad \langle\ \text{Distr } \vee/\forall\ \rangle \\
 & P \vee (\forall x \mid R : false) \\
= & \quad \langle\ \text{Trueque}\ \rangle \\
 & P \vee (\forall x \mid : R \Rightarrow false) \\
= & \quad \langle\ \text{Contrapositiva, } \neg false \equiv true\ \rangle \\
 & P \vee (\forall x \mid : true \Rightarrow \neg R) \\
= & \quad \langle\ \text{Trueque}\ \rangle \\
 & P \vee (\forall x \mid : \neg R)
\end{array}
$$

[]

4.2.1.1 Teoremas importantes de $\forall$

Los siguientes resultados son demostrables con el cálculo deductivo para lógica de predicados:

Teo A: Distributividad $\wedge/\forall$*:*

Si P no depende de x:

$$\neg(\forall x \mid : \neg R) \Rightarrow (P \wedge (\forall x \mid R : Q) \equiv (\forall x \mid R : P \wedge Q))$$

[]

El teorema anterior establece una distributividad diferente de la expresada con las cuantificaciones genéricas. En este caso, debe tenerse un predicado independiente de la variable de cuantificación pero, adicionalmente, hay que poder afirmar que es cierto $\neg(\forall x|:\neg R)$. Más adelante, se verá que esto equivale a afirmar que hay un x que satisface el rango. En otras palabras, se verá que:

$$(\exists x|:R) \Rightarrow (P \wedge (\forall x| R : Q) \equiv (\forall x| R : P \wedge Q))$$

Teo B:

$$(\forall x| R : true) \equiv true$$

[]

Este teorema permite simplificar una cuantificación que afirma `true`. Nótese que esto vale, incluso, si $R \equiv false$.

Teo C:

$$(\forall x| R : P \equiv Q) \Rightarrow (\forall x| R : P) \equiv (\forall x| R : Q)$$

[]

El resultado anterior parece natural, aunque se observa que no se afirma la dirección contraria. Para evitar usar una variable con más de un significado, puede ser conveniente renombrar las variables de la parte derecha de la implicación.

Teo D: Debilitamiento de rango

$$(\forall x| Q \vee R: P) \Rightarrow (\forall x| Q: P)$$

[]

Otro resultado plausible: si P vale universalmente para el rango $Q \vee R$, entonces vale universalmente para el rango Q, que está incluido en $Q \vee R$. El siguiente resultado se entiende de manera análoga:

Teo E: Debilitamiento de cuerpo

$$(\forall x| R: P \wedge Q) \Rightarrow (\forall x| R: P)$$

[]

Ahora, un resultado sobre implicaciones cuantificadas (compárese con el de la cuantificación universal de equivalencias):

Teo F: Monotonía de $\forall$

$$(\forall x| R : Q \Rightarrow P) \Rightarrow ((\forall x | R : Q) \Rightarrow (\forall x | R : P))$$

[]

El siguiente teorema da sentido a que la verdad de una afirmación sobre una colección de elementos implica la verdad sobre los individuos de la colección. Nótese que el teorema es cierto sólo cuando el rango de la cuantificación universal es `true.`

Teo G: Instanciación

$$(\forall x|: P) \Rightarrow P[x:= E]$$

[]

El siguiente resultado se apoya en la convención de que un predicado con variables libres debe entenderse como universalmente cuantificado. Es un *meta teorema,* porque es una verdad sobre el cálculo

Meta teorema H: $\vdash P$ si y solo si $\vdash (\forall x|: P)$

[]

El meta teorema afirma que P es demostrable si y solo si $(\forall x|: P)$ también lo es. El resultado da una manera de demostrar un predicado que tiene una cuantificación universal: basta con mostrar que el cuerpo –sin cuantificar- es verdadero. Esta es una técnica muy socorrida cuando para mostrar que algo vale para todo x, se muestra para un x arbitrario, pero fijo.

4.2.2 Cuantificación existencial

Las reglas genéricas de cuantificación también son aplicables a la cuantificación existencial. También hay posibilidad de partir rangos siempre, ya que $\vee$ es idempotente, i.e., $p \vee p \equiv p$.

Las cuantificaciones existenciales pueden entenderse en términos de cuantificaciones universales. El siguiente axioma, basado en la ley de De Morgan para el caso finito, justifica lo anterior. Si se observa bien, este axioma define un "existe" en términos de un "para todo".

Axioma: De Morgan Generalizado

$$(\exists x|\ Q : R) \equiv \neg(\forall x|\ Q : \neg R)$$

[]

El axioma hace innecesario incluir axiomas duales a los la cuantificación universal para los existenciales, porque pueden ser deducidos de los axiomas dados para $\forall$.

4.2.2.1 Teoremas importantes de $\exists$

El Teorema de trueque para cuantificaciones existenciales corresponde al Axioma de trueque para universales. En este sentido, sirve para explicar lo que un rango de cuantificación significa en el caso existencial y para entender que la consideración de rangos no añade expresividad a la de una lógica de predicados que no los usa..

Teo A: Trueque

$$(\exists x\ |\ R : P) \equiv (\exists x\ |: R \wedge P)$$

[]

Los siguientes dos teoremas generalizan la distributividad de $\wedge/\vee$, pero exigen independencia de lo que se distribuye en relación con la variable que cuantifica el existencial.

Teo B: Distributividad de $\wedge/\exists$
P no depende de x:

$$P \wedge (\exists x|\ R : Q) \equiv (\exists x|\ R : P \wedge Q)$$

[]

Teo C:
P no depende de x:

$$P \wedge (\exists x|: R) \equiv (\exists x|\ R : P)$$

[]

Como en el caso análogo de $\wedge/\forall$ (Teo A en 4.2.1.1), también hay distributividad $\vee/\exists$ para un predicado independiente de la variable de cuantificación, teniendo en cuenta que debe haber elementos que satisfagan el rango.

Teo D: Distributividad $\vee/\exists$:
P no depende de x:

$$P \vee (\exists x|\ R : Q) \equiv (\exists x|:R) \Rightarrow (\exists x|\ R : P \vee Q)$$

[]

El siguiente teorema es plausible: no es posible que algo cumpla `false`.

Teo E:
$(\exists x| \; R : false) \equiv false$

[]

Los dos siguientes teoremas se refieren a debilitamiento de rango y de cuerpo, respectivamente. Su significado es también bastante fácil de justificar de manera intuitiva.

Teo F: Debilitamiento de rango
$(\exists x| \; Q \vee R: P) \Leftarrow (\exists x| \; Q: P)$

[]

Teo G: Debilitamiento de cuerpo:
$(\exists x| \; R: P \vee Q) \Leftarrow (\exists x| \; R: P)$

[]

Ahora, un resultado sobre implicaciones cuantificadas (compárese con el Teo F de 4.2.1.1):

Teo: Monotonía de $\exists$:
$(\forall x| \; R : Q \Rightarrow P) \Rightarrow ((\exists x \;|\; R : Q) \Rightarrow (\exists x \;|\; R : P))$

[]

El siguiente teorema justifica la introducción de fórmulas con existenciales, a partir de la exhibición de un ejemplo que cumple el cuerpo con alguna instanciación.

Teo: $\exists$-introducción
$(\exists x|: P) \Leftarrow P[x:= E]$

[]

Meta teorema del testigo

Si P, R no dependen de a:
$\vdash (\exists x| \; R : P)$ si y solo si $\vdash (R \wedge P)[x:= a]$

[]

El anterior resultado corresponde, en lo existencial, al Meta teorema de Generalización en la cuantificación universal. El resultado se puede leer de la siguiente manera:
"Para probar $(\exists x| \; R : P)$ se exhibe un ejemplo $(R \wedge P)[x:= a]$ ".

En una demostración de $(R \wedge P)[x:= a]$, el elemento a es un *testigo* del existencial. El testigo cumple el rango y el predicado del cuerpo.

Ejercicios 4.2

1 El teorema de distributividad de $\wedge/\forall$ es diferente al de $\vee/\forall$. Explicar por qué la siguiente expresión, que se asemeja más a la distributividad de $\vee/\forall$, no es un teorema:
$$P \wedge (\forall x| \; R : Q) \equiv (\forall x| \; R : P \wedge Q)$$

2 Explicar por qué, si en el axioma
$$(\forall x| \; R : P \equiv Q) \Rightarrow (\forall x| \; R : P) \equiv (\forall x| \; R : Q)$$
se cambia la implicación por una equivalencia, el resultado deja de ser una tautología.

3 Para el cuantificador $\forall$, demostrar el debilitamiento de rango a partir del axioma de trueque y el teorema de debilitamiento de cuerpo.

4 ¿Por qué la distributividad de $\wedge/\exists$ no necesita garantizar que el rango no sea vacío, mientras que la de $\vee/\exists$ sí lo requiere en la parte derecha?

5 Para el cuantificador $\exists$, demostrar el debilitamiento de rango a partir del axioma de trueque y el teorema de debilitamiento de cuerpo.

4.3 DEDUCCIÓN EN LÓGICA DE PREDICADOS

Retomando el ejemplo de Aristóteles:

"Todo hombre es mortal. Sócrates es hombre. Entonces, Sócrates es mortal".

Modelado:

Universo:

Los seres vivos

Constantes

`S : "Sócrates"`

Símbolos de función:

No hay.

Símbolos de predicado:

`h.x` : "x es hombre"

`m.x` : "x es mortal"

Argumento:

```
[h1]     (∀x| h.x : m.x)
[h2]     h.S
[C]      m.S
```

A demostrar:

```
⊢ h1 ∧ h2 ⇒ C
```

En lógica de predicados vale también el meta teorema de la deducción:

Teo: `h1 ∧ h2 ⇒ C`

Dem:

```
Hip: h1, h2       // A demostrar: C
   true
=     ⟨ Hip: h1 ⟩
   (∀x| h.x : m.x)
=     ⟨ Trueque ⟩
   (∀x|: h.x ⇒ m.x)
⇒     ⟨ Instanciación:  x:= S ⟩
   h.S ⇒ m.S
⇒     ⟨Hip h2; Modus Ponens⟩
   m.S
```

[]

4.3.1 Traducción de lenguaje natural

La traducción de enunciados en lenguaje natural a la lógica de predicados debe considerar aspectos que la lógica proposicional no tiene en cuenta. En este sentido, las ideas de 2.2 deben extenderse a consideraciones estructurales en las frases, que redunden en usos de cuantificaciones universales o existenciales.

Eventualmente deben definirse

- universo del discurso (para establecer valores que pueden tomar las variables de cuantificación);
- símbolos de función (para establecer propiedades de algunos términos);
- símbolos de predicado (para definir condiciones que deban cumplirse).

Lenguaje natural	***Ejemplos***	***Operador***	***Traducción***
(para) todo	Todo ingeniero es bachiller	∀	`(∀x| ing.x : bac.x)` donde `ing.x` ≈ "x es ingeniero" `bac.x` ≈ "x es bachiller"
(para) cada	Cada lunes recogen basura	∀	`(∀d| lunes.d : rec.d)` donde `lunes.d` ≈ "d es lunes" `rec.d` ≈ "en d recogen basura"
cualquier	Reciben el impuesto en cualquier ventanilla	∀	`(∀v|: ri.v)` donde `ri.v` ≈ "en la ventanilla v reciben el impuesto"
frases universales	Los enteros pares son múltiplos de 2	∀	`(∀z:int| par.z : mult(z,2))` donde `par.z` ≈ "z es par" `mult(z,y)` ≈ "z es múltiplo de y"
frases universales	Un entero impar no es un múltiplo de 2	∀	`(∀z:int| impar.z: ¬mult(z,2))` donde `impar.z` ≈ "z es impar" `mult(z,y)`≈ "z es múltiplo de y"
existe	Existe un entero que no es múltiplo de 2	∃	`(∃z:int|: ¬mult(z,2))` donde `mult(z,y)`≈ z es múltiplo de y
(para) algún / alguno / algunos	Algunos jugadores anotaron gol	∃	`(∃z | jugador.z: anota.z)` donde

			jugador.z ≈ "z es jugador" anota.z ≈ "z anota gol"
hay	Hay máquinas que no se han revisado	∃	$(\exists m{:}Maq \mid{:}\ \neg rev.m)$ donde Maq ≈ "las máquinas" rev.m ≈ "m se revisa"
al menos uno	Al menos uno de Ustedes me va a traicionar	∃	$(\exists x{:}Uds \mid{:}\ tr.x)$ donde Uds ≈ "Ustedes" tr.x ≈ "x me traiciona"

Ejercicios 4.3

1 Traducir las siguientes frases en lenguaje natural a lógica de predicados:
- **a** Cualquier persona puede conducir carro.
- **b** Todo ser humano es hombre o mujer.
- **c** Para todo número entero existe un divisor entero.
- **d** Si no todos los perros son perezosos, entonces existe un perro que no es perezoso.
- **e** Algunas personas que terminan bachillerato no van a la universidad.

2 Compruebe que la siguiente argumentación es correcta. Suponga que el universo se refiere a las cosas de tipo cadabra.
"Dos cadabras cualesquiera se pueden unir, dando como resultado una cadabra. Si la cadabra x es un abra, para toda y, unir a y con x o viceversa da como resultado y. Entonces, si p y q son abras, p es igual a q".

3 Demuestre que el siguiente argumento es correcto: "Si un equipo que empate con Brasil le gana a Argentina o no pierde con Bolivia, clasificará al Mundial de Fútbol. Colombia empató con Brasil y con Bolivia. Entonces, Colombia clasificará al Mundial."