

Taller. Sucesiones y series de números reales

1. Demuestre que las siguientes sucesiones son convergentes y calcule su límite.

(a) $\left(\sqrt[n]{\log n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $\left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

2. Determine si las siguientes sucesiones convergen o divergen. Para las sucesiones convergentes determine su límite.

(a) $\left(\sqrt[n]{n+\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(d) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(g) $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(e) $\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(h) $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $\left(\frac{n^2+1}{(n+1)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(f) $\left(n^{(-1)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(i) $\left(\frac{n!}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

3. Defina inductivamente la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma: $x_1 = \sqrt{2}$, y para $n \geq 1$ se define $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$. Demuestre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. Determine un valor aproximado del límite de esta sucesión.

4. Demuestre que las siguientes series son convergentes y calcule su límite.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n-1}}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)}$

5. Determine si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{\ln(n+1)\ln(n+2)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{n}}}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^n}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n \ln n}{n^2+5}$