

Matemáticas Discretas I

Relaciones

Juan Francisco Díaz Frías

Profesor Titular (1993-hoy)
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Edif. 331 - 2111



Universidad del Valle

Octubre 2018

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Motivación - Definiciones

- Una **relación** es una afirmación sobre elementos de conjuntos que se expresa con un predicado y, por tanto, puede ser o no verdadera. Por ejemplo, " x es mayor que y ", " $x + y$ es menor que z ", "José, Patricia y Gloria son familiares", "La estación x y la estación y se encuentran en una misma ruta de transmilenio", "Se puede ir de la estación x a la estación y haciendo máximo un transbordo", " m es un municipio del departamento d ", ...
- Formalmente, una **relación** se representa como un **subconjunto del producto cartesiano** de los conjuntos involucrados.
- Aplicaciones: Las relaciones se suelen almacenar en **bases de datos relacionales**, a partir de las cuales se pueden calcular otras relaciones o **consultas**.

Motivación - Definiciones

- Una **relación** es una afirmación sobre elementos de conjuntos que se expresa con un predicado y , por tanto, puede ser o no verdadera. Por ejemplo, " x es mayor que y ", " $x + y$ es menor que z ", "José, Patricia y Gloria son familiares", "La estación x y la estación y se encuentran en una misma ruta de transmilenio", "Se puede ir de la estación x a la estación y haciendo máximo un transbordo", " m es un municipio del departamento d ", ...
- Formalmente, una **relación** se representa como un **subconjunto del producto cartesiano** de los conjuntos involucrados.
- Aplicaciones: Las relaciones se suelen almacenar en **bases de datos relacionales**, a partir de las cuales se pueden calcular otras relaciones o **consultas**.

Motivación - Definiciones

- Una **relación** es una afirmación sobre elementos de conjuntos que se expresa con un predicado y, por tanto, puede ser o no verdadera. Por ejemplo, " x es mayor que y ", " $x + y$ es menor que z ", "José, Patricia y Gloria son familiares", "La estación x y la estación y se encuentran en una misma ruta de transmilenio", "Se puede ir de la estación x a la estación y haciendo máximo un transbordo", " m es un municipio del departamento d ", ...
- Formalmente, una **relación** se representa como un **subconjunto del producto cartesiano** de los conjuntos involucrados.
- Aplicaciones: Las relaciones se suelen almacenar en **bases de datos relacionales**, a partir de las cuales se pueden calcular otras relaciones o **consultas**.

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Relaciones binarias

- Recordemos el **Producto cartesiano**: El producto cartesiano de los conjuntos A y B , se denota $A \times B$, y contiene todos las parejas de elementos de A con elementos de B

$$A \times B = \{(x, y) : U \times U | x \in A \wedge y \in B\}$$

Si $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{4, 8\}$ entonces

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}.$$

Como $|A| = 3$ y $|B| = 2$ entonces $|A \times B| = 6$.

- Una **relación binaria** entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.

El producto cartesiano de dos conjuntos finitos A y B es finito, pero el conjunto de relaciones binarias entre A y B es infinito.

El producto cartesiano de dos conjuntos infinitos es infinito.

El conjunto de relaciones binarias entre dos conjuntos infinitos es infinito.

Relaciones binarias

- Recordemos el **Producto cartesiano**: El producto cartesiano de los conjuntos A y B , se denota $A \times B$, y contiene todos las parejas de elementos de A con elementos de B

$$A \times B = \{(x, y) : U \times U | x \in A \wedge y \in B\}$$

Si $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{4, 8\}$ entonces

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}.$$

Como $|A| = 3$ y $|B| = 2$ entonces $|A \times B| = 6$.

- Una **relación binaria** entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.

Siguiendo con el ejemplo: como $|A \times B| = 6$, hay 2^6 relaciones (subconjuntos) posibles.

Por ejemplo, $R_1 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$ es una relación.

O, $R_2 = \{(1, 8), (2, 4)\}$ es otra relación.

Relaciones binarias

- Recordemos el **Producto cartesiano**: El producto cartesiano de los conjuntos A y B , se denota $A \times B$, y contiene todos las parejas de elementos de A con elementos de B

$$A \times B = \{(x, y) : U \times U | x \in A \wedge y \in B\}$$

Si $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{4, 8\}$ entonces

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}.$$

Como $|A| = 3$ y $|B| = 2$ entonces $|A \times B| = 6$.

- Una **relación binaria** entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.

Siguiendo con el ejemplo: como $|A \times B| = 6$, hay 2^6 relaciones (subconjuntos) posibles.

Por ejemplo, $R_1 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$ es una relación.

O, $R_2 = \{(1, 8), (2, 4)\}$ es otra relación.

Relaciones binarias

- Recordemos el **Producto cartesiano**: El producto cartesiano de los conjuntos A y B , se denota $A \times B$, y contiene todos las parejas de elementos de A con elementos de B

$$A \times B = \{(x, y) : U \times U | x \in A \wedge y \in B\}$$

Si $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{4, 8\}$ entonces

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}.$$

Como $|A| = 3$ y $|B| = 2$ entonces $|A \times B| = 6$.

- Una **relación binaria** entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.

Siguiendo con el ejemplo: como $|A \times B| = 6$, hay 2^6 relaciones (subconjuntos) posibles.

Por ejemplo, $R_1 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$ es una relación.

O, $R_2 = \{(1, 8), (2, 4)\}$ es otra relación.

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación entre A y B .

- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.

También se escribe: aRb $R(a, b)$

- A : el **dominio** de R
- B : el **codominio** de R
- $\text{dom}R = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el **dominio de definición** de R

$$\text{dom}R_1 = \{1, 2, 4\}, \text{dom}R_2 = \{1, 2\}$$

- $\text{ran}R = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el **rango** de R

$$\text{ran}R_1 = \{4\}, \text{ran}R_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$
 $R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la **transpuesta o inversa** de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación entre A y B .

- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.

También se escribe: aRb $R(a, b)$

- A : el **dominio** de R
- B : el **codominio** de R
- $\text{dom}R = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el **dominio de definición** de R

$$\text{dom}R_1 = \{1, 2, 4\}, \text{dom}R_2 = \{1, 2\}$$

- $\text{ran}R = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el **rango** de R

$$\text{ran}R_1 = \{4\}, \text{ran}R_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$
 $R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la **transpuesta o inversa** de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación entre A y B .

- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.

También se escribe: aRb $R(a, b)$

- A : el **dominio** de R
- B : el **codominio** de R
- $\text{dom}R = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el **dominio de definición** de R

$$\text{dom}R_1 = \{1, 2, 4\}, \text{dom}R_2 = \{1, 2\}$$

- $\text{ran}R = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el **rango** de R

$$\text{ran}R_1 = \{4\}, \text{ran}R_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$
 $R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la **transpuesta o inversa** de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación entre A y B .

- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.

También se escribe: aRb $R(a, b)$

- A : el **dominio** de R

- B : el **codominio** de R

- $\text{dom}R = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el **dominio de definición** de R

$$\text{dom}R_1 = \{1, 2, 4\}, \text{dom}R_2 = \{1, 2\}$$

- $\text{ran}R = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el **rango** de R

$$\text{ran}R_1 = \{4\}, \text{ran}R_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$

$R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la **transpuesta o inversa** de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación entre A y B .

- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.

También se escribe: aRb $R(a, b)$

- A : el **dominio** de R

- B : el **codominio** de R

- $\text{dom}R = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el **dominio de definición** de R

$$\text{dom}R_1 = \{1, 2, 4\}, \text{dom}R_2 = \{1, 2\}$$

- $\text{ran}R = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el **rango** de R

$$\text{ran}R_1 = \{4\}, \text{ran}R_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$

$R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la **transpuesta o inversa** de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación entre A y B .

- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.

También se escribe: aRb $R(a, b)$

- A : el **dominio** de R
- B : el **codominio** de R
- $\text{dom}R = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el **dominio de definición** de R

$$\text{dom}R_1 = \{1, 2, 4\}, \text{dom}R_2 = \{1, 2\}$$

- $\text{ran}R = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el **rango** de R

$$\text{ran}R_1 = \{4\}, \text{ran}R_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$
 $R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la **transpuesta o inversa** de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación entre A y B .

- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.

También se escribe: aRb $R(a, b)$

- A : el **dominio** de R
- B : el **codominio** de R
- $\text{dom}R = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el **dominio de definición** de R

$$\text{dom}R_1 = \{1, 2, 4\}, \text{dom}R_2 = \{1, 2\}$$

- $\text{ran}R = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el **rango** de R

$$\text{ran}R_1 = \{4\}, \text{ran}R_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$
 $R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la **transpuesta o inversa** de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación entre A y B .

- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.

También se escribe: aRb $R(a, b)$

- A : el **dominio** de R
- B : el **codominio** de R
- $\text{dom}R = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el **dominio de definición** de R

$$\text{dom}R_1 = \{1, 2, 4\}, \text{dom}R_2 = \{1, 2\}$$

- $\text{ran}R = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el **rango** de R

$$\text{ran}R_1 = \{4\}, \text{ran}R_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$
 $R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la **transpuesta o inversa** de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 **Relaciones binarias**
 - Definiciones
 - **Representaciones**
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Representaciones

- **Matrices booleanas:** Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y $R : A \leftrightarrow B$, entonces $M_R \in \mathcal{M}_{m \times n}$ representa a R si

$$M_R[i, j] \equiv a_i R b_j$$

Representaciones

- **Matrices booleanas:** Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y $R : A \leftrightarrow B$, entonces $M_R \in \mathcal{M}_{m \times n}$ representa a R si

$$M_R[i, j] \equiv a_i R b_j$$

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} & 4 & 8 \\ 1 & V & F \\ 2 & V & F \\ 4 & V & F \end{bmatrix} \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} & 4 & 8 \\ 1 & F & V \\ 2 & V & F \\ 4 & F & F \end{bmatrix}$$

Representaciones

- **Matrices booleanas:** Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y $R : A \leftrightarrow B$, entonces $M_R \in \mathcal{M}_{m \times n}$ representa a R si

$$M_R[i, j] \equiv a_i R b_j$$

$$M_{R_1} = \left[\begin{array}{c|cc} & 4 & 8 \\ \hline 1 & V & F \\ 2 & V & F \\ 4 & V & F \end{array} \right] \quad M_{R_2} = \left[\begin{array}{c|cc} & 4 & 8 \\ \hline 1 & F & V \\ 2 & V & F \\ 4 & F & F \end{array} \right]$$

- **Gráficos:** Se dibujan el dominio y el condominio y por cada aRb una flecha entre a y b

 $R_1 :$ $R_2 :$

Representaciones

- **Matrices booleanas:** Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y $R : A \leftrightarrow B$, entonces $M_R \in \mathcal{M}_{m \times n}$ representa a R si

$$M_R[i, j] \equiv a_i R b_j$$

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} & 4 & 8 \\ 1 & V & F \\ 2 & V & F \\ 4 & V & F \end{bmatrix} \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} & 4 & 8 \\ 1 & F & V \\ 2 & V & F \\ 4 & F & F \end{bmatrix}$$

- **Gráficos:** Se dibujan el dominio y el condominio y por cada aRb una flecha entre a y b

 $R_1 :$ $R_2 :$

- **Grafos:** Cuando $A = B$ sólo se dibujan los puntos una vez.

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - **Propiedades**
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$, ...).

Dada una relación $R: A \leftrightarrow A$ se dice que:

- R es **reflexiva** si $\forall a|a \in A: aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **irreflexiva** si $\forall a|a \in A: \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **simétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies bRa$. Por ejemplo:
hermano: $\text{Persona} \leftrightarrow \text{Persona}$ tal que *hermano*(a, b) \equiv " a es hermano de b "
- R es **asimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: (aRb \wedge bRa) \implies a \equiv b$. Por ejemplo:
 $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c|a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo:
 $|\div: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ " a divide a b "

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$, ...).
Dada una relación $R: A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es **reflexiva** si $\forall a|a \in A: aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **irreflexiva** si $\forall a|a \in A: \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **simétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies bRa$. Por ejemplo:
hermano : *Persona* \leftrightarrow *Persona* tal que *hermano*(a, b) \equiv " a es hermano de b "
- R es **asimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo:
 $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c|a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo:
 $|\div: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ " a divide a b "

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$, ...).
Dada una relación $R: A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es **reflexiva** si $\forall a|a \in A: aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **irreflexiva** si $\forall a|a \in A: \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **simétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies bRa$. Por ejemplo:
hermano : *Persona* \leftrightarrow *Persona* tal que *hermano*(a, b) \equiv " a es hermano de b "
- R es **asimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo:
 $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c|a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo:
 $|\cdot: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ " a divide a b "

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$, ...).
Dada una relación $R: A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es **reflexiva** si $\forall a|a \in A: aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **irreflexiva** si $\forall a|a \in A: \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **simétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies bRa$. Por ejemplo:
hermano : *Persona* \leftrightarrow *Persona* tal que *hermano*(a, b) \equiv " a es hermano de b "
- R es **asimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo:
 $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c|a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo:
 $|\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ " a divide a b "

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$, ...).
Dada una relación $R: A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es **reflexiva** si $\forall a|a \in A: aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **irreflexiva** si $\forall a|a \in A: \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **simétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies bRa$. Por ejemplo:
hermano : *Persona* \leftrightarrow *Persona* tal que *hermano*(a, b) \equiv " a es hermano de b "
- R es **asimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo:
 $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c|a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo:
 $|\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ " a divide a b "

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$, ...).
Dada una relación $R: A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es **reflexiva** si $\forall a|a \in A: aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **irreflexiva** si $\forall a|a \in A: \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **simétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies bRa$. Por ejemplo:
hermano: $\text{Persona} \leftrightarrow \text{Persona}$ tal que *hermano*(a, b) \equiv " a es hermano de b "
- R es **asimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo:
 $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c|a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo:
 $|: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ " a divide a b "

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$, ...).
Dada una relación $R: A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es **reflexiva** si $\forall a|a \in A: aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **irreflexiva** si $\forall a|a \in A: \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **simétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies bRa$. Por ejemplo:
hermano : *Persona* \leftrightarrow *Persona* tal que *hermano*(a, b) \equiv " a es hermano de b "
- R es **asimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b|a, b \in A: (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo:
 $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c|a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo:
 $|: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ " a divide a b "

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^{-1}$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si $R \cap R^{-1} = \emptyset$
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si $R \cap R^{-1} = I$

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si $R \cap R^T = I$

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si $(R \cap R^T) \subseteq I$

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si $R \cap R^T \subseteq I$

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si $R \cap R^T \subseteq I$

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

y

$$(a, b) \notin I, \text{ si } a \neq b$$

Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es **reflexiva** ($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es **irreflexiva** ($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es **simétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es **asimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es **antisimétrica** ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$) si $R \cap R^T \subseteq I$

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: **unión, intersección, diferencia, complemento** de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
 $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
 $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
 $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UA y B las asignaturas de la UA. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: **unión, intersección, diferencia, complemento** de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
 $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
 $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
 $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UA y B las asignaturas de la UA. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: **unión, intersección, diferencia, complemento** de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
 $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
 $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
 $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UA y B las asignaturas de la UA. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: **unión, intersección, diferencia, complemento** de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
 $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
 $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
 $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UA y B las asignaturas de la UA. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: **unión, intersección, diferencia, complemento** de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
 $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
 $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
 $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UA y B las asignaturas de la UA. Sea
 $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: **unión, intersección, diferencia, complemento** de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
 $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
 $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
 $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UA y B las asignaturas de la UA. Sea
 $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: **unión, intersección, diferencia, complemento** de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
 $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
 $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
 $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UA y B las asignaturas de la UA. Sea
 $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden **componer** relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la **composición de R con S** , como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

Nótese que es la **composición de R con S** pero se escribe $S \circ R$

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a S \circ R c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
 $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{ \quad \quad \quad \}$$

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden **componer** relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la **composición de R con S** , como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

Nótese que es **la composición de R con S** pero se escribe **$S \circ R$**

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a S \circ R c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
 $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{ \quad \quad \quad \}$$

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden **componer** relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la **composición de R con S** , como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

Nótese que es **la composición de R con S** pero se escribe **$S \circ R$**

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a S \circ R c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
 $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{ \quad \quad \quad \}$$

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden **componer** relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la **composición de R con S** , como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

Nótese que es **la composición de R con S** pero se escribe **$S \circ R$**

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a S \circ R c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
 $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{ \quad \quad \quad \}$$

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden **componer** relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la **composición de R con S** , como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

Nótese que es **la composición de R con S** pero se escribe **$S \circ R$**

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a S \circ R c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
 $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es *Padre* \circ *Padre*?
- ¿Qué relación es *Abuelo* \circ *Padre*?
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es *Padre* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c)$$

- ¿Qué relación es *Abuelo* \circ *Padre*?

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es *Padre* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es *Abuelo* \circ *Padre*?

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es $\text{Padre} \circ \text{Padre}$?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es $\text{Abuelo} \circ \text{Padre}$?

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es *Padre* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es *Abuelo* \circ *Padre*?

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es *Padre* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es *Abuelo* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Abuelo} \circ \text{Padre} \equiv \exists b : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Abuelo}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es *Padre* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b \mid : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es *Abuelo* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Abuelo} \circ \text{Padre} \equiv \exists b \mid : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Abuelo}(b, c) \equiv \text{Bisabuelo}(a, c)$$

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es $\text{Padre} \circ \text{Padre}$?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es $\text{Abuelo} \circ \text{Padre}$?

$$(a, c) \in \text{Abuelo} \circ \text{Padre} \equiv \exists b : \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Abuelo}(b, c) \equiv \text{Bisabuelo}(a, c)$$

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es *Padre* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b \mid \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es *Abuelo* \circ *Padre*?

$$(a, c) \in \text{Abuelo} \circ \text{Padre} \equiv \exists b \mid \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Abuelo}(b, c) \equiv \text{Bisabuelo}(a, c)$$

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

$$\text{Padre}^2 = \text{Abuelo} \text{ y } \text{Padre}^3 = \text{Abuelo} \circ \text{Padre} = \text{Bisabuelo}$$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es $\text{Padre} \circ \text{Padre}$?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b \mid \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es $\text{Abuelo} \circ \text{Padre}$?

$$(a, c) \in \text{Abuelo} \circ \text{Padre} \equiv \exists b \mid \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Abuelo}(b, c) \equiv \text{Bisabuelo}(a, c)$$

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

$$\text{Padre}^2 = \text{Abuelo} \text{ y } \text{Padre}^3 = \text{Abuelo} \circ \text{Padre} = \text{Bisabuelo}$$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Padre}(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$\text{Abuelo}(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

- ¿Qué relación es $\text{Padre} \circ \text{Padre}$?

$$(a, c) \in \text{Padre} \circ \text{Padre} \equiv \exists b \mid \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Padre}(b, c) \equiv \text{Abuelo}(a, c)$$

- ¿Qué relación es $\text{Abuelo} \circ \text{Padre}$?

$$(a, c) \in \text{Abuelo} \circ \text{Padre} \equiv \exists b \mid \text{Padre}(a, b) \wedge \text{Abuelo}(b, c) \equiv \text{Bisabuelo}(a, c)$$

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$

$$\text{Padre}^2 = \text{Abuelo} \text{ y } \text{Padre}^3 = \text{Abuelo} \circ \text{Padre} = \text{Bisabuelo}$$

Composición y operaciones de conjuntos

Los siguientes teoremas se pueden demostrar a partir de las definiciones:

- Asociatividad- \circ :

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

- Distributividad- \circ/\cup :

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

- Semidistributividad- \circ/\cap :

$$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

Composición y operaciones de conjuntos

Los siguientes teoremas se pueden demostrar a partir de las definiciones:

- Asociatividad- \circ :

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

- Distributividad- \circ/\cup :

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

- Semidistributividad- \circ/\cap :

$$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

Composición y operaciones de conjuntos

Los siguientes teoremas se pueden demostrar a partir de las definiciones:

- Asociatividad- \circ :

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

- Distributividad- \circ/\cup :

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

- Semidistributividad- \circ/\cap :

$$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{ \quad \quad \quad \}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{ \quad \}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{ \quad \quad \quad \}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. **R es simétrica?**, cuál es la clausura simétrica de R , $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. **R es simétrica?**, cuál es la clausura simétrica de R , $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{ \quad \quad \quad \}$$

En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. **R es simétrica?**, cuál es la clausura simétrica de R , $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{ \quad \quad \quad \}$$

En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. **R es simétrica?**, cuál es la clausura simétrica de R , $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{ \quad \quad \quad \}$$

En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. **R es simétrica?**, cuál es la clausura simétrica de R , $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 3), (2, 1)\}$$

En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. **R es simétrica?**, cuál es la clausura simétrica de R , $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 3), (2, 1)\}$$

En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. *R es transitiva? ¿Cuál es la clausura transitiva de R , $r(R)$?*

$$r(R) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$$

En general, $r(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$
donde $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ R \circ R$, etc.

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es transitiva?** Cuál es la clausura transitiva de R , $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{ \quad \quad \quad \}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup \{R^i : i > 0\}) = R^+$

Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma = \tau(R) = (\bigcup \{R^i : i \geq 0\}) = R^*$

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es transitiva?** Cuál es la clausura transitiva de R , $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{ \quad \quad \quad \}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup_{i > 0} R^i) = R^+$

Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma = \tau(R) = (\bigcup_{i \geq 0} R^i) = R^*$

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es transitiva?** Cuál es la clausura transitiva de R , $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{ \quad \quad \quad \}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup_{i > 0} R^i) = R^+$

Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup_{i \geq 0} R^i) = R^*$

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es transitiva?**, Cuál es la clausura transitiva de R , $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup_{i > 0} R^i) = R^+$

Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup_{i \geq 0} R^i) = R^*$

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es transitiva?** Cuál es la clausura transitiva de R , $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup |i > 0 : R^i) = R^+$

Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup |i \geq 0 : R^i) = R^*$

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es transitiva?**, Cuál es la clausura transitiva de R , $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup |i > 0 : R^i) = R^+$

Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup |i \geq 0 : R^i) = R^*$

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p) : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p)$$

$$\equiv \neg eq(a, b) \wedge (\exists p) : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b)$$

$$\equiv \neg eq(a, b) \wedge (Hijo \circ Hijo^T)(a, b)$$

$$\equiv \neg eq \circ (Hijo \circ Hijo^T)(a, b)$$

$$\equiv$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p | : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$$

$$\equiv Neg(a, b) \wedge (\exists p | : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$$

$$\equiv Neg(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$$

$$\equiv (Neg \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$$

○ sea,

$$Hermano \equiv Neg \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$$

$$\equiv Neg(a, b) \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$$

$$\equiv Neg(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$$

$$\equiv (Neg \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$$

○ sea,

$$Hermano \equiv Neg \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$$

$$\equiv Neg(a, b) \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$$

$$\equiv Neg(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$$

$$\equiv (Neg \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$$

○ sea,

$$Hermano \equiv Neg \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$$

$$\equiv Neg(a, b) \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$$

$$\equiv Neg(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$$

$$\equiv (Neg \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$$

O sea,

$$Hermano \equiv Neg \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$\begin{aligned} Hermano(a, b) &\equiv a \neq b \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p)) \\ &\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b)) \\ &\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b) \\ &\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b) \end{aligned}$$

○ sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$$

$$\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$$

$$\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$$

$$\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$$

O sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Abuelo \equiv Padre \circ Padre$$

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p \mid : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$$

$$\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p \mid : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$$

$$\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$$

$$\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$$

O sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Abuelo \equiv Padre \circ Padre$$

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a.b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p \mid : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$$

$$\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p \mid : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$$

$$\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$$

$$\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$$

O sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Abuelo \equiv Padre \circ Padre$$

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- [Socrative] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - R_1 es la relación de equivalencia en \mathbb{Z} definida por $aR_1b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$
 - R_2 es la relación en \mathbb{Z} definida por $aR_2b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$ o $a \equiv -b \pmod{3}$
 - R_3 es la relación en \mathbb{Z} definida por $aR_3b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$ o $a \equiv -b \pmod{3}$ o $a \equiv 2b \pmod{3}$
 - R_4 es la relación en \mathbb{Z} definida por $aR_4b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$ o $a \equiv -b \pmod{3}$ o $a \equiv 2b \pmod{3}$ o $a \equiv 2a \pmod{3}$
- [Socrative] Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A \mid aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- [Socrative] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a \leq b$
 - $R_4 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_4(a, b) \equiv (a - b) \leq 0$
- [Socrative] Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A \mid aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
 - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- **[Socratic]** Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A \mid aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
 - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- **[Socratic]** Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A \mid aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
 - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- **[Socratic]** Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A \mid aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- **[Socrative]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
 - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- **[Socrative]** Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A \mid aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- [Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
 - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socratic]** Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet [2]_{R_1} = \{ \dots \}, [2]_{R_1} = \{ \dots \} \\
 & \bullet [2]_{R_2} = \{ \dots \}, [3]_{R_2} = \{ \dots \}
 \end{aligned}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- [Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
 - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socratic]** Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

$$\begin{aligned}
 &\bullet [2]_{R_1} = \{ \quad \quad \quad \}, [3]_{R_1} = \{ \quad \quad \quad \} \\
 &\bullet [2]_{R_2} = \{ \quad \quad \quad \}, [3]_{R_2} = \{ \quad \quad \quad \}
 \end{aligned}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- **[Socrative]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
 - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- **[Socrative]** Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A|aRx\}$$

- $[2]_{R_1} = \{ \dots \}$, $[3]_{R_1} = \{ \dots \}$
- $[2]_{R_2} = \{ \dots \}$, $[3]_{R_2} = \{ \dots \}$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que **a es equivalente a b** y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
 - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
 - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
 - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
 - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]** Dado $a \in A$, se define la **clase de equivalencia de a en R** , $[a]_R$ como

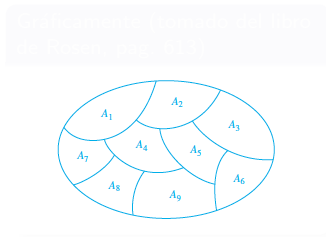
$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

- $[2]_{R_1} = \{ \quad \quad \quad \}, [3]_{R_1} = \{ \quad \quad \quad \}$
- $[2]_{R_2} = \{ \quad \quad \quad \}, [3]_{R_2} = \{ \quad \quad \quad \}$

Clases de equivalencia y particiones

- Dado un conjunto A , una **partición de A** es un conjunto de subconjuntos de A sin elementos en común entre ellos y tal que la unión da todo A : $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, es una partición de A si

- $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1..m$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
- $(\bigcup_{i|1 \leq i \leq m : A_i}) = A$



- Sea $R : A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R forman una partición de A .
- ¿Cuáles son la clases de equivalencia de R_1 ? ¿Forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica?
- ¿ R es transitiva?

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica?
- ¿ R es transitiva?

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva?

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva?

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \Rightarrow 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|n\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|(1 - n)\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|(2 - n)\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|(3 - n)\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - n\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - n\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - n\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - n\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - n\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - n\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - n\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - n\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - n\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - n\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{ es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1 Probar que R es una relación de equivalencia

- ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \text{true}$
- ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
- ¿ R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$

2 Determinar todas las clases de equivalencia de R . ¿Cuántas hay?

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - n\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - n\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

3 ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de \mathbb{Z} ?

Plan

- 1 Motivación - Definiciones
- 2 Relaciones binarias
 - Definiciones
 - Representaciones
 - Propiedades
 - Operaciones de relaciones
 - Clausuras
- 3 Tipos de relaciones
 - Relaciones de equivalencia
 - Relaciones de orden

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \preceq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- [Socrative] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \preceq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- **[Socrative]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \preceq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- [Socrative] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \preceq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- [Socratic] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?

• $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

• $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

• $< : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

• $> : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \leq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?

- $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

- $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

- $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$

- $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

- $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

- $R : \text{Personas} \leftrightarrow \text{Personas}$ tal que $R(p, q) \equiv p$ es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \leq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
 - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $R : \text{Personas} \leftrightarrow \text{Personas}$ tal que $R(p, q) \equiv p$ es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \leq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
 - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $R : \text{Personas} \leftrightarrow \text{Personas}$ tal que $R(p, q) \equiv p$ es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \leq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
 - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $R : \text{Personas} \leftrightarrow \text{Personas}$ tal que $R(p, q) \equiv p$ es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \leq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
 - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $R : \text{Personas} \leftrightarrow \text{Personas}$ tal que $R(p, q) \equiv p$ es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \leq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
 - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $R : \text{Personas} \leftrightarrow \text{Personas}$ tal que $R(p, q) \equiv p$ es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una **relación de orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama **un conjunto parcialmente ordenado** y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo \leq o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una **relación de orden estricto**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
 - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
 - $R : \text{Personas} \leftrightarrow \text{Personas}$ tal que $R(p, q) \equiv p$ es mayor que q

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que **a y b son comparables** si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
 - ¿3 y 9 son comparables?
 - ¿3 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces (A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que \preceq es un orden total.
- [Socrative] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que **a y b son comparables** si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces (A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que \preceq es un orden total.
- [Socrative] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que **a y b son comparables** si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces (A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que \preceq es un orden total.
- [Socrative] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que **a y b son comparables** si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces (A, \preceq) es un **conjunto totalmente ordenado**. Y se dice que \preceq es un **orden total**.
- [Socrative] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que **a y b son comparables** si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces **(A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado**. Y se dice que **\preceq es un orden total**.
- [Socratic] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?

• $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

• $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

• $<: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

• $>: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces (A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que \preceq es un orden total.
- [Socratic] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
 - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $|: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces (A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que \preceq es un orden total.
- [Socratic] ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
 - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $|: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que **a y b son comparables** si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces **(A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado**. Y se dice que **\preceq es un orden total**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
 - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $|: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que **a y b son comparables** si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces **(A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado**. Y se dice que **\preceq es un orden total**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
 - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $|: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que **a y b son comparables** si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
¿3 y 9 son comparables?
¿5 y 7 son comparables?
- Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces **(A, \preceq) es un conjunto totalmente ordenado**. Y se dice que **\preceq es un orden total**.
- **[Socratic]** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
 - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
 - $|: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
 - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$