2.9. Ejercicios

Antes de hacer los ejercicios que se proponen en esta sección, revise los conceptos nuevos que se presentaron en este capítulo.

Conceptos	Página
Vector de R^n	46
Componente de un vector	46
Vector cero o nulo	46
Vectores canónicos de R^n	47
Vector libre	48
Segmento dirigido	48
Segmentos dirigidos iguales	48
Suma de vectores de R^n	50
Producto por escalar en R^n	50
Vectores paralelos en R^n	51
Combinación lineal en R^n	53
Combinación lineal trivial	54
Conjunto generador en R^n	55
Producto $A\mathbf{x}$	58
Espacio nulo de una matriz	60
Espacio columna de una matriz	62
Conjunto de vectores $l.d.$ en R^n	65
Conjunto de vectores $l.i.$	65
Producto escalar en R^n	68
Norma	71
Vector unitario	72
Ángulo entre vectores de R^n	76
Ángulo agudo	77
Ángulo obtuso	77
Ángulo recto	77
Vectores ortogonales	78
Proyección ortogonal sobre un vector	79
Componente ortogonal	80
Recta	82

Conceptos	Página
Vector director de una recta	82
Ecuación vectorial de una recta	83
Ecuaciones paramétricas de una recta	83
Rectas paralelas	86
Rectas iguales	88
Rectas ortogonales	88
Ecuaciones simétricas de una recta	90
Plano	91
Vectores directores de una plano	91
Ecuación vectorial de un plano	92
Ecuaciones paramétricas de un plano	93
Planos paralelos	96, 113
Planos iguales	98
Recta paralela a un plano	98
Recta ortogonal a un plano	101
Hiperplano	103
Vector normal de un hiperplano	103
Hiperplanos paralelos	104
Hiperplanos ortogonales	104
Producto vectorial	105
Area de un paralelogramo	110
Volumen de un paralelepípedo	111
Producto Mixto	111
Vectores coplanares	111
Ecuación normal del plano en R^3	112
Vector normal de un plano en R^3	112
Planos paralelos en R^3	113
Planos ortogonales en R^3	113

1. Haga una lista de por lo menos 3 variables ó cantidades tales que:
   a) se identifiquen como escalares.
   b) se identifiquen como vectores (coordenadas).
   c) se identifiquen como vectores libres.

   En los dos últimos casos, las variables pertenecen a $\mathbb{R}^n$ para algún valor de n. Indique el valor de n.

2. Represente geométricamente los vectores $\mathbf{c} = 2\mathbf{a}$, $\mathbf{d} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\mathbf{f} = 3\mathbf{b} + 1{,}5\mathbf{a}$ y $\mathbf{g} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ y diga cuáles son **paralelos**, cuando

$$\text{a) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\text{b) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Para los vectores **a** y **b** del Ejercicio 2, calcule

$$\text{a) } \tfrac{1}{2}\mathbf{a} - \tfrac{3}{2}\mathbf{a} \qquad \text{b) } \mathbf{b} - 3\mathbf{a} - \mathbf{b} \qquad \text{c) } \tfrac{3}{4}\mathbf{a} + \tfrac{3}{4}\mathbf{b}$$

¿Cuál(es) de ellos es(son) paralelo a **a**? ¿Cuál(es) a **b**?

4. Trace dos vectores libres arbitrarios $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y construya gráficamente los vectores $2\mathbf{u}$, $-\dfrac{2}{3}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $3\mathbf{u} - \mathbf{v}$. ¿Cuál(es) de ellos es(son) paralelo a **u**? ¿Cuál(es) a **v**?

5. En los torneos mixtos de fútbol, los equipos están conformados por 4 mujeres y 7 hombres, y en los de basketball, por 2 mujeres y 3 hombres, con la condición que cada equipo tenga un primíparo de cada sexo. Sean **f** y **b** los vectores que representan la composición por sexos de un equipo de fútbol y uno de basketball, respectivamente. Represente algebraica y geométricamente:
   a) La participación de los primíparos.
   b) La composición de los no primíparos en cada deporte.
   c) La reunión de 2 equipos de fútbol y 3 de basketball.

6. Un avión que vuela de Sur a Norte a una velocidad de 600 km/hora entra en una corriente de aire que va de Este a Oeste a una velocidad de 300 km/hora.
   a) Represente geométricamente estas dos cantidades y el *rumbo* final del avión.
   b) Gráficamente, ¿Cuál seria el *rumbo* final del avión, si:
      1) La misma corriente va de Oeste a Este?
      2) La velocidad del avión hubiese sido la tercera parte?
      3) El avión vuela hacia el Noreste?
      4) Las dos velocidades hubiesen sido el doble?

5) La velocidad del avión hubiese sido la mitad y la de la corriente el doble?

7. Determine un vector $\mathbf{x}$ que satisfaga la ecuación

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{x} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. ¿Cuáles de las propiedades, clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa, opuestos y cancelativa de la suma entre números reales tienen una propiedad similar en la suma de vectores?. ¿Cuáles de estas propiedades de la multiplicación entre números reales tienen una propiedad similar en el producto por escalar?

9. Complete la demostración del Teorema 1, Pág. 52.

10. Determine, para cada caso, los valores de a y b, si existen, que hacen válida la igualdad.

$$\text{a) } 2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+3b \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11. Trace el vector $\overline{PQ}$ y calcule sus componentes.

a) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

12. Determine si el primer vector es combinación lineal de los otros.

a) $\begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2b \\ a+5b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2a-2b \\ -a+6b \\ 5a-b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

13. Determine si el vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de la matriz dada.

a) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2b \\ a+5b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

14. Verifique que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Podemos afirmar que $\mathbb{R}^3$ es generado por estos vectores?

15. Encuentre un vector de $\mathbb{R}^4$ que no sea combinación lineal de $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. ¿Podemos afirmar que $\mathbb{R}^4$ es generado por estos vectores?

16. Determine para qué valores de λ, el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

17. Determine para qué valores de α,

$$Gen\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\alpha\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3.$$

18. Dados los vectores $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\12\\-24\end{pmatrix}$.

    a) Encuentre la combinación lineal $2\mathbf{a}-\mathbf{b}+\frac{1}{4}\mathbf{c}$.

    b) Encuentre otra combinación lineal de los vectores dados.

    c) ¿Cuántas combinaciones lineales de los vectores dados existen?

    d) Calcule los vectores $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ y diga si son combinación lineal de los vectores dados.

    e) ¿Es el vector cero combinación lineal de los vectores dados?

    f) ¿Es el vector $\mathbf{u}=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\frac{2}{3}\mathbf{c}$ combinación lineal de los vectores dados?

    g) ¿Es el vector $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ combinación lineal de los vectores dados?

    h) ¿Qué problema se plantea para contestar la pregunta anterior? ¿Es necesario resolverlo?

    i) ¿El vector $\mathbf{a}$ pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?

    j) ¿El vector $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?

    k) ¿El vector $\mathbf{u}$ dado en f) pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?

    l) ¿El vector $\mathbf{v}$ dado en g) pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?

    m) ¿El vector $\mathbf{0}$ pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?

19. Para W, el conjunto generado del Ejemplo 10, Pág. 56, encuentre otros vectores $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{r},\mathbf{s}$ tales que $W=Gen\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ y $W\neq Gen\{\mathbf{r},\mathbf{s}\}$. Diga si la siguiente afirmación es falsa o verdadera: $W=Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, para todo $\mathbf{a},\mathbf{b}\in W$.

20. Dado $V=Gen\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots\mathbf{v}_k\}\subset\mathbb{R}^n$, demuestre que existe otro conjunto generador de V. [AYUDA: Ver observaciones al final de los Ejemplos 7, 8 y 10, Pág. 55].

21. Reescriba cada una de las preguntas del Ejercicio 18 usando el producto $A\mathbf{x}$, indicando, en cada caso, cuál es la matriz A y el vector $\mathbf{x}$. [AYUDA: El punto *a)* sería: Calcule $A\mathbf{x}$, para $A = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix}$].

22. Demuestre la segunda parte del Teorema 2, Pág. 59.

23. Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $H = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y diga por qué.

    a) El vector $\mathbf{v}$ está en H.

    b) El vector $\mathbf{w}$ está en H.

    c) El vector $\mathbf{v}$ está en $Gen\ H$.

    d) El vector $\mathbf{w}$ está en $Gen\ H$.

    e) El vector **2u-v** está en $Gen\ H$.

    f) El vector $\mathbf{u}+\mathbf{3w}$ está en $Gen\ H$.

24. Explique por qué, si el conjunto M contiene un vector no nulo, $Gen\ M$ tiene infinitos vectores.

25. Dado un vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$, geométricamente, ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}\}$? ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, 2\mathbf{u}\}$?

26. Dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$, geométricamente, ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$? (AYUDA: Considere dos posibilidades: $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ paralelos y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no paralelos)

27. Dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$, geométricamente, ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$? (AYUDA: Considere dos posibilidades: $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ paralelos y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no paralelos)

28. Escriba un conjunto generador de $Gen\{\mathbf{u}, 2\mathbf{u}\}$. ¿Existe otro conjunto generador con menos elementos?

29. Escriba un conjunto generador de $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. ¿Existe otro conjunto generador con menos elementos?

30. Escriba un conjunto generador de $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$. ¿Existe otro conjunto generador con menos elementos?

31. Verifique que $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = Gen\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\}$.

32. Demuestre que $Gen(A) = Gen(B)$, si y sólo si, para todo vector $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{a} \in Gen(B)$ y, para todo vector $\mathbf{b} \in B$, $\mathbf{b} \in Gen(A)$.

33. Dados los sistemas de ecuaciones lineales,

(i)
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - w &= 0 \\ x + 3y - 5z &= 1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x - 3z &= 1 \\ 3x + 2y &= -2 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 - 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

   a) Exprese los sistemas en forma de ecuaciones vectoriales

   b) Exprese los sistemas como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, indicando, en cada caso, cuál es la matriz A y cuáles son los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$.

34. Demuestre el Teorema 3, Pág. 60 (AYUDA: Demuestre que cada uno de los puntos implica el siguiente y que el último implica el primero).

35. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si para **cualquier** vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, **tiene solución única**, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

   a) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.

   b) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de U.

   c) Cada fila de U tiene un pivote.

   d) Cada columna de U tiene un pivote.

   e) La matriz U tiene n pivotes.

   f) La matriz U tiene m pivotes.

   g) $m = n$.

   h) El conjunto formado por las columnas de A genera a $\mathbb{R}^m$.

36. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si para **cualquier** vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, **tiene infinitas soluciones**, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.
    a) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.
    b) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de U.
    c) Cada fila de U tiene un pivote.
    d) Cada columna de U tiene un pivote.
    e) La matriz U tiene n pivotes.
    f) La matriz U tiene m pivotes.
    g) $m < n$.
    h) El conjunto formado por las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$
37. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si para **un** vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, **es inconsistente**, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y responda a la pregunta formulada. Justifique su respuesta.
    a) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.
    b) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de U.
    c) Cada fila de U tiene un pivote.
    d) El vector $\mathbf{b}$ puede ser $\mathbf{0}$.
    e) El vector $\mathbf{b}$ puede ser un múltiplo de alguna de las columnas de A
    f) El vector $\mathbf{b}$ puede ser la suma de las columnas de A
    g) El conjunto formado por las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$.
    h) ¿Qué puede decirse del número de pivotes de U?
38. Dados los vectores $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

a) ¿Para que valor de n, el vector $\mathbf{z} = A\mathbf{b}$ pertenece a $\mathbb{R}^n$?

b) ¿El vector $\mathbf{a}$ pertenece al espacio nulo de A? ¿Al espacio columna de A?

c) ¿El vector cero de $\mathbb{R}^3$ pertenece al espacio nulo de A? ¿Al espacio columna de A?

d) ¿El vector $\mathbf{v} = A\mathbf{b}$ pertenece al espacio nulo de A? ¿Al espacio columna de A?

e) ¿El vector $\mathbf{c}$ pertenece al espacio nulo de A? ¿Al espacio columna de A?

39. Demuestre que si los conjuntos $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ y $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ son *l.i.*, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son combinación lineal de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, si y solo si, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Utilice este resultado para determinar si

$$Gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}.$$

40. Dadas las siguientes matrices,

$$\text{i)} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -8 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{iii)} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Determine si las columnas forman un conjunto de vectores *l.i*.

b) Describa el problema que, según la teoría, se debe plantear para contestar la pregunta anterior.

c) ¿Es necesario resolver el problema anterior?

d) Describa la pregunta a) en términos del espacio nulo de las matrices.

41. Para las matrices del Ejercicio 40, calcule un conjunto generador para sus espacios columna (C_A) y un conjunto generador para sus espacios nulos (N_A).

42. Demuestre que un conjunto de vectores es *l.d.*, si sólo si, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los otros vectores del conjunto. (AYUDA: Observe que, de una combinación lineal

de los vectores del conjunto igual a cero, podemos despejar uno de los vectores en término de los demás y que, de la expresión de un vector como combinación lineal de los otros, obtenemos una combinación lineal no trivial de los vectores del conjunto igual a cero).

43. ¿Para qué valores de r y t los siguientes conjuntos de vectores son *l.i.*?

    a) $\left\{ \begin{pmatrix} -r \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \right\}$. b) $\left\{ \begin{pmatrix} t-r \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

    c) $\left\{ \begin{pmatrix} 3r \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \\ 2r-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \right\}$.

44. Demuestre que las columnas pivotales de una matriz escalonada forman una conjunto de vectores *l.i.* Verifique este resultado con un par de ejemplos.

45. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son *l.i.*? ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{v}$)

    a) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}\}$. b) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, 2\mathbf{u}\}$. c) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\}$. d) $\{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0\}$. e) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sabiendo que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.

46. Complete la demostración del Teorema 6, Pág. 67.

47. Dados los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^3$, señale las expresiones que están bien definidas.

    a) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ c) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$
    d) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ e) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ f) $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot 2\mathbf{w}$
    g) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^{-2}$ h) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$

48. Dada la matriz A de orden $m \times n$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, demuestre que la componente i del vector $A\mathbf{x}$ es el producto escalar entre el vector formado por las componentes de la fila i de A y el vector $\mathbf{x}$. Verifíquelo con un par de ejemplos.

49. Supongamos que la evaluación definitiva de un curso de Álgebra Lineal se determina por el promedio de parciales con un peso del 60 % , el promedio de quices con un peso del 30 % y una nota conceptual con un peso del 10 %. Si las calificaciones del estudiante Martin Pérez son 4.0 en el promedio de parciales, 4.5

en el promedio de quices y 4.8 en la nota conceptual, calcule la nota definitiva de Martin Pérez, usando el producto escalar.

50. Demuestre el Teorema 8, Pág. 70.

51. Para los *cuadriláteros* cuyos vértices se dan, calcule la longitud de sus lados y sus diagonales. Con base en sus resultados, diga cuáles de ellos son *paralelogramos*.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

52. Para los *paralelogramos* cuyos lados se dan, calcule la longitud de sus lados y sus diagonales. Con base en sus resultados, diga cuáles de ellos son *rectángulos*. Cuáles son *cuadrados*? Cuales son *rombos*?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

53. Encuentre el ángulo que forman los siguientes vectores.

a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

54. Determine si los siguientes vectores son ortogonales

a) $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

55. Complete la demostración del Teorema 12 (Pág. 74); es decir, demuestre que si $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos o al menos uno de los dos vectores es el vector $\mathbf{0}$. [AYUDA: Suponga que los dos vectores son diferentes de cero y utilice la definición de ángulo entre dos vectores, Pág. 76, para reemplazar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Concluya que le ángulo entre los dos vectores es cero o π.]

56. Encuentre, si existen, dos vectores ortogonales a los vectores dados.

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

57. Complete la demostración del Teorema 13 (Pág. 75); es decir, demuestre que si $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, entonces $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ con $\lambda \geq 0$ o al menos uno de los dos vectores es el vector $\mathbf{0}$. [AYUDA: Suponga que los dos vectores son diferentes de cero, tome cuadrados en la igualdad dada y utilice la definición de ángulo entre dos vectores, Pág. 76, para reemplazar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Concluya que el ángulo entre los dos vectores es cero.]

58. Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, ambos en $\mathbb{R}^n$, calcule el vector $\mathbf{p}$ paralelo a $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{v}-\mathbf{p}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$. El vector $\mathbf{p}$ es llamado la proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ ($\mathbf{p} = proy_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. [AYUDA: Suponga que $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{u}$ (¿Por qué?) y calcule λ de la ecuación $(\mathbf{v}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0$ (¿Por qué?)]

59. Para los pares de vectores dados en los Ejercicios 54 y 56, calcule la proyección del primer vector sobre el segundo y viceversa (el segundo sobre el primero), y sus respectivas componentes ortogonales. Compare los respectivos resultados.

60. Dados los vectores

    i) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

    ii) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

    calcule (en el caso de vectores de $\mathbb{R}^2$, de ser posible, ilustre sus respuestas en una gráfica)

    a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \frac{7}{2}\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $0{,}36\mathbf{v} - 0{,}36\mathbf{u}$.
    b) la norma de $\mathbf{u}$, $3\mathbf{u}$, $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
    c) el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y $2\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ y $-3\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$, y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.
    d) un vector unitario en la dirección y sentido de $\mathbf{u}$. ¿Existe otro?
    e) un vector paralelo a $\mathbf{v}$, con la mitad de su magnitud. ¿Existe otro?
    f) un vector en la dirección de $\mathbf{w}$ y sentido contrario a él. ¿Existe otro?
    g) un vector unitario ortogonal a $\mathbf{u}$. ¿Existe otro?
    h) un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Existe otro?.
    i) un vector ortogonal a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. ¿Existe otro?.
    j) la proyección del vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$.
    k) la proyección del vector $\mathbf{v}$ sobre el vector $\mathbf{u}$. Compare su respuesta con la del item anterior.
    l) la proyección del vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $2\mathbf{v}$. Compare su respuesta con la del item 60*j*.
    m) la componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $2\mathbf{v}$.
    n) el punto definido por un vector paralelo a $\mathbf{v}$ más cercano al punto $\mathbf{u}$. Compare su respuesta con la del item 60*j*.

61. Demuestre que la proyección de $\mathbf{u}$, un vector de $\mathbb{R}^n$, sobre el vector canónico $\mathbf{e}_i$ es el vector $u_i\mathbf{e}_i$, donde u_i es la i-ésima componente del vector $\mathbf{u}$. Verifique este resultado con un par de ejemplos.

62. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

    a) Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

    b) Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

    c) Si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

    d) Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

    e) Cualquier conjunto formado por un vector de $\mathbb{R}^n$ forma un conjunto $l.i.$

    f) Cualquier conjunto formado por un par de vectores diferentes de $\mathbb{R}^n$ es $l.i.$

    g) Cualquier conjunto formado por tres vectores diferentes de $\mathbb{R}^3$ es $l.i.$

    h) Cualquier conjunto formado por tres vectores diferentes de $\mathbb{R}^2$ genera a $\mathbb{R}^2$.

    i) Cualquier conjunto $l.i.$ formado por un par de vectores de $\mathbb{R}^2$ genera a $\mathbb{R}^2$.

    j) Si el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es $l.i.$, entonces el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ es $l.i.$

    k) Si A es una matriz $m\times n$, cuyas columnas forman un conjunto de vectores $l.i.$, entonces el sistema, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, tiene solución para cualquier vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$.

    l) Si A es una matriz $n\times n$, cuyas columnas forman un conjunto de vectores $l.i.$, entonces el sistema, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, tiene solución única para cualquier vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$.

    m) Si el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal no nula de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

63. En la solución dada al Ejemplo 30, Pág. 90, ¿Cómo fueron obtenidos los vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$? ¿Existen otros vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ que resuelvan los problemas planteados? Con estos otros vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, ¿Cambia la solución?

64. Dadas las siguientes ecuaciones, identifique las rectas, los planos y los hiperplanos

a) En $\mathbb{R}^2$, $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

b) En $\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 2 + 5t \\ w = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) En $\mathbb{R}^5$, $\dfrac{x_1 - 3}{2} = \dfrac{x_2}{5} = x_3 = x_5 - 2, \quad x_4 = 0$

d) En $\mathbb{R}^4$, $3x - 2y = 5$

e) En $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) En $\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x_1 = 2 - 3t \\ x_2 = -s \\ x_3 = 5 \\ x_4 = t + s \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$

65. Encuentre dos puntos y dos vectores directores de cada recta $\mathcal{L}$ dada a continuación.

a) (en $\mathbb{R}^2$) $y = 3x - 2$.

b) (en $\mathbb{R}^3$) $\dfrac{x-3}{2} = 1 + y = 2z$.

c) (en $\mathbb{R}^3$) $\dfrac{x}{2} = 1 - z, \quad y = 1$.

d) (en $\mathbb{R}^4$), $\dfrac{x+5}{-3} = 1 + y = \dfrac{w}{2}, \quad z = 0$.

66. Encuentre una ecuación de una recta que contenga los puntos P y Q. En cada caso, ¿Cuántas rectas hay con estas condiciones?

a) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

67. Encuentre una ecuación de una recta que contenga el punto P y sea paralela al vector Q del Ejercicio 66. En cada caso, ¿Cuántas rectas hay con estas condiciones?

68. Encuentre una ecuación de una recta que contenga el punto P del Ejercicio 66 y sea ortogonal a la respectiva recta $\mathcal{L}$ del Ejercicio 65. En cada caso, ¿Cuántas rectas hay con estas condiciones?

69. Si definimos el ángulo entre dos rectas como el ángulo formado por sus vectores directores (el otro ángulo es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), encuentre el ángulo entre la recta del Ejercicio 65 y la respectiva recta hallada en el Ejercicio 66.

70. Encuentre dos puntos y dos vectores directores del plano $\mathcal{P}$ con ecuaciones paramétricas dadas a continuación.

a) $\begin{cases} x = 2t - s \\ y = s - 3 \\ z = t + s \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = -t - 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t - s \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = 2t - s \\ x_2 = s - 3 \\ x_3 = -t - 1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t + s \end{cases}$

71. Demuestre el Teorema 15, Pág. 98.

72. Encuentre una ecuación de un plano que contenga el punto P del Ejercicio 74 y sea paralelo al respectivo plano $\mathcal{P}$ del Ejercicio 70. ¿Cuántos planos hay con estas condiciones?

73. Encuentre una ecuación de un plano que contenga el punto P del Ejercicio 66 y sea ortogonal a la respectiva recta $\mathcal{L}$ del Ejercicio 65. ¿Cuántos planos hay con estas condiciones?

74. Encuentre una ecuación de un plano que contenga los puntos P, Q y R. En cada caso, ¿Cuántos planos hay con estas condiciones?

a) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

75. Conteste las preguntas planteadas al final del Ejemplo 36, Pág. 101.

76. Encuentre una ecuación de un plano que contenga el punto P del Ejercicio 66 y contenga la respectiva recta $\mathcal{L}$ del Ejercicio 65. ¿Cuántos planos hay con estas condiciones?

77. Demuestre que tres vectores de $\mathbb{R}^n$ forman un conjunto *l.d.*, si y sólo si, existe un plano que pasa por el origen y contiene a los tres vectores. Verifique este resultado con un par de ejemplos.

78. Encuentre una ecuación de un hiperplano que contenga los puntos $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

[AYUDA: llame $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ al vector normal y recuerde que $\mathbf{n}$ debe ser ortogonal a $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$]. ¿Cuántos hiperplanos hay con estas condiciones?

79. Encuentre una ecuación de un hiperplano que contenga, además

de los puntos P, Q y R del Ejercicio 78, el punto $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(AYUDA: llame $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ al vector normal y recuerde que $\mathbf{n}$ debe ser ortogonal a $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$). ¿Cuántos hiperplanos hay con estas condiciones?

80. Encuentre una ecuación de un hiperplano que contenga el punto P del Ejercicio 66 y sea paralelo al hiperplano $\mathcal{H}: \ 3x_1 - 2x_3 - 5 = -x_4$. ¿Cuántos hiperplanos hay con estas condiciones?

81. Si definimos el ángulo entre una recta y un hiperplano como el complemento[24] del ángulo formado por un vector director de la recta y un vector normal al hiperplano (otro ángulo es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), calcule dos ángulos entre la recta del Ejercicio 65 y el hiperplano dado en el Ejercicio 80.

82. Conteste las preguntas planteadas al final del Ejemplo 39, Pág. 104.

83. Encuentre una ecuación de un hiperplano que contenga el punto P del Ejercicio 66 y sea ortogonal al hiperplano $\mathcal{H}: \ 2x_1 + x_3 - 3 = 4x_4 - x_2$. ¿Cuántos hiperplanos hay con estas condiciones?

84. Determine si la recta $\mathcal{L}: \ \dfrac{x+5}{-3} = 1 + z = \dfrac{w}{2}, \quad y = 0$ intercepta a cada uno de los siguientes planos

a) $\mathcal{P}: \begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 2t - 4s \\ x_3 = -3t + 7s \\ x_4 = 4t - 6s \end{cases}$ b) $\mathcal{P}: \begin{cases} x_1 = -t - s \\ x_2 = 5t - 6s \\ x_3 = -4t + 4s \\ x_4 = -4 \end{cases}$

En caso afirmativo, encuentre la intersección.

85. Conteste las preguntas planteadas al final del Ejemplo 40, Pág. 105.

[24] Recordemos que el ángulo α es el complemento del ángulo β, y viceversa, si y sólo si, $\alpha + \beta = 90^o$.

86. Si definimos uno de los "ángulos" entre dos hiperplanos como el ángulo formado por sus vectores normales (otro "ángulo" es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), calcule dos "ángulos" entre los hiperplanos dados en los Ejercicios 80 y 83.

87. Demuestre que un hiperplano, en $\mathbb{R}$, es un punto y que, en $\mathbb{R}^2$, es una recta. Verifique este resultado con un par de ejemplos.

88. Complete la demostración del Teorema 17, Pág. 106.

89. Sabiendo que el hiperplano $\mathcal{H} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \beta$ es paralelo a la recta $\mathcal{L} : \mathbf{x} = t\mathbf{d} + \mathbf{p},\ t \in \mathbb{R}$, si y sólo si, $\mathbf{n}$ es ortogonal a $\mathbf{d}$ ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$) y que es ortogonal a la recta $\mathcal{L} : \mathbf{x} = t\mathbf{d} + \mathbf{p},\ t \in \mathbb{R}$, si sólo si, $\mathbf{n}$ es paralelo a $\mathbf{d}$ ($\mathbf{n} = \alpha\mathbf{d}$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$), determine si las siguientes rectas son ortogonales o paralelas al hiperplano $\mathcal{H} : 2x_1 + x_3 - 5 = 4x_4$.

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = w + 3,\ z = 2$

b) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \\ w = t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

90. Sabiendo que el hiperplano $\mathcal{H} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \gamma$ es paralelo al plano $\mathcal{P} : \mathbf{x} = t\mathbf{d}_1 + s\mathbf{d}_2 + \mathbf{p},\ s, t \in \mathbb{R}$, si y sólo si, $\mathbf{n}$ es ortogonal a $\mathbf{d}_1$ y a $\mathbf{d}_2$ ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_1 = 0$ y $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_2 = 0$) y que es ortogonal al plano $\mathcal{P} : \mathbf{x} = t\mathbf{d}_1 + s\mathbf{d}_2 + \mathbf{p},\ s, t \in \mathbb{R}$, si sólo si, $\mathbf{n}$ es una combinación lineal de $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ ($\mathbf{n} = \alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2$, para algún $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$), determine si los siguientes planos son ortogonales o paralelos al hiperplano $\mathcal{H} : x_1 + x_2 - 2 = x_4$.

a) $\begin{cases} x = 1 - t + 2s \\ y = 3s - 2t \\ z = 1 + t - s \\ w = 2 - t \\ s, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2s + 1 \\ z = 1 - t - s \\ w = t + 2s - 2 \\ s,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Para los Ejercicios 91 a 96, sean $\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2,\ \mathcal{L}_3$ y $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2,\ \mathcal{P}_3$ las siguientes rectas y planos de $\mathbb{R}^3$ y P un punto de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x_1 = -3 - 2t \\ x_2 = 5t - 6s \\ x_3 = 1 - 4t + 4s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 : \frac{x+5}{6} = \frac{z-1}{2} \quad y = -1$$

$$\mathcal{P}_2 : x - 4y + 3z - 7 = 0$$

$$\mathcal{L}_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

91. Encuentre

a) un punto de cada recta y cada plano.

b) un vector director de cada recta.

c) los otros dos tipos de ecuaciones de las rectas.

d) Un conjunto formado por dos vectores directores de cada plano.

e) un vector normal de cada plano.

f) los otros dos tipos de ecuaciones de los planos.

92. Si, en $\mathbb{R}^3$, definimos uno de los ángulos entre una recta y un plano como el valor absoluto del complemento[25] del ángulo formado por un vector director de la recta y un vector normal al plano (otro ángulo es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), calcule dos ángulos entre la recta $\mathcal{L}_1$ y cada uno de los planos dados.

93. Si, en $\mathbb{R}^3$, definimos uno de los "ángulos" entre dos planos como el ángulo formado por sus vectores normales (el otro "ángulo" es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), calcule los "ángulos" entre cada par de los planos dados.

94. Determine

    a) cuáles rectas son ortogonales y cuáles son paralelas.

    b) cuáles planos son ortogonales y cuáles son paralelos.

    c) cuál de las rectas es ortogonal al plano $\mathcal{P}_1$.

    d) cuál de las rectas es paralela al plano $\mathcal{P}_2$.

    e) cuál de las rectas corta al plano $\mathcal{P}_3$.

    f) cuál de las rectas está contenida en el plano $\mathcal{P}_1$.

95. Encuentre, si es posible,

    a) una recta paralela a la recta $\mathcal{L}_1$ que pase por el origen. ¿Existe otra?

    b) una recta ortogonal a la recta $\mathcal{L}_2$ que corte a la recta $\mathcal{L}_3$. ¿Existe otra?

    c) un plano que contenga la recta $\mathcal{L}_1$. ¿Existe otro?

    d) un plano paralelo a la recta $\mathcal{L}_2$ que pase por el origen. ¿Existe otro?

    e) un plano ortogonal a la recta $\mathcal{L}_3$ que contenga a una de las otras dos rectas. ¿Existe otro?

    f) un plano paralelo al plano $\mathcal{P}_1$ que pase por P. Existe otro?

[25]Recordemos que el ángulo α es el complemento del ángulo β, y viceversa, si y sólo si, $\alpha+\beta = 90^o$.

g) un plano ortogonal al plano $\mathcal{P}_2$ que contenga a la recta $\mathcal{L}_1$. ¿Existe otro?

96. Calcule

a) la distancia del punto P a la recta $\mathcal{L}_1$ (AYUDA: Calcule la norma de la componente vectorial del vector $\overline{PQ}$ ortogonal a $\mathbf{v}$, siendo Q un punto de la recta y $\mathbf{v}$ un vector director de la recta).

b) la distancia de un punto P al plano $\mathcal{P}_1$ (AYUDA: Calcule la norma de la proyección ortogonal del vector $\overline{PQ}$ sobre $\mathbf{n}$, siendo Q un punto del plano y $\mathbf{n}$ un vector normal del plano).

c) la distancia entre las recta $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ (AYUDA: Si las rectas son paralelas, calcule la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra [ver a)]. En caso contrario, calcule la norma de la proyección ortogonal del vector $\overline{PQ}$ sobre $\mathbf{n}$, siendo P un punto de la recta $\mathcal{L}_1$, Q un punto de la recta $\mathcal{L}_2$ y $\mathbf{n}$ un vector ortogonal a las dos rectas).

d) la distancia de la recta $\mathcal{L}_1$ al plano $\mathcal{P}_1$ (AYUDA: Si la recta es paralela al plano, calcule la distancia de un punto cualquiera de la recta $\mathcal{L}_1$ al plano [ver b)]. En caso contrario, la distancia es cero).

e) la distancia entre los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ (AYUDA: Si los planos son paralelos, calcule la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro plano [ver b)]. En caso contrario, la distancia es cero).

97. Demuestre la segunda parte del Teorema 21, Pág. 114.

98. Hallar, en $\mathbb{R}^3$, una fórmula general para calcular la distancia

a) entre un punto P a una recta $\mathcal{L}$

b) entre un punto P a un plano $\mathcal{P}$.

c) entre dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

d) entre una recta $\mathcal{L}$ y un plano $\mathcal{P}$.

e) entre dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Para los Ejercicios 99 y 100, sean

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

puntos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{u} = \overline{OP}$, $\mathbf{v} = \overline{OQ}$ y $\mathbf{w} = \overline{OR}$.

99. Determine cuáles de las siguientes expresiones están bien definidas y, en caso positivo, haga los cálculos indicados.

    a) $(2\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$. b) $(\mathbf{u} \times 2\mathbf{v}) \cdot (-3\mathbf{w})$. c) $(\mathbf{u} \cdot 5\mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.

    d) $(\mathbf{u} \times 2\mathbf{u}) \cdot (-3\mathbf{w})$. e) $-3(\mathbf{v} \times 2\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}$. f) $(\mathbf{u} \times 2\mathbf{v}) \cdot (-3\mathbf{u})$.

100. Calcule

    a) el área de un paralelogramo en que P, Q y R son tres de sus vértices. ¿Cuántos paralelogramos con estas condiciones existen? ¿Cuáles son sus áreas?

    b) el volumen de un paralelepípedo en que 0, P, Q y R son cuatro de sus vértices. ¿Cuántos paralelepípedos con estas condiciones existen? ¿Cuáles son sus volúmenes?

    c) el volumen del paralelepípedo cuyos lados no paralelos son los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. ¿Son coplanares estos vectores?

101. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales siguientes, identifique geométricamente el conjunto solución como "vacío", un punto, una recta, un plano, un hiperplano o ninguno de ellos.

    a) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 6 del Capítulo 1.

    b) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 7 del Capítulo 1.

    c) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 8 del Capítulo 1.

    d) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 10 del Capítulo 1.

    e) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 11 del Capítulo 1.

    f) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 13 del Capítulo 1.

    g) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 14 del Capítulo 1.

    h) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 21 del Capítulo 1.

    i) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 23 del Capítulo 1.

    j) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 24 del Capítulo 1.

    k) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 30 del Capítulo 1.

    l) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 31 del Capítulo 1.