Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
111051M - Cálculo II Gr. 05
Profesor Héber Mesa P.

Septiembre 15 de 2018

Taller 6. Funciones logarítmicas y exponenciales

Considere las funciones exponencial y logaritmo natural (vistas en clase) denotadas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^+ \\ & x & \to & \exp(x) = e^x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \ln: & \mathbb{R}^+ & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \to & \ln(x) = \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{array}$$

Estas funciones son inversas la una a la otra, esto es,

$$e^{\ln x} = x, \text{ para todo } x \text{ real positivo} \quad \text{y} \quad \ln\left(e^x\right) = x, \text{ para todo número real } x.$$

Recordemos las propiedades de éstas funciones. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, y $z, w \in \mathbb{R}^+$ se tiene:

$e^0 = 1$	$\ln 1 = 0$
$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$	$\ln(z \cdot w) = \ln z + \ln w$
$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln z - \ln w$
$e^{xy} = (e^x)^y = (e^y)^x$	$\ln\left(z^x\right) = x \ln z$

Propiedades de las funciones exp y ln.

1. Recordando que para $a \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{y} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

determine y demuestre una lista de propiedades equivalentes a las de las funciones exponencial y logaritmo natural (como las de la tabla) para las funciones a^x y $\log_a(x)$.
Observación: Cuando $a = 10$*, ésta base no se escribe, esto es,* $\log_{10} = \log$.

2. Demuestre que para todo par de reales positivos x e y se tiene que $x^{\ln y} = y^{\ln x}$.

3. Sea $a \in \mathbb{R}^+$, describa las gráficas de las funciones a^x y $\log_a(x)$ para los diferentes valores de a. ¿Cuales son los puntos de intersección de cada gráfica con los ejes coordenados?
Sugerencia: Considere los siguientes tres casos, $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$.

4. Utilizando las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas resuelva las siguientes ecuaciones:

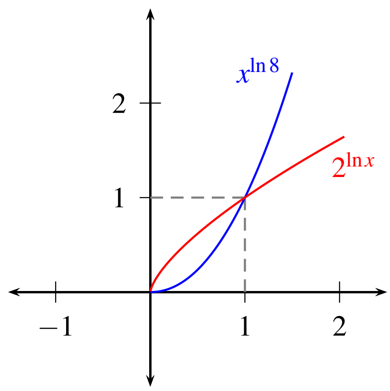
(a) $\ln(x+3)^2 = 2$
(b) $\ln\sqrt{x^2+1} = 0$
(c) $2^{x+5} = 4^x$
(d) $\log(3x+2) + \log 9 = \log(x+5)$
(e) $\log_3 2x + \log_2 x = 4$
(f) $\ln x + \ln(x+4) = \ln 5$
(g) $4e^{-4x} = 1$
(h) $2^{3x+1} = 3^{x^2}$

5. Considere la ecuación $x^{\ln 8} = 2^{\ln x}$.

   (a) Muestre que $x = 1$, es una solución de la ecuación.

   (b) Demuestre que $x = 1$, es la única solución real de la ecuación.

   (c) A continuación se presentan las gráficas de las funciones $x^{\ln 8}$ y $2^{\ln x}$. ¿Cuantas veces se intersecan las gráficas? Explique si hay alguna contradicción con el item anterior.



6. Determine la derivada de las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$
   (b) $f(x) = \ln(\ln x)$
   (c) $f(x) = \cos\left(e^{x^2}\right)$
   (d) $f(x) = \ln\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$
   (e) $f(x) = \ln\left(xe^{x^2}\right)$
   (f) $f(x) = \ln\left(2(2+\operatorname{sen} x)\right)$
   (g) $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$
   (h) $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$
   (i) $f(x) = e^{e^x}$
   (j) $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$
   (k) $f(x) = \cos\left(e^x + e^{-x}\right)$
   (l) $f(x) = \tan\left(2e^x\right)$
   (m) $f(x) = 2^{x\sqrt{x}}$
   (n) $f(x) = \log_2\left(\log_3 x\right)$
   (o) $f(x) = 3^{\cos^2 x}$
   (p) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$
   (q) $f(x) = \left(\cos x\right)^x$
   (r) $f(x) = x^{\cos x}$
   (s) $f(x) = \left(\ln x\right)^{\ln x}$
   (t) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
   (u) $f(x) = x^{x+1}$

7. Resuelva cada una de las siguientes integrales indefinidas.

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+3x^2}\,dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$
   (c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1-cos(2x)}\,dx$
   (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$
   (e) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx$
   (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$
   (g) $\displaystyle\int (e^x + e^{-x})^2 dx$
   (h) $\displaystyle\int (\cos x)e^{\operatorname{sen} x}\,dx$
   (i) $\displaystyle\int x^2(e^{1-x^3})\,dx$
   (j) $\displaystyle\int \frac{e^{x^{-1}}}{x^2}\,dx$
   (k) $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,dx$
   (l) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
   (m) $\displaystyle\int \frac{10^{x^{-1}}}{x^2}\,dx$
   (n) $\displaystyle\int 3^{2x}\,dx$
   (o) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log x}$