Análisis del mapa de Poincaré en el Oscilador de Duffing

Juan José Ochoa Duque, Santiago Andrés Pérez Acevedo, Bryan Pérez Múnera.
Instituto de Física
Universidad de Antioquia

5 de junio de 2020

Resumen

En el siguiente trabajo se muestra un estudio del caos que presenta el sistema de Duffing a partir de una de sus secciones de Poincaré. Se parte inicialmente del sistema de Duffing, asignándole valores determinados a sus parámetros. Implementando una integración usando RK4 se obtienen las soluciones del sistema para un determinado tiempo y finalmente a partir de dichas soluciones se halla una de sus secciones de Poincaré. Lo anterior siendo implementando en C++, con el uso de Python para la parte gráfica.

I. Introdución

Los sistemas físicos ideales son ficciones sobre las cuales se modelan aquellos sistemas físicos que describen la naturaleza. Como sistemas ideales, tienen la característica de que tienen soluciones en general analíticas y estables, es decir que permiten un gran margen de predictibilidad a la hora de ser estudiados. La naturaleza en sí misma, ya en un marco más general, puede describirse a partir de los sistemas dinámicos. Dentro de estos surge el concepto de caos, que en resumidas palabras indica cuándo un sistema deja de ser estable en sus soluciones y pierde todo margen de predictibilidad. Para determinar el caos en un sistema dinámico hay varios criterios tanto cualitativos como cuantitativos, unos más exactos y precisos que otros, que se pueden usar. Los mapas o secciones de Poincaré es uno de dichos criterios, de caracter cualitativo, pero de gran fiabilidad para determinar el caos en un sistema.

II. Marco Teórico

i. Sistema Dinámico

Si el estado de un sistema es definido por las n variables $X_i = X_i(t)$, este se puede describir como $\vec{X} = \{ X_1 ... X_n\}$ donde se define su evolución temporal como $\dot{\vec{X}} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}, t, \alpha)$, que en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{dX_1}{dt} = f_1(\vec{X}, t, \alpha) \\ \vdots \\ \dot{X}_n = \frac{dX_n}{dt} = f_n(\vec{X}, t, \alpha) \end{cases}$$

Lo que se conoce como sistema dinámico. Las anteriores ecuaciones me dan cuenta entonces de cómo evolucioan las n variables X_i de mi sistema en el tiempo. Donde los parámetros α son característicos de cada sistema y la evolución del sistema se dan a partir de las condiciones iniciales .

ii. Retrato de Fase, Mapa de Poincaré y Caos

En el estudio de un sistema dinámico se busca qué trayectorias u órbitas específicas sigue un

determinado sistema. Al conjunto de órbitas o trayectorias de la evolución del sistema, en el espacio abstracto de sus coordenadas generalizadas y sus respectivos momentos canónicos conjugados (espacio de fase), se le conoce como su retrato de fase. Donde cada estado específico del sistema en un tiempo t es un punto en este y su evolución determina entonces el retrato de fase.
El mapa de Poincaré es un plano que corta el retrato de fase en una posición arbitraria. Este mapa da cuenta de cuántas veces en un determinado tiempo el retrato de fase lo corta, dejando registro entonces de qué tanto varían las trayectorías del retrato de fase en el tiempo.
Un sistema dinámico presenta caos cuando sus soluciones dejan de ser estables, es decir, cuando no se tiene predictibilidad del comportamiento en el espacio de fase de las trayectorias del sistema a través del tiempo. Así mismo, cuando presenta alta sensibilidad a las condiciones iniciales, en el sentido de que cuando se hacen pequeñas variaciones de las condiciones iniciales se producen grandes diferencias en el retrato de fase, se dice que hay posible caos en el sistema.Los mapas de Poincaré al determinar qué tanto difieren las trayectorias a través del tiempo, es otro buen criterio e indicativo de un comportamiento caótico del sistema. Entre más se llene de intersecciones el mapa de Poincaré con las trayectorias, más caótico es el sistema.

iii. Ecuación de Duffing

La ecuación de Duffing viene dada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, no lineal e inhomogéna:

$$\ddot{x}(t) + \delta \dot{x(t)} + \beta x(t) + \alpha x^3(t) = \gamma cos(\omega t)$$

Esta representa en general diversos osciladores forzados, amortiguados con un forzamiento periódico, donde los parámetros constantes δ controla la cantidad de amortiguamiento del sistema, β controla la rigidez lineal del sistema, α es el parámetro de la no linealidad, γ es la amplitud del forzamiento, ω es la frecuencia angular de dicho forzamiento y la variable $x(t)$ el desplazamiento en función del tiempo. Notando que si se toma la primera derivada temporal del desplazamiento como una variable del sistema junto a al desplzamiento y la derivada temporal de la frecuencia ω, se puede obtener la forma de un sistema dinámico de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = \dot{x} \\ \frac{d}{dt}\dot{x} = -\delta\dot{x} - \beta x - \alpha x^3 + \gamma cos(\omega t) \\ \frac{d}{dt}\phi = \omega \end{cases}$$

Este es el sistema dinámico de Duffing. Para los valores de $\beta > 0$ el sistema da cuenta de un oscilador forzado con una fuerza restauradora $F = -\beta x - \alpha x^3$ y para el caso de $\beta < 0$ el sistema da cuenta de la dinámica de una masa puntual en un doble pozo de potencial. Es para este caso en el que puede haber caos en el sistema.
Como ilustración de la dinámica del sistema en el caso particular $\gamma = 0$ y $\alpha > 0$ se presenta la figura 1, que da cuenta de la forma del potencial y las trayectorias sobre este según los valores de δ y β.

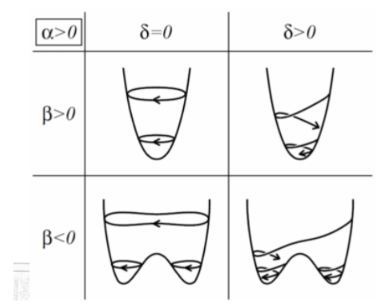

Figura. 1: *Pozos de potencial para un forzamiento nulo y α>0*

Donde notamos las variaciones de la trayectoría debido al parámetro de amortiguación δ y las variaciones del potencial debido al parámetro β.
En el caso en el que se consideran todos los parámetros del sistema (una masa puntual en un pozo doble de potencial), hay una semejanza en la dinámica de una tira de metal sometida a la fuerza magnética producida por dos magnetos, así mismo sometida a una

fuerza externa sinnusoidal. En la figura 2 se muestra la situación descrita.

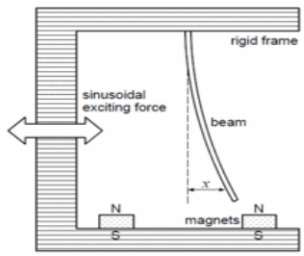

Figura. 2: *Tira metálica sometida a dos magnetos y fuerza sinusoidal externa*

III. Implementación y Resultados

Se implementaron dos códigos en C++, uno encargado de la integración a partir del método RK4 y otro encargado de la construcción del mapa de Poincaré. Esto para los valores de los parámetros α=1, β=-1, δ=0.2, γ=0.1, ω=1. En la figura 3 se muestra el código que construye el mapa de Poincaré. Este recibe los datos del retrato de frase, es decir, de las soluciones del integrador, que se muestra en la figura 4.

```
#include<iostream>
#include<iomanip>
#include<cmath>
#include <fstream>
#include <cstdlib>

using namespace std;
void LeerArchivo(string&);

int main(){
  string nombre_archivo;
  nombre_archivo="datos.dat";
  LeerArchivo(nombre_archivo);
}

void LeerArchivo(string& narchivo){
  ifstream poincarem;
  poincarem.open(narchivo.c_str());

  //Comprueba apertura del archivo
  if (poincarem.fail()){
    cout <<"\n El archivo no se abriÃ³ con Ã©xito"
     <<"\n Compruebe que dicho archivo sÃ- existe"
     << endl;
    exit(1);
  }
  double matrix[30000][3];
  for(int i=0;i<30000;i=i+1){
    for(int j=0;j<3;j=j+1){
     poincarem>>matrix[i][j];
    }
  }
  poincarem.close();
  /*
  int ofs[51];
  for(int i=0;i<51;i=i+2){
    ofs[i]=i;
  }
  */
  int N=400;
  int S=100;
  int P=100;
  int indm=(N-S)*P;
  /*
  for(int i=0;i<51;i=i+1){
    indm[i]=((N-S)*P-ofs[i]);
  }
  */

  string archivopon = "datos1.dat";
  ofstream archivo_pon;
  archivo_pon.open(archivopon.c_str());
  if (archivo_pon.fail()){
    cout <<"El archivo no se abriÃ³ exitosamente"<<endl;
    exit(1);
  }
   //Formato de los datos
  archivo_pon << setiosflags(ios::fixed);

  double l_t[N-S];
  double l_o[N-S];
  for(int j=0;j<indm;j=j+P){
    l_t[j]=matrix[j][1];
    l_o[j]=matrix[j][2];
  }
   for(int j=0;j<indm;j=j+P){
     archivo_pon<<l_t[j]<<"   ";
     archivo_pon<<l_o[j]<<"\n";
   }
   archivo_pon.close();
}
```

Figura. 3: *Código que construye el mapa de Poincaré*

```
//Proyecto de:
//Santiago AndrÃ©s PÃ©rez
//Bryan PÃ©rez
//Juan JosÃ© Ochoa

#include<iostream>
#include<iomanip>
#include<cmath>
#include <fstream>
#include <cstdlib>

using namespace std;

double d2x(double t,double x,double v){
  double  alfa= 1;
  double beta= -1;
  double gama= 0.3;
  double delta= 0.2;
  double omega= 1;
  double dx = -alfa*x*x*x - beta*x- delta*v + gama*cos(omega*t);
  return dx;
}


double R4K(double t0, double x0, double v0, double h,double tf,double paso)
{
  string archivor4 = "datos.dat";
  ofstream archivo_r4;
  archivo_r4.open(archivor4.c_str());
  if (archivo_r4.fail()){
    cout <<"El archivo no se abriÃ³ exitosamente"<<endl;
    exit(1);
  }
  //Formato de los datos
  archivo_r4 << setiosflags(ios::fixed);

  double PI=3.14159265359;
  int N1=400;
  int S1=100;
  int P1=100;

  for(double tt=t0+paso*P1*S1;tt<=tf;tt=tt+paso){
    int n = (int)((tt - t0) / h);
    double k1x, k2x, k3x, k4x;
    double k1v, k2v, k3v, k4v;
    double t = tt;
    double x = x0;
    double v = v0;
    archivo_r4<<t<<"   ";
    for (int i = 1; i <= n; i=++i)
      {
    k1x = h * v;
    k1v = h * d2x(t, x, v);
    k2x = h * (v + (1/2)*k1v);
    k2v = h * d2x(t + 0.5*h, x + 0.5*k1x, v + 0.5*k1v);
    k3x = h * (v + 0.5*k2v);
    k3v = h * d2x(t + 0.5*h, x + 0.5*k2x, v + 0.5*k2v);
    k4x = h * (v + k3v);
    k4v = h * d2x(t + h, x + k3x, v + k3v);
    x = x + (1.0 / 6.0)*(k1x + 2 * k2x + 2 * k3x + k4x);
    v = v + (1.0 / 6.0)*(k1v + 2 * k2v + 2 * k3v + k4v);
    t = t + h;
      }
    if(x>PI){
      x=x-2*PI;
    }
    if(x<-PI){
      x=x+2*PI;
    }
    archivo_r4<<x<<"   ";
    archivo_r4<<v<<"\n";
  }
  archivo_r4.close();
}

int main()
{
  double PI=3.14159265359;
  double alfa= 1;
  double beta= -1;
  double gama= 0.3;
  double delta= 0.2;
  double omega= 1;
  int N=400;
  int S=100;
  int P=100;
  double t0p, x0p, v0p,h,tp,paso1;
  tp=N*2*PI/omega;
  t0p = 0;
  x0p = PI/6;
  v0p = 0.0;
  h = 0.01;
  paso1=2*PI/(omega*P);

  R4K(t0p, x0p, v0p, h, tp,paso1);
  return 0;
}
```

Figura. 4: *Código que integra el sistema*

Usando la librería Matplotlib de Python se graficaron los resultados de ambos, es decir el retrato de fase y el mapa de Poincaré obtenido. En la figura 5 se muestran ambos. Como era de esperarse, para estos parámetros, se evidencia un comportamiento caótico. Se ve la gran cantidad de trayectorias que sigue el sistema en el retrato de fase en el tiempo de integración. De igual manera, en el mapa de Poincaré, se evidencia el caos en el sentido de que ha sido atravesado por las trayectorias en una gran cantidad de puntos.

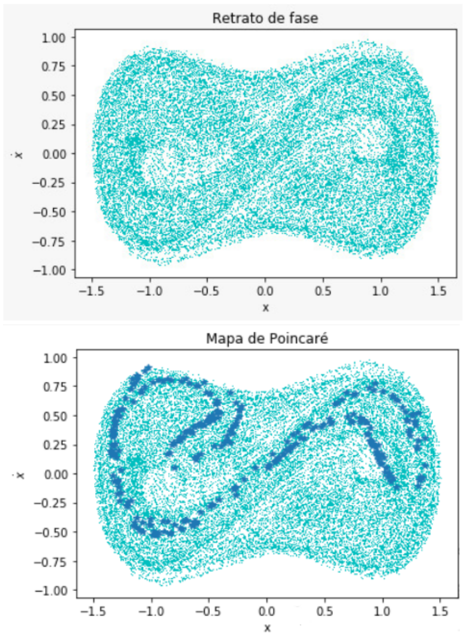

Figura. 5: *Retrato de fase y Mapa de Poincaré del sistema para los parámetros fijados*

IV. Conclusiones

Se logró solucionar medidante la implementación en C++ el sistema de Duffing para unos valores determinados de los parámetros, en los que se presenta caos. Logrando construir satisfactoriamente tanto el retrato de fase a partir de la integración y el mapa de Poincaré a partir de su construcción, dando cuenta así del caos que el sistema presenta para este caso en particular. La graficación se hizo a partir de la librería Matplotlib de Python dado que supera en calidad a las que se pueden lograr con las herramientas disponibles en C++.

V. Referencias

Strogatz, S.H, Nonlinear dynamics and chaos. 1994

Bronson, G. C++ para ingeniería y ciencias. 2006

Burde, R. Numerical Analsysis, 9th edition. 2011

J.M.T. Thompson and H.B. Stewart, Nonlinear Dynamics and Chaos (2nd edition), 2002.