

Las ecuaciones del telégrafo como aplicación de las líneas de transmisión: modelo computacional

Elizabeth Jiménez Gómez, Juan José León Gil

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia

2020-05-28

Resumen

Las ecuaciones del telégrafo son ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas que describen el voltaje y la corriente a través de una línea de transmisión eléctrica. Las ecuaciones fueron planteadas por Oliver Heaviside y fue de gran importancia porque demostró que a través de la línea pueden aparecer los patrones de onda. Estas provienen de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo aquí tomamos un enfoque más práctico que plantea la posibilidad de tomar un pedazo infinitesimal de la línea de transmisión y hacer un equivalente en forma de circuito eléctrico, conformado por densidades lineales de resistencia, capacitancia, inductancia y conductancia. Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito tanto para corriente como para voltaje, se pueden obtener las llamadas ecuaciones del telégrafo. Para resolver estas ecuaciones se recurrió a métodos de análisis numérico, muy especialmente al método de diferencias finitas. A través de esto se lograron obtener algunas animaciones e imágenes relacionadas con la propagación de la señal. Con todo esto se obtuvieron dos conclusiones importantes, la primera es que el método de diferencias finitas para este tipo de ecuaciones en particular es muy inestable y se comprueba computacionalmente la atenuación de las señales en condiciones reales.

1. Marco Teórico

Una línea de transmisión es una estructura material utilizada para transportar radiofrecuencias de un lugar a otro. Algo que la distingue es su *impedancia característica*. Para que exista esta propagación deben haber como mínimo dos conductores y un medio dieléctrico, como es el caso del cable coaxial. Cuando lo que se está propagando son ondas electromagnéticas transversales (TEM) se pueden definir sin confusión $V(t, z)$ e $I(t, z)$, el voltaje y la corriente respectivamente, a través de la línea de transmisión, siendo posible una representación en forma de circuitos eléctricos. En este caso se considera una línea formada por dos cables paralelos que conectan dos extremos de un sistema de comunicación.

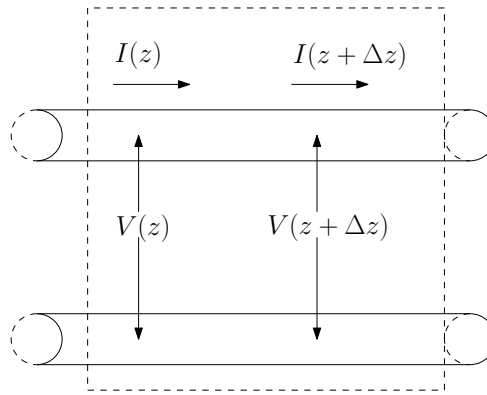


Figura 1.1: Sección longitudinal de la línea de transmisión en la cual analizar los comportamientos de voltaje y corriente.

Para hacer el análogo circuital, tenemos en cuenta una representación de un tramo infinitesimal Δz de la línea, como se muestra en la figura 1.1. En este tramo se definen las siguientes cantidades, y se da su descomposición en dimensiones fundamentales (T: tiempo, L: longitud, M: masa, Q: carga eléctrica):

1. *Resistencia por unidad de longitud* \mathcal{R} : definida por $\mathcal{R} = \frac{dR}{dz}$, donde R representa la disipación de voltaje debido a que los conductores no son ideales y por lo tanto la conductividad es finita. Las dimensiones de \mathcal{R} son $T^{-1} L M Q^{-2}$.

2. *Conductancia por unidad de longitud \mathcal{G}* : definida por $\mathcal{G} = \frac{dG}{dz}$, donde G representa las disipaciones que se producen en el material dieléctrico debido a que este no es ideal y por lo tanto la conductividad no es nula. Las dimensiones de \mathcal{G} son $T L^{-3} M^{-1} Q^2$.
3. *Inductancia por unidad de longitud \mathcal{L}* : definida por $\mathcal{L} = \frac{dL}{dz}$, donde L representa el proceso de almacenamiento energético en forma de campo magnético que se produce en la línea.. Las dimensiones de \mathcal{L} son $L M Q^{-2}$.
4. *Capacitancia por unidad de longitud \mathcal{C}* : definida por $\mathcal{C} = \frac{dC}{dz}$, donde C representa el proceso de almacenamiento energético en forma de campo eléctrico que se produce en la línea. Las dimensiones de \mathcal{C} son $T^2 L^{-3} M^{-1} Q^2$.

En la descripción del voltaje y la corriente por una línea de transmisión, se llega a un modelo matemático dado por las *ecuaciones del telégrafo*. Esta teoría fue diseñada para líneas de transmisión de comunicaciones, como hilos telegráficos y conductores de radiofrecuencia, y una primera derivación formal se encuentra en el artículo "*XIX. On the extra current*", publicado por Oliver Heaviside en 1876.

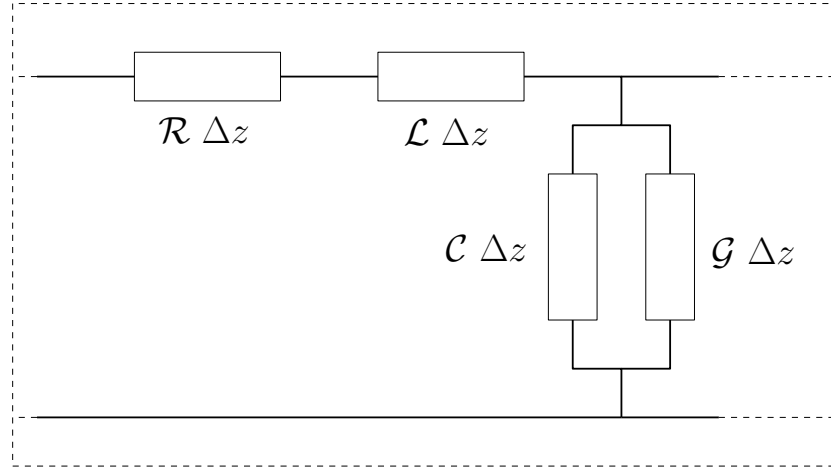


Figura 1.2: Diagrama de circuito sobre la sección longitudinal de la línea de transmisión.

Las ecuaciones del telégrafo son ecuaciones de onda (hiperbólicas) lineales. Éstas modelan una pieza infinitesimal de un cable telegráfico como un circuito eléctrico y la representación del circuito se puede ver en la figura 1.2, con los componentes en serie conformando una impedancia neta, y los componentes en paralelo conformando una admitancia neta. Para encontrar las ecuaciones que describen el comportamiento de este circuito, se aplican las reglas de Kirchhoff. Primero considerar el voltaje a través del inductor $\mathcal{L}\Delta z$ y la resistencia $\mathcal{R}\Delta z$ teniendo en cuenta que la corriente que pasa a través de ellos es la misma, y tomando el cable inferior como la referencia desde la cual medir diferencias de potencial:

$$\begin{aligned} V(t, z + \Delta z) - V(t, z) &= -\mathcal{L}\Delta z \frac{\partial I}{\partial t}(t, z) - \mathcal{R}\Delta z I(t, z) \\ \implies \frac{V(t, z + \Delta z) - V(t, z)}{\Delta z} &= -\mathcal{L} \frac{\partial I}{\partial t}(t, z) - \mathcal{R}I(t, z) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ahora considerar la corriente a través del capacitor $\mathcal{C}\Delta z$ y de la conductancia $\mathcal{G}\Delta z$ teniendo en cuenta que el voltaje es el mismo entre los extremos superior e inferior de ambos componentes:

$$\begin{aligned} I(t, z + \Delta z) - I(t, z) &= -\mathcal{C}\Delta z \frac{\partial V}{\partial t}(t, z) - \mathcal{G}\Delta z V(t, z) \\ \implies \frac{I(t, z + \Delta z) - I(t, z)}{\Delta z} &= -\mathcal{C} \frac{\partial V}{\partial t}(t, z) - \mathcal{G}V(t, z) \end{aligned} \quad (1.2)$$

En el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$ en las ecuaciones 1.1 y 1.2 se llega a:

$$\mathcal{L}\partial_t I(t, z) + \partial_z V(t, z) + \mathcal{R}I(t, z) = 0 \quad (1.3)$$

$$\mathcal{C}\partial_t V(t, z) + \partial_z I(t, z) + \mathcal{G}V(t, z) = 0 \quad (1.4)$$

Estas ecuaciones son las llamadas *ecuaciones del telégrafo*. Para desacoplarlas se deriva 1.3 con respecto a z y 1.4 con respecto a t , obteniendo luego de algunos pasos algebraicos un par de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de una sola función incógnita:

$$[-\mathcal{LC}\partial_t^2 + \partial_z^2 - (\mathcal{RC} + \mathcal{GL})\partial_t - \mathcal{GR}\mathbb{1}] V(t, z) = 0 \quad (1.5)$$

$$[-\mathcal{LC}\partial_t^2 + \partial_z^2 - (\mathcal{RC} + \mathcal{GL})\partial_t - \mathcal{GR}\mathbb{1}] I(t, z) = 0 \quad (1.6)$$

Las ecuaciones se parecen mucho a la ecuación de onda homogénea, con términos adicionales de $V(t, z)$ e $I(t, z)$ y sus primeras derivadas, y es posible identificar a la cantidad $1/\sqrt{\mathcal{LC}}$ como la *rapidez de propagación de la señal a través del medio*. Los términos adicionales en la ecuación son, físicamente, el efecto que causa el decaimiento (atenuación) y distorsión de la señal en el tiempo.

Las ecuaciones hiperbólicas 1.5 y 1.6 obtienen su solución imponiendo condiciones de frontera de Cauchy. Tomando cualquiera de las funciones $V(t, z)$ o $I(t, z)$ representadas bajo la función genérica $f(t, z)$, se hace la siguiente identificación para redimensionalizar la ecuación:

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow T = \left(\frac{\mathcal{GR}}{\mathcal{LC}}\right)^{\frac{1}{2}} t, \\ z &\longrightarrow Z = (\mathcal{GR})^{\frac{1}{2}} z, \\ k &= \left(\frac{\mathcal{RC}}{\mathcal{GL}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\mathcal{GL}}{\mathcal{RC}}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Las nuevas variables T y Z son adimensionales, al igual que la constante k . La función f en el punto (t, z) está relacionada entonces con una función F en el punto (T, Z) . Como la transformación de variables consiste en un reescalamiento con factores constantes, la forma funcional de F es similar a la de f , pero al tomar derivadas con respecto a T o Z aparecen los factores de proporcionalidad que adimensionalizan a t y z . Se reconocen con lo anterior dos cantidades importantes en el problema: el *tiempo característico* y la *longitud característica* del sistema:

$$\begin{aligned} T_c &= \left(\frac{\mathcal{LC}}{\mathcal{GR}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ L_c &= \frac{1}{(\mathcal{GR})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Estas asignaciones permiten estimar a qué escala en tiempo (y por tanto en frecuencia de señal transmitida) y a qué escala en longitud (tamaño de la línea de transmisión) opera el sistema modelado según los valores que tomen los llamados *parámetros primarios*: $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}$ y \mathcal{G} .

Se deberá entonces resolver el siguiente problema con valores de frontera (se han escogido condiciones de Cauchy - Dirichlet):

$$\begin{aligned} [-\partial_T^2 + \partial_Z^2 - k\partial_T - \mathbb{1}] F(T, Z) &= 0, \\ T \in [T_0, T_F], \quad Z \in [Z_0, Z_F], \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} F(T_0, Z) &= \tilde{a}(Z), \quad \partial_T f(T_0, Z) = \tilde{b}(Z), \\ F(T, Z_0) &= \tilde{c}(T), \quad f(T, Z_F) = \tilde{d}(T). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Consistiendo el problema original de dos ecuaciones acopladas entre voltaje y corriente (1.3 y 1.4), conocer el valor de V permite calcular el valor de I o viceversa. Suponiendo como caso aplicado en este trabajo que el problema con valores de frontera 1.9 - 1.10 se resuelve para $V(t, z)$, entonces $I(t, z)$ se puede calcular:

1. A partir de 1.3 como

$$I(t, z) = e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t} \left[-\frac{1}{\mathcal{L}} \int dt e^{\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t} \frac{\partial V}{\partial z} + \tilde{I}_t(z) \right] \quad (1.11)$$

2. A partir de 1.4 como

$$I(t, z) = - \int dz \left(\mathcal{C} \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{G}V \right) + \tilde{I}_z(t) \quad (1.12)$$

donde $\tilde{I}_z(t)$ es una función que no depende de z y $\tilde{I}_t(z)$ es una función que no depende de t . La solución única se logra aplicando las condiciones iniciales y de frontera para $I(t, z)$ sobre la forma escogida.

La adimensionalización propuesta en la ecuación 1.7 tiene la ventaja de permitir una forma más simple de la ecuación diferencial (ver 1.9). Sin embargo interesa conocer los valores en términos de las cantidades medibles reales, por lo que debe revertirse dicha transformación al momento de dar salida a los datos generados. Para ello, tener en cuenta cómo depende cada variable de su contraparte adimensional, según lo siguiente:

1. Evaluar la función (voltaje o corriente) f en los valores (t, z) implica evaluar la función F en las variables $(T_c T, L_c Z)$.
2. Evaluar la condición de frontera f en los valores (t_0, z) implica evaluar la función F en las variables $(T_c T_0, L_c Z)$.
3. Evaluar la condición de frontera $\partial_t f$ en los valores (t_0, z) implica evaluar la función $T_c \partial_T F$ en las variables $(T_c T_0, L_c Z)$.
4. Evaluar la condición de frontera f en los valores (t, z_0) implica evaluar la función F en las variables $(T_c T, L_c Z_0)$.
5. Evaluar la condición de frontera f en los valores (t, z_F) implica evaluar la función F en las variables $(T_c T, L_c Z_F)$.

2. Discretización y método de diferencias finitas

Para resolver de forma numérica la ecuación diferencial 1.9 sujeta a las condiciones de frontera 1.10, se procede de la siguiente manera:

1. Hacer una partición regular de los intervalos $[T_0, T_F]$ y $[Z_0, Z_F]$, tal que el primero consista de N_T subintervalos y el segundo consista de N_Z subintervalos.

Los valores de T y Z podrán entonces ubicarse indicialmente según:

$$\begin{aligned} T_i &= T_0 + i h_T, \\ Z_j &= Z_0 + j h_Z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde h_T y h_Z son los tamaños de paso a lo largo de cada intervalo, dados por:

$$\begin{aligned} h_T &= \frac{T_F - T_0}{N_T}, \\ h_Z &= \frac{Z_F - Z_0}{N_Z}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2. Reescribir la ecuación 1.9 y la condición inicial contenida en 1.10 en términos de diferencias finitas.
3. Escribir un programa autocontenido que sirva para resolver el problema con valores en la frontera dado un conjunto adecuado de condiciones y parámetros de cómputo.

Para ejecutar el segundo paso, se usan las siguientes aproximaciones sobre las particiones hechas en el primer paso:

$$\begin{aligned} \partial_T^2 f(T_i, Z_j) &\approx \frac{1}{h_T^2} [f(T_{i-1}, Z_j) - 2f(T_i, Z_j) + f(T_{i+1}, Z_j)] \\ \partial_Z^2 f(T_i, Z_j) &\approx \frac{1}{h_Z^2} [f(T_i, Z_{j-1}) - 2f(T_i, Z_j) + f(T_i, Z_{j+1})] \\ \partial_T f(T_i, Z_j) &\approx \frac{1}{2h_T} [f(T_{i+1}, Z_j) - f(T_{i-1}, Z_j)] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Con el fin de usar la condición inicial, se aproxima $f(T, Z)$ a segundo orden en el primer paso del avance temporal $T_1 = T_0 + h_T$:

$$f(T_0 + h_T, Z) \approx f(T_0, Z) + h_T \partial_T f(T_0, Z) + \frac{1}{2} h_T^2 \partial_T^2 f(T_0, Z) \tag{2.4}$$

En particular, $f(T_0, Z)$ satisface la ecuación inicial 1.9, por lo que la segunda derivada temporal que aparece al final de esta aproximación puede escribirse como:

$$\partial_T^2 f(T_0, Z) = \partial_Z^2 f(T_0, Z) - k \partial_T f(T_0, Z) - f(T_0, Z) \quad (2.5)$$

Insertando este resultado en la aproximación 2.4, usando las expansiones dadas en 2.3, factorizando constantes e incluyendo las funciones que operan en la frontera, se llega a:

$$f(T_0 + h_T, Z) \approx \left[1 - \left(\frac{h_T}{h_Z} \right)^2 - \frac{1}{2} h_T^2 \right] \tilde{a}(Z) + \left[h_T - \frac{1}{2} k h_T^2 \right] \tilde{b}(Z) + \frac{1}{2} \left(\frac{h_T}{h_Z} \right)^2 [\tilde{a}(Z - h_Z) + \tilde{a}(Z + h_Z)] \quad (2.6)$$

En lo que sigue, la función manipulada no es más f (la solución exacta), y se designa entonces a $w(T_i, Z_j) \equiv w_{i,j}$ como la solución aproximada que se obtendrá con el método discreto. Insertando las aproximaciones 2.3 en la ecuación 1.9, se llega a:

$$w_{i,j-1} + \left(\frac{h_T}{h_Z} \right)^2 \left(\frac{1}{2} k h_T - 1 \right) w_{i-1,j} + 2 \left[\left(\frac{h_T}{h_Z} \right)^2 - 1 - \frac{1}{2} h_T^2 \right] w_{i,j} - \left(\frac{h_T}{h_Z} \right)^2 \left(\frac{1}{2} k h_T + 1 \right) w_{i+1,j} + w_{i,j+1} = 0 \quad (2.7)$$

Igualmente, la ecuación 2.6 se puede escribir en términos de w como:

$$w_{1,j} = \left[1 - \left(\frac{h_T}{h_Z} \right)^2 - \frac{1}{2} h_T^2 \right] \tilde{a}_j + \left[h_T - \frac{1}{2} k h_T^2 \right] \tilde{b}_j + \frac{1}{2} \left(\frac{h_T}{h_Z} \right)^2 [\tilde{a}_{j-1} + \tilde{a}_{j+1}] \quad (2.8)$$

Las ecuaciones 2.7 y 2.8 son la base para obtener la solución aproximada en la región $[T_0, T_F] \times [Z_0, Z_F]$.

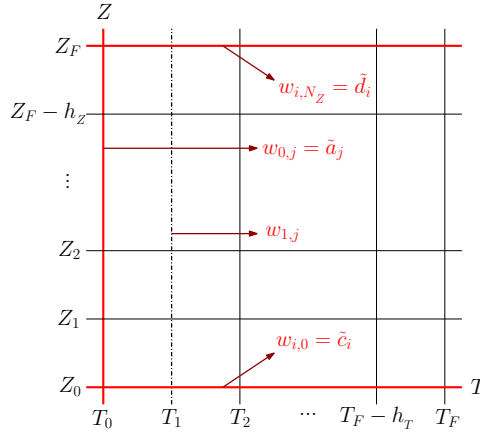


Figura 2.1: Partición de los intervalos temporal y espacial, con énfasis en las condiciones inicial y de frontera.

En la figura 2.1 se destaca la región discretizada, y se marcan con líneas gruesas los bordes en los cuales se conoce la función:

- Los bordes inferior y superior son los extremos espaciales de la línea de transmisión, y para todo valor de T la función es conocida allí (dada por $\tilde{c}(T)$ o $\tilde{d}(T)$ según el extremo).
- El borde izquierdo es el extremo temporal que marca el momento inicial en que se evalúa la función. Su valor es conocido para toda ubicación Z , dado por $\tilde{a}(Z)$.
- La ecuación 2.8 indica que el valor aproximado de la función se puede conocer (gracias a la condición inicial) en el primer paso a lo largo del eje T , para todo valor de Z , según la igualdad que define a $w_{1,j}$ y que usa solamente valores de frontera conocidos $\tilde{a}(Z)$ y $\tilde{b}(Z)$.

De lo anterior, el valor de la función en el tiempo final no está dado por las condiciones de frontera, y por tanto no se puede usar dicho borde para conocer la función en puntos vecinos. Siendo la ecuación 2.7 una relación entre cinco puntos dispuestos en forma de estrella, se ve en la figura 2.2 que será útil en este caso despejar de ella el punto cuya coordenada temporal sea la más avanzada. Bajo esta prescripción, al recorrer el espacio orden creciente para T , se logra barrer toda la región interna usando de forma adecuada las fronteras y los valores conocidos.

Se necesita entonces resolver la ecuación 2.7 para $w_{i+1,j}$. Para ello, se definen las siguientes constantes:

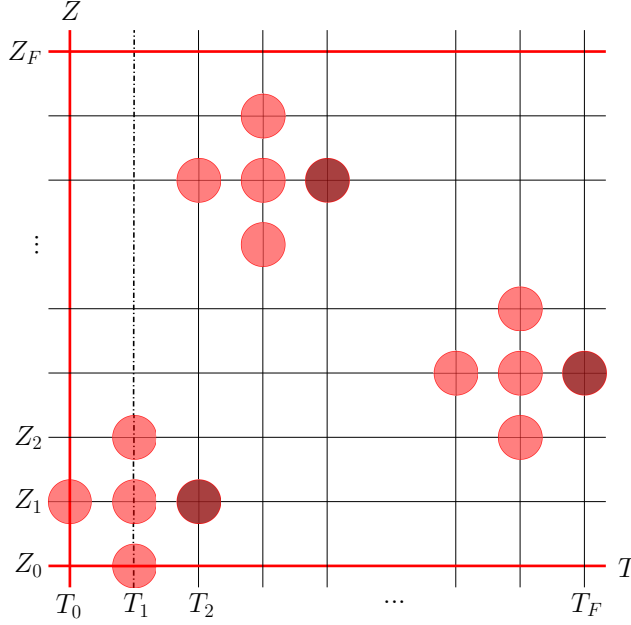


Figura 2.2: Región discretizada y disposición de puntos con los que calcular $w_{i,j}$ de forma iterativa.

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 \left(\frac{1}{2}kh_T + 1\right)^{-1}, & \mu &= 1 - \left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 - \frac{1}{2}h_T^2, \\ \alpha &= \frac{\frac{1}{2}kh_T - 1}{\frac{1}{2}kh_T + 1}, & \nu &= h_T - \frac{1}{2}kh_T^2, \\ \beta &= \frac{2 - 2\left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2 - h_T^2}{\frac{1}{2}kh_T + 1}, & \sigma &= \frac{1}{2}\left(\frac{h_T}{h_Z}\right)^2. \end{aligned}$$

En términos de lo anterior, las ecuaciones a usar en el método iterativo son:

$$w_{i+1,j} = \alpha w_{i-1,j} + \beta w_{i,j} + \lambda(w_{i,j-1} + w_{i,j+1}), \quad i = 1, \dots, N_T - 1, \quad j = 1, \dots, N_Z - 1 \quad (2.9)$$

$$w_{1,j} = \mu \tilde{a}_j + \nu \tilde{b}_j + \sigma(\tilde{a}_{j-1} + \tilde{a}_{j+1}), \quad j = 1, \dots, N_Z - 1 \quad (2.10)$$

3. Soluciones analíticas

Por el método de separación de variables, se llega a la siguiente expresión como forma general de $F(T, Z)$ que soluciona la ecuación diferencial 1.9:

$$F(T, Z) = \Theta_a(T)\zeta_a(Z) + \Theta_0(T)\zeta_0(Z) + \Theta_b(T)\zeta_b(Z) \quad (3.1)$$

con

$$\begin{aligned} \Theta_a(T) &= e^{-\frac{k}{2}T} \left[\int_{-\infty}^{-\frac{k}{2}} da (A_1(a) \cos(f_a T) + A_2(a) \sin(f_a T)) \right. \\ &\quad + \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} da (A_3(a) e^{-f_a T} + A_4(a) e^{f_a T}) \\ &\quad \left. + \int_{\frac{k}{2}}^{\infty} da (A_5(a) \cos(f_a T) + A_6(a) \sin(f_a T)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_a(Z) &= \int_{-\infty}^{-1} da \left(B_1(a) \cos(\sqrt{a^2 - 1}Z) + B_2(a) \sin(\sqrt{a^2 - 1}Z) \right) \\ &+ \int_{-1}^1 da \left(B_3(a) e^{-\sqrt{a^2 - 1}Z} + B_4(a) e^{\sqrt{a^2 - 1}Z} \right) \\ &+ \int_1^{\infty} da \left(B_5(a) \cos(\sqrt{a^2 - 1}Z) + B_6(a) \sin(\sqrt{a^2 - 1}Z) \right)\end{aligned}$$

$$\Theta_0(T) = -C_1 e^{-kT} + C_2$$

$$\zeta_0(Z) = D_1 e^{-Z} + D_2 e^Z$$

$$\Theta_b(T) = e^{-\frac{k}{2}T} \int_{-\infty}^{+\infty} db \left(E_1(b) e^{-f_b T} + E_2(b) e^{f_b T} \right)$$

$$\zeta_b(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} db \left(F_1(b) e^{-\sqrt{b^2 + 1}Z} + F_2(b) e^{\sqrt{b^2 + 1}Z} \right)$$

donde se definieron

$$\begin{aligned}f_a &= \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - a^2}, \\ f_b &= \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + b^2}.\end{aligned}$$

La anterior permite solucionar formalmente cualquier problema con valores de frontera adecuados, sin embargo el procedimiento parece algebraicamente demandante, comparado con la siguiente propuesta para obtener expresiones analíticas:

Sugerir un Ansatz que dé cuenta del efecto físico a considerar. Siendo las soluciones ondas que decaen con el tiempo, y regresando a la ecuación *no adimensionalizada* 1.5, las primeras tentativas son:

$$V(t, z) = e^{-At} \cosh(Bz), \quad V(t, z) = e^{-At} \sinh(Bz), \quad (3.2)$$

en cuyo caso las constantes A y B deben satisfacer en ambas formas

$$-\mathcal{L}CA^2 + B^2 + \mathcal{R}CA - \mathcal{G}\mathcal{R} = 0 \quad (3.3)$$

y esto se cumple en particular si se asignan $A = \mathcal{R}/\mathcal{L}$ y $B = \sqrt{\mathcal{G}\mathcal{R}}$, con lo cual las siguientes soluciones son válidas para la ecuación del telégrafo en $V(t, z)$ con condiciones de frontera adecuables para una región del tiempo y del espacio deseada:

$$V(t, z) = e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t} \cosh(\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{R}}z), \quad V(t, z) = e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t} \sinh(\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{R}}z). \quad (3.4)$$

Otra propuesta relacionada con la anterior es una combinación exponencial más directa:

$$V(t, z) = e^{-At+Bz}, \quad (3.5)$$

tal que A y B también satisfagan las condiciones 3.3, con lo que otra forma de solución es la siguiente:

$$V(t, z) = e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t} e^{\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{R}}z}. \quad (3.6)$$

4. Resultados

Para poder ver los resultados hay carpetas especiales donde todo esta organizado, si quiere ver la definición de los ejemplos tiene que ir a la carpeta Examples, si quiere ver las animaciones, todas estan reunidas en la carpeta Gifs y por último, si quiere ver alguna imagen, estan en la carpeta OutPlots.

Un primer acercamiento con el fin de poner en práctica el método y por ende la ecuación diferencial, lo primero que se tuvo en cuenta fue buscar valores para los paámetros principales $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{G}$. En este sentido quisimos escoger valores que se acercaran a los que realmente se pueden encontrar en las líneas que se utilizan diariamente. Todos estos valores fueron tomados de Wikipedia donde dan una amplia cantidad de valores característicos. Para el primer ejemplo se quisieron utilizar los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= 2,0e - 2 \frac{\Omega}{m} \\ \mathcal{L} &= 6,16e - 7 \frac{H}{m} \\ \mathcal{C} &= 5,157e - 11 \frac{S}{m} \\ \mathcal{G} &= 7,2e - 7 \frac{F}{m}\end{aligned}$$

Mientras tanto a la ecuación diferencial se le aplicaba un voltaje sinusoidal como condición inicial. La imagen y la animación de este ejemplo, esta referenciado como ExerciseSINREAL.jpg y ExerciseSINREAL.gif respectivamente. La implementación esta referenciado como exampleSINREAL.h

Probando este ejemplo descubrimos que el método tenía una gran inestabilidad y era supremamente sensible a cualquier cambio, tanto en los parámetros como en las condiciones iniciales y de frontera. Indagando un poco en esto, nos remitimos al texto guía (Burden, 9ed, pag, 744) y encontramos que el método es inestable intrínsecamente: “El método de diferencias finitas explícito para la ecuación de onda tiene problemas de estabilidad”. Sin embargo en el libro mencionan que “existen métodos implícitos que son incondicionalmente estables”. Allí nos remiten a un libro que contiene un método implícito que mejora la estabilidad, para mayor información revisar (W, F, Ames, 1984, pages, 61 y 199), y el bosquejo de una primera implementacion teórica en el apéndice.

De acuerdo a esto, decidimos fijar los valores de los parámetros primarios $\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{L}$ en 1.0 y variar las condiciones iniciales y de frontera. Esto lo hicimos de acuerdo a información encontrada en algunos artículos donde ya habían manipulado la ecuación e incluso pusimos a prueba una de las soluciones analíticas.

Todos los resultados de las imagenes, animaciones e implementaciones las puede encontrar en las carpetas correspondientes que se mencionaron al principio de esta sección.

5. Conclusiones

1. El método es extremadamente inestable, por lo que fue muy complicado hacer cambios en los parámetros primarios y condiciones iniciales y de frontera.
2. Apesar de la inestabilidad del método, encontramos que es una muy buena aproximación a la solución real, esto lo pudimos comprobar comparando las aproximaciones con algunas soluciones analíticas que se pudieron encontrar.
3. Con el proyecto pudimos comprobar la atenuación de señales debido a trabajar con materiales que no son ideales. En las animaciones pudimos comprobar claramente la atenuación y distorsión de la señal debido a los términos adicionales en la ecuación de onda (estos términos son representados por la primera derivada en el tiempo y la función).

A. Método modificado para buscar mayor estabilidad en el cómputo

Siguiendo el esquema de la referencia aludida, se modifica el metodo de diferencias finitas de la siguiente forma:

hacer una segunda aproximación de las derivadas, ahora con el promedio de dos aproximaciones discretas.

En términos de la particion hecha, lo anterior se traduce a promediar según:

1. $\partial_T w_{i,j} = \frac{1}{2} (\partial_T w_{i,j-1} + \partial_T w_{i,j+1})$
2. $\partial_T^2 w_{i,j} = \frac{1}{2} (\partial_T^2 w_{i,j-1} + \partial_T^2 w_{i,j+1})$

$$3. \partial_z^2 w_{i,j} = \frac{1}{2} (\partial_z^2 w_{i-1,j} + \partial_z^2 w_{i+1,j})$$

Con estas consideraciones, la ecuación de diferencias finitas del problema con valores de frontera se convierte en:

$$A w_{i-1,j-1} + B w_{i,j-1} + C w_{i+1,j-1} + D w_{i-1,j} + E w_{i,j} + F w_{i+1,j} + G w_{i-1,j+1} + H w_{i,j+1} + I w_{i+1,j+1} = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde A, B, C, \dots, I son constantes, escritas segun la notacion de este articulo como:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{h_T^2} + \frac{1}{h_Z^2} + \frac{k}{2h_T} \right) \\ B &= \frac{1}{h_T^2} \\ C &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{h_T^2} + \frac{1}{h_Z^2} - \frac{k}{2h_T} \right) \\ D &= -\frac{1}{h_Z^2} \\ E &= -1 \\ F &= -\frac{1}{h_Z^2} \\ G &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{h_T^2} + \frac{1}{h_Z^2} + \frac{k}{2h_T} \right) \\ H &= \frac{1}{h_T^2} \\ I &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{h_T^2} + \frac{1}{h_Z^2} - \frac{k}{2h_T} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Simplificaciones necesarias aparte, la ecuación A.1 no comparte las mismas bondades que la ecuación 2.7. Se trata ahora de una ecuación con a lo sumo nueve incógnitas, dispuestas no en forma de estrella sino en forma de cuadrado 3×3 . Es necesario bajo esta aproximación resolver entonces el sistema matricial que se genere de la ecuación y las condiciones iniciales y de frontera.

En principio puede usarse todavía la aproximacion generada en el primer paso de tiempo, ya que con dicha igualdad se usan las condiciones iniciales que provee el problema y por tanto ellas garantizan la existencia y unicidad de la solución. Un esquema analogo a la figura 2.2 se presenta a continuación, donde los puntos mas oscuros representan términos conocidos, y los opacos son los desconocidos.

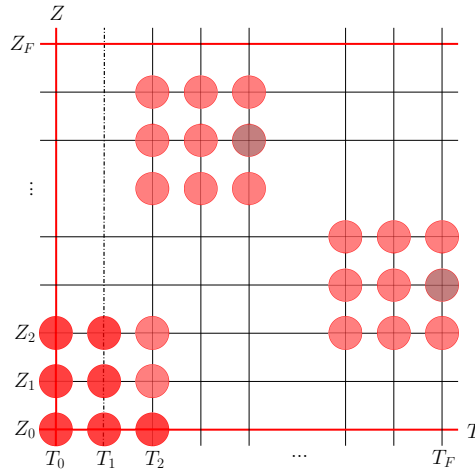


Figura A.1: Región discretizada y disposición de puntos con los que calcular $w_{i,j}$ para el metodo modificado.

Se ve entonces que para algunos sectores de la partición, la ecuación tendra hasta ocho términos conocidos según las condiciones iniciales y de frontera, mientras que para otros sectores todos los términos son desconocidos. Una profundización sobre este método se deja como perspectiva a un avance superior del presente proyecto.

Referencias

- [1] V. K. Srivastava, M. K. Awasthi, R. K. Chaurada and M. Tasmir. The Telegrapher Equation and Its Solution by Reduced Diferential Transform Method. Modelling and Simulation in Engineering, 2013.
- [2] M. Sari, A. Gunay, G. Gurarslan. A solution to the Telegraph Equation by using DGJ Method. International Journal of Nonlinear Science, 2013.
- [3] A. Mohebbi, M. Dehghan. High Order Compact Solution of the One-Space-Dimensional Linear Hyperbolic Equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2007.
- [4] R. Burden, J. D. Faires. Numerical Analysis. 2010.
- [5] W. F. Ames. Numerical Methods For Partial Differential Equations. 1984.