



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE  
MANIZALES**

**GEOMETRÍA HIPERBÓLICA**

**CAMILO RAMÍREZ MALUENDAS**

camramirezma@unal.edu.co

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Manizales, Colombia**

*A Maluchas, Milio, Colo y More.*

*«Lo cierto es que fueron años de arduo  
aprendizaje, con lapsos de desaliento en los que estuvo a  
punto de desistir. Pero al fin triunfó la perseverancia y  
Raimundo aprendió a ladrar.»*

MARIO BENEDETTI,  
*El hombre que aprendió a ladrar*

# Índice general

Lista de figuras . . . . .	5
<b>1. Elementos Básicos</b>	<b>6</b>
1.1. Espacios vectoriales con producto interno . . . . .	6
1.1.1. Problemas . . . . .	9
1.2. Funciones complejas básicas . . . . .	9
1.2.1. Problemas . . . . .	12
1.3. Plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$ . . . . .	12
1.3.1. Problemas . . . . .	16
<b>2. Transformaciones de Möbius.</b>	<b>17</b>
2.0.1. Problemas . . . . .	22
2.1. Clasificación de las transformaciones de Möbius . . . . .	22
2.2. Propiedades de las transformaciones de Möbius . . . . .	24
2.2.1. Problemas . . . . .	28
2.3. Más propiedaes de las Mobius . . . . .	29
<b>3. El plano Hiperbólico <math>\mathbb{H}</math> o plano de Lovachevsky</b>	<b>31</b>
3.1. Métrica Riemanniana del semi plano superior . . . . .	32
3.1.1. Problemas . . . . .	38
3.2. Transformaciones de Möbius y el plano Hiperbólico . . . . .	40
3.2.1. Problemas . . . . .	43
3.3. Geodésicas e isometrías del plano hiperbólico $\mathbb{H}$ . . . . .	43
3.3.1. Problemas . . . . .	49
3.4. Topología generada por la distacia hiperbólica y fórmula de la distancia. .	50
3.4.1. Problemas . . . . .	54
3.5. Ángulos y Área hiperbólica. . . . .	54
3.5.1. Problemas . . . . .	56
3.5.2. Polígonos hiperbólicos . . . . .	56
3.5.3. Trigonometría hiperbólica . . . . .	59

<b>4. Disco de Poincaré</b>	<b>65</b>
4.1. Modelo del disco de Poincaré . . . . .	65
4.2. Producto punto y distancia hiperbólica . . . . .	69
4.3. Función de Cayley . . . . .	69
4.4. Curvatura . . . . .	69
4.4.1. Geometría diferencial . . . . .	70
4.5. Curvatura en el plano hiperbólico . . . . .	73
4.6. Teorema Egregium de Gauss . . . . .	76
<b>5. Grupos Topológicos</b>	<b>78</b>
5.0.1. Problemas . . . . .	81
5.1. Grupos Discontinuos . . . . .	81
5.1.1. Problemas . . . . .	86
5.1.2. Grupos Fuchsianos . . . . .	86
<b>6. De interés</b>	<b>91</b>
<b>7. El flujo Geodésico</b>	<b>92</b>

# Índice de figuras

1.1.	<i>Proyección estereográfica.</i>	13
3.1.	<i>Círculos ortogonales al eje real.</i>	44
3.2.	<i>Mediatriz del segmento cuyos extremos son los complejo <math>z</math> y <math>w</math>.</i>	45
3.3.	<i>Círculos ortogonales paralelos a <math>C</math> que pasan por <math>z</math>.</i>	46
3.4.	<i>Ángulo entre dos curvas.</i>	56
3.5.	<i>Triángulos hiperbólico.</i>	57
3.6.	<i>Triángulo hiperbólico con vértice <math>\infty</math>.</i>	58
3.7.	<i>Triángulo hiperbólico con vértice sobre <math>\mathbb{H}</math>.</i>	58
3.8.	<i>Ángulo del paralelismo.</i>	61
4.1.	<i>Disco unitario.</i>	65
4.2.	<i>Segmento de recta en <math>\Delta</math></i>	67
4.3.	<i>Recta euclidiana</i>	68

# Capítulo 1

## Elementos Básicos

### 1.1. Espacios vectoriales con producto interno

En 1840 el matemático alemán Hermann Günter Grassmann (1809-1877) publicó el artículo titulado *Theorie der Ebbe und Flut*, en el cual introdujo la base de los espacios vectoriales. Además, definió la substracción y adición de los objetos matemáticos llamados *strecken*<sup>1</sup>, una de estas operaciones es el equivalente al producto cruz moderno. En su escrito Grassman también presentó la operación llamada el producto lineal de dos *strecken*, el cual corresponde al producto punto o escalar actual (véase [12]).

**Definición 1.1.1.** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  un **producto interno** sobre  $V$  es una función  $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes propiedades

1. Para todo  $u, v, w \in V$ ,  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ .
2. Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y todo  $u, v, w \in V$ ,  $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$ .
3. Para todo  $u, v, w \in V$ ,  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ .
4. Para todo  $u, v \in V$ ,  $\langle u, v \rangle \geq 0$ , la igualdad se tiene si y solo si  $u = 0$ .

La pareja  $(V, \langle , \rangle)$  se le llama **espacio vectorial normado**.

De las propiedades 1, 2 y 3 enunciadas anteriormente se sigue que para cada  $u, v, w \in V$  cada real  $\lambda \in \mathbb{R}$  son ciertas las igualdades

$$\begin{aligned}\langle u, v + w \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \\ \langle u, \lambda v \rangle &= \lambda \langle u, v \rangle.\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Tramo, traducción del alemán al castellano.

## 1.1. ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO BÁSICOS

**Ejemplo 1.1.2.** En  $\mathbb{R}^2$  definimos el producto interno canónico (usual),

$$\langle u, v \rangle_e = u_1 v_1 + u_2 v_2, \quad (1.1)$$

para los elementos  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Los vectores  $e_1$  y  $e_2$  corresponden a la base canónica o estándar para  $\mathbb{R}^2$ , entonces el producto interno

$$\langle e_i, e_j \rangle_e = \delta_{i,j}$$

es la delta de Kronecker, donde  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$ , con  $j, i \in \{1, 2\}$ . Contrariamente, si  $i \neq j$ , entonces  $\delta_{i,j} = 0$ .

Un producto interno nos proporciona una manera de medir vectores.

**Definición 1.1.3.** Si  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio vectorial normado. Para cada  $v \in V$  se define la **norma** asociada a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , como el escalar dado por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

**Ejemplo 1.1.4.** El la **norma usual** del vector  $u = (u_1, u_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  definida por el producto interno canónico es

$$\|u\| = \sqrt{\langle u_1, u_2 \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

La norma en un espacio unitario cumple con las siguientes propiedades.

**Teorema 1.1.5.** Si  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio vectorial normado entonces:

1. Para todo  $v \in V$  se tiene que  $\|v\| \geq 0$  y  $\|v\| = 0$  si y solo si  $v = 0$
2. Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y todo  $v \in V$  se tiene que  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
3. Para todo  $u, v \in V$  se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

4. Para todo  $u, v \in V$  se cumple la desigualdad triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

*Demostración.* La demostración de los numerales (1) y (2) son una consecuencia directa de la definición de norma. Veamos que se satisface el numeral (3). Consideremos el vector

## 1.1. ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO BÁSICOS

$v \neq 0$  y definamos el vector  $w = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle u - w, u - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, w \rangle - \langle w, u \rangle + \langle w, w \rangle, \\
 &\leq \langle u, u \rangle - 2\langle u, w \rangle + \langle w, w \rangle, \\
 &\leq \langle u, u \rangle - 2 \left\langle u, \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right\rangle + \left\langle \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v, \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right\rangle, \\
 &\leq \langle u, u \rangle - \frac{2}{\|v\|^2} \langle u, v \rangle \langle u, v \rangle + \frac{1}{\|v\|^2 \|v\|^2} \langle u, v \rangle \langle u, v \rangle \langle v, v \rangle, \\
 &\leq \langle u, u \rangle - \frac{2}{\|v\|^2} (\langle u, v \rangle)^2 + \frac{1}{\|v\|^2} (\langle u, v \rangle)^2, \\
 &\leq \|u\|^2 - \frac{1}{\|v\|^2} (\langle u, v \rangle)^2.
 \end{aligned}$$

De esta última expresión despejamos  $(\langle u, v \rangle)^2$  y luego tomamos la raíz cuadrada

$$\begin{aligned}
 (\langle u, v \rangle)^2 &\leq \|u\|^2 \|v\|^2, \\
 |\langle u, v \rangle| &\leq \|u\| \|v\|.
 \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que se satisface el numeral (4). Observemos que se tiene

$$\begin{aligned}
 \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle, \\
 &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle, \\
 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.
 \end{aligned}$$

A esta última igualdad le aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|u + v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2, \\
 &= \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2, \\
 &= (\|u\| + \|v\|)^2.
 \end{aligned}$$

□

A partir de la definición de norma de un vector, podemos introducir una distancia entre dos vectores en el espacio normado.

**Teorema 1.1.6.** *Dado el espacio vectorial normado  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . La función  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante*

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}, \forall u, v \in V,$$

*es una métrica sobre el espacio vectorial  $V$ .*

La prueba de esta afirmación se sigue del Teorema 1.1.5.



## 1.2. FUNCIONES COMPLEJAS BÁSICAS

**Ejemplo 1.1.7.** La función distancia  $d$  sobre  $\mathbb{R}^2$  definida por la norma usual de un vector, está definida mediante

$$d_e(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle_e} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}, \quad (1.2)$$

para los elementos  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Recordemos que esta métrica se llama la **métrica usual** o **euclidiana** sobre  $\mathbb{R}^2$ .

Con el objetivo de dotar con una topología al espacio métrico  $(V, d)$  tomamos un valor real  $r \geq 0$  y el vector  $v \in V$ , entonces la **bola** con centro el punto  $v$  y radio  $r$  es el conjunto

$$B_d(v, r) = \{w \in V : d(v, w) < r\}. \quad (1.3)$$

Nótese que si  $r = 0$ , entonces  $B_d(v, 0) = \emptyset$ .

**Teorema 1.1.8.** El conjunto  $\mathcal{B} = \{B_d(v, r) : \forall v \in V, \forall r \geq 0\}$  es base para la topología de  $V$ .

**Ejemplo 1.1.9.** Consideremos la familia  $\tau$  conformada por los subconjuntos  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que para todo  $u \in U$  existe un valor real  $r > 0$  tal que la bola  $B_{d_e}(u, r) \subset U$ . La familia  $\tau$  es una topología para  $\mathbb{R}^2$ , la cual se le llama la **topología usual** o **euclidiana**.

### 1.1.1. Problemas

**Problema 1.1.10.** Probar que el producto interno canónico (usual)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  en  $\mathbb{R}^2$  es efectivamente un producto interno.

**Problema 1.1.11.** Si consideramos un valor real positivo no nulo  $r$ . Probar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r := \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle_e}{r^2}$  también es un producto interno en  $\mathbb{R}^2$ .

**Problema 1.1.12.** Probar el Teorema 1.1.8

## 1.2. Funciones complejas básicas

Recordemos que los **números complejos**, denotamos mediante  $\mathbb{C}$  es  $\mathbb{R}^2$  con las operaciones adición y multiplicación definidas mediante

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

para cada  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ . Cada elemento de  $\mathbb{C}$  le llamamos un **número complejo** y usualmente, las letras  $z$  y  $w$  se reservan para denotar al complejo  $(x, y)$ .

Recordemos que todo número complejo de la forma  $(x, 0)$  lo podemos identificar con  $x$  y, el complejo  $(0, 1)$  se le llama la **unidad imaginaria** y lo denotamos mediante  $i$ .

## 1.2. FUNCIONES COMPLEJAS BÁSICAS CASO 1. ELEMENTOS BÁSICOS

Entonces todo número complejo  $z = (x, y)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$  lo podemos escribir de forma **binómica**

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi.$$

El valor real  $x := \operatorname{Re}(z)$  se le llama la **parte real** del complejo  $z$  y el valor  $y := \operatorname{Im}(z)$  se le llama la **parte imaginaria** de  $z$ .

Dado que los números complejos  $\mathbb{C}$  es  $\mathbb{R}^2$  con dos operaciones (suma y multiplicación), entonces apartir del la norma usual de  $\mathbb{R}^2$  definimos el **módulo** o **norma** del complejo  $z$  mediante

$$|z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

El **conjugado** del complejo  $z$  es  $\bar{z} := \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i$ . Nótese que  $|z|^2 = z\bar{z}$ .

Los números complejos  $\mathbb{C}$  toman la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ , *i.e.*, la topología definida por la métrica usual, la cual escribiremos en términos de la teoría básica desarrollada,  $d_e : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $d_e(z, w) = |z - w|$ .

Un número complejo no nulo  $z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$  lo podemos escribir mediante

$$z = |z| \left( \frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i \right), \quad (1.4)$$

el complejo  $\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i$  está sobre la circunferencia de radio 1 y centro el origen, entonces este último lo podemos escribir mediante

$$\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i = \cos \theta + i \sin \theta,$$

para algún  $\theta \in \mathbb{R}$ . Reemplazando esta última expresión en la igualdad (1.4) tenemos

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Esta manera de expresar al complejo no nulo  $z$  se le conoce como la **forma polar** o **módulo argumento del complejo**  $z$ . Hay muchos valores que puede tomar  $\theta$  para que satisfaga la forma polar. Sin embargo, hay un único valor  $\theta$  en el intervalo  $[-\pi, \pi)$  llamado el **argumento principal del complejo**  $z$  y denotado mediante  $\arg(z)$ , que satisfice la igualdad  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Nótese que

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arccotan} \left( \frac{y}{x} \right) - \pi; & \text{si } y < 0, x < 0; \\ -\frac{\pi}{2}; & \text{si } y < 0, x = 0; \\ \operatorname{arccotan} \left( \frac{y}{x} \right); & \text{si } x > 0; \\ \frac{\pi}{2}; & \text{si } y > 0, x = 0; \\ \operatorname{arccotan} \left( \frac{y}{x} \right) + \pi; & \text{si } y \geq 0, x < 0. \end{cases}$$

**Definición 1.2.1.** Una **función compleja**  $f$  es una regla que asigna a un número complejo  $z$  de un subconjunto  $A \subset \mathbb{C}$  un único número complejo  $f(z) = w$  de un subconjunto  $B \subset \mathbb{C}$ .

## 1.2. FUNCIONES COMPLEJAS BÁSICAS CASO 1. ELEMENTOS BÁSICOS

Una función compleja  $f$  es una función definida en subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que toma valores en  $\mathbb{R}$ . La regla de asignación  $f(z)$  de dicha función la podemos escribir mediante  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , donde  $u$  y  $v$  son funciones definidas desde  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$ .

Dado que los números complejo  $\mathbb{C}$  están dotados de una topología podemos extender la teoría de funciones continuas a las funciones complejas. Para mayor información del tema recomendamos al lector dirigirse e.g., [11], [8], [9].

**Ejemplo 1.2.2.** Dado un complejo  $w = u + iv$ , la función **translación** con respecto a  $w$ , es aquella cuya regla de asignación está dada por

$$T_w(z) = z + w.$$

La función translación  $T_w$  está definida en  $\mathbb{C}$  y su rango es  $\mathbb{C}$ . Además, es una biyección continua con inversa continua. Nótese que  $T^{-1}(z) = z - w$ .

**Ejemplo 1.2.3.** Dado un complejo no nulo  $w = u + iv$ , la función **homotecia** con respecto a  $w$ , es aquella cuya regla de asignación está dada por

$$f_w(z) = wz.$$

La función homotecia  $f_w$  está definida en  $\mathbb{C}$  y su rango es  $\mathbb{C}$ . Además, es una biyección continua con inversa continua. Nótese que  $f^{-1}(z) = \frac{z}{w}$ . Si a los complejo  $w$  y  $z$  los representamos en su forma polar  $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$  y  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , entonces la regla de asignación de la homotecia se reescribe como sigue

$$f_w(z) = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)|z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z||w|(\cos(\beta + \theta) + i \sin(\beta + \theta)),$$

Desde el punto de vista geométrico, podemos interpretar a esta función como una rotación seguida de una dilatación o contracción.

**Ejemplo 1.2.4.** La función **conjugada**, es aquella cuya regla de asignación está dada por

$$f(z = x + iy) = \bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

La función conugado  $f_w$  está definida en  $\mathbb{C}$  y su rango es  $\mathbb{C}$ . Además, es una biyección continua con inversa continua. Nótese que  $f^{-1}(z) = f(z)$ . Desde el punto de vista geométrico, interpretamos a la función conjugado como la reflexión con respecto al eje real.

**Ejemplo 1.2.5.** La función **inverso multiplicativo**, es aquella cuya regla de asignación está dada por

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|}.$$

La función inverso multiplicativo  $f$  está definida en  $\mathbb{C} - \{(0, 0)\}$  y su rango es  $\mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ . Además, es una biyección continua con inversa continua. Nótese que  $f^{-1}(z) = f(z)$ . De la regla de asignación  $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$  se deduce que los puntos sobre la circunferencia unitaria centrada en el origen  $\{z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\} : |z| = 1\}$  son invariantes bajo la función  $f$ . Además, la función  $f$  envía el conjunto  $\hat{C} = \{z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\} : |z| < 1\}$  sobre el conjunto  $\tilde{C} = \{z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\} : |z| > 1\}$ . Así mismo,  $f$  envía el conjunto  $\tilde{C}$  sobre el conjunto  $\hat{C}$ .

### 1.2.1. Problemas

**Problema 1.2.6.** Prueba que  $\mathbb{R}^2$  dotado con las operaciones binarias suma:  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  y multiplicación compleja  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$  es un campo.

**Problema 1.2.7.** Dado un complejo  $z \in \mathbb{C}$  y el valor real  $r > 0$  se define la bola abierta con centro  $z$  y radio  $r$  como el conjunto

$$B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}.$$

Prueba que el conjunto  $\tau$  conformado por todos los subconjuntos  $U \subset \mathbb{C}$  tal que para todo  $z \in U$  existe una bola abierta  $B_r(z) \subset U$ , es una topología.

## 1.3. Plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$ .

El estudio de las funciones meromorfas en variable compleja induce naturalmente a introducir un nuevo punto en el plano complejo, el cual llamamos *infinito* y denotamos con el símbolo  $\infty$ . Este nuevo objeto matemático nos conduce a definir el conjunto  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , el cual podemos dotar de una topología usando el Teorema de Alexandroff.

**Teorema 1.3.1.** (Alexandroff) Dado  $X$  un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff y  $\infty$  un objeto matemático tal que  $\infty \notin X$ , definimos el par  $(\hat{X}, \tau_\infty)$ , donde  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$  y  $\tau_\infty$  es la familia definida mediante

$$\tau_\infty := \{U : U \text{ abierto en } X\} \cup \{V \subset \hat{X} : X - V \text{ es compacto}\}$$

Entonces

1. La pareja  $(\hat{X}, \tau_\infty)$  es un espacio topológico compacto y de Hausdorff.
2. La topología inducida en  $X$  por  $\hat{X}$  es la de partida de  $X$ .

**Definición 1.3.2.** El **plano complejo extendido** es el conjunto  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  con la topología  $\tau_\infty$ .

Notese que del teorema de Alexandroff se sigue que para cada valor real  $r \geq 0$  el subconjunto

$$B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$$

es una vecindad del punto  $\infty$ .

Recordemos que una sucesión de números complejos  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  **diverge** o es **divergente**, si para cada real positivo  $K$  existe un natural  $n_K \in \mathbb{N}$  tal que  $|z_n| > K$ , para todo  $n \geq n_K$ .

### 1.3. PLANO COMPLEJO EXTENDIDO 1. ELEMENTOS BÁSICOS

**Lema 1.3.3.** *La sucesión de números complejos  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  converge a  $\infty$  si y solo si la sucesión  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.*

*Demostración.* Para cada real positivo  $K > 0$  existe un natural  $n_K \in \mathbb{N}$  tal que  $z_n \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > K\} \cup \{\infty\}$ , para todo  $n \geq n_K$ , si y solo si  $|z_n| > K$ , para todo  $n \geq n_K$ .  $\square$

El plano complejo extendido lo podemos entender como un objeto geométrico, más precisamente, vamos a construir un homeomorfismo  $\Pi$ , conocido como la **proyección estereográfica**, desde la esfera unitaria (**esfera de Riemann**)  $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  a  $\hat{\mathbb{C}}$ .

El plano complejo  $\mathbb{C}$  lo identificamos con el plano  $P_{xy} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C} : x_3 = 0\}$  y vamos a llamar al punto  $N = (0, 0, 1)$  sobre la esfera  $S^2$  el **polo norte**. Ahora, consideremos un punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq N$  sobre la esfera  $S^2$ , entonces existe una única línea recta  $l_{\mathbf{x}}$  que pasa por los puntos  $\mathbf{x}$  y  $N$ , la recta  $l_{\mathbf{x}}$  intersecta al plano  $P_{xy}$  en un único punto  $z$  (véase Figura 1.1). La proyección estereográfica es la función  $\Pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , definida mediante

$$\Pi(\mathbf{x}) = \begin{cases} l_{\mathbf{x}} \cap P_{xy}; & \text{si } \mathbf{x} \neq N; \\ \infty; & \text{si } \mathbf{x} = N. \end{cases}$$

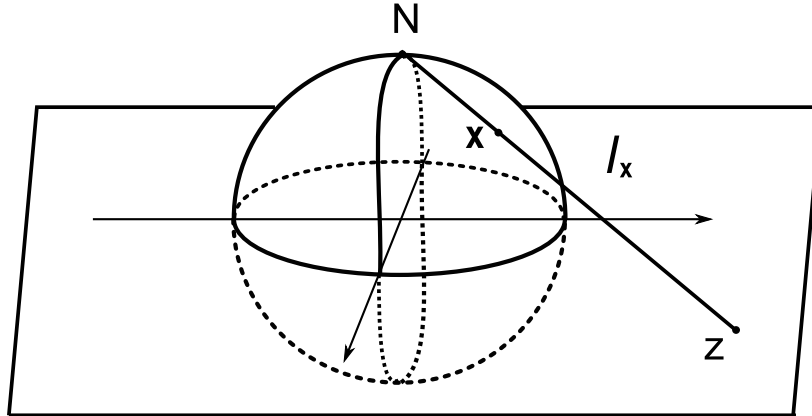


Figura 1.1: *Proyección estereográfica.*

Vamos a proponer una descripción más precisa de la regla de asignación para la proyección estereográfica. Más precisamente, daremos las coordenadas del punto que está en la intersección de la recta  $l_{\mathbf{x}}$  y el plano  $P_{xy}$ .

La ecuación paramétrica de la línea recta  $l_{\mathbf{x}}$  es

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = t(x_1, x_2, x_3 - 1) + (0, 0, 1),$$

lo cual es equivalente a decir

$$\bar{x}_1 = tx_1, \quad \bar{x}_2 = tx_2, \quad \bar{x}_3 = t(x_3 - 1) + 1. \quad (1.5)$$

### 1.3. PLANO COMPLEJO EXTENDIDO 1. ELEMENTOS BÁSICOS

Deseamos obtener el valor de  $t$  tal que  $\bar{x}_3 = 0$ . Para que ello suceda, de la tercera igualdad descrita en (1.5) se sigue que  $t = \frac{1}{1-x_3}$ . Si sustituimos el valor encontrado de  $t$  en las dos primeras igualdades de la ecuación (1.5) tenemos que

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{1-x_3}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{1-x_3}.$$

Entonces el punto de intersección de la línea  $l_{\mathbf{x}}$  y el plano  $P_{xy}$  es el complejo  $\frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}$ . Por lo tanto la proyección estereográfica la reescribimos como sigue

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}; & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1); \\ \infty; & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1). \end{cases}$$

Ahora, construiremos la función inversa  $\Pi^{-1}$  de la proyección estereográfica. Si tomamos el complejo  $z = x_1 + ix_2$  que se identifica con la tripleta  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$  en  $\mathbb{R}$ , entonces la línea recta  $l_{\mathbf{z}}$  que atraviesa por los puntos  $\mathbf{x}$  y  $N$  intersecta a  $S^1 - \{N\}$  en exactamente un punto. La función inversa de la proyección estereográfica es la función  $\Pi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ , definida mediante

$$\Pi^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{cases} l_{\mathbf{z}} \cap (S^2 - \{N\}); & \text{si } z \in \mathbb{C}; \\ N; & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Nótese que la ecuación paramétrica de la recta  $l_{\mathbf{z}}$

$$\bar{x}_1 = tx_1, \quad \bar{x}_2 = tx_2, \quad \bar{x}_3 = 1 - t, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Deseamos encontrar el valor de  $t$  tal que la tripleta  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  esté en  $S^2 - \{N\}$ . Sustituimos los anteriores valores en la expresión de la esfera y obtenemos

$$\begin{aligned} (tx_1)^2 + (tx_2)^2 + (1-t)^2 &= 1, \\ t^2(x_1^2 + x_2^2 + 1) - 2t &= 0, \\ t[t(x_1^2 + x_2^2 + 1) - 2] &= 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $t = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$ , entonces el punto de intersección de la recta  $l_{\mathbf{z}}$  y  $S^2 - \{N\}$  tiene coordenadas  $\left( \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$ . Así, reescribimos la función inversa  $\Pi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^1$  como sigue

$$\Pi^{-1}(z) = \begin{cases} \left( \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right); & \text{si } z = x_1 + x_2 i; \\ N; & \text{si } z = \infty. \end{cases} \quad (1.6)$$

Un **círculo** en la esfera  $S^2$  es el conjunto de puntos que están en la intersección de un plano  $\alpha$  y la esfera  $S^2$  tal que la cardinalidad  $|S^2 \cap \alpha| > 1$ . Esta última condición significa que el plano  $\alpha$  no es tangente a  $S^2$ .

### 1.3. PLANO COMPLEJO EXTENDIDO 1. ELEMENTOS BÁSICOS

**Teorema 1.3.4.** *La proyección estereográfica envía círculos de la esfera sobre círculos del plano complejo extendido. Además, la imagen inversa de círculos de  $\hat{\mathbb{C}}$  bajo  $\Pi$  son círculos en  $S^2$ .*

*Demostración.* Tomemos el círculo  $C$  en la esfera  $S^2$ , entonces  $C$  está conformado por triplas  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $S^2$  que satisfacen la expresión

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \text{ para algunos } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

De la ecuación (1.6) se sigue que la imagen de  $C$  bajo la proyección estereográfica  $\Pi$  es el conjunto de complejos  $z = \bar{x}_1 + i\bar{x}_2$  tal que

$$\begin{aligned} a \left( \frac{2\bar{x}_1}{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + 1} \right) + b \left( \frac{2\bar{x}_2}{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + 1} \right) + c \left( \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1}{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + 1} \right) &= d, \\ 2a\bar{x}_1 + 2b\bar{x}_2 + c(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1) &= d(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + 1), \\ (c-d)\bar{x}_1^2 + (c-d)\bar{x}_2^2 + 2a\bar{x}_1 + 2b\bar{x}_2 &= d + c. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si  $c - d = 0$ , entonces la anterior ecuación representa una línea recta euclidiana. Contrariamente si  $c - d \neq 0$ , entonces completamos cuadrados en la anterior expresión y obtenemos.

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^2 + \frac{2a}{(c-d)}\bar{x}_1 + \frac{a^2}{(c-d)^2} + \bar{x}_2^2 + \frac{2b}{(c-d)}\bar{x}_2 + \frac{b^2}{(c-d)^2} &= \frac{d+c}{c-d} + \frac{a^2}{(c-d)^2} + \frac{b^2}{(c-d)^2} \\ \left( \bar{x}_1 + \frac{a}{c-d} \right) + \left( \bar{x}_2 + \frac{b}{c-d} \right) &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(c-d)^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como la intersección del plano  $\beta$ , cuya ecuación es  $ax_1 + b_2 + cx_3 = d$ , con la esfera  $S^2$  es un conjunto con más de un punto, entonces existe una tripleta  $(x_1, x_2, x_3) \in \beta$  tal que  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ , esta última desigualdad implica que  $a^2 + b^2 + c^2 > d^2$ . Así, podemos concluir que la expresión descrita en la ecuación (1.8) corresponde a un círculo euclidiano.

Ahora, tomemos un círculo  $C$  en el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$ , el cual lo podemos representar mediante la ecuación general

$$A(x_1^2 + x_2^2) + 2Bx_1 + 2Cx_2 + D = 0. \quad (1.9)$$

siendo  $A, B, C, D$  valores reales. Si  $A = 0$  y al menos uno de los términos  $B$  o  $C$  es diferente de 0, entonces  $C$  es una línea recta euclidiana. Si  $A \neq 0$  y  $B^2 + C^2 - AD > 0$ , entonces  $C$  es un círculo euclidiano. Tomemos los puntos  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  sobre la esfera  $S^2$  tal que al enviarlos mediante con la proyección estereográfica  $\Pi$  satisfacen la ecuación (1.9), entonces

$$\begin{aligned} A \left( \frac{\bar{x}_1}{1 - \bar{x}_3} + \frac{\bar{x}_2}{1 - \bar{x}_3} \right) + 2B \frac{\bar{x}_1}{1 - \bar{x}_3} + 2C \frac{\bar{x}_2}{1 - \bar{x}_3} + D &= 0, \\ (A + 2B)\bar{x}_1 + (A + 2C)\bar{x}_2 - D\bar{x}_3 - D &= 0. \end{aligned}$$

### 1.3. PLANO COMPLEJO EXTENDIDO

---

De esta última expresión concluimos que  $\Pi^{-1}$  envía círculos del plano complejo extendido sobre círculos de la esfera  $S^2$ .  $\square$

**Teorema 1.3.5.** *La proyección estereográfica  $\Pi$  es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Debemos probar la continuidad de  $\Pi$  en el punto  $\infty$ . Consideremos el abierto  $B := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$  para algún  $r > 0$ . Consideremos el círculo  $C$  sobre la esfera  $S^2$  que es enviado mediante  $\Pi$  sobre el círculo euclidiano con centro 0 y radio  $r$ . Nótese que el punto  $N = (0, 0, 1)$  no está en  $C$  y, además  $S^2 - C$  está conformado por dos componentes conexas abiertas. Consideremos  $U$  la componente conexa de  $S^2 - C$  que contiene el punto  $N$ . Entonces  $\Pi(U) \subset B$ .

Dado que toda función continua definida desde un espacio compacto sobre un espacio Hausdorff es cerrada, se sigue que la proyección estereográfica es una función cerrada. Así, concluimos que la esfera  $S^2$  y el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$  son homeomorfos, en otras palabras,  $\Pi$  es un homeomorfismo.  $\square$

#### 1.3.1. Problemas

**Problema 1.3.6.** *Consideremos un plano  $\beta$ , cuya ecuación es  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ , cuya intersección con la esfera  $S^2$  es un conjunto con más de dos puntos. Prueba que  $a^2 + b^2 + c^2 > d^2$ .*



## Capítulo 2

# Transformaciones de Möbius.

Una *transformación de Möbius*<sup>1</sup> o *transformación fraccionaria lineal*  $T$  es una función compleja cuya regla de asignación es de la forma:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.1)$$

siendo  $a, b, c$  y  $d$  números complejos que satisfacen la relación  $ad - cd \neq 0$ . Los valores  $a, b, c, d$  son llamados los *coeficientes de la transformación* y la expresión  $ad - cb$  es el *determinante de la transformación*, el cual se denota mediante  $\det(T)$ . En la regla de asignación de la transformación  $T$  se establecen las siguientes consideraciones:

Acá podrían incluirse animaciones o applets J. C.

1. Si  $c = 0$ , entonces la regla de correspondencia de  $T$  está definida mediante

$$T(z) = \begin{cases} T(z) = \frac{az + b}{d}; & \forall z \in \mathbb{C}, \\ T(z) = \infty; & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

2. Contrariamente, si  $c \neq 0$ , entonces la regla de correspondencia de  $T$  está definida mediante

$$T(z) = \begin{cases} T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; & \forall z \in \mathbb{C} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}, \\ T(z) = \infty; & \text{si } z = \frac{-d}{c}, \\ T(z) = \frac{a}{c}; & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Cada transformación de Möbius es una biyección holomorfa de la esfera de Riemann sobre la esfera de Riemann, con inversa holomorfa. Además, el conjunto conformado por todas las transformaciones de Möbius  $Möb(\hat{\mathbb{C}})$  forma un grupo con la operación composición

---

<sup>1</sup>El nombre a estos objetos es en honor al matemático alemán August Ferdinand Möbius (véase *e.g.*, [5, p.17], [8, p.122])

de funciones, en el cual el elemento neutro es la transformación identidad  $Id$  y, si  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ , entonces la transformación inversa  $T^{-1}(z) = \frac{\frac{d}{k}z - \frac{b}{k}}{-\frac{c}{k}z + \frac{a}{k}} \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ , siendo  $k = \sqrt{\det(T)}$ .

Denotaremos mediante  $\mathbb{C}^*$  a los complejos  $\mathbb{C}$  removiendo el origen 0. Los ejemplos presentados a continuación son relevantes para el desarrollo de la teoría.

**Ejemplo 2.0.1.** La función **translación** con respecto al complejo  $b \in \mathbb{C}^*$

$$T_b(z) = z + b,$$

es una transformación de Möbius, cuya inversa  $T_b^{-1}(z) = z - b$  también es una transformación de Möbius.

**Ejemplo 2.0.2.** La función **homotecia** con respecto al complejo  $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$

$$f_a(z) = az.$$

es una transformación de Möbius, la cual tiene como inversa la transformación de Möbius  $f_a^{-1}(z) = \frac{z}{a}$ .

**Ejemplo 2.0.3.** La función **inversión** (involución),

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

es una transformación de Möbius.

**Observación 2.0.4.** El grupo  $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  no es conmutativo, pues si consideramos las transformaciones  $T_1(z) = z + 1$  y  $T_2(z) = \frac{-1}{z}$ , entonces las transformaciones composiciones

$$T_1 \circ T_2(z) = T_1\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{-1}{z} + 1 = \frac{z-1}{z},$$

$$T_2 \circ T_1(z) = T_2(z+1) = \frac{-1}{z+1},$$

satisfacen  $T_1 \circ T_2(z) \neq T_2 \circ T_1(z)$  para algunos  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ .

Ahora identificaremos el grupo de las transformaciones de Möbius  $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  con un grupo de matrices. El conjunto  $\mathfrak{M}$  conformado por las matrices de  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tiene estructura de espacio vectorial. Naturalmente, identificamos a  $\mathfrak{M}$  con  $\mathbb{C}^4$ . Más precisamente, la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  le correspondemos la 4-upla  $(a, b, c, d)$ . Esta correspondencia nos permite definir la norma de la matriz  $A$ , dada por

$$|A| := \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}.$$

Dicha norma induce una topología para  $\mathfrak{M}$ , la cual lo hace homeomorfo a  $\mathbb{C}^4$ .

La función determinante  $\det : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida mediante

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \det(A) := ad - bc, \quad (2.2)$$

es una aplicación continua; pues es una función polinomial compleja de cuatro variables. Entonces la imagen inversa del subconjunto abierto  $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$  bajo  $\det$  es un subconjunto abierto de  $\mathfrak{M}$  y,  $\det^{-1}(\mathbb{C}^*) = \{A \in \mathfrak{M} : \det(A) \neq 0\}$ .

**Definición 2.0.5.** *El **Grupo Lineal General**, denotado mediante  $GL(2, \mathbb{C})$ , es el conjunto conformado por las matrices de  $2 \times 2$*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

*con coeficientes  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y determinante  $\det(A) = ad - bc \neq 0$ , junto con la operación usual de multiplicación de matrices.*

El conjunto  $\mathbb{C}^*$  con el producto complejo es un grupo, entonces la función  $\det : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$  es un homomorfismo sobreyectivo de grupos.

Naturalmente, a partir de cada matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$  definimos la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  en  $Möb(\hat{\mathbb{C}})$ . Esta construcción induce el siguiente hecho:

**Lema 2.0.6.** *La función  $\psi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow Möb(\hat{\mathbb{C}})$ , tal que*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

*es un epimorfismo de grupos.*

*Demostración.* Si consideramos las matrices  $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$  y  $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$  de  $GL(2, \mathbb{C})$ , entonces la matriz producto  $A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$  satiface la igualdad

$\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$ . La función  $\psi$  asigna a la matriz  $A_1 \cdot A_2$  la transformación de Möbius

$$\psi(A_1 \cdot A_2) = T_{A_1 \cdot A_2}(z) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}. \quad (2.3)$$

La función composición  $\psi(A_1) \circ \psi(A_2) = T_{A_1} \circ T_{A_2}$ , siendo

$$\psi(A_1) = T_{A_1}(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{y} \quad \psi(A_2) = T_{A_2}(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2},$$

es la transformación de Möbius

$$\psi(A_1) \circ \psi(A_2) = T_{A_1} \circ T_{A_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}. \quad (2.4)$$

De las igualdades (2.3) y (2.4) se sigue la relación

$$\psi(A_1 \cdot A_2) = T_{A_1 \cdot A_2}(z) = T_{A_1} \circ T_{A_2}(z) = \psi(A_1) \circ \psi(A_2),$$

la cual prueba que  $\psi$  es un homomorfismo de grupos. El hecho que  $\psi$  es sobreyectivo es una consecuencia inmediata de la definición de  $\psi$ .  $\square$

Si tomamos la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en el kernel  $\text{Ker}(\psi)$ , entonces  $\psi(A) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{z + 0}{0z + 1}$ . De esta última igualdad se deduce que  $b = c = 0$  y  $a = d = \pm 1$ . Por lo tanto, el kernel está conformado por la matriz identidad y menos la identidad. Más precisamente,  $\ker(\psi) = \{Id, -Id\}$ . Del primer Teorema de isomorfismos se sigue que el grupo cociente  $PGL(2, \mathbb{C}) := GL(2, \mathbb{C}) / \ker(\psi)$ , llamado el **Grupo Lineal Projectivo**, es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius  $Möb(\hat{\mathbb{C}})$ .

Por otro lado, a partir de un complejo  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  y una transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , podemos obtener una nueva transformación de Möbius  $\lambda T(z) := \bar{T}(z) = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}}$ , tal que los coeficientes están dados mediante  $\bar{a} = \lambda a$ ,  $\bar{b} = \lambda b$ ,  $\bar{c} = \lambda c$  y  $\bar{d} = \lambda d$ . Este par de transformaciones tienen la particularidad que las imágenes  $T(z)$  y  $\bar{T}(z)$  de cualquier elemento  $z$  en el plano complejo extendido coinciden *i.e.*,  $T(z) = \bar{T}(z)$  para cada  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ . Este fenómeno nos motiva a introducir la noción de transformaciones idénticas. Las transformaciones de Möbius

$$T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{y} \quad T_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

son **idénticas** si y solo si  $T_1(z) = T_2(z)$ , para cada  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 2.0.7.** *Las transformaciones de Möbius  $T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$  y  $T_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$  son idénticas si y solo si existe un número complejo no cero  $\lambda$  tal que  $a_1 = \lambda a_2$ ,  $b_1 = \lambda b_2$ ,  $c_1 = \lambda c_2$  y  $d_1 = \lambda d_2$ .*

*Demostración.* La condición suficiente es evidente. Vamos a probar la condición necesaria. Tomemos  $T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$  y  $T_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$  dos transformaciones de Möbius idénticas y supongamos que los coeficientes de dichas transformaciones son diferentes de cero, (la prueba para el caso en que algunos de los coeficientes toma el valor cero es similar). Entonces para los valores 0, 1 e  $\infty$  se cumplen las igualdades

$$T_1(0) = T_2(0) = \frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{d_2} = u, \quad (2.5)$$

$$T_1(1) = T_2(1) = \frac{a_1 + b_1}{c_1 + d_1} = \frac{a_2 + b_2}{c_2 + d_2}, \quad (2.6)$$

$$T_1(\infty) = T_2(\infty) = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = v, \quad (2.7)$$

para algunos valores complejos  $p, q \in \mathbb{C}$ . Ahora, tomamos las siguientes igualdades que provienen de las relaciones (2.5) y (2.7)

$$b_1 = ud_1, \quad b_2 = ud_2, \quad a_1 = vc_1, \quad a_2 = vc_2,$$

las sustituimos en la ecuación (2.6). Así, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{vc_1 + ud_1}{c_1 + d_1} &= \frac{vc_2 + ud_2}{c_2 + d_2}, \\ (vc_1 + ud_1)(c_2 + d_2) &= (vc_2 + ud_2)(c_1 + d_1), \\ vc_1c_2 + vc_1d_2 + ud_1c_2 + ud_1d_2 &= vc_1c_2 + vd_1c_2 + uc_1d_2 + ud_1d_2, \\ vc_1d_2 + ud_1c_2 &= vd_1c_2 + uc_1d_2, \\ v(c_1d_2 - d_1c_2) - u(c_1d_2 - d_1c_2) &= 0, \\ (v - u)(c_1d_2 - d_1c_2) &= 0. \end{aligned}$$

Argumentaremos que no es posible la condición  $v - u = 0$  y se debe de satisfacer  $c_1d_2 - d_1c_2 = 0$ . Supongamos que  $v - u = 0$ , entonces de las ecuaciones (2.5) y (2.6) se sigue

$$u - v = \frac{a_1}{c_1} - \frac{b_1}{d_1} = \frac{a_1d_1 - b_1c_1}{c_1d_1} = 0,$$

lo cual implica que el determinante de la transformación de Möbius  $T_1$  es 0. Por lo tanto, se debe de satisfacer  $v - u \neq 0$  y  $c_1d_2 - d_1c_2 = 0$ , de esta última igualdad obtenemos

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}. \quad (2.8)$$

Finalmente, de las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.8) se sigue que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \lambda.$$

□

## 2.1. CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

La regla de asignación  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  de la transformación de Möbius  $T$  está determinada por los coeficientes  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Sin embargo, podemos contruir la transformación

$$\bar{T}(z) = \frac{\frac{a}{k}z + \frac{b}{k}}{\frac{c}{k}z + \frac{d}{k}},$$

siendo  $k = \sqrt{\det(T)} \neq 0$ , también de Möbius, la cual tiene determinante 1 y es idéntica a  $T$ . En otras palabras,  $\mathbb{C}^*$  actúa sobre  $Möb(\hat{\mathbb{C}}) (\approx PGL(2, \mathbb{C}))$  por multiplicación *i.e.*,  $(\lambda, T) \mapsto \lambda T$ . En tal caso, identificamos a cada transformación de Möbius  $T$  con su idéntica  $\bar{T}$ . Entonces el subgrupo conformado por las transformaciones de Möbius con determinante 1 es isomorfo a al grupo cociente  $PGL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^* := PSL(2, \mathbb{C})$ , conocido como **Grupo lineal especial proyectivo**.

### 2.0.1. Problemas

**Problema 2.0.8.** *Prueba que el conjunto conformado por todas las transformaciones de Möbius  $Möb(\hat{\mathbb{C}})$  (véase ecuación (2.1)) forma un grupo con la operación composición de funciones.*

**Problema 2.0.9.** *Prueba que cada función de Möbius  $T$  es un biholomorfismo de la esfera de Riemann en sí misma.*

**Problema 2.0.10.** *El **grupo Lineal Especial**<sup>2</sup>, denotado mediante  $SL(2, \mathbb{C})$ , es el conjunto conformado por las matrices de  $2 \times 2$*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

*tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y el determinante  $\det(A) = 1$ , junto con la operación multiplicación usual de matrices. Prueba las siguientes afirmaciones*

1.  $SL(2, \mathbb{C})$  es un subgrupo de  $GL(2, \mathbb{C})$ .
2.  $SL(2, \mathbb{C})$  es un subconjunto cerrado de  $\mathfrak{M}$ .
3.  $SL(2, \mathbb{C})/\{Id, -Id\}$  y  $PGL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$  son isomorfos.

## 2.1. Clasificación de las transformaciones de Möbius

Si tomamos una transformación  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  en  $Möb(\hat{\mathbb{C}})$  diferente de la identidad, entonces  $T$  tiene a lo más dos puntos fijos. Este hecho se concluye del siguiente análisis.

---

<sup>2</sup>También se le conoce como **Grupo Unimodular**.

## 2.1. CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

1. Si  $c = 0$ , entonces  $\frac{az+b}{d} = z$ . El único número complejo que satisface esta igualdad es  $z = \frac{b}{a-d}$ .
2. Contrariamente, si  $c \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{az+b}{cz+d} &= z, \\ az+b &= cz^2 + zd, \\ cz^2 + z(d-a) - b &= 0.\end{aligned}$$

Las soluciones para esta última ecuación son  $z = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}{2c}$

**Teorema 2.1.1.** *Si la transformación de Möbius  $T$  fija un punto, entonces es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una translación. Contrariamente, si la transformación de Möbius  $T$  fija exactamente dos puntos, entonces  $T$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una transformación de la forma  $z \mapsto \alpha z$ , para algún  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .*

*Demostración.* **Pendiente**

□

Recordemos que todos los puntos de una cónica  $Q$  satisfacen que el cociente entre sus distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) es siempre el mismo número, el cual se llama la **excentricidad de la cónica** y se le denota mediante  $\varepsilon$ . Si la cónica  $Q$  tiene excentricidad  $\varepsilon$  tal que se satisface

1.  $\varepsilon < 1$ , entonces la cónica  $Q$  es una elipse.
2.  $\varepsilon = 1$ , entonces la cónica  $Q$  es una parábola.
3.  $\varepsilon > 1$ , entonces la cónica  $Q$  es una hipérbola.

**Definición 2.1.2.** *Una transformación de Möbius  $T$  es **parabólica** si fija un punto. Supongamos que la transformación  $T$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a la transformación  $z \mapsto \alpha z$ , para algún  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .*

1. Si  $|\alpha| = 1$  y  $\alpha \neq 1$  (rotación), entonces llamaremos a  $T$  es una transformación **elíptica**.
2. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  (dilatación), entonces llamaremos a  $T$  es una transformación **hiperbólica**.
3. Si  $|\alpha| \neq 1$  y  $\alpha \notin \mathbb{R}$ , entonces llamaremos a  $T$  una transformación **loxodrómica**.

**Definición 2.1.3.** La **traza** de la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  es el valor  $tr(T) = a + d$ .

**Teorema 2.1.4.** *Consideremos la transformación de Möbius  $T$  con traza  $tr(T)$ . Entonces*

## 2.2. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

1.  $T$  es parabólica si y solo si  $(\text{tr}(T))^2 = 4$ .
2.  $T$  es elíptica si y solo si  $(\text{tr}(T))^2 < 4$ .
3.  $T$  es hiperbólica si y solo si  $(\text{tr}(T))^2 > 4$ .
4.  $T$  es loxodrómica si y solo si  $(\text{tr}(T))^2 \notin [0, \infty]$ .

*Demostración.* Pendiente

□

## 2.2. Propiedades de las transformaciones de Möbius

Un **círculo**  $C$  en el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$  es un círculo euclidiano en  $\mathbb{C}$  o es  $l \cup \{\infty\}$  una línea recta euclidiana  $l$  en  $\mathbb{C}$  junto con el punto  $\infty$ . Cada círculo euclidiano en  $\mathbb{C}$  está determinado por un radio  $r > 0$  y un centro  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces el subconjunto

$$C(z_0, r) = \{re^{it} + z_0 : t \in [-\pi, \pi)\} \subset \mathbb{C}, \quad (2.9)$$

es el círculo euclidiano con centro  $z_0$  y radio  $r > 0$ . Asimismo cada recta euclidiana en  $\mathbb{C}$  está determinada por un vector director  $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$  y un punto por donde atravieza  $w_0 \in \mathbb{C}$ , entonces el subconjunto

$$l(z_0, w_0) = \{tz_0 + w_0 : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} \quad (2.10)$$

es la línea recta euclidiana con dirección  $z_0$  que pasa por el punto  $w_0$ .

**Teorema 2.2.1.** *Las translaciones, rotaciones, homotecias y la función  $f(z) = \frac{1}{z}$  preservan los círculos en el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$ .*

*Demostración.* Consideremos un círculo  $C$  en el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$  y una transformación de Möbius  $M$ , siendo  $M$  una translación, una rotación, una homotecia o la función  $M(z) = \frac{1}{z}$ . Nótemos que el círculo  $C$  podría ser el círculo euclidiano con centro el número complejo  $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$  y radio  $r > 0$  i.e.,

$$C = \{re^{it} + z : t \in [-\pi, \pi)\} = C(r, z_0).$$

Contrariamente, el círculo  $C$  podría ser la línea recta euclidiana con dirección el punto  $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$  que pasa por  $w_0 \in \mathbb{C}$  unión el punto  $\infty$  i.e.,

$$C = \{tz_0 + w_0 : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} = l(z_0, w_0) \cup \{\infty\}.$$

Exploremos los siguientes casos.

*Caso 1.* La transformación de Möbius  $M$  es una translación  $T_b$ . Entonces la imagen de  $C = C(r, z_0)$  bajo  $T_b$  es  $T_b(C) = \{re^{it} + z_0 + b : t \in [-\pi, \pi)\} = B(r, z_0 + b)$ , el círculo euclidiano con centro en  $z_0 + b$  y radio  $r$ . Adicionalmente, la imagen de  $C = l(z_0, w_0) \cup \{\infty\}$



## 2.2. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

bajo la translación  $T_b$  es  $T_b(C) = \{tz_0 + w_0 + b : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} = l(z_0, w_0 + b) \cup \{\infty\}$ , la línea recta euclidiana con dirección  $z_0$  que pasa por el punto  $w_0 + b$  unido con el punto  $\infty$ .

*Caso 2.* La transformación  $M$  es una homotecia  $H_{\tilde{r}}$ . El estudio de este y los siguiente dos caso es análogo al anterior. La imagen de  $C = C(r, z_0)$  bajo la función  $H_{\tilde{r}}$  es  $H_{\tilde{r}}(C) = \{\tilde{r}re^{it} + \tilde{r}z_0 : t \in [-\pi, \pi)\} = C(\tilde{r}r, \tilde{r}z_0)$ , el círculo euclidiano con centro  $\tilde{r}z_0$  y radio  $\tilde{r}r$ . Así mismo, la imagen de  $C = l(z_0, w_0) \cup \{\infty\}$  bajo la homotecia  $H_{\tilde{r}}$  es  $H_{\tilde{r}}(C) = \{\tilde{r}z_0 + \tilde{r}w_0 : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} = l(\tilde{r}z_0, \tilde{r}w_0) \cup \{\infty\}$ , la línea recta euclidiana con dirección  $\tilde{r}z_0$  que pasa por el punto  $\tilde{r}w_0$  unido con el punto  $\infty$ .

*Caso 3.* La transformación  $M$  es una rotación  $R_\theta$ . La transformación  $R_\theta$  envía el círculo euclidiano  $C = C(r, z_0)$  en el conjunto  $R_\theta(C) = \{re^{i(+\theta)t} + e^{i\theta}z_0 : t \in [-\pi, \pi)\} = C(r, e^{i\theta}z_0)$ , el cual es el círculo euclidiano con centro en  $e^{i\theta}z_0$  y radio  $r$ . Así mismo, la rotación  $R_\theta$  envía el conjunto  $C = l(z_0, w_0) \cup \{\infty\}$  en el conjunto  $R_\theta(C) = \{te^{i\theta}z_0 + e^{i\theta}w_0 : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} = l(e^{i\theta}z_0, e^{i\theta}w_0)$ , el cual es la línea recta euclidiana con dirección  $e^{i\theta}z_0$  que pasa por  $e^{i\theta}w_0$  unida con el punto  $\infty$ .

*Caso 4.* La transformación  $M$  es la función  $M(z) = \frac{1}{z}$ . Tomemos un círculo  $C$  en el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$ , el cual lo podemos representar mediante la ecuación general

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0. \quad (2.11)$$

siendo  $A, B, C, D$  valores reales. Si  $A = 0$  y al menos uno de los términos  $B$  o  $C$  es diferente de 0, entonces  $C$  es una línea recta euclidiana. Si  $A \neq 0$  y  $B^2 + C^2 - AD > 0$ , entonces  $C$  es un círculo euclidiano.

Consideremos el complejo no nulo  $z = x + yi$  tal que  $x$  y  $y$  satisfacen la ecuación (2.11), para algunos  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  y, veamos que para el complejo  $M(z) = \frac{1}{z} = u + vi$  los valores  $u$  y  $v$  también se satisface una ecuación general como la que se describe en (2.11). Dado que  $M(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , entonces

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{z} \right|^2 = u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}. \quad (2.12)$$

Ahora, sustituimos estos términos en la ecuación (2.11)

$$A \left( \frac{1}{u^2 + v^2} \right) + 2B \left( \frac{u}{u^2 + v^2} \right) + 2C \left( \frac{-v}{u^2 + v^2} \right) - D = 0.$$

Al simplificar obtenemos

$$D(u^2 + v^2) - 2Bu + 2Cv - A = 0. \quad (2.13)$$

Basándonos en esta última relación vamos a probar que efectivamente  $M(C)$  es un círculo  $C$ . Debemos estudiar los siguientes casos.

## 2.2. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

\* *El círculo  $C$  es una recta euclidiana que no atraviesa el origen.* Entonces su ecuación asociada (véase (2.11)) es de la forma

$$2Bx + 2Cy + D = 0,$$

tal que  $D \neq 0$  y al menos uno de los términos  $B$  o  $C$  es diferentes de 0. De la ecuación (2.13) se sigue que las parejas  $(u, v)$  en  $M(C)$  satisfacen la igualdad

$$D(u^2 + v^2) - 2Bu + 2Cv = 0,$$

en esta última expresión completamos cuadrados y obtenemos

$$\begin{aligned} u^2 - \frac{2Bu}{D} + \frac{B^2}{D^2} + v^2 + \frac{2Cv}{D} + \frac{C^2}{D^2} &= \frac{B^2}{D^2} + \frac{C^2}{D^2}, \\ \left(u - \frac{B}{D}\right)^2 + \left(v + \frac{C}{D}\right)^2 &= \frac{B^2 + C^2}{D^2}, \end{aligned}$$

un círculo euclidiano. Este hecho prueba que  $M(C)$  es un círculo euclidiano. Obsérvese que el círculo  $M(C)$  pasa por el origen.

\* *El círculo  $C$  es una recta euclidiana que atraviesa el origen.* El círculo  $C$  tiene por ecuación (véase (2.11)) la expresión

$$2Bx + 2Cy = 0,$$

tal que al menos uno de los términos  $B$  o  $C$  es diferentes de 0. De la ecuación (2.13) obtenemos que la imagen  $M(C)$  tiene asociada la igualdad

$$-2Bu + 2Cv = 0,$$

lo cual nos permite concluir que  $M(C)$  es una línea recta euclidiana.

\* *El círculo  $C$  es un círculo euclidiano.* La ecuación que representa a  $C$  (véase (2.11)) es

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0,$$

tal que  $A \neq 0$  y  $B^2 + C^2 - AD > 0$ . De la ecuación (2.13) se sigue  $M(C)$  tiene asociada la igualdad

$$D(u^2 + v^2) - 2Bu + 2Cv - A = 0.$$

en esta última expresión completamos cuadrados y obtenemos

$$\begin{aligned} u^2 - \frac{2Bu}{D} + \frac{B^2}{D^2} + v^2 + \frac{2Cv}{D} + \frac{C^2}{D^2} &= \frac{B^2}{D^2} + \frac{C^2}{D^2} + \frac{A}{D}, \\ \left(u - \frac{B}{2D}\right)^2 + \left(v + \frac{C}{2D}\right)^2 &= \frac{B^2 + C^2 + AD}{D^2}, \end{aligned}$$

un círculo euclidiano, pues  $B^2 + C^2 + AD > 0$ ; esta última desigualdad se deduce del hecho  $B^2 + C^2 - AD > 0$ . Este hecho prueba que  $M(C)$  es un círculo euclidiano.

Applets J.C.

□

## 2.2. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

**Teorema 2.2.2.** *Toda transformación de Möbius se puede escribir como la composición finita de traslaciones, rotaciones, homotecias y la función  $f(z) = \frac{1}{z}$ .*

*Demostración.* Tomemos una transformación de Möbius  $M$ , definida mediante  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Si  $c = 0$ , la regla de asignación de la transformación  $M$ , está dada mediante  $M(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$ . Esta relación implica que  $M$  es una composición de una rotación seguida de una homotecia y una traslación. Contrariamente, si  $c \neq 0$ , entonces podemos reescribir la regla de correspondencia de  $T$  mediante

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b+\frac{ad}{c}-\frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d}, \\ &= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz+d}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esta última ecuación implica que la transformación de Möbius es una composición finita de traslaciones, rotaciones, homotecias y la función  $\frac{1}{z}$ .  $\square$

De la ecuación 2.14 deducimos fácilmente el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.3.** *Si el determinante de la transformación de Möbius  $M$  es igual a cero, entonces  $M$  es una función constante.*

**Teorema 2.2.4.** *Las transformaciones de Möbius preservan los círculos en el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$ .*

Este resultado es una consecuencia inmediata de los teoremas 2.2.1 y 2.2.2.

**Teorema 2.2.5.** *La única transformación de Möbius que fija los puntos  $0$ ,  $1$  y  $\infty$  es la identidad.*

*Demostración.* Supongamos que existe una transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  tal que  $T(0) = 0$ ,  $T(1) = 1$  y  $T(\infty) = \infty$ . Dado que la transformación fija al punto  $\infty$ , entonces  $c = 0$  y por lo tanto la transformación  $T$  es de la forma  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Ahora, como  $T(0) = 0 = \frac{b}{d}$ , entonces  $b = 0$ ; de esta última se sigue que la Möbius  $T$  se escribe mediante  $T(z) = \frac{az}{d}$ . Finalmente,  $T$  fija al  $1$ , es decir  $T(1) = \frac{a}{d} = 1$ , lo cual implica que  $a = d$ .  $\square$

**Teorema 2.2.6.** *Consideremos dos triplas  $(z_1, z_2, z_3)$  y  $(w_1, w_2, w_3)$  conformado por puntos del plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$  y además, los puntos que conforman cada tripla son diferentes, entonces existe una única transformación de Möbius  $T$  tal que  $T(z_i) = w_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .*

## 2.2. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

*Demostración.* Para la construcción de la transformación de Möbius seguiremos la siguiente estrategia, construiremos dos Möbius  $S$  y  $T$ . La primera de estas transformaciones tendrá la propiedad:  $S(z_1) = 0$ ,  $S(z_2) = 1$  y  $S(z_3) = \infty$ . Similarmente, la Möbius  $T$  satisfecerá que  $T(w_1) = 0$ ,  $T(w_2) = 1$  y  $T(w_3) = \infty$ . Entonces la función que satisface las condiciones del teorema estará dada por la composición  $T^{-1} \circ S$ .

Tomemos la transformación de Möbius  $S$ , bajo la consideración que ninguno de los puntos que conforma la tripleta  $(z_1, z_2, z_3)$  es  $\infty$ , definida mediante

$$S(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}. \quad (2.15)$$

La transformación  $S$  envía a los puntos  $z_1, z_2$  y  $z_3$  en los puntos 0, 1 e  $\infty$ , respectivamente, i.e.,  $S(z_1) = 0$ ,  $S(z_2) = 1$  y  $S(z_3) = \infty$ . Contrariamente, si alguno de los puntos de la tripleta  $(z_1, z_2, z_3)$  es  $\infty$ , entonces definimos la transformación  $S$  como está descrita en la ecuación (2.15), pero suprimimos los dos paréntesis en los que aparece este términos. Por ejemplo, si  $z_1 = \infty$ , entonces

$$S(z) = \frac{(z_2 - z_3)}{(z - z_3)}.$$

Usando las ideas descritas en la construcción de la transformación  $S$ , podemos construir una transformación de Möbius  $T$  tal que  $T(w_1) = 0$ ,  $T(w_2) = 1$  y  $T(w_3) = \infty$ . Entonces la función composición  $T^{-1} \circ S$  también es una transformación de Möbius tal que  $T^{-1} \circ S(z_i) = w_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Para probar la unicidad vamos a suponer que existe otra transformación de Möbius  $M$  tal que  $M(z_i) = w_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Entonces la composición  $T \circ M \circ S^{-1}$  es una transformación de Möbius que fija a los puntos 0, 1 e  $\infty$ . Del Teorema 2.2.5 se sigue que las transformaciones  $T \circ M \circ S^{-1}$  y la función identidad  $Id$  son idénticas i.e.,  $T \circ M \circ S^{-1}(z) = Id(z)$  para cada  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ . Por lo tanto,  $M = T^{-1} \circ S(z)$  para todo  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

**Teorema 2.2.7.** *Las transformaciones de Möbius actúan transitivamente sobre los círculos del plano complejo extendido. En otras palabras, dados los círculos  $C_1$  y  $C_2$  sobre  $\hat{\mathbb{C}}$ , entonces existe una transformación de Möbius  $T$  que envía al círculo  $C_1$  sobre el círculo  $C_2$ .*

*Demostración.* Consideremos las tripletas  $(z_1, z_2, z_3)$  y  $(w_1, w_2, w_3)$  conformadas por puntos diferentes que están sobre los círculos  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente. Del teorema 2.2.7, existe una transformación Möbius  $T$  tal que  $T(z_i) = w_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Dado que las Möbius preservan los círculos del plano complejo extendido y como los círculos  $C_1, C_2$  están determinados por las tripletas  $(z_1, z_2, z_3)$  y  $(w_1, w_2, w_3)$ , respectivamente, entonces  $T(C_1) = C_2$ .  $\square$

### 2.2.1. Problemas

Proponer problemas

## 2.3. Más propiedades de las Mobius

En la geometría euclidiana es natural preguntarse sobre aquellas relaciones que son invariantes bajo transformaciones afines. Vamos a introducir un objeto llamado la **razón cruzada** la cual podemos encontrar en la geometría proyectiva [18, p. 77] [4, p. 265].

**Definición 2.3.1.** *Dados cuatro puntos  $A, B, C$  y  $D$  colineales<sup>3</sup> y cuatro líneas rectas  $l, m, n, p$  concurrentes en el punto  $M$  tal que pasan por los puntos  $A, B, C$  y  $D$ , respectivamente. La **razón doble -razón cruzada** asociada a los puntos  $A, B, C$  y  $D$  es el valor real*

$$[A, B; C, D] = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

La razón doble<sup>4</sup> es un término que frecuentemente un número real que se le asocia a cuatro puntos colineales.

**Definición 2.3.2.** *Dados cuatro puntos distintos  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ , la **razón cruzada** asociada a estos puntos es*

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}. \quad (2.16)$$

Si algún  $z_j$  es  $\infty$  entonces la razón cruzada es

$$\begin{aligned} (\infty, z_2; z_3, z_4) &= \frac{(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)}, \\ (z_1, \infty; z_3, z_4) &= -\frac{(z_3 - z_4)}{(z_4 - z_1)}, \\ (z_1, z_2; \infty, z_4) &= -\frac{(z_1 - z_2)}{(z_4 - z_1)}, \\ (z_1, z_2; z_3, \infty) &= \frac{(z_1 - z_2)}{(z_2 - z_3)}. \end{aligned}$$

Varios autores usan diferentes permutaciones de 1, 2, 3 y 4 en el lado derecho de la igualdad 2.16, no importa cual se use, siempre y cuando sea coherente.

Al fijar los tres puntos  $z_2, z_3$  y  $z_4$  de la razón cruzada podemos definir la transformación de Mobius

$$T(z) = (z, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_2)(z_3 - z_4)},$$

la cual envía  $z_2, z_3$  y  $z_4$  sobre  $\infty, 0$  y  $1$ , respectivamente.

<sup>3</sup>Existe una línea recta que pasa por los puntos.

<sup>4</sup>Cross-ratio

### 2.3. MÁS PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

Al finar los tres puntos  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  de la razón cruzada podemos definir la transformación de Mobius

$$T(z) = (z_1, z_2, z_3, z) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)},$$

la cual envía  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  sobre 1, 0 y  $\infty$ , respectivamente. En consecuencia a este hecho se tiene que

**Lema 2.3.3.** *Las transformaciones de Mobius preservan la razón cruzada, es decir si  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ , entonces  $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ .*

## Capítulo 3

# El plano Hiperbólico $\mathbb{H}$ o plano de Lovachevsky

Los *Elementos* del griego Euclides (325 a. C. -265 a. C.) es el primer registro escrito, con el que cuenta la humanidad, de un sistema axiomático (véase [1]). Ésta también ha sido una las obras que más influyentes del pensamiento científico de la humanidad. Los *Elementos* está compuesto por 13 libros, en los cuales Euclides desarrolló los fundamentos de la geometría elemental, junto con algunos conceptos de la aritmética. Para edificar la geometría, el autor definió los objetos principales de la teoría: *punto*, *recta*, *plano* entre otros. Luego, basándose en la lógica, Euclides desarrolló unas leyes fundamentales sobre estos objetos (postulados o axiomas). Los primeros cinco de éstos postulados son:

*Postulado I.* Desde cualquier punto a cualquier otro punto se puede trazar una recta.

*Postulado II.* Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.

*Postulado III.* Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.

*Postulado IV.* Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

*Postulado V.* Si una recta al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

El postulado V atrajo la atención de los matemáticos, pues a simple vista no parecía intuitivo a la intuición geométrica, así que se produjo la idea de probar dicho postulado. No hubo éxito, sin embargo, aparecieron afirmaciones equivalentes al postulado V. Enunciaremos algunas de ellas.

*“Dos rectas paralelas son equidistantes.”* Posido (I a. C.).

*“Dos rectas paralelas a una tercera son siempre paralelas entre sí.”* Proclo (412 - 485).

### CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO $\mathbb{H}$ O PLANO DE 3.1. MÉTRICA RIEMANNIANA DEL SEMI PLANO SUPERIOR

*“Si tres puntos están de un mismo lado de una recta y equidistan de ella, los tres puntos pertenecen a una misma recta.”* C. Clavius (1537-1612).

*“Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solo una paralela a dicha recta.”* John Playfair (1748-1818).

*“Por un punto cualquiera, tomado en el interior de un ángulo, se puede siempre trazar una recta que encuentre a los lados del ángulo.”* L. M. Legendre (1752-1833).

*“Dado un triángulo cualquiera existe siempre uno semejante de magnitud arbitraria.”* J. Wallis (1616-1703).

*“La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.”* G. Saccheri (1667-1733), J. H. Lambert (1728-1777), A. M. Legendre (1752-1833).

*“Existen triángulos de áreas tan grande como se quiera.”* K. F. Gauss (1777-1855).

Durante el siglo XIX floreció el siguiente razonamiento: Si el postulado V de Euclides es un *verdadero* postulado, el hecho de negarlo, aceptando los otros cuatro, no debe de conducir a contradicciones. Así fue como el húngaro Johann Bolyai (1802-1860), el alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), el ruso Nikolai Lobachevsky (1793-1856) y otros, descubrieron las geometrías no euclidianas<sup>1</sup>.

## 3.1. Métrica Riemanniana del semi plano superior

Dado el subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , el plano tangente del punto  $(x, y) \in U$  es el conjunto

$$T_{(x,y)}U := \{(x, y)\} \times \mathbb{R}^2.$$

**Definición 3.1.1.** Una **métrica Riemanniana**  $\mu$  en el abierto  $U$  en  $\mathbb{R}^2$  es una correspondencia, la cual asocia a cada punto  $(x, y) \in U$  un producto interno escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)}$  en el espacio tangente  $T_{(x,y)}U$ ,

$$(x, y) \mapsto \mu(x, y) := \langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)} : T_{(x,y)}U \times T_{(x,y)}U \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

Además, esta asociación varía continua y diferenciablemente sobre los puntos de  $U$ . Más precisamente, si la función  $g_{i,j} : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante

$$(x, y) \mapsto g_{i,j}(x, y) = \langle e_i, e_j \rangle_{(x,y)}$$

es diferenciable, para cada  $i, j \in \{1, 2\}$ . Donde el conjunto  $\{e_1, e_2\}$  es la base usual (canónica) para  $\mathbb{R}^2$ .

---

<sup>1</sup>Párrafos basados en [14].



CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.1. MÉTRICA RIEMANNIANA DEL SEMI PLANO SUPERIOR

**Ejemplo 3.1.2.** La **métrica Riemanniana usual**  $\mu_e$  en  $\mathbb{R}^2$  es aquella que asigna a cada pareja  $(x, y)$  el producto punto usual en el plano tangente  $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ ,

$$(x, y) \mapsto \mu(x, y) := \langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y),e} : T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \times T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.2)$$

Nótese la función  $g_{i,j} : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante

$$(x, y) \mapsto g_{i,j}(x, y) = \langle e_i, e_j \rangle_{(x,y),e} = \delta_{i,j}$$

es diferenciable, para cada  $i, j \in \{1, 2\}$ , pues es la función constante. Donde el conjunto  $\{e_1, e_2\}$  es la base usual (canónica) para  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.1.3.** El **semi plano superior**  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  equipado con la métrica riemanniana  $\mu$ , la cual asocia a cada punto  $z \in \mathbb{H}$  el producto escalar (interno)

$$z \mapsto \mu(z) = \langle \cdot, \cdot \rangle_{h,z} := \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle_e}{(\text{Im}(z))^2}, \quad (3.3)$$

en el espacio tangente  $T_z\mathbb{H}$ , es conocido como el **plano hiperbólico** o el **plano de Lobachevsky** y, es denotado mediante  $\mathbb{H}$ .

**Lema 3.1.4.** La correspondencia  $\mu$  dada en la definición 3.1.3 es una métrica Riemanniana.

*Demostración.* Nótese que para cualquier punto  $z \in \mathbb{H}$  el espacio tangente  $T_z\mathbb{H}$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , el cual está identificado con el plano Euclidiano con un origen 0 y la base canónica  $\{e_1, e_2\}$ . Entonces la función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_h & : T_z\mathbb{H} \times T_z\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) & \mapsto \langle u, v \rangle_h := \frac{\langle u, v \rangle_e}{(\text{Im}(z))^2}, \end{aligned}$$

es un producto interno (escalar). Además, al considerar la base canónica  $\{e_1, e_2\}$  para  $\mathbb{R}^2$ , tenemos la función  $g_{i,j} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$z \mapsto g_{i,j}(z) = \frac{\langle e_i, e_j \rangle_e}{(\text{Im}(z))^2} = \frac{\delta_{i,j}}{(\text{Im}(z))^2},$$

la cual es diferenciable, para cada  $i, j \in \{1, 2\}$ , pues las entradas de la matrix Jacobiana

$$D_z g_{i,j} = \left( 0, \frac{-2\delta_{i,j}}{(\text{Im}(z))^3} \right)$$

son continuas en  $\mathbb{H}$ . Esto prueba que la correspondencia  $\mu$  es una métrica Riemanniana.  $\square$

La métrica riemanniana  $\mu$  se le conoce como la **métrica hiperbólica**. Recordemos  $\mu$  nos proporciona una norma del vector  $u$  en el espacio tangente  $T_z\mathbb{H}$ .

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.1. MÉTRICA RIEMANNIANA DEL SEMI PLANO SUPERIOREVSKY

**Definición 3.1.5.** La **norma hiperbólica** del vector  $u$  en el espacio tangente  $T_z\mathbb{H}$  está dada mediante

$$\|u\|_h := \sqrt{\langle u, u \rangle_h} = \frac{\sqrt{\langle u, u \rangle_e}}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{\|u\|_e}{\operatorname{Im}(z)}. \quad (3.4)$$

Con ayuda de la norma podemos definir la longitud de una curva derivable a trozos en  $\mathbb{H}$ .

**Definición 3.1.6.** Una **curva** en el abierto  $U$  es una función continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , definida mediante

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

donde  $x(t)$  y  $y(t)$  son funciones real valuadas. Los puntos  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$  en  $U$  son llamados los **extremos de la curva** o **puntos finales**. Si los extremos coincide, i.e.,  $\gamma(a) = \gamma(b)$  se dice que la curva es **cerrada**. La imagen de  $[a, b]$  bajo  $\gamma$  se llama **curva imagen** o **traza de  $\gamma$**  y será denotada mediante  $\gamma^*$ . Además, diremos que la curva  $\gamma$  es **derivable** en el punto  $t_0 \in (a, b)$  si existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right).$$

En caso de existir dicho límite lo denotaremos mediante  $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$  y lo llamaremos la **derivada de  $\gamma$  en el punto  $t_0$** . Así mismo, diremos que la curva  $\gamma$  es **derivable trozos** si existe una cantidad finita de puntos  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  en el intervalo  $[a, b]$  tal que  $\gamma'(t_0)$  la derivada de  $\gamma$  en cada punto  $t_0 \in (t_i, t_{i+1})$  existe, con  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Consideremos la curva diferenciable  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , definida mediante

$$t \mapsto \gamma(t) := it,$$

tal que  $0 < a < b$ . Nótese que la traza de  $\gamma$  es el segmento de línea recta euclidiano con extremos los puntos  $ai$  y  $bi$ . Para todo  $t \in (a, b)$  el vector  $\gamma'(t) = i = (0, 1)$  es un elemento del plano tangente  $T_{\gamma(t)}\mathbb{H}$  y su norma hiperbólica es

$$\|\gamma'(t)\|_{h, \gamma(t)} = \sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle_{h, \gamma(t)}} = \frac{\sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle_e}}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} = \frac{\sqrt{\langle (0, 1), (0, 1) \rangle_e}}{t} = \frac{1}{t}.$$

**Definición 3.1.7.** Dada la curva derivable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , tal que  $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{H}$ , para cada  $t \in [a, b]$ . La **longitud hiperbólica** de  $\gamma$  está dada mediante

$$\ell_h(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_h dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|_e}{y(t)} dt.$$

La **distancia hiperbólica** entre dos puntos  $z$  y  $w$  del plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , la cual denotaremos mediante

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma} \{\ell_h(\gamma)\} \quad (3.5)$$

es el ínfimo de las longitudes hiperbólicas de las curvas derivables a trozos en  $\mathbb{H}$  con puntos finales  $z$  y  $w$ .

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.1. MÉTRICA RIEMANNIANA DEL SEMI PLANO SUPERIOREVSKY

**Ejemplo 3.1.8.** La longitud hiperbólica de la curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , definida mediante

$$t \mapsto \gamma(t) := it,$$

es

$$\ell_h(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_h dt = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_a^b = \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

Así, tenemos una función distancia en el plano hiperbólico.

**Teorema 3.1.9.** La función  $\rho : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma} \{\ell_h(\gamma)\}$$

es una métrica, es decir, la función  $\rho$  satisface las siguientes propiedades:

- i. Para cada  $z, w \in \mathbb{H}$  se cumple  $0 \leq \rho(z, w) < \infty$ .
- ii. Dados los puntos  $z, w \in \mathbb{H}$ ,  $\rho(z, w) = 0$  si y solo si  $z = w$ .
- iii. Para cada  $z, w \in \mathbb{H}$  se cumple  $\rho(z, w) = \rho(w, z)$  (Simetría).
- iv. Para cada  $z, w, v$  se cumple  $\rho(z, w) \leq \rho(z, v) + \rho(v, w)$  (Desigualdad triangular).

*Demostración.* Primero probaremos que se satisface la propiedad i. Tomemos los elementos  $z, w \in \mathbb{C}$  y veamos que se satisface la desigualdad

$$0 \leq \rho(z, w) < \infty.$$

Basta verificar que si tomamos la curva diferenciable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , definida mediante  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  tal que sus extremos son los puntos  $z$  y  $w$ , entonces se satisface  $0 \leq \text{long}_h(\gamma) < \infty$ . De las propiedades de la norma se sigue que

$$0 \leq \|\gamma'(t)\|_h = \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} < \infty, \text{ para cada } t \in [a, b].$$

Ahora, como la función en una variable  $\frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)}$  es integrable en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces de la anterior expresión se sigue que

$$0 \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_h dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt < \infty.$$

Veamos que se satisface la propiedad ii. Verificaremos la condición suficiente. Tomemos los puntos  $z, w \in \mathbb{H}$  tal que  $z = w$  y veamos que  $\rho(z, w) = 0$ . Definimos la curva

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.1. MÉTRICA RIEMANNIANA DEL SEMI PLANO SUPERIOREVSKY

diferenciable  $\gamma_z : [a, a] \rightarrow \mathbb{H}$ , mediante  $\gamma_z(t) = tz$ , la cual tiene como extremos los puntos  $z$  y  $w$ . Nótese que

$$\ell_h(\gamma_z) = 0 \leq \ell_h(\gamma)$$

para toda curva  $\gamma$  en  $\mathbb{H}$  con extremos  $z$  y  $w$ . Anteriormente probamos que  $0 \leq \rho(z, w)$ , entonces de la relación anterior se sigue que  $\rho(z, w) = 0$ . Veamos que se satisface la condición necesaria. Procederemos por contradicción. Supongamos que existen dos elementos  $z \neq w$  en  $\mathbb{H}$  tal que  $\rho(z, w) = 0$ . Existe un real  $\epsilon > 0$  tal que la cerradura de bola euclidiana  $B_\epsilon(z)$  está contenida en  $\mathbb{H}$  y no contiene al punto  $w$ . La función  $f : \overline{B_\epsilon(z)} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)}$  es continua. Dado que la función continua  $f$  está definida desde un espacio compacto de  $\mathbb{H}$ , entonces existe un valor real positivo  $m \neq 0$  tal que  $f(z) \geq m$  para todo  $z \in \overline{B_\epsilon(z)}$ . Ahora consideremos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  una curva derivable a trozos con puntos finales  $z$  y  $w$ , entonces existe un punto  $t_0 \in (a, b)$  tal que  $\gamma(t_0)$  está en la frontera de la bola  $B_\epsilon(z)$  y la imagen  $\gamma([a, t_0])$  está contenida en la bola  $B_\epsilon(z)$ . De la función  $f$  definida anteriormente se sigue que para todo  $t \in [a, t_0]$  que

$$\|\gamma'(t)\|_h = \frac{\|\gamma'(t)\|_e}{\text{Im}(\gamma(t))} \geq m \|\gamma'(t)\|_e$$

De las propiedades de la integral definida y que la distancia euclidiana entre los puntos  $z$  y  $v$  es  $|z - v|$ , entonces

$$\ell_h(\gamma) \geq \int_a^{t_0} \|\gamma'(t)\|_h dt \geq m \int_a^{t_0} \|\gamma'(t)\|_e dt \geq m|z - \gamma(t_0)| = m\epsilon > 0.$$

Dado que la curva  $\gamma$  la tomamos de manera arbitraria, entonces  $\inf_{\gamma} \{\ell_h(\gamma)\} = \rho(z, w) \geq m\epsilon > 0$ . Sin embargo, este hecho es una contradicción, pues supusimos que  $\rho(z, w) = 0$ .

*Simetría.* Si consideramos la curva derivable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  con puntos extremos  $z$  y  $w$ , entonces podemos definir la *curva opuesta de  $\gamma$*  como  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $-\gamma(t) := \gamma(b + a - s) = x(b + a - s) + iy(b + a - s)$ , la cual tiene puntos finales  $w$  y  $z$ . Tomando la igualdad  $t = b + a - s$ , del Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de la cadena se sigue que

$$\begin{aligned} \ell_h(-\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(b + a - s))^2 + (y'(a + b - s))^2}}{y(a + b - s)} ds, \\ &= \int_{s(b)=a}^{s(a)=b} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} (-1) dt \\ &= \int_b^a \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \\ &= \ell_h(\gamma). \end{aligned}$$

De esta última desigualdad se sigue

$$\rho(w, z) \leq \inf_{\gamma} \{\ell_h(-\gamma)\} = \rho(z, w). \quad (3.6)$$

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.1. MÉTRICA RIEMANNIANA DEL SEMI PLANO SUPERIOREVSKY

Analógamente, si  $\sigma$  es una curva derivable a trozos en  $\mathbb{H}$  con puntos finales  $w$  y  $z$ , entonces

$$\rho(z, w) \leq \inf_{\sigma} \{\ell_h(-\sigma)\} = \rho(w, z). \quad (3.7)$$

De las ecuaciones (3.6) y (3.7) se sigue que  $\rho(z, w) = \rho(w, z)$ .

*Desigualdad triangular.* Consideremos los puntos  $z, w, v \in \mathbb{H}$  y veamos que se satisface la desigualdad  $\rho(z, w) \leq \rho(z, v) + \rho(v, w)$ . De la definición de ínfimo se sigue el siguiente hecho: al tomar cualquier real positivo  $\varepsilon > 0$ , siempre existen las curva derivable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{H}$ , con puntos finales  $z$  y  $v$  y;  $v$  y  $w$ , respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} \ell_h(\gamma) - \rho(z, v) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \ell_h(\sigma) - \rho(v, w) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \ell_h(\gamma) &\leq \rho(z, v) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \ell_h(\sigma) \leq \rho(v, w) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tomemos la curva suma  $\gamma + \sigma : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{H}$ , definida mediante

$$(\gamma + \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \sigma(c - d + t), & \text{si } b \leq t \leq b + d - c, \end{cases}$$

la cual es derivable a trozos y tiene puntos finales  $z$  y  $w$ . De la ecuación (3.8) y de la definición de la función  $\rho$  se sigue que

$$\rho(z, w) \leq \ell_h(\gamma + \sigma) = \ell_h(\gamma) + \ell_h(\sigma) \leq \rho(z, v) + \rho(v, w) + \varepsilon.$$

Como la anterior ecuación es válida para cualquier  $\varepsilon > 0$ , entonces se sigue que

$$\rho(z, w) \leq \rho(z, v) + \rho(v, w).$$

□

**Ejemplo 3.1.10.** Consideremos los complejos puros  $ai$  y  $bi$  tal que  $0 < a < b$ , encontremos la distancia hiperbólica entre dichos complejos i.e.,  $\rho(ai, bi)$ .

Ahora, tomemos la curva diferenciable a trozos  $\beta : [\ln(a), \ln(b)] \rightarrow \mathbb{H}$ , definida mediante  $\beta(t) = i \exp(t)$ , la cual tiene extremos los puntos  $ai$  y  $bi$ . La traza de  $\beta$  es el segmento de línea recta en  $\mathbb{H}$  con extremos  $ai$  y  $bi$ . La longitud hiperbólica de  $\beta$  es

$$\ell_h(\beta) = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{\exp(t)}{\exp(t)} dt = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} dt = t \Big|_{\ln(a)}^{\ln(b)} = \ln(b) - \ln(a) = \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

Consideremos una curva diferenciable trozos  $\gamma : [\hat{a}, \hat{b}] \rightarrow \mathbb{H}$ , definida mediane  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , tal que  $\gamma(\hat{a}) = ai$  y  $\gamma(\hat{b}) = bi$ . Probaremos que la longitud hiperbólica de  $\gamma$  es mayor igual que el valor  $\ln \left( \frac{b}{a} \right)$  i.e.,

$$\ell_h(\gamma) \geq \ln \left( \frac{b}{a} \right) = \ell_h(\beta).$$

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.1. MÉTRICA RIEMANNIANA DEL SEMI PLANO SUPERIOREVSKY

Como  $\gamma$  es una curva arbitraria, podremos concluir  $\rho(z, w) \geq \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ell_h(\beta)$ . La longitud hiperbólica de la curva  $\gamma$  está dada mediante

$$\ell_h(\gamma) = \int_a^b \|\gamma(t)\|_h dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt.$$

Dado que se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} \geq \frac{y'(t)}{y(t)},$$

para cada  $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ , entonces de las propiedades de la integral se sigue que

$$\int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln(y(t)) \Big|_{\hat{a}}^{\hat{b}} = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

La anterior desigualdad implica que la longitud hiperbólica de cualquier curva diferenciable a trozos con extremos  $a_i$  y  $b_i$  es mayor igual a la longitud hiperbólica de  $\beta$  el segmento de línea recta en  $\mathbb{H}$  con extremos  $a_i$  y  $b_i$ , es decir

$$\ell_h(\gamma) \geq \ell_h(\beta).$$

### 3.1.1. Problemas

**Problema 3.1.11.** Dada la función  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , definida mediante  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , donde  $x(t)$  y  $y(t)$  son funciones real valuadas y  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Prueba que  $\gamma$  es continua en  $t_0$  si y solo si  $x$  y  $y$  son continuas en  $t_0$ , con  $t_0 \in (a, b)$ .

**Problema 3.1.12.** Dada la curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Probar que la curva imagen o traza de  $\gamma$  es un subconjunto cerrado, conexo y compacto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Problema 3.1.13.** Considera la curva derivable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Prueba que si la derivada  $\gamma'(t) = (0, 0)$  para todo  $t \in (a, b)$ , entonces  $\gamma$  es una curva constante.

**Problema 3.1.14.** Describir una función  $\gamma$  cuya traza sea la circunferencia con centro  $z$  y radio  $r$ .

**Problema 3.1.15.** Considere los puntos  $z \neq w$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , Describir una función  $\gamma$  cuya traza sea la circunferencia ortogonal al eje real y que pasa por los puntos  $z$  y  $w$ .

**Problema 3.1.16.** Consideremos los reales  $0 < a < b$ , prueba que la distancia hiperbólica entre  $a_i$  y  $b_i$  es  $\rho(a_i, b_i) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.1. MÉTRICA RIEMANNIANA DEL SEMI PLANO SUPERIOREVSKY

**Problema 3.1.17.** Considere  $\mathbb{R}^2$  equipado con la métrica riemanniana  $\mu_e$ , la cual asocia a cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  el producto escalar (interno)

$$z \mapsto \mu_e(x, y) = \langle \cdot, \cdot \rangle_e \quad (3.9)$$

en el espacio tangente  $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ . Prueba al detalle que  $\mu_e$  es una métrica Riemanniana.

**Problema 3.1.18.** Dada la curva derivable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , para cada  $t \in [a, b]$ . La **longitud euclidiana** de  $\gamma$  está dada mediante

$$\ell_e(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_e dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

La **distancia euclidiana** entre dos puntos  $(x_1, x_2)$  y  $(y_1, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , la cual denotaremos mediante

$$\rho_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \inf_{\gamma} \{\ell_e(\gamma)\} \quad (3.10)$$

es el ínfimo de las longitudes euclidianas de las curvas derivables a trozos en  $\mathbb{R}^2$  con puntos finales  $(x_1, x_2)$  y  $(y_1, y_2)$ . Prueba que la función  $\rho_e : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante

$$\rho_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \inf_{\gamma} \{\ell_e(\gamma)\}$$

es una función distancia.

**Problema 3.1.19.** Consideremos el punto  $z$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  y un valor real  $r > 0$  tal que la cerradura de la bola  $B_r(z)$  está contenida en  $\mathbb{C}$  i.e.,  $\overline{B_r(z)} \subset \mathbb{H}$ . Prueba que la función  $f : \overline{B_r(z)} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(w) = \frac{1}{\text{Im}(w)}$  es continua y diferenciable.

**Problema 3.1.20.** ¿Cuál es el mínimo y máximo de la función  $f$  definida en el punto anterior?

**Problema 3.1.21.** Consideremos el plano complejo  $\mathbb{C}$  con la topología que define la norma compleja (topología usual) y el subconjunto  $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ .

1. ¿ $U$  es convexo? Argumenta tu respuesta.
2. ¿ $U$  es conexo? Argumenta tu respuesta.
3. ¿ $U$  es localmente conexo? Argumenta tu respuesta.
4. ¿ $U$  es abierto? Argumenta tu respuesta.
5. ¿ $U$  es compacto? Argumenta tu respuesta.
6. ¿ $U$  es localmente compacto? Argumenta tu respuesta.
7. ¿ $U$  es cerrado? Argumenta tu respuesta.

### 3.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS EN EL PLANO HIPERBÓLICO O PLANO DE LOVACHEVSKY

8. ¿ $U$  es completo con la métrica inducida por la norma compleja? Argumenta tu respuesta.
9. ¿Cuál es la cerrado de  $U$  en  $\mathbb{C}$ ?
10. ¿Cuál es la frontera de  $U$  en  $\mathbb{C}$ .

**Problema 3.1.22.** Considera los puntos  $z, w$  en  $U$ . ¿Cómo construyes con regla y compás una línea recta (línea perpendicular al eje real o círculo ortogonal) que pasa por  $z$  y  $w$ ?

**Problema 3.1.23.** Para todo  $z_0 \in \mathbb{H}$ , prueba que la función  $f_{z_0} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f_{z_0}(w) = \rho(z_0, w)$ , es continua.

**Problema 3.1.24.** Prueba que  $(\mathbb{H}, \rho)$  es un espacio métrico completo.

## 3.2. Transformaciones de Möbius y el plano Hiperbólico

Denotaremos mediante  $PSL(2, \mathbb{R})$  al subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  conformado por las clases de matrices

$$[A] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\}$$

tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Este subgrupo posee propiedades interesantes sobre el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ .

**Teorema 3.2.1.** El grupo  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa sobre el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  mediante homeomorfismos i.e., todo elemento  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  es un homomorfismo de  $\mathbb{H}$  en sí mismo.

*Demostración.* Tomemos la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  y veamos que  $T$  está bien definida es decir, si  $z$  es un elemento en  $\mathbb{H}$ , entonces  $T(z)$  también es un elemento en  $\mathbb{H}$ ,  $Im(T(z)) > 0$ . De las propiedades de los número complejo se sigue que

$$T(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{acz\bar{z} + bc\bar{z} + adz + bd}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bc\bar{z} + adz + bd}{|cz+d|^2}. \quad (3.11)$$

La parte imaginaria del complejo  $w$  satisface  $Im(w) = \frac{w-\bar{w}}{2i}$ , entonces

$$\begin{aligned} Im(T(z)) &= \frac{T(z) - \overline{T(z)}}{2i} = \frac{\frac{ac|z|^2 + bc\bar{z} + adz + bd}{|cz+d|^2} - \frac{ac|z|^2 + bcz + ad\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}}{2i}, \\ &= \frac{adz - bcz + bc\bar{z} - ad\bar{z}}{2i|cz+d|^2} = \frac{z(ad - bc) - \bar{z}(ad - bc)}{2i|cz+d|^2}, \\ &= \frac{z - \bar{z}}{2i|cz+d|^2} = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} > 0. \end{aligned}$$



### 3.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS EN EL PLANO HIPERBÓLICO O PLANO DE LOVACHEVSKY

La transformación  $T$  es inyectiva. Tomemos dos elementos distintos  $w \neq z$  en  $\mathbb{H}$  y, supongamos que  $T(z) = T(w)$ , es decir  $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{aw+b}{cw+d}$ . De esta última igualdad computamos y obtenemos:

$$\begin{aligned} (az+b)(cw+d) &= (aw+b)(cz+d), \\ aczw + bcw + adz + bd &= aczw + bcz + adw + bd, \\ bcw + adz &= bcz + adw, \\ adz - bcz &= adw - bcw, \\ z(ad-bc) &= w(ad-bc), \\ z &= w. \end{aligned}$$

Claramente, la igualdad  $z = w$  es una contradicción al hecho  $z \neq w$ . Por lo tanto, la transformación  $T$  es inyectiva.

La transformación  $T$  es sobreyectiva. Consideremos el elemento  $w \in \mathbb{H}$ . Si definimos  $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$ , entonces  $T(z) = w$ .

Finalmente, de la Proposición 1.4.4 (véase [23]) se sigue que la transformación de Möbius  $T$  es continua en  $\mathbb{H}$  y su inversa  $T^{-1}$  definida mediante  $z \rightarrow \frac{dz-b}{-cz+d}$ , también es continua en  $\mathbb{H}$ . Esto prueba que  $T$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Definición 3.2.2.** El *estabilizador* del complejo  $i$  es el subgrupo

$$G_i := \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) : T(i) = i\} \leq PSL(2, \mathbb{R}).$$

Si la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  es un elemento del estabilizador  $G_i$ , entonces se cumple la igualdad

$$T(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = i \quad (3.12)$$

para algunos valores reales  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tal que  $ad - cb = 1$ . Computamos de la ecuación (3.12) y obtenemos

$$\begin{aligned} ai + b &= -c + di, \\ (b+c) + i(a-d) &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

lo cual implica que  $b = -c$  y  $a = d$ . Entonces el estabilizador  $G_i$  está conformado mediante

$$\begin{aligned} G_i &= \left\{ T(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - cb = 1, b = -c \text{ y } a = d \right\}, \\ &= \left\{ T(z) = \frac{az+b}{-bz+a} : a, b \in \mathbb{R} \text{ and } a^2 + b^2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Sin embargo, los valores reales  $a, b$  que satisfacen la ecuación  $a^2 + b^2 = 1$  son las parejas ordenadas  $(a, b)$  que están sobre el círculo con radio 1 y centro  $(0, 0)$ . Entonces los valores

### 3.2. TRANSFORMACIONES DEL PLANO HIPERBÓLICO O PLANO DE LOVACHEVSKY

$a$  y  $b$  los podemos reescribir mediante  $a = \cos(\theta)$  y  $b = \sin(\theta)$ , con  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Así, el estabilizador  $G_i$  se escribe como sigue

$$G_i = \left\{ T_\theta(z) = \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)} : \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Recordemos que el círculo unitario en el plano complejo

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

dotado con la estructura multiplicativa de plano complejo es un grupo. Además, es un subespacio compacto de  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 3.2.3.** *El círculo unitario  $S^1$  y el estabilizador  $G_i$  son isomorfos y homomorfos.*

**Teorema 3.2.4.** *El círculo unitario  $S^1$  y el grupo aditivo  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  son isomorfos y homeomorfos vía la función  $e^{i\theta} \rightarrow [\theta]$ .*

**Lema 3.2.5.** *Para cualesquiera elementos  $z, w \in \mathbb{H}$ , la expresión  $\frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}$  es invariante bajo elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .*

*Demostración.* Tomemos la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  en  $PSL(2, \mathbb{R})$  y probemos que se satisface la igualdad

$$\frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} = \frac{|T(z) - T(w)|}{|T(z) - \overline{T(w)}|},$$

para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{H}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{|T(z) - T(w)|}{|T(z) - \overline{T(w)}|} &= \frac{\left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right|}{\left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{w} + b}{c\bar{w} + d} \right|}, \\ &= \frac{\left| \frac{(az + b)(cw + d) - (aw + b)(cz + d)}{(cz + d)(cw + d)} \right|}{\left| \frac{(az + b)(c\bar{w} + d) - (a\bar{w} + b)(cz + d)}{(cz + d)(c\bar{w} + d)} \right|}, \\ &= \frac{|acz w + adz + bcw + bd - acz w - adw - bcz - bd|}{|acz \bar{w} + adz + bc\bar{w} + bd - acz \bar{w} - ad\bar{w} - bcz - bd|} \\ &= \frac{|adz - bcz + bcw - adw|}{|adz - bcz + bc\bar{w} - ad\bar{w}|} = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}. \end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.3. GEODÉSICAS E ISOMETRÍAS DEL PLANO HIPERBÓLICO

**Lema 3.2.6.** Para cualesquiera dos elementos  $z, w \in \mathbb{H}$ , la expresión

$$\frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)},$$

es invariante bajo los elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

*Demostración.* Dada la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , probaremos la igualdad

$$\frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} = \frac{|T(z) - T(w)|^2}{2\operatorname{Im}(T(z))\operatorname{Im}(T(w))},$$

para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{H}$ . El miembro derecho de la anterior expresión es igual a

$$\begin{aligned} &= \frac{\left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right|^2}{2 \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} \frac{\operatorname{Im}(w)}{|cw + d|^2}}, \\ &= \frac{\left| \frac{(az + b)(cw + d) - (aw + b)(cz + d)}{(cz + d)(cw + d)} \right|^2 |cz + d|^2 |cw + d|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}, \\ &= \frac{|aczw + bcw + adz + bd - aczw - bcz - adw - bd|^2 |cz + d|^2 |cw + d|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}, \\ &= \frac{|adz - bcz - (adw - bcw)|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} = \frac{|(ad - bc)z - (ad - bc)w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}, \\ &= \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}. \end{aligned}$$

□

### 3.2.1. Problemas

**Problema 3.2.7.** Prueba que el estabilizador  $G_i$  es un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

## 3.3. Geodésicas e isometrías del plano hiperbólico $\mathbb{H}$ .

En la geometría euclidiana, la distancia euclidiana entre los puntos  $A$  y  $B$  coincide con la longitud del segmento de línea recta  $\overline{AB}$ . El segmento  $\overline{AB}$  es un objeto que geométrico que realiza (tiene asociado) la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$ . En la geometría hiperbólica una curva que realiza la distancia hiperbólica entre dos puntos es llamada **geodésica**.

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.3. GEODÉSICAS E ISOMETRÍAS DEL PLANO HIPERBÓLICO

**Definición 3.3.1.** La curva diferenciable a trazos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  con puntos finales  $z, w \in \mathbb{H}$  es una **geodésica** si  $d_h(z, w) = \ell_h(\gamma)$ .

Para el caso de la geometría hiperbólica, probaremos que las **geodésicas** son segmentos de líneas rectas euclidianas en  $\mathbb{H}$  ortogonales (*perpendiculares*) al eje real o, arcos de círculos que intersectan ortogonalmente al eje real.

**Definición 3.3.2.** Llamaremos **círculo ortogonal al eje real** a las semirectas euclidianas en el plano hiperbólico ortogonales<sup>2</sup> al eje real y, a las semi circunferencias en el plano hiperbólico con radio  $r > 0$  y centro algún punto sobre el eje real (véase Figura 3.1).

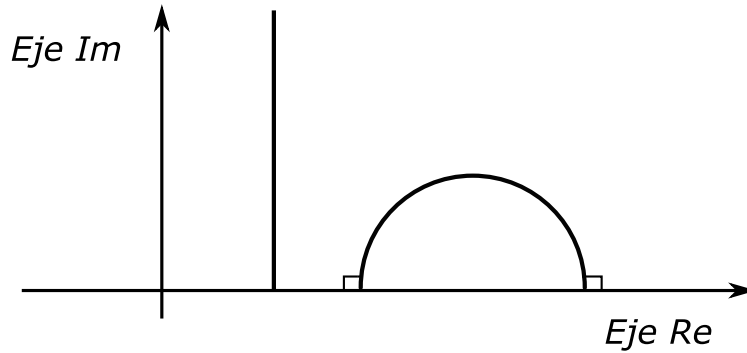


Figura 3.1: Círculos ortogonales al eje real.

**Ejemplo 3.3.3.** En el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  el círculo ortogonal (semi circunferencia) de radio  $r > 0$  y centro  $\alpha \in \mathbb{R}$  es el conjunto  $C(\alpha, r) := \{w \in \mathbb{H} : |z - \alpha| = r\}$ . La (**homotecia**) transformación de Möbius  $H_r$ , definida mediante

$$H_r(z) = rz, \quad (3.14)$$

envía el círculo ortogonal  $C(0, 1)$  sobre el círculo ortogonal  $C(0, r)$ . Si consideramos el real  $\alpha$ , entonces la (**translación**) transformación de Möbius  $L_\alpha$ , definida mediante

$$L_\alpha(z) = z + \alpha, \quad (3.15)$$

envía el círculo ortogonal  $C(0, r)$  en el círculo ortogonal  $C(\alpha, r)$ . Entonces las transformación de Möbius  $L_\alpha \circ H_r(z) = rz + \alpha$  envía el círculo ortogonal  $C(0, 1)$  sobre el círculo ortogonal  $C(\alpha, r)$ .

**Ejemplo 3.3.4.** La translación  $L_\alpha = z + \alpha$  envía el eje imaginario sobre  $l_\alpha$  la recta perpendicular al eje real que pasa por el punto  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>2</sup>Perpendiculares.

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.3. GEODÉSICAS E ISOMETRÍAS DEL PLANO HIPERBÓLICO

**Ejemplo 3.3.5.** La transformación de Möbius  $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$  envía el eje imaginario sobre el círculo unitario  $C(0, 1)$ . Nótese que  $T$  mapea el primer y segundo cuadrante del plano complejo sobre los conjuntos  $\{z \in \mathbb{H} : |z| < 1\}$  y  $\{z \in \mathbb{H} : |z| > 1\}$ , respectivamente.

De los tres ejemplos, descritos anteriormente deducimos el siguiente hecho.

**Teorema 3.3.6.** El grupo  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa transitivamente en la familia de círculos ortogonales al eje real, i.e., dados  $C_1$  y  $C_2$  dos círculos ortogonales al eje real, entonces existe un elemento  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  tal que  $T(C_1) = C_2$ .

Naturalmente, podemos preguntarnos ¿cómo trazamos con regla y compás un círculo ortogonal al eje real que pasa por los puntos  $z \neq w \in \mathbb{H}$ ? Exploraremos el caso cuando  $Re(z) \neq Re(w)$ .

**Construction 3.3.1.** Consideremos  $l$  la mediatriz<sup>3</sup> del segmento de línea recta cuyos extremos son los puntos  $z$  y  $w$  (véase Figura 3.2). Dado que  $Re(z) \neq Re(w)$ , entonces la mediatriz  $l$  intersecta al eje real en un punto  $\alpha$ . Del Teorema de la mediatriz<sup>4</sup> se sigue que  $\alpha$  equidista a los puntos  $w$  y  $z$ , i.e.,  $|z - \alpha| = |w - \alpha| = r$ . Entonces la semi circunferencia  $C(\alpha, r) = \{v \in \mathbb{H} : |v - \alpha| = r\}$  atraviesa los puntos  $z$  y  $w$ .

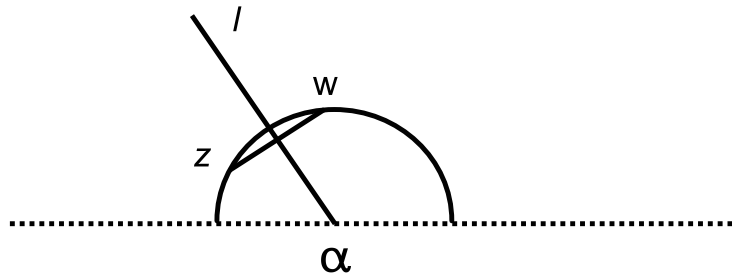


Figura 3.2: Mediatriz del segmento cuyos extremos son los complejo  $z$  y  $w$ .

Los círculos ortogonales en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  son los homólogos a los objetos llamados líneas rectas en el plano euclidiano. En la geometría euclidiana, sabemos que por un punto exterior a una línea recta  $l$  pasa una única línea recta que no intersecta a  $l$ . Sin embargo, en la geometría hiperbólica al considerar un círculo ortogonal (línea recta)  $C$  y un punto  $z \in \mathbb{H} - C$ , existen más de un círculo ortogonal (líneas rectas) que pasan por  $z$  y que no intersectan a  $C$  (véase Figura 3.3).

Además, de dejar los círculos ortogonales al eje real, los elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$  también son isometrías del plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ . Recordemos que una **isometría** del plano

<sup>3</sup>La mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio.

<sup>4</sup>Todo punto que se encuentre sobre la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del segmento.

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.3. GEODÉSICAS E ISOMETRÍAS DEL PLANO HIPERBÓLICO DE POINCARÉ

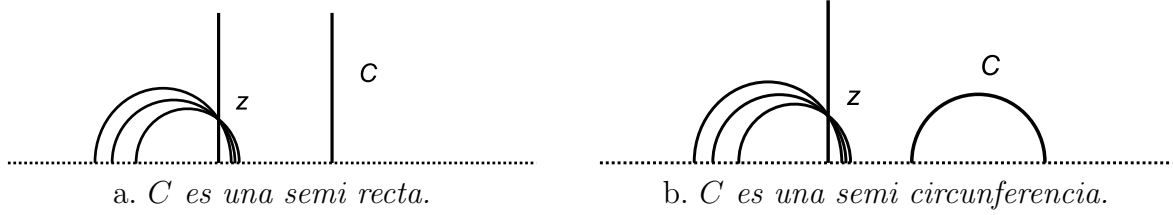


Figura 3.3: Círculos ortogonales paralelos a  $C$  que pasan por  $z$ .

hiperbólico es una función biyectiva desde  $\mathbb{H}$  en sí mismo que preserva la distancia hiperbólica *i.e.*, la función biyectiva  $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  es una isometría si  $d_h(z, w) = d_h(g(z), g(w))$  para todo  $w, z \in \mathbb{H}$ .

**Teorema 3.3.7.** *El conjunto  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  formado por todas las isometría de  $\mathbb{H}$  con la operación composición de funciones es un grupo.*

**Teorema 3.3.8.** *Los elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$  son isometría del plano hiperbólico.*

*Demostración.* Consideremos una curva diferenciable  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , tal que  $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$  y  $T$  una transformación de Möbius de  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Basta probar que la longitud hiperbólica de las curvas  $\gamma$  y  $T \circ \gamma$  son la misma, es decir,  $\ell_h(\gamma) = \ell_h(T \circ \gamma)$ . Usando la definición, la longitud hiperbólica de la curva  $T \circ \gamma$  es

$$\ell_h(T \circ \gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} T(\gamma(t)) \right\|_h dt. \quad (3.16)$$

Por otro lado, tenemos que la derivada compleja de la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az + d}{cz + d}$  es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} T(z) &= \frac{a(cz + d) - c(az + d)}{(cz + d)^2} = \frac{acz + ad - acz - cb}{(cz + d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2}, \\ &= \frac{1}{(cz + d)^2}. \end{aligned}$$

Ahora, recordemos que la parte imaginaria de  $T(z)$  está dada mediante la expresión  $\text{Im}(T(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$ . De la ecuación (3.4) y la regla de la cadena se obtiene que la

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.3. GEODÉSICAS E ISOMETRÍAS DEL PLANO HIPERBÓLICO

norma hiperbólica del vector  $\frac{d}{dt}T(\gamma(t))$  es igual a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{d}{dt}T(\gamma(t)) \right\|_h &= \frac{\left\| \frac{d}{dt}T(\gamma(t)) \right\|_e}{\operatorname{Im}(T(\gamma(t)))} = \frac{\left\| \frac{d}{dz}T(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right\|_e}{\operatorname{Im}(T(\gamma(t)))}, \\
 &= \frac{|c\gamma(t) + d|^2}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} \left\| \frac{1}{(c\gamma(t) + d)^2} \gamma'(t) \right\|_e, \\
 &= \frac{|c\gamma(t) + d|^2}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} \left\| \frac{(c\overline{\gamma(t)} + d)^2}{|c\gamma(t) + d|^4} \gamma'(t) \right\|_e, \\
 &= \frac{|c\gamma(t) + d|^2}{\operatorname{Im}(\gamma(t)) |c\gamma(t) + d|^4} \left\| (c\overline{\gamma(t)} + d)^2 \gamma'(t) \right\|_e, \\
 &= \frac{\left\| (c\overline{\gamma(t)} + d)^2 \gamma'(t) \right\|_e}{\operatorname{Im}(\gamma(t)) |c\gamma(t) + d|^2}, \\
 &= \frac{\left\| (c\overline{\gamma(t)} + d)^2 \right\|_e \left\| \gamma'(t) \right\|_e}{\operatorname{Im}(\gamma(t)) |c\gamma(t) + d|^2} = \frac{|(c\overline{\gamma(t)} + d)|^2 \left\| \gamma'(t) \right\|_e}{\operatorname{Im}(\gamma(t)) |c\gamma(t) + d|^2}, \\
 &= \frac{|(c\gamma(t) + d)|^2 \left\| \gamma'(t) \right\|_e}{\operatorname{Im}(\gamma(t)) |c\gamma(t) + d|^2} = \frac{\left\| \gamma'(t) \right\|_e}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} = \|\gamma(t)\|_h.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.16) se tiene que

$$\ell_h(T \circ \gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt}T(\gamma(t)) \right\|_h dt = \int_a^b \|\gamma(t)\|_h dt = \ell_h(\gamma).$$

□

**Teorema 3.3.9.** *Las geodésicas del plano hiperbólico son (trozos) segmentos de círculos ortogonales al eje real, en otras palabras, las geodésicas son segmentos de semi rectas euclidianas en  $\mathbb{H}$  ortogonales al eje real o, arcos (segmentos) de semi circunferencias con centro el eje real.*

*Demostración.* Consideremos puntos distintos  $z_1 \neq z_2$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ . Probemos que existe una (geodésica) curva diferenciable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  con extremos  $z_1$  y  $z_2$ , tal que  $\rho(z_1, z_2) = \ell_h(\gamma)$  y, dicha geodésica es un segmento de línea recta ortogonal al eje real o, es un arco de semi circunferencia con centro en el eje real. Debemos estudiar los siguientes dos casos.

*Caso 1.* Los puntos  $z_1$  y  $z_2$  están sobre el eje imaginario, es decir  $z_1 = iy_1$  y  $z_2 = iy_2$  tal que  $y_2 > y_1$ . Del Ejemplo 3.1.10 se sigue que la curva  $\beta : [\ln(y_1), \ln(y_2)] \rightarrow \mathbb{H}$ , definida mediante

$$\beta(t) = i \exp(t),$$

realiza la distancia hiperbólica entre los puntos  $z_1$  y  $z_2$  i.e.,  $\rho(z_1, z_2) = \ell(\beta)$ . Además,  $\beta$  es un segmento de línea recta ortogonal (perpendicular) al eje real.

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.3. GEODÉSICAS E ISOMETRÍAS DEL PLANO HIPERBÓLICO

*Caso 2.* Supongamos que los elementos  $z_1$  y  $z_2$  son puntos arbitrarios en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  tal que alguno de ellos no está sobre el eje imaginario. Denotemos mediante  $C$  al círculo ortogonal al eje real que pasa por los puntos  $z_1$  y  $z_2$ , del Teorema 3.3.6 existe una transformación de Möbius  $T$  en  $PSL(2, \mathbb{R})$  que envía el círculo  $C$  sobre el eje real imaginario, nótese que  $T(z_1)$  y  $T(z_2)$  están sobre el eje imaginario. Recordemos que los elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$  son isometrías de  $\mathbb{H}$  (véase Teorema 3.3.8), entonces

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(T(z_1), T(z_2)). \quad (3.17)$$

Por otro lado, del caso 1 se sigue que  $\beta$  el segmento de línea recta con extremos  $T(z_1)$  y  $T(z_2)$  satisface

$$\rho(T(z_1), T(z_2)) = \ell_h(\beta). \quad (3.18)$$

Dado que  $\ell_h(\beta) = \ell_h(T^{-1} \circ \beta)$ , entonces de las ecuaciones (3.17) y (3.18) se sigue que

$$\rho(z_1, z_2) = \ell_h(T^{-1} \circ \beta),$$

lo cual implica que la distancia hiperbólica la realiza el arco del círculo ortogonal  $C$  cuyos extremos son  $z_1$  y  $z_2$ . □

**Definición 3.3.10.** Para cualesquiera dos puntos  $z, w \in \mathbb{H}$ , denotaremos mediante  $[z, w]$  a la única geodésica con extremos  $z$  y  $w$ .

**Teorema 3.3.11.** Dados los puntos  $z \neq w \in \mathbb{H}$ , entonces  $\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w)$  si y solo si  $v \in [z, w]$ .

**Teorema 3.3.12.** Las isometrías del plano hiperbólico envía geodésicas en geodésicas.

*Demostración.* Consideremos la isometría  $\phi$  y los puntos distintos  $z$  y  $w$  en el plano hiperbólico. Veamos que  $\phi([z, w]) = [\phi(z), \phi(w)]$ . Del teorema anterior  $\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w)$  si y solo si  $v \in [z, w]$ , como  $\phi$  es isometría  $\rho(\phi(z), \phi(w)) = \rho(\phi(z), \phi(v)) + \rho(\phi(v), \phi(w))$  si y solo si  $\phi(v) \in [\phi(z), \phi(w)]$ . □

Anteriormente probamos que los elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$  son isometrías del plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  (véase Teorema 3.3.8). Sin embargo, hay otras isometrías simetrías del plano hiperbólico.

**Teorema 3.3.13.** La reflexión con respecto al eje imaginario  $T(z) = -\bar{z}$  también es una isometría del plano hiperbólico.

*Demostración.* Consideremos la curva diferenciable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , tal que  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ . Basta probar que las longitudes hiperbólicas de las curvas  $\gamma$  y  $T \circ \gamma$  coinciden. Notemos que si  $z = x + iy$  entonces  $T(x + iy) = -x + iy$ , entonces  $\bar{\gamma}(t) := T \circ \gamma(t) = -x(t) + iy(t)$  y  $\bar{\gamma}'(t) = -x'(t) + y'(t)$ . Así,

$$\ell_h(\bar{\gamma}) = \int_a^b \frac{\sqrt{(-x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = \ell_h(\gamma).$$

□



CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.3. GEODÉSICAS E ISOMETRÍAS DEL PLANO HIPERBÓLICO

Nótese que la función  $f(z) = -\bar{z}$  también envía los círculos ortogonales sobre círculos ortogonales.

**Teorema 3.3.14.** *El grupo  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  está generado por los elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$  y la transformación  $z \rightarrow -\bar{z}$ , en otras palabras, cualquier isometría del plano hiperbólico es un elemento de  $PSL(2, \mathbb{R})$  o es de la forma  $\phi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$ , tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .*

*Demostración.* Consideremos  $\phi$  una isometría del plano hiperbólico. Del Teorema 3.3.12 se sigue que  $\phi$  preserva geodésicas, entonces la imagen del eje imaginario real  $I$  bajo  $\phi$  es círculo ortogonal, i.e.,  $\phi(I)$  es un círculo ortogonal. Dado que  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa sobre los círculos ortogonales, entonces existe un elemento  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  tal que  $T \circ \phi(I) = I$ . Ahora, consideramos la homotecia  $H(z) = Kz$ , para algún  $k > 0$ , y si es necesario también tomamos la función  $f(z) = \frac{-1}{z}$ , tal que la composición  $f \circ H \circ T \circ \phi$  fija  $I$ . Denotemos mediante  $g = f \circ H \circ T$

Tomemos el elemento  $z = x + iy \in \mathbb{H}$  y denotemos mediante  $g \circ \phi(z) = u + iv$ , entonces para cada  $k > 0$  se tiene que

$$\rho(z, ki) = \rho(g \circ \phi(z), g \circ \phi(it)) = \rho(u + vi, ik)$$

Del lema 3.4.1 se sigue que

$$\frac{|ik - (u + vi)|^2}{2\text{Im}(ik)\text{Im}(u + vi)} = \frac{|ik - z|^2}{2\text{Im}(ik)\text{Im}(z)}.$$

Lo cual implica

$$\frac{u^2 + (k - v)^2}{2kv} = \frac{x^2 + (k - y)^2}{2ky}.$$

De esta igualdad obtenemos que

$$y(u^2 + (k - v)^2) = v(x^2 + (k - y)^2).$$

Como  $k > 0$ , dividimos en ambos lados de la anterior ecuación entre  $k^2$  y tomamos el límite cuando  $k$  tiende a infinito, entonces obtenemos  $y = v$  y  $u^2 = x^2$ . Como las isometrías son funciones (biyectivas) continuas y las funciones continuas envían conexos en conexos, entonces  $T \circ \phi(z) = z$  o  $T \circ \phi(z) = \bar{z}$ . Tomando la composición  $T^{-1} \circ T \circ \phi$  concluimos que  $\phi$  es un elemento de  $PSL(2, \mathbb{R})$  o es de la forma  $\phi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$ , tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ . □

### 3.3.1. Problemas

**Problema 3.3.15.** *Consideremos  $\phi$  una isometría del plano hiperbólico, prueba que existe un elemento  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  tal que la composición  $T \circ \phi$  fija el eje imaginario real.*

**Problema 3.3.16.** Prueba el Teorema 3.3.7.

**Problema 3.3.17.** Prueba el Teorema 3.3.11.

**Problema 3.3.18.** Prueba que la función  $f(z) = -\bar{z}$  envía círculos ortogonales en círculos ortogonales.

**Problema 3.3.19.** Considere un espacio métrico  $(X, d)^5$  y el conjunto  $\text{Isom}(X)$  formado por todas las isometrías biyectivas de  $X$  en sí mismo es un grupo con la operación composición.

**Problema 3.3.20.** Dado  $C$  un círculo ortogonal al eje real, construir un elemento  $T$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  tal que  $T$  fije los puntos de  $C$ .

**Problema 3.3.21.** Consideremos  $\phi$  una isometría del plano hiperbólico, prueba que existe un elemento  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  tal que la composición  $T \circ \phi$  fija el eje imaginario real.

## 3.4. Topología generada por la distancia hiperbólica y fórmula de la distancia.

A partir de la métrica hiperbólica  $\rho$ , podemos definir la **bola hiperbólica** con centro  $z \in \mathbb{H}$  y radio  $r > 0$  como el conjunto

$$B_r^h(z) = \{w \in \mathbb{H} : \rho(w, z) < r\}.$$

Sabemos que el conjunto formado por las bolas hiperbólicas

$$\{B_r^h(z) : \forall z \in \mathbb{H}, \forall r > 0\}$$

es una base para la topología estándar  $\tau_\rho$  de  $\mathbb{H}$ . Ahora probaremos que la topología  $\tau_\rho$  es equivalente a la topología del subespacio del plano hiperbólico  $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ .

Recordemos que las funciones **seno hiperbólico**, **cose hiperbólico** y **tangente hiperbólico**, denotadas mediante  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$ , respectivamente, están definidas mediante

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

donde  $x$  es cualquier real positivo.

**Lema 3.4.1.** Dados cualesquiera dos puntos  $z, w$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , entonces

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)}. \quad (3.19)$$

---

<sup>5</sup> $d$  es una función distancia.

### 3.4. TOPOLOGÍA GENERAL DEL PLANO HIPERBÓLICO DE FÓRMULA DE LA DISTANCIA. LOVACHEVSKY

*Demostración.* Tomemos los puntos  $z, w$  en el plano hiperbólico. Si  $z = i$  y  $w = ki$  tal que  $k > 1$ . Usando el ejemplo 3.1.10 se sigue que

$$\begin{aligned}
 \cosh \rho(z, w) &= \cosh \rho(i, ik) = \cosh(\ln k) = \frac{e^{\ln k} + e^{-\ln k}}{2} = \frac{k + \frac{1}{k}}{2} = \frac{k^2 + 1}{2k}, \\
 &= \frac{k^2 - 2k + 1 + 2k}{2k} = \frac{(k-1)^2 + 2k}{2k} = \frac{(k-1)^2}{2k} + 1, \\
 &= \frac{|i|^2 |1-k|^2}{2k} + 1 = \frac{|i(1-k)|^2}{2k} + 1 = \frac{|i-ik|^2}{2\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(ik)} + 1, \\
 &= \cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Contrariamente, si los elementos  $z$  y  $w$  son puntos arbitrarios en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , del Teorema 3.3.6 existe  $T$  una transformación de Möbius en  $PSL(2, \mathbb{R})$  que envía a  $z$  y  $w$  en  $i$  y  $ik$  (respectivamente) tal que  $k > 0$ . Dado que  $T$  es una isometría del plano hiperbólico entonces

$$\cosh \rho(z, w) = \cosh \rho(T(z), T(w)) = \cosh \rho(i, ik) = 1 + \frac{|i-ik|^2}{2\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(ik)}.$$

Del lema se sigue que

$$\frac{|i-ik|^2}{2\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(ik)} = \frac{|T^{-1}(i) - T^{-1}(ik)|^2}{2\operatorname{Im}(T^{-1}(i))\operatorname{Im}(T^{-1}(ik))} = \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

Finalmente, reemplazmos este término en la anterior igualdad y obtenemos que

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

□

**Teorema 3.4.2.** *El conjunto de los puntos  $z = x + iy$  en  $\mathbb{H}$ , que equidistan hiperbólicamente una distancia  $r$  de un punto  $z_0 = x_0 + iy_0$ , están determinados por la siguiente ecuación*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh r)^2 = y_0^2 \sinh^2 r,$$

*es decir, constituyen un círculo euclidiano*

$$C = \{x + iy \in \mathbb{H} : (x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh r)^2 = y_0^2 \sinh^2 r\}.$$

### 3.4. TOPOLOGÍA GENERADA POR LA MÉTRICA HIPERBÓLICA DE FÓRMULA DE LA DISTANCIA. LOVACHEVSKY

*Demostración.* Consideremos el conjunto  $C = \{z = x + iy \in \mathbb{H} : \rho(z, z_0) = r\}$  para algún punto  $z_0 = x_0 + iy_0$  en el plano hiperbólico y para algún valor real positivo  $r > 0$ . Para cualquier  $z \in C$ , del lema anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\cosh \rho(z, z_0) &= \cosh r = 1 + \frac{|z - z_0|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z_0)} = 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2yy_0}, \\ \cosh r &= \frac{2yy_0 + (x - x_0)^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2}{2yy_0} = \frac{(x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2}{2yy_0}. \\ 2yy_0 \cosh r &= (x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2.\end{aligned}$$

Recordemos que  $\cosh^2 r - \sinh^2 r = 1$ , entonces la anterior igualdad se reescribe como

$$\begin{aligned}2yy_0 \cosh r &= (x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2(\cosh^2 r - \sinh^2 r), \\ 2yy_0 \cosh r &= (x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2 \cosh^2 r - y_0^2 \sinh^2 r,\end{aligned}$$

Ahora, completamos cuadrados y obtenemos

$$\begin{aligned}y_0^2 \sinh^2 r &= (x - x_0)^2 + y^2 - 2yy_0 \cosh r + y_0^2 \cosh^2 r, \\ y_0^2 \sinh^2 r &= (x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh r)^2.\end{aligned}$$

□

Del Teorema 3.4.2 deducimos fácilmente que la bola *hiperbólica*  $B^h(z, r)$  con centro  $z \in \mathbb{H}$  y radio  $r > 0$  es el conjunto

$$B^h(z, r) = \{x + iy \in \mathbb{H} : (x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh r)^2 < y_0^2 \sinh^2 r\},$$

el cual coincide con la bola euclidiana con centro  $(x_0, y_0 \cosh r)$  y radio  $y_0^2 \sinh^2 r$ .

**Corolario 3.4.3.** *La topología en  $\mathbb{H}$  definida por la métrica hiperbólica  $\rho$  es equivalente a la topología del subespacio de  $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ .*

De la expresión (3.19) podemos obtener una fórmula que nos permita calcular la distancia hiperbólica entre cualesquiera dos puntos  $z$  y  $w$  de  $\mathbb{H}$ . Recordemos que el dominio de la función coseno hiperbólico inversa  $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , es el intervalo  $[1, \infty)$ . De la ecuación (3.19) podemos deducir que  $\cosh \rho(z, w) \geq 1$ , para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{H}$ , entonces

$$\begin{aligned}\rho(z, w) &= \cosh^{-1}(\cosh \rho(z, w)) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}\right), \\ &= \ln\left(1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} + \sqrt{\left(1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}\right)^2 - 1}\right).\end{aligned}\tag{3.21}$$

### 3.4. ~~COPIA GENERALIZADA POR LA HIPERBÓLICA DE~~ FÓRMULA DE LA DISTANCIA. LOVACHEVSKY

Esta última expresión podríamos pensar que es poco optima al momento de realizar un calculo rápido. Por tal motivo, probaremos la siguiente expresión equivalente a la distancia hiperbólica entre dos puntos  $z, w \in \mathbb{H}$

$$\rho(z, w) = \ln \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) \quad (3.22)$$

para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{H}$ .

**Lema 3.4.4.** *Dados cualesquiera dos puntos  $z, w$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , entonces*

$$\tanh \left( \frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}. \quad (3.23)$$

*Demostración.* Tomemos los puntos  $z, w$  en el plano hiperbólico. Si  $z = i$  y  $w = ki$  tal que  $k > 1$ . Usando el ejemplo 3.1.10 se sigue que

$$\begin{aligned} \tanh \left( \frac{1}{2} \rho(z, w) \right) &= \tanh \left( \frac{1}{2} \rho(i, ik) \right) = \tanh \left( \frac{1}{2} \ln k \right) = \frac{e^{\ln k^{1/2}} - e^{\ln k^{-1/2}}}{e^{\ln k^{1/2}} + e^{\ln k^{-1/2}}}, \\ &= \frac{k^{1/2} - k^{-1/2}}{k^{1/2} + k^{-1/2}} = \frac{k - 1}{k + 1} = \frac{|i - ik|}{|i + ik|} = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}, \end{aligned}$$

Contrariamente, si los elementos  $z$  y  $w$  son puntos arbitrarios en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , del Teorema 3.3.6 existe  $T$  una transformación de Möbius en  $PSL(2, \mathbb{R})$  que envía a  $z$  y  $w$  en  $i$  y  $ik$  (respectivamente) tal que  $k > 0$ . Dado que  $T$  es una isometría del plano hiperbólico entonces

$$\tanh \left( \frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \tanh \left( \frac{1}{2} \rho(T(z), T(w)) \right) = \tanh \left( \frac{1}{2} \rho(i, ik) \right) = \frac{|i - ik|}{|i + ik|}.$$

Del lema anterior se sigue que

$$\frac{|i - ik|}{|i + ik|} = \frac{|T^{-1}(i) - T^{-1}(ik)|}{|T^{-1}(i) - \overline{T^{-1}(ik)}|} = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

Finalmente, reemplazmos este término en la anterior igualdad y obtenemos que

$$\tanh \left( \frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

□

Así, evaluamos el valor de la ecuación (3.23) en la función tangente hiperbólica inversa  $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  siempre que  $|x| < 1$  y, obtenemos

$$\frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}}{1 - \frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right).$$

### 3.4.1. Problemas

**Problema 3.4.5.** Consideremos lo elementos  $z$  y  $w$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , prueba la igualdad

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2(Im(z)Im(w))^{1/2}}.$$

**Problema 3.4.6.** Consideremos lo elementos  $z$  y  $w$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , prueba la igualdad

$$\cosh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(Im(z)Im(w))^{1/2}}.$$

## 3.5. Ángulos y Área hiperbólica.

En  $\mathbb{R}^2$  el área euclidiana del paralelogramo  $P$  formado por la base canónica  $e_1$  y  $e_2$  es

$$A(P) = \|e_1\|_e \cdot \|e_2\|_e \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \|e_1\|_e \cdot \|e_2\|_e,$$

siendo  $\frac{\pi}{2}$  el valor del ángulo formado por los vectores de la base canónica. En el plano tangente  $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$  ésta área se denota mediante  $dx dy$  y se define el área del subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^2$  mediante la integral

$$A(K) = \int_K dx dy,$$

si existe.

En el espacio tangente  $T_z\mathbb{H}$ , con  $z = x + iy$ , definimos el **área hiperbólica** del paralelogramo  $P$  formado por la base canónica  $e_1$  y  $e_2$  mediante

$$A_h(P) := \|e_1\|_h \cdot \|e_2\|_h \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\|e_1\|_e \cdot \|e_2\|_e}{(Im(z))^2} = \frac{\|e_1\|_e \cdot \|e_2\|_e}{y^2},$$

siendo  $\frac{\pi}{2}$  el valor del ángulo formado por los vectores  $e_1$  y  $e_2$ . Así, definimos el **área hiperbólica** del subconjunto  $K \subset \mathbb{H}$  mediante la integral

$$A_h(K) = \int_K \frac{dx dy}{y},$$

si existe.

**Ejemplo 3.5.1.** Tomemos el cuadrado  $K = [0, 1] \times [1, 2]$  en el plano hiperbólico. Del Teorema de Fubini se sigue que el área hiperbólica de  $K$  es

$$\begin{aligned} A_h(K) &= \int_K \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^1 \int_1^2 \frac{dy dx}{y^2} = \int_0^1 \left. \frac{-1}{y} \right|_{y=1}^{y=2} dx, \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Recordemos el Teorema de Cambio de Variables para integrales

**Teorema 3.5.2.** *Consideremos las regiones  $D$  y  $D^*$  en  $\mathbb{R}^2$  y una aplicación biyectiva  $T : D^* \rightarrow D$  de clase  $C^1$ , definida mediante*

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)).$$

*Entonces para cualquier función integrable  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  se satisface*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

donde  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  es el determinante de la matriz Jacobiana asociada a la transformación  $T$ .

**Teorema 3.5.3.** *El área hiperbólica es invariante bajo elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$ . En otras palabras, si el área hiperbólica del subconjunto  $K \subset \mathbb{H}$  existe, entonces  $A(K) = A(T(K))$ , para cada  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ .*

*Demostración.* Tomemos la transformación  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  en  $PSL(2, \mathbb{R})$  y el subconjunto  $K \subset \mathbb{H}$ . Veamos que se tiene la igualdad  $A_h(K) = A_h(T(K))$ .

Dado el complejo  $z = u + wi \in K$ , la regla de asignación de transformación de Möbius  $T$  la podemos reescribir mediante

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)).$$

Entonces el determinante de la matriz Jacobiana asociada a  $T$  en el punto  $z = (u, v)$  está dada mediante

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}. \quad (3.24)$$

Dado que la transformación  $T$  es holomorfa en el plano hiperbólico, entonces satisface las condiciones e Cauchy-Riemann, este hecho implica que la ecuación (3.24) se reescriba como sigue

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & -\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right)^2. \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + i \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right|^2 = \left| \frac{dT}{dz}(z) \right|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ahora, consideremos la función integrable  $f : T(K) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $w = x + iy \mapsto \frac{1}{(\operatorname{Im}(w))^2} = \frac{1}{y^2}$ . Entonces del Teorema de Cambio de Variables para integrales se sigue que

$$\begin{aligned} A_h(T(K)) &= \int_{T(K)} \frac{dx dy}{y^2} = \int_K \frac{1}{(\operatorname{Im}(T(z)))^2} \frac{1}{|cz + d|^4} du dv, \\ &= \int_K \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}\right)^2} \frac{1}{|cz + d|^4} du dv = \int_K \frac{1}{v^2} du dv = A_h(K). \end{aligned}$$

□

### 3.5.1. Problemas

**Problema 3.5.4.** Calcule el área hiperbólica del círculo euclidiano con centro en  $2i$  y radio 1.

**Problema 3.5.5.** Calcule el área hiperbólica de la región  $\{z \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}(z)| < \frac{1}{2} \text{ y } |z| > 1\}$ <sup>6</sup>.

**Problema 3.5.6.** Pruebe que si las curvas  $\alpha$  y  $\gamma$  son parametrizaciones, entonces  $\ell(\gamma) = \ell(\sigma)$ . *Mejorar redacción*

### 3.5.2. Polígonos hiperbólicos

Un círculo ortogonal  $C \subset \mathbb{H}$  define (divide) al plano en dos conjuntos  $H_1$  y  $H_2$  los cuales son llamados **semi espacios del plano hiperbólico**  $\mathbb{H}$ . Los semi espacios  $H_1$  y  $H_2$  son disjuntos.

Diremos que tres puntos distintos  $z_1, z_2$  y  $z_3$  del plano hiperbólico son **colineales** si existe un círculo ortogonal que los atraviese.

Tomemos los círculos ortogonales  $\gamma_1(t)$  y  $\gamma_2(t)$  que se intersectan en el punto  $z \in \mathbb{H}$ , entonces existe un valor real  $t$  tal que  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = z$ . Los vectores tangentes  $\gamma_1'(t)$  y  $\gamma_2'(t)$  en el espacio tangente  $T_z \mathbb{H}$  definen un ángulo, el cual llamaremos el **ángulo de las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en el punto  $z$**  (véase Figura 3.4).

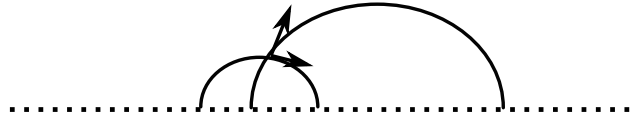


Figura 3.4: Ángulo entre dos curvas.

Denotaremos mediante  $\hat{\mathbb{R}}$  a la recta real  $\mathbb{R}$  junto con el punto  $\infty$ .

---

<sup>6</sup>Esta región es conocida como la curva modular.



**Definición 3.5.7.** Tomemos tres puntos distintos  $z_1, z_2$  y  $z_3$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H} \cup \hat{\mathbb{R}}$ . Denotamos mediante  $A_i$  al semi espacio que define el círculo que pasa por los puntos  $z_j$  y  $z_k$  que contiene al punto  $z_i$ , con  $i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\}$ . El triángulo hiperbólico  $\Delta$  con **vértices**  $z_1, z_2$  y  $z_3$  es el conjunto  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ . Los **lados** del triángulo  $\Delta$  son las geodésicas  $[z_1, z_2]$ ,  $[z_2, z_3]$  y  $[z_3, z_1]$ . Los **ángulos**  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  del triángulo son los que definen los lados del triángulo en los puntos  $z_1, z_2$  y  $z_3$ , respectivamente.

Los triángulos hiperbólicos puede ser que tenga tres, dos, uno o ningún vértice en  $\hat{\mathbb{R}}$  (véase Figura 3.5).

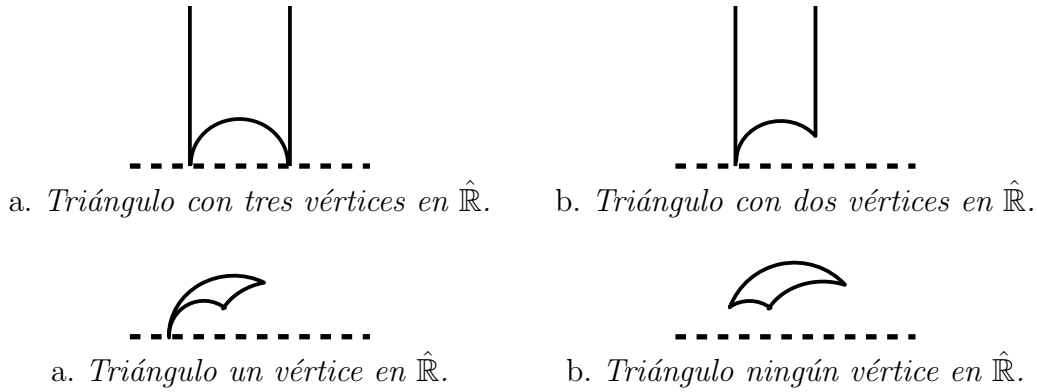


Figura 3.5: Triángulos hiperbólico.

**Teorema 3.5.8** (Gauss-Bonnet). Dado el triángulo hiperbólico  $\Delta$  cuyos ángulos miden  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , entonces el área hiperbólica de dicho triángulo es

$$A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

*Demostración.* Tomemos el triángulo hiperbólico  $T$  y estudiemos el caso: uno de sus vértices está sobre  $\hat{\mathbb{R}}$ , este hecho implica que el ángulo  $\gamma$  es tiene medida 0. Mediante una transformación de Mobius  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  enviamos los vértices de  $\Delta$  que están en  $\mathbb{H}$  sobre un círculo unitario. Si es necesario usamos  $z \rightarrow \frac{-1}{z}$  tal que  $T$  envíe el tercer vértice del triángulo hiperbólico  $\Delta$  en  $\infty$  (véase 3.6). Recordemos que la transformación  $T$  deja invariante el área del triángulo  $\Delta$ , es decir,  $A(\Delta) = A(T(\Delta))$ . El área hiperbólica del triángulo  $T(\Delta)$  es

$$\begin{aligned} A(T(\Delta)) &= \int_a^b \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dydx}{y^2} = \int_a^b \left( \frac{-1}{y} \Big|_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\infty} \right) dx = \int_a^b \left( \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx, \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Nótese que los ángulos  $\angle A0a$  y  $\angle B0b$  son congruentes a los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Entonces realizamos la sustitución trigonométrica  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $\sin \theta = x$  y  $dx = \cos \theta d\theta$ . Entonces

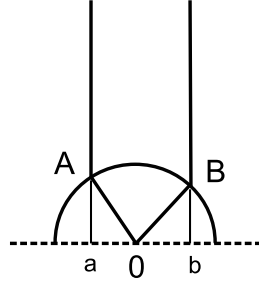


Figura 3.6: Triángulo hiperbólico con vértice  $\infty$ .

la anterior integral es igual a

$$A(T(\Delta)) = \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \pi - \beta - \alpha.$$

Ahora, supongamos que el triángulo  $\Delta$  no tiene vértices sobre  $\mathbb{R}$ . Denotemos sus vértices mediante  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Trazamos el círculo ortogonal  $L$  que pasa por los puntos  $A$  y  $C$  y denotamos mediante  $x$  el extremo de  $C$  tal que  $x < \text{Re}(A)$  y  $x < \text{Re}(C)$  (véase Figura 3.7).

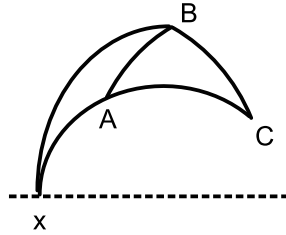


Figura 3.7: Triángulo hiperbólico con vértice sobre  $\mathbb{H}$ .

Entonces el área del triángulo  $\Delta$  es

$$\begin{aligned} A(\Delta) &= A(\Delta(xBC)) - A(\Delta(xAB)), \\ &= \pi - (m(\angle xCB) + m(\angle(xBC))) - (\pi - (m(\angle xAB) + m(\angle xBA))), \\ &= 2\pi - m(\angle xBC) + m(\angle xBA) - m(\angle ACB) + m(\angle xAB), \\ &= 2\pi - m(\angle ABC) - m(\angle ACB) - (\pi + m(\angle BAC)), \\ &= \pi - m(\angle ABC) - m(\angle ACB) - m(\angle BAC). \end{aligned}$$

Los dos casos restantes son consecuencias de los anteriores.  $\square$

**Ejemplo 3.5.9.** El área del triángulo hiperbólico con vértices  $-1$ ,  $1$  y  $\infty$  es  $\pi$ . Así mismo el área del triángulo hiperbólico con vértices  $-15$ ,  $15$  y  $100$  es  $\pi$ .

Podemos extender la definición de triángul hiperbólico a un polígono hiperbólico.

Un **polígono hiperbólico**  $P$  asociado a los  $n$  puntos diferentes  $z_1, \dots, z_n$  en  $\mathbb{H} \cup \hat{\mathbb{R}}$  es el interior de la curva cerrada  $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \dots \cup [z_n, z_1]$ . El triángulo hiperbólico  $\Delta$  con **vértices**  $z_1, z_2$  y  $z_3$  es el conjunto  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ . Los **lados** del polígono  $P$  son las geodésicas  $[z_1, z_2], \dots, [z_{n-1}, z_n], [z_n, z_1]$ . Los **ángulos**  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  del polígono son los que definen los lados del polígono en los puntos  $z_1, \dots, z_n$ , respectivamente.

**Teorema 3.5.10.** *Dado un polígono hiperbólico  $P$  de  $n$  lados cuyos ángulos son  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , entonces su área hiperbólica es*

$$A(P) = (n-2)\pi - \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right).$$

*Demostración.* Tomemos el vértice  $z_1$  del polígono hiperbólico  $P$ , entonces trazamos las geodésicas  $[z_1, z_i]$  con  $i \in \{3, \dots, n-1\}$  y así, descomponemos a  $P$  en  $n-2$  triángulos hiperbólicos  $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-2}$ . El área del polígono  $P$  es la suma de las áreas de los  $n-2$  triángulos

$$A(P) = \sum_{i=1}^{n-2} A(\Delta_i).$$

Nótese que los triángulos tienen un vértice en común y los triángulos  $\Delta_i$  y  $\Delta_{i+1}$  tienen un vértice en común, con  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ . Del teorema de Gauss-Bonnet se sigue que

$$A(P) = (n-2)\pi - \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right).$$

□

En geometría euclidiana llamamos rectángulo a un polígono de cuatro lados cuyos ángulos miden  $\frac{\pi}{2}$ . En la geometría hiperbólica estos objetos no existen.

**Corolario 3.5.11.** *No existen rectángulos hiperbólicos.*

*Demostración.* Supongamos que existe un rectángulo hiperbólico  $P$ , entonces

$$A(P) = (4-2)\pi - 4\frac{\pi}{2} = 0.$$

Esta igualdad implica que los vértices de  $P$  son colineales.

□

### 3.5.3. Trigonometría hiperbólica

**Teorema 3.5.12.** *Para cualesquiera elementos  $z, w \in \mathbb{H}$  se satiface:*

$$1. \quad \rho(z, w) = \ln \left( \frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} \right).$$

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.5. ÁNGULOS Y ÁREA HIPERBÓLICA. LOVACHEVSKY

---

$$2. \cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

$$3. \sinh(\tfrac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z-w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}.$$

$$4. \cosh(\tfrac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z-\bar{w}|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}.$$

$$5. \tanh(\tfrac{1}{2}\rho(z, w)) = \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|.$$

El término clásico *ángulo del paralelismo* es usado para las relaciones trigonométricas en un triángulo hiperbólico  $\triangle$  con ángulos de medida  $\alpha, 0, \frac{\pi}{2}$ . En el triángulo  $\triangle$  hay un lado de medida hiperbólica finita (véase Figura [Elaborar Figura](#))

**Teorema 3.5.13.** *Cosideremos el triángulo hiperbólico  $\triangle$  con ángulos  $0, \frac{\pi}{2}, \alpha \neq 0$ . Denotemos mediante  $b$  la medida del lado de  $\triangle$  con extremos los vértices cuyos ángulos son  $\alpha$  y  $\frac{\pi}{2}$ . Entonces*

$$1. \sinh(b) \tan(\alpha) = 1.$$

$$2. \cosh(b) \sin(\alpha) = 1.$$

$$3. \tanh(b) \sec(\alpha) = 1.$$

*Demostración.* **Probaremos la igual descrita en 2.** Existe un elemento  $T$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  que envía el lado de longitud finita del triángulo  $\triangle$  sobre la curva  $x^2 + y^2 = 1$  y los vértices de  $\triangle$  son enviados en el conjunto  $\{i, x_0 + y_0i, \infty\}$  (véase Figura 3.8).

De las relaciones trigonométricas se sigue  $y_0 = \sin(\alpha)$ . Del Lema 3.4.1 se sigue

$$\begin{aligned} \cosh(b) &= \cosh(\rho(i, x_0 + y_0i)) = 1 + \frac{|i - (x_0 + y_0i)|}{2\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(x_0 + y_0i)}, \\ &= \frac{2y_0 + x_0^2 + (1 - y_0)^2}{2y_0} = \frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\sin(\alpha) \cosh(b) = 1.$$

**Probaremos la igualdad descrita en 1.** Recordemos que  $\sinh(b) = 2 \sinh(\frac{b}{2}) \cosh(\frac{b}{2})$ . Del teorema 3.5.12 se sigue que

$$\begin{aligned} \sinh(b) &= 2 \frac{|i - (x_0 + y_0i)|}{2\sqrt{y_0}} \frac{|i - \overline{x_0 + y_0i}|}{2\sqrt{y_0}} = \frac{\sqrt{x_0^2 + (1 - y_0)^2} \sqrt{x_0^2 + (1 + y_0)^2}}{2y_0}, \\ &= \frac{\sqrt{2 - 2y_0} \sqrt{2 + 2y_0}}{2y_0} = \frac{\sqrt{4 - 4y_0^2}}{2y_0} = \frac{\sqrt{4x_0^2}}{2y_0}, \\ \sinh(b) \frac{y_0}{x_0} &= 1, \\ \sinh(b) \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} &= 1. \\ \sin(b) \tan(\alpha) &= 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

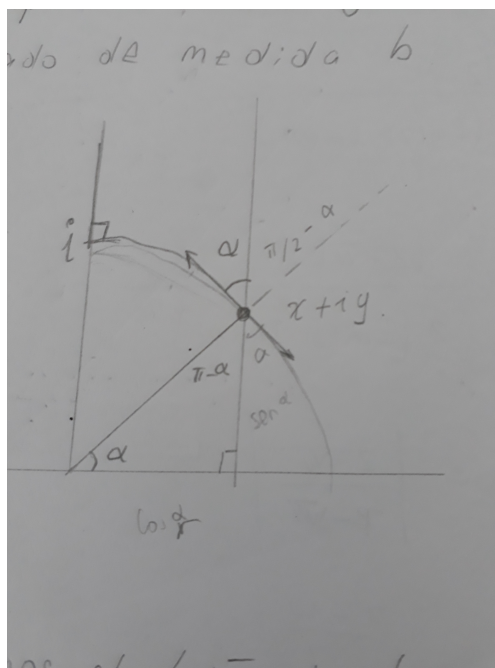


Figura 3.8: *Ángulo del paralelismo.*

La igual 3 se sigue de tomar el cociente entre las igualdades descritas en 1 y 2.  $\square$

Dado un triángulo euclidiano con vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  y lados opuestos  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente, entonces se tienen las relaciones

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos(A), \quad (3.28)$$

las cuales conocemos como la ley del seno y del coseno, respectivamente. En geometría hiperbólica también existen dichas leyes.

**Teorema 3.5.14.** *Consideremos el triángulo hiperbólico  $\triangle$  con ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  y lados opuestos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente. Entonces:*

1. (Regla del seno).  $\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$ .
2. (Regla del coseno I).  $\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma)$ .
3. (Regla del coseno II).  $\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)}$ .

**Observación 3.5.15.** *La regla del coseno II no tiene un análogo en la geometría euclidiana. En la geometría hiperbólica este caso implica que sis dos triángulos hiperbólico tienen los mismos ángulos, entonces existe una isometría que envía uno en el otro.*

**Corolario 3.5.16.** (*Pitágoras*) Si  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , entonces  $\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b)$ .

CAPÍTULO 3. EL PLANO HIPERBÓLICO  $\mathbb{H}$  O PLANO DE  
3.5. ÁNGULOS Y ÁREA HIPERBÓLICA. LOVACHEVSKY

---

*Demostración.* Usaremos el modelo del disco de Poincaré  $\Delta$  para probar el Teorema de seno I. Supongamos que  $C = 0$  y el vértice  $A$  está sobre el eje real positivo. (véase Figura [Elaborar dibujo](#)).

Del teorema 3.5.17 se sigue que

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\rho(0, A)\right) = \tanh\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{|0 - A|}{|1 - 0|} = |A| = A. \quad (3.29)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\rho(0, B)\right) = \tanh\left(\frac{a}{2}\right) = |0 - B| = |B|. \quad (3.30)$$

Además,  $c = \rho(A, B)$ , entonces

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(A, B)\right) = \frac{|A - B|^2}{(1 - |A|^2)(1 - |B|^2)}. \quad (3.31)$$

De la identidad  $\cosh(2x) = 2\sinh^2(x) + 1$  la igualdad 3.31 se reescribe como sigue

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= 2\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) + 1 \\ &= 2\frac{|A - B|^2}{(1 - |A|^2)(1 - |B|^2)} + 1 \end{aligned} \quad (3.32)$$

De esta última expresión se sigue que

$$|A - B|^2 = \frac{(\cosh(c) - 1)(1 - |A|^2)(1 - |B|^2)}{2}. \quad (3.33)$$

En el triángulo euclidiano con vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  se cumple la ley coseno

$$|B - A|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos(\gamma). \quad (3.34)$$

Sustituimos la igualdad 3.33 en la expresión anterior y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{(\cosh(c) - 1)(1 - |A|^2)(1 - |B|^2)}{2} &= |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos(\gamma), \\ \cosh(c)(1 - |A|^2)(1 - |B|^2) &= 2|A|^2 + 2|B|^2 - 4|A||B|\cos(\gamma) + (1 - |A|^2)(1 - |B|^2), \\ \cosh(c)(1 - |A|^2)(1 - |B|^2) &= |A|^2 + |B|^2 + |A|^2|B|^2 + 1 - 4|A||B|\cos(\gamma), \\ \cosh(c)(1 - |A|^2)(1 - |B|^2) &= (1 + |A|^2)(1 + |B|^2) - 4|A||B|\cos(\gamma). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Finalmente, sustituimos las relaciones 3.29 y 3.30 en la igualdad anterior y obtenemos

$$\begin{aligned} \cosh(c) \left(1 - \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right)\right) \left(1 - \tanh^2\left(\frac{b}{2}\right)\right) &= \left(1 + \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right)\right) \left(1 + \tanh^2\left(\frac{b}{2}\right)\right) \\ &\quad - 4 \tanh\left(\frac{a}{2}\right) \tanh\left(\frac{b}{2}\right) \cos(\gamma), \\ \frac{\cosh(c)}{\cosh^2\left(\frac{a}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{b}{2}\right)} &= \frac{(\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{a}{2}\right)) (\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{b}{2}\right))}{\cosh^2\left(\frac{a}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{b}{2}\right)} \\ &\quad - 4 \frac{\sinh\left(\frac{a}{2}\right) \cosh\left(\frac{b}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{2}\right) \cosh\left(\frac{b}{2}\right)} \cos(\gamma), \\ \cosh(c) &= \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma). \end{aligned} \tag{3.36}$$

**Ley del seno.** De la ley del coseno I tenemos que

$$\cos(\gamma) = \frac{\cosh(a) \cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a) \sinh(b)}. \tag{3.37}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad y obtenemos

$$\cos^2(\gamma) = \frac{\cosh^2(a) \cosh^2(b) - 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) + \cosh^2(c)}{\sinh^2(a) \sinh^2(b)} \tag{3.38}$$

De la identidad pitagórica  $\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma) = 1$  se sigue que

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2(\gamma) &= \frac{\cosh^2(a) \cosh^2(b) - 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) + \cosh^2(c)}{\sinh^2(a) \sinh^2(b)} \\ \sin^2(\gamma) &= 1 - \frac{\cosh^2(a) \cosh^2(b) - 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) + \cosh^2(c)}{\sinh^2(a) \sinh^2(b)} \\ \sin^2(\gamma) &= \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) - \cosh^2(a) \cosh^2(b) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(c)}{\sinh^2(a) \sinh^2(b)} \\ \sin^2(\gamma) &= \frac{1 - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c)}{\sinh^2(a) \sinh^2(b)} \end{aligned} \tag{3.39}$$

De esta última expresión se sigue

$$\frac{\sinh^2(c)}{\sin^2(\gamma)} = \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}{1 - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c)} \tag{3.40}$$

De la simetría de la ley del coseno se sigue que

$$\frac{\sinh^2(a)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}{1 - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c)} \tag{3.41}$$

y

$$\frac{\sinh^2(b)}{\sin^2(\beta)} = \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}{1 - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c)} \quad (3.42)$$

De estas últimas tres expresiones se sigue

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}. \quad (3.43)$$

□

**Teorema 3.5.17.** *Dados los elementos  $z, w$  en el disco de Poincaré  $\Delta$ , entonces*

1.  $\rho(0, z) = \ln \left( \frac{1+|z|}{1-|z|} \right).$
2.  $\ln \left( \frac{|1-z\bar{w}|+|z-w|}{|1-z\bar{w}|-|z-w|} \right).$
3.  $\sinh^2(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}.$
4.  $\cosh^2(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|1-z\bar{w}|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}.$
5.  $\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|}.$



# Capítulo 4

## Disco de Poincaré

### 4.1. Modelo del disco de Poincaré

**Definición 4.1.1.** El disco unitario  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  (véase Figura 4.1) provisto de la métrica riemanniana  $\mu$ , la cual asocia a cada punto  $z \in \Delta$  el producto escalar (interno)

$$z \mapsto \mu(z) := \frac{4\langle, \rangle}{(1 - |z|)^2} \quad (4.1)$$

en el espacio tangente  $T_z\Delta$ , es conocido como el **disco de Poincaré**.

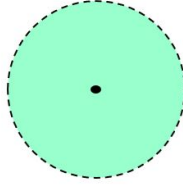


Figura 4.1: Disco unitario.

**Lema 4.1.2.** La correspondencia  $\mu$  es una métrica riemanniana.

*Demostración.* **Prueba pendiente**

□

A partir de la métrica riemanniana  $\mu$  definimos una manera de medir vectores (norma) en el espacio tangente  $T_z\Delta$ . Concretamente, la norma del vector  $u \in T_z\Delta$  está dada mediante

$$\|u\|_h := \sqrt{\langle u, u \rangle_h} = \frac{2\sqrt{\langle u, u \rangle_e}}{1 - |z|} = \frac{2\|u\|_e}{1 - |z|}. \quad (4.2)$$

**Definición 4.1.3.** Dada curva diferenciable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Delta$  tal que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , entonces la **longitud hiperbólica de  $\gamma$**  está dada mediante

#### 4.1. MODELO DEL DISCO DE POINCARÉ 4. DISCO DE POINCARÉ

$$\ell_{hip}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma(t)'\|_h dt = \int_a^b \frac{2\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{1 - x(t)^2 - y(t)^2} dt$$

La **distancia hiperbólica** entre dos puntos  $z$  y  $w$  del disco de Poincaré  $\Delta$ , la cual denotaremos mediante

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma} \{\ell_h(\gamma)\} \quad (4.3)$$

es el ínfimo de las longitudes hiperbólicas de las curvas derivables a trozos en  $\Delta$  con puntos finales  $z$  y  $w$ .

Así, tenemos una función distancia en el disco de Poincaré.

**Teorema 4.1.4.** La función  $\rho : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma} \{\ell_h(\gamma)\}$$

es una métrica, es decir, la función  $\rho$  satisface las siguientes propiedades:

- i. Para cada  $z, w \in \mathbb{H}$  se cumple  $0 \leq \rho(z, w) < \infty$ .
- ii. Dados los puntos  $z, w \in \mathbb{H}$ ,  $\rho(z, w) = 0$  si y solo si  $z = w$ .
- iii. Para cada  $z, w \in \mathbb{H}$  se cumple  $\rho(z, w) = \rho(w, z)$  (Simetría).
- iv. Para cada  $z, w, v$  se cumple  $\rho(z, w) \leq \rho(z, v) + \rho(v, w)$  (Desigualdad triangular).

*Demostración.* □

**Teorema 4.1.5.** Consideremos dos puntos  $z, w \in \Delta$ . Decimos que la distancia hiperbólica entre ellos está descrita mediante

$$\rho(z, w) = \log \left( \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right).$$

**Corolario 4.1.6.** Para cada  $z \in \Delta$  es satisface

$$\rho(0, z) = \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right).$$

**Proposición 4.1.7.** 1. Por cualquier par de puntos distintos de  $\Delta$ , existe una única recta hiperbólica por ellos.

2. Dos rectas hiperbólicas distintas se cortan en a lo más un punto en  $\Delta$ .

3. Dada una recta hiperbólica cualquiera y un punto fuera de ella en  $\Delta$  existe una infinidad de rectas hiperbólicas que pasan por el punto y no cortan a la recta dada en  $\Delta$ .

#### 4.1. MODELO DEL DISCO DE POINCARÉ 4. DISCO DE POINCARÉ

**Lema 4.1.8.** Una transformación del plano Euclidiano preserva distancia entre puntos si y sólo si puede obtenerse a partir de un número finito de reflexiones en líneas rectas de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 4.1.9.** Consideremos un círculo euclidiano  $C \subset \mathbb{C}$  con centro en  $c$  y radio  $\rho$ , la *inversión* en él es una transformación

$$T_c : \mathbb{C} - \{c\} \rightarrow \mathbb{C} - \{c\},$$

$$z \mapsto \frac{1}{z} = w,$$

donde  $w \in \mathbb{C} - \{c\}$  es colineal con  $z$  y  $c$ , satisfaciendo para la longitud euclideana (con signo) de los segmentos que determinan la relación  $\overline{cz} \cdot \overline{cw} = \rho^2$

Dicho de otra manera, consideremos un punto en  $\mathbb{H} - 0$ , llamémoslo  $P$ . Gracias a las Möbius, podemos usar la función inversión  $P \mapsto \frac{1}{P} = P'$ . Claramente  $\frac{1}{P} < 1$ . Para que nuestro punto  $\frac{1}{P}$  pertenezca a  $\Delta$ , se debe cumplir además que  $d(OP) \cdot d(OP') = \rho^2$ , siendo  $\rho$  el radio del círculo euclidiano  $C$ .

La inversión geométrica intercambia el interior con el exterior del círculo unitario, mientras que los puntos sobre la circunferencia quedan invariantes por la transformación

Cabe entonces preguntarnos, ¿Cómo se verán los objetos geométricos euclidianos proyectados dentro de  $\Delta$ ?

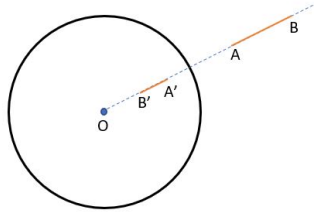


Figura 4.2: Segmento de recta en  $\Delta$

**Lema 4.1.10.** Propiedades de inversiones en círculos  $C \subset \mathbb{C}$ :

1. La inversión en cualquier círculo preserva ángulos euclidianos entre curvas. Dicho de otra manera, la inversión preserva las medidas de los ángulos.
2. La inversión envía rectas y círculos euclidianos en rectas y/o círculos euclidianos.
3. La inversión en círculos ortogonales a la frontera de  $\Delta$  envía  $\Delta$  sobre sí mismo.

*Demostración.* 1. Consideremos  $C$  una circunferencia y  $A$  un punto de ella. La recta  $OA$  es invariante, siendo  $O$  el centro de inversión; por tanto, el ángulo determinado por  $OA$ ,  $O$  y  $OX$  es el mismo ángulo entre  $OA'$ ,  $O$  y  $OX'$ . (semejanza de triángulos)

#### 4.1. MODELO DEL DISCO DE POINCARÉ

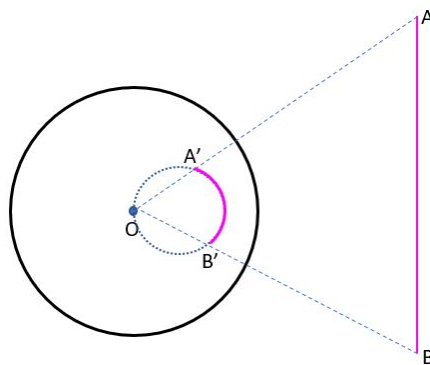
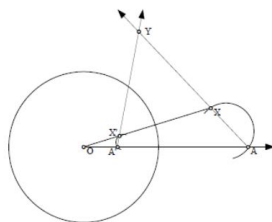
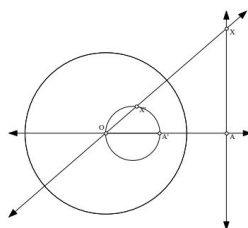


Figura 4.3: Recta euclidiana

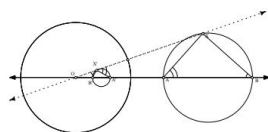


2.
  - La imagen de una circunferencia que pasa por el centro de inversión , es una recta que no pasa por el centro.
  - La imagen de una recta que pasa por el centro de inversión es ella misma.
  - La imagen de una recta recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por este centro.



- La imagen de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que tampoco pasa por él.
3. Dado que las Möbius envían círculos en círculos, la inversión en círculos envían  $\Delta$  sobre sí mismo.

□



## 4.2. Producto punto y distancia hiperbólica

Nuestro objetivo en esta sección es usar el grupo de transformaciones hiperbólicas para definir una distancia en  $\Delta$ . Haremos un poco más, construyendo un producto punto para vectores basados en puntos de  $\Delta$  (lo que se conoce como una métrica de Riemann). La ventaja de ello es que (mediante técnicas usuales de cálculo en  $\mathbb{R}^2$ ) tendremos los conceptos de : ángulos hiperbólicos, longitud hiperbólica de curvas y noción de geodésicas. distancia hiperbólica, áreas hiperbólicas, curvatura del espacio  $\Delta$

## 4.3. Función de Cayley

**Definición 4.3.1.** definimos la *función de Cayley* como una biyección entre  $\mathbb{H}$  y  $\Delta$ , descrita mediante  $\bar{f}(z) = \frac{z-i}{z+i}$ , cuya inversa está descrita mediante  $\bar{f}^{-1}(w) = \frac{iw+i}{-w+i}$

- Inyectividad: Consideremos  $z, w \in \mathbb{H}$ , y supongamos  $\bar{f}(z) = \bar{f}(w)$ ; es decir,

$$\begin{aligned}\frac{z-i}{z+i} &= \frac{w-i}{w+i} \\ (z-i)(w+i) &= (w-i)(z+i) \\ zw + iz - iw - i^2 &= wz + iw - iz - i^2 \\ iz - iw &= iw - iz \\ 2iz &= 2iw \\ z &= w\end{aligned}$$

- Sobreyectividad: Ejercicio.

## 4.4. Curvatura

El concepto de curvatura ha sido importante en el campo de la geometría diferencial y es de particular importancia el concepto de curvatura sobre una superficie, ya que, aunque su definición hace uso esencial de la posición de la superficie del espacio, esta no depende de la posición sino de su estructura métrica *i.e.*, la primera forma fundamental [?] p 235, que es la métrica riemania inducida sobre la superficie en  $\mathbb{R}^3$ [?spivak1970] vol 2, p 122

, de hecho, se puede hablar de la geometría de la primera forma fundamental que en [do1976differential] p 235 lo llaman geometría intrínseca y se puede desarrollar sin ninguna referencia al espacio que contiene la superficie.

Introduciremos el concepto de *superficie regular* en  $\mathbb{R}^3$ , se da la definición que se da de curvatura desde el punto de vista de la geometría diferencial. Arreglar párrafo, se muestran algunas equivalencias de esta definición cuyas pruebas encontradas en [do1976differential] y [spivak1970] no se dan por la falta de tiempo, simplemente se muestran con el fin de tener diferentes puntos de vista de la noción de la curvatura; el objetivo principal de la exposición, fue tratar de una manera formal el concepto de curvatura en el plano hiperbólico, basándose principalmente de [mucinho1998], por último, se habló del teorema Egregium de Gauss y con él se pretendía demostrar que el helicoides y el catenoide tienen la misma curvatura ya que son localmente isométricos, sin embargo, por cuestiones de tiempo sólo se mencionó el hecho.

#### 4.4.1. Geometría diferencial

Grosso modo, el coeficiente de variación o derivada de la tangente unitaria respecto a la longitud de arco se denomina vector curvatura de la curva  $\gamma$ .

Dada una curva diferenciable  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el *vector curvatura* de  $\gamma$  en el punto  $t \in (a, b)$  está definido mediante

$$k(t) = \frac{dT}{ds} = \frac{T'(t)}{\|R'(t)\|}$$

donde  $T : U \rightarrow S^2$  es el vector tangente unitario,  $S^2$  es la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$  y  $s$  es la longitud de arco de la curva.

Este vector determina qué tan pronunciada es la curva de la función  $R$  en cualquier punto y hacia qué dirección está dirigida, de hecho, se define el inverso de su magnitud en un punto como el radio de curvatura de la función en el punto y es el radio que tiene la circunferencia oscultriz de la curva en dicho punto. No entendí.

**Definición 4.4.1.** Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una *superficie regular* si para todo  $p \in S$ , existen  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  vecindad de  $p$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto y  $X : U \rightarrow V \cap S$  tales que

1.  $X$  es suave ( $C^\infty$ ).
2.  $X$  es homeomorfismo.
3. para todo  $q \in U$ , la diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es 1 – 1.

Se dice que la función  $X$  es una parametrización de  $S$  en  $p$ .

Ahora, si consideramos un punto  $p$  de una superficie regular  $S$  y todas las curvas que pasan por  $p$  que están contenidas en  $S$  y en alguna sección normal  $SN$  de  $S$  en  $p$ , la

curvatura de alguna de ellas en  $p$  se llama *curvatura normal* de  $S$  en  $p$ , además, en una superficie regular siempre se pueden encontrar los valores máximos y mínimos de estas curvaturas.

**Definición 4.4.2.** Las curvaturas normales máxima  $k_1$  y mínima  $k_2$  de una superficie  $S$  en  $p \in S$ , se llaman *curvaturas principales* en  $p$  y las respectivas direcciones a esas curvaturas se llaman *direcciones principales* de  $S$  en  $p$ .

Dada una parametrización  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de una superficie regular en el punto  $p \in S$ , donde  $X$  es una función de las variables independientes  $u$  y  $v$ , podemos escoger un vector unitario normal en cada punto de  $X(U)$  por la fórmula.

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(q).$$

Aquí  $\wedge$  es una notación para el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , si la función  $N : S \rightarrow S^2$  ( $S^2$  es la esfera unitaria) es diferenciable, se dice que  $N$  es un *campo diferenciable de vectores unitarios normales* y se dice que  $N$  es una *orientación* de  $S$ , un ejemplo de una superficie no orientable es la cinta de Möbius, supongamos por reducción al absurdo que la cinta de Möbius es orientable, esto implica que existe un campo diferenciable de vectores unitarios, entonces, empecemos a movernos por la cinta de Möbius desde un vector normal particular (véase la figura??), a medida que nos desplazamos por la cinta de Möbius, el vector normal a la superficie va a evolucionar de manera continua y después de una vuelta, los vectores normales unitarios van a cambiar abruptamente de  $N$  a  $-N$ , esta es una contradicción de la continuidad de  $N$ .

**Observación 4.4.3.** Las superficies cubiertas por una única parametrización como las gráficas de funciones diferenciables es orientable.

**Definición 4.4.4.** Si  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie regular con orientación  $N$ , entonces,  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma sus valores en la esfera unitaria  $S^2$  y se llama *función de Gauss* de  $S$ .

**Definición 4.4.5.** Sea  $p$  un punto de la superficie regular  $S$  y  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  la diferencial de la función de Gauss, se define la *curvatura gaussiana*  $K$  de  $S$  en  $p$ , por

$$K(p) = \det dN_p.$$

**Teorema 4.4.6.** Sea  $K$  la curvatura gaussiana de la anterior definición, entonces :

1.  $K = k_1 k_2$  donde  $k_1$  y  $k_2$  son las curvaturas principales de  $S$ .
2. Si  $p$  es un punto de  $S$  tal que  $K(p) \neq 0$  y  $V$  es una vecindad conexa de  $p$  donde  $K(p)$  no cambia de signo, entonces,

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$$

donde  $A$  es el área de una región  $B \subset V$  que contiene a  $p$ ,  $A'$  es el área de la imagen de  $B$  mediante la función de Gauss y el límite se toma a través de una sucesión de regiones  $B_n$  que converge a  $p$  en el sentido de que cualquier esfera alrededor de  $p$  contiene a todos los  $B_n$  para  $n$  lo suficientemente grande.

3. Dada  $S$  una superficie provista de los conceptos de longitud de curvas y de área de regiones, si  $p \in S$  y  $r$  es un real positivo, se puede construir un círculo con centro en  $p$  y radio  $r$  con la métrica inducida en  $S$  por la longitud de curvas, se denota entonces, por  $C(r)$  la longitud del círculo en la medida de longitud de curvas en  $S$  y por  $A(r)$  a su área encerrada con la medida de área de regiones en  $S$ , entonces,

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} 3 \frac{2\pi r - C(r)}{\pi r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} 12 \frac{\pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}. \quad (4.4)$$

El primer resultado del anterior teorema es una interpretación algebraica de la curvatura gaussiana, el segundo es una interpretación geométrica, donde se calcula la curvatura comparando el área de una región de  $S$  con el área de su proyección en la esfera unidad y el tercer resultado es el que vamos a utilizar para calcular la curvatura del plano hiperbólico, a partir del tercer resultado se tiene entonces, que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $K(p) \geq 0$ .
- La longitud de los círculos con centro en  $p$  de radio  $r$  (radio en la métrica de la superficie) es menor que la longitud de los círculos euclidianos de radio  $r$  y centro en  $p$ .
- El área de las bolas de radio  $r$  y centro en  $p$  es menor que el área de las bolas euclidianas de radio  $r$  y centro en  $p$ .

además las siguientes afirmaciones también son equivalentes:

- $K(p) \leq 0$ .
- La longitud de los círculos de radio  $r$  es mayor que la longitud de los círculos euclidianos de radio  $r$  en una vecindad de  $p$ .
- El área de las bolas de radio  $r$  en  $S$  con centro en  $p$  es mayor que el área de las bolas euclidianas de radio  $r$  y centro en  $p$ .

Se deja como ejercicio al estudiante que a partir del tercer literal del teorema 4.4.6 demuestre que la curvatura del plano euclidiano es idénticamente cero y la curvatura de una esfera de radio uno en  $\mathbb{R}^3$  es idénticamente uno.



## 4.5. Curvatura en el plano hiperbólico

**Lema 4.5.1.** Para cualquier  $p \in \Delta$ , la longitud del círculo  $C$  con centro en  $p$  y radio hiperbólico  $r \geq 0$  es

$$C(r) = 2\pi \sinh r$$

El área de la bola con centro en  $p$  y radio hiperbólico  $r \geq 0$  es:

$$A(r) = 2\pi(\cosh r - 1)$$

*Demostración.* Para la demostración de este lema se usará un resultado proveniente de la proposición 2.1. que se muestra en [?mucinho1998] que es la construcción del producto punto a partir de  $Iso(\Delta)$  y se enuncia a continuación.

Consideremos  $u, v \in T_a\Delta$ , para  $a \in \Delta$  fijo; dada  $T \in Iso(\Delta)$  con  $T(a) = 0$ , la imagen de estos vectores en  $T_0\Delta$  bajo la diferencial de la función  $T$ , (donde  $DT_a : T_a\Delta \rightarrow T_0\Delta$ ), preserva el producto interno, es decir

$$\langle v, w \rangle_{hip} = \langle DT_a(v), DT_a(w) \rangle_{hip}$$

Una consecuencia de esta afirmación es que dada  $T \in Iso(\Delta)$  con  $T(0) = a$  y  $u, v \in T_0\Delta$ , se tiene

$$\langle v, w \rangle_{hip} = \langle DT_0(v), DT_0(w) \rangle_{hip}$$

Esto se tiene porque la diferencial de  $T$ ,  $T^{-1} \in Iso(\Delta)$  satisface la igualdad  $T^{-1}(a) = 0$  y es un homeomorfismo, esto se puede ver claramente de la demostración de la proposición 2.1. [?mucinho1998], además, por el teorema de la función inversa [?caicedo2005calculo] pág 332 que dice:

Dados  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  espacios de Banach,  $A \subseteq \mathbb{E}$  abierto,  $a \in A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{F}$  aplicación de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), tal que  $Df_a : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  es homeomorfismo lineal, entonces, existe  $V$  abierto,  $a \in V$  tal que  $f : V \rightarrow f(V)$  es difeomorfismo de clase  $C^k$  y para  $y = f(x) \in f(V)$ , se tiene que  $Df_y^{-1} = (Df_x)^{-1} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ .

Así, se concluye que

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_{hip} &= \langle DT_a^{-1} \circ DT_0(v), DT_a^{-1} \circ DT_0(w) \rangle_{hip} \\ &= \langle DT_a^{-1}(DT_0(v)), DT_a^{-1}(DT_0(w)) \rangle_{hip} \\ &= \langle DT_0(v), DT_0(w) \rangle_{hip} \end{aligned}$$

ahora, con esta información podemos concluir que para todo  $T \in Iso(\Delta)$  tal que  $T(a) = b$ , si  $v, w \in T_a\Delta$ , entonces

$$\langle v, w \rangle_{hip} = \langle DT_a(v), DT_a(w) \rangle_{hip}$$

en efecto, sea  $S \in Iso(\Delta)$  tal que  $S(a) = 0$ , como  $T = T \circ S^{-1} \circ S$ , entonces,  $T \circ S^{-1}(0) = b$ , y por la regla de la cadena se tendrá que

$$\langle DT_a(v), DT_a(w) \rangle_{hip} = \langle D(T \circ S^{-1} \circ S)_a(v), D(T \circ S^{-1} \circ S)_a(w) \rangle_{hip}$$

#### 4.5. CURVATURA EN EL PLANO HIPERBÓLICO DISCO DE POINCARÉ

$$\begin{aligned}
&= \langle D(T \circ S^{-1})_0 \circ DS_a(v), D(T \circ S^{-1})_0 \circ DS_a(w) \rangle_{hip} \\
&= \langle D(T \circ S^{-1})_0(DS_a(v)), D(T \circ S^{-1})_0(DS_a(w)) \rangle_{hip} \\
&= \langle DS_a(v), DS_a(w) \rangle_{hip} \\
&= \langle v, w \rangle_{hip}
\end{aligned}$$

si  $\lambda : [0, 2\pi] \rightarrow \Delta$  es una parametrización para  $C$  y  $T \in Iso(\Delta)$  es tal que  $T(p) = 0$ , entonces,  $T \circ \lambda$  es una parametrización para un círculo con centro en 0 y radio hiperbólico  $r$  ya que la distancia hiperbólica se conserva bajo  $T$ , así:

$$\begin{aligned}
\ell_{hip}(T \circ \lambda) &= \int_0^{2\pi} \|(T \circ \lambda)'(t)\|_{hip} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\langle DT_{\lambda(t)} \circ \lambda'(t), DT_{\lambda(t)} \circ \lambda'(t) \rangle_{hip}} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\langle \lambda'(t), \lambda'(t) \rangle_{hip}} dt \\
&= \ell_{hip}(\lambda)
\end{aligned}$$

Así el problema se reduce a calcular la longitud de un círculo con centro en el origen y radio hiperbólico  $r$ , es decir, se va a calcular la longitud hiperbólica del círculo euclidiano  $\{z \in \Delta : z = |\rho|\}$  donde  $r = \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$ , pues, la distancia hiperbólica entre 0 y todo  $z \in \Delta$  es  $d_{hip}(0, z) = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$ , luego,  $\rho = \frac{e^r - 1}{e^r + 1}$ , ahora, por coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , se parametriza el círculo como

$$\begin{aligned}
\lambda : [0, 2\pi] &\rightarrow \Delta \\
\theta &\mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)
\end{aligned}$$

Luego, calculando la longitud

$$\begin{aligned}
C(r) &= \int_0^{2\pi} |\lambda'(\theta)|_{hip} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2|(-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta)|}{1 - \rho^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2\rho}{1 - \rho^2} d\theta \\
&= \frac{2\rho}{1 - \rho^2} \theta \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4\pi\rho}{1 - \rho^2} \\
&= \frac{4\pi \frac{e^r - 1}{e^r + 1}}{1 - \left(\frac{e^r - 1}{e^r + 1}\right)^2}
\end{aligned}$$

#### 4.5. CURVATURA EN EL PLANO HIPERBÓLICO DISCO DE POINCARÉ

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \frac{\frac{e^r-1}{e^r+1}}{\frac{e^{2r}+2e^r+1-e^{2r}+2e^r-1}{(e^r+1)^2}} \\
&= 4\pi \frac{(e^r-1)(e^r+1)}{4e^r} \\
&= 2\pi \frac{e^r - e^{-r}}{2} \\
&= 2\pi \sinh r
\end{aligned}$$

para el área se tiene

$$\begin{aligned}
A(r) &= \int_C \frac{4dx dy}{(1-x^2-y^2)^2} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \frac{4\rho d\rho d\theta}{(1-\rho^2)^2} \\
&= 2\pi \left. \frac{2}{1-\rho^2} \right|_0^\rho \\
&= 4\pi \left( \frac{1}{1-\left(\frac{e^r-1}{e^r+1}\right)^2} - 1 \right) \\
&= 4\pi \left( \frac{(e^r+1)^2}{e^{2r}+2e^r+1-e^{2r}+2e^r-1} - 1 \right) \\
&= 4\pi \left( \frac{e^{2r}+2e^r+1}{4e^r} - 1 \right) \\
&= 4\pi \left( \frac{1}{2} \frac{e^r+e^{-r}}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= 2\pi(\cosh r - 1)
\end{aligned}$$

□

**Teorema 4.5.2.** *La curvatura gaussiana del plano hiperbólico es -1 en todos sus puntos.*

*Demostración.* Usando el lema anterior y la ecuación 4.4 se tiene que

$$\begin{aligned}
K(p) &= \lim_{r \rightarrow 0} 3 \frac{2\pi r - C(r)}{\pi r^3} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} 3 \frac{2\pi r - 2\pi \sinh r}{\pi r^3} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} 6 \left( \frac{r - \left(r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots\right)}{r^3} \right) \\
&= -\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{6}{3!} + \frac{6r^2}{5!} \dots \right)
\end{aligned}$$

$$= -1$$

□

El cálculo de la curvatura con la fórmula del área es análogo y se deja como ejercicio para el estudiante. Es posible visualizar algunas regiones del plano hiperbólico como superficie en  $\mathbb{R}^3$ , imagínese un niño que jala un carrito mientras camina a lo largo del eje  $y$ , la cuerda comienza paralela al eje  $x$  y el carrito empieza a formar una curva llamada tractiz o curva de persecución, si se rota la tractiz alrededor del eje  $y$ , la superficie de revolución formada se conoce como pseudoesfera, esta superficie tiene curvatura  $-1$  y pequeñas regiones de ella son isométricas a pequeñas regiones de  $\Delta$ .

## 4.6. Teorema Egregium de Gauss

**Definición 4.6.1.** Un difeomorfismo  $\phi : S \rightarrow \bar{S}$  es una isometría si para todo  $p \in S$  y todo par  $w_1, w_2 \in T_p S$

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)}$$

se dice que  $S$  y  $\bar{S}$  son isométricas.

En la anterior definición, el subíndice  $p$  del producto interno, significa que el producto interno se aplica en el espacio tangente de  $S$  en el punto  $p$  y el subíndice  $\phi(p)$  significa que el producto interno se efectúa en el espacio tangente de  $\bar{S}$  en el punto  $\phi(p)$ .

**Definición 4.6.2.** Una función  $\phi : V \rightarrow \bar{S}$  de una vecindad  $V$  de  $p \in S$  en  $\bar{S}$  es una isometría local en  $p$ , si existe una vecindad  $\bar{V}$  de  $\phi(p) \in \bar{S}$  tal que  $\phi : V \rightarrow \bar{V}$  es una isometría; si para todo  $p \in S$  existe una isometría local en  $\bar{S}$ , se dice que la superficie  $S$  es localmente isométrica a  $\bar{S}$ ;  $S$  y  $\bar{S}$  son localmente isométricas si  $S$  es localmente isométrica a  $\bar{S}$  y  $\bar{S}$  es localmente isométrica a  $S$ .

**Teorema 4.6.3** (Egregium de Gauss). La curvatura gaussiana de una superficie regular y orientable es invariante bajo isometrías locales.

La demostración de este teorema se puede revisar en [do1976differential] p 234, para entender esta demostración es suficiente conocer la definición de la primera y segunda forma fundamental y el empleo de los símbolos de Cristoffel, la fórmula obtenida allí que expresa el valor de la curvatura en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas se llama la *fórmula de gauss* y fue probada por primera vez en un artículo famoso llamado general investigations of curved surfaces por Karl Friedrich Gauss, este teorema explica la afirmación que se dio en la introducción de este informe, es decir, aunque el concepto de la curvatura Gaussiana se da en función de la posición de una superficie en el espacio, ésta sólo depende de la estructura métrica de la superficie (la primera forma fundamental), una forma de visualizar esto es mediante el siguiente teorema.

#### 4.6. TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS

#### CAPÍTULO 4. DISCO DE POINCARÉ

**Teorema 4.6.4.** *Asúmase la existencia de las parametrizaciones  $x : U \rightarrow S$  y  $\bar{x} : U \rightarrow \bar{S}$  en donde los coeficientes de la primera forma fundamental coinciden, entonces, la función  $\phi = \bar{x} \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \bar{S}$  es una isometría local.*

A partir del anterior teorema y el teorema Egregium de Gauss se pretendía demostrar que el helicoides y el catenoide tienen la misma curvatura, una parametrización para el helicoides está dado por:

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty$$

y una parametrización para el catenoide está dada por

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

lo que se quería hacer era mostrar que los coeficientes de la primera forma fundamental coinciden, así se concluye que estas dos superficies son localmente isométricas y por el teorema Egregium de Gauss se concluye que hay una correspondencia entre las curvaturas de las superficies, las figuras ?? y ?? ilustran un catenoide y un helicoides respectivamente, obsérvese la diferencia de las formas que tienen estas dos superficies.

# Capítulo 5

## Grupos Topológicos

El desarrollo de la teoría de los grupos topológicos fue iniciada por el matemático noruego *Marius Sophus Lie* (1842-1899) junto con el matemático alemán *Friedrich Engel* (1861-1941). Uno de sus mayores logros fueron tres volúmenes el cual se tituló *Theorie der Transformationsgruppen*[7] (1888-93). En él describen sus hallazgos sobre los grupos de transformaciones continuas. Sin embargo, fue el matemático austriaco *Otto Schreier* (1901-1929) quien introdujo la definición de grupo topológico (1925 *Abstrakte Kontinuierliche Gruppen* [26]).

### Describir un poco más

Un grupo  $G$  cuya operación es denotada  $\mu : G \times G \rightarrow G$  siendo  $\mu(x, y) = x \cdot y$  es llamado **topológico** si  $G$  posee una estructura de espacio topológico y además, las funciones  $\mu$  e inversión  $\iota : G \rightarrow G$ , donde  $\iota(x) = x^{-1}$ , son continuas.

**Proposición 5.0.1.** *El grupo  $G$  es un grupo topológico si y solo si la función  $f : G \times G \rightarrow G$  definida mediante  $f(x, y) = x \cdot y^{-1}$  es continua.*

*Demostración.* Probemos la condición necesaria. Sabemos que la función identidad  $Id : G \rightarrow G$  es continua, entonces la función  $(Id, \iota) : G \times G \rightarrow G \times G$  también es continua. Finalmente, la función  $f$  coincide con la composición  $\mu \circ (Id, \iota)$ , es decir,  $f = \mu \circ (Id, \iota)$ . Dado que  $f$  es la composición de dos funciones continuas, entonces concluimos que  $f$  también es una función continua.

Ahora probaremos la condición suficiente. La función inclusión  $i : G \hookrightarrow G \times G$ , definida mediante  $i(x) = (e, x)$ , es continua. Dada que la composición de funciones continuas es una función continua, entonces la función composición  $f \circ i = \iota$  es continua. Finalmente, como la función  $(Id, \iota)$  es continua, entonces la composición  $f \circ (Id, \iota) = \mu$  también lo es.  $\square$

**Ejemplo 5.0.2.** *Son grupos topológicos los siguientes objetos:*

- \* *Todo grupo  $G$  equipado con la topología discreta o indiscreta es un grupo topológico.*
- \* *Los reales  $\mathbb{R}$  con su estructura aditiva y la topología usual es un grupo topológico.*

- \* El subespacio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  con el producto usual es un grupo topológico.
- \* Si  $G$  y  $H$  son grupos topológicos, entonces grupo producto  $G \times H$  dotado con la topología producto es un grupo topológico.
- \* Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el espacio  $\mathbb{R}^n$  con la estructura aditiva y la topología usual es un grupo topológico.
- \* El plano complejo removiendo el origen,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  con la estructura multiplicativa es un grupo topológico.
- \* Si  $G$  es un grupo topológico, entonces todo subgrupo  $H$  de  $G$  dotado de la topología del subespacio es también un grupo topológico.
- \* La circunferencia unitaria  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  con el producto usual de los números complejos es un grupo topológico (compacto).
- \* Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el grupo General Lineal  $GL(n, \mathbb{R})$  dotado con la topología inducida de  $\mathbb{R}^n$  es un grupo topológico.
- \* Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el grupo Especial Lineal  $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$  dotado con la topología del subespacio es un grupo topológico.
- \* Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el grupo General Lineal  $GL(n, \mathbb{C})$  dotado con la topología inducida de  $\mathbb{C}^n$  es un grupo topológico.
- \* Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el grupo Especial Lineal  $SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$  dotado con la topología del subespacio es un grupo topológico.
- \* El Proyectivo Especial Lineal  $PSL(2, \mathbb{R})$  equipado con la topología cociente de (Conjunto de Cantor). Dado que el grupo abeliano  $\mathbb{Z}_2$  con la topología indiscreta es un grupo topológico, entonces el grupo producto  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2^n$  dotado de la topología producto es un grupo topológico (compacto).
- \* El grupo  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  dotado con la topología inducida por función proyección  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  es un grupo topológico.

**Teorema 5.0.3.** Si  $G$  es un grupo topológico  $G$ , entonces

1. La traslación a derecha  $R_g : G \rightarrow G$  e izquierda<sup>1</sup>  $L_g : G \rightarrow G$ , definidas mediante  $x \mapsto xg$  y  $x \mapsto gx$ , respectivamente, son homeomorfismo, para cada  $g \in G$ .
2. La función conjugación<sup>2</sup>  $x \mapsto gxg^{-1}$  es un homeomorfismo, para cada  $g \in G$ .

---

<sup>1</sup>Algunos autores también llaman a estas funciones multiplicación a derecha e izquierda, respectivamente.

<sup>2</sup>Algunos autores llaman a esta función automorfismo interno.

*Demostración.* Probaremos que la translación a derecha  $R_g$  es un homeomorfismo, para cada  $g \in G$ .

\* *La translación a derecha  $R_g$  es inyectividad.* Supongamos que existen elementos distintos  $x \neq y$  en  $G$  tal que  $R_g(x) = R_g(y)$  es decir,  $xg = yg$ . De la propiedad cancelativa a derecha de grupos se sigue que  $x = y$ .

\* *La función  $R_g$  es sobreyectividad.* Dado el elemento  $y \in G$ , consideramos el punto  $yg^{-1}$  en  $G$ , entonces  $R_g(yg^{-1}) = yg^{-1}g = y$ .

\* *El mapeo  $R_g$  es continuo.* La función inclusión  $i : G \hookrightarrow G \times G$ , definida mediante  $i(x) = (x, g)$ , es continua. Notemos que la translación a derecha  $R_g$  se escribe como la composición  $\mu \circ i = R_g$ . Dado que la operación  $\mu$  es una función continua y la composición de funciones continuas es continua, entonces  $R_g$  es continua.

\* *Existencia y continuidad de la función inversa  $R_g^{-1}$ .* La función  $R_g^{-1} = R_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ , definida mediante  $x \mapsto xg^{-1}$ , es la función inversa de la translación  $R_g$ . Nótese que  $R_g^{-1}$  es la translación con respecto al elemento  $g^{-1}$ . Anteriormente, probamos que las translaciones a derechas son continuas, por lo tanto  $R_{g^{-1}}$  es continua.

Dado que la translación  $R_g$  es una función biyectiva continua con inversa continua, podemos concluir que  $R_g$  es un homeomorfismo.

Usando las ideas descritas anteriormente, es fácil probar que la translación a izquierda  $L_g$  es un homeomorfismo, para cada  $g \in G$ .

Finalmente, si fijamos el punto  $g \in G$ , la función conjugación  $x \mapsto gxg^{-1}$  es la composición de la translación a derecha  $R_{g^{-1}}$  seguida de la translación a izquierda  $L_g$ . Este hecho prueba que la conjugación es la composición de homeomorfismo, por lo tanto es un homeomorfismo.

□

Dado los elementos  $x, y, z$  del grupo topológico  $G$  y los subconjuntos  $U, V$  y  $W$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $z \in W$ , definimos el conjunto multiplicación entre  $U$  y  $V$  mediante

$$UV := \{ab : a \in U \text{ y } b \in V\}.$$

**Proposición 5.0.4.** *Si  $z = xy$  y  $W$  es una vecindad de  $z$ , entonces existen vecindades  $U$  y  $V$  de  $x$  y  $y$ , respectivamente, tal que  $UV \subset W$ .*

*Si  $V$  es una vecindad de  $x$ , entonces el subconjunto  $V^{-1} := \{a^{-1} : a \in V\}$  es una vecindad de  $x^{-1}$ .*

*Si  $V$  y  $U$  son subconjuntos abiertos de  $G$ , entonces  $xU, Ux$  y  $UV$  son subconjuntos abiertos de  $G$ , para cada  $x \in G$ .*

*Dada una vecindad  $V$  de  $x$ , entonces existe una vecindad  $W$  de la identidad tal que  $V = xW$ .*

*Si  $V$  es una vecindad de la identidad, entonces existe un abierto  $W$  que contiene a la identidad tal que  $WW^{-1} \subset V$ .*

**Definición 5.0.5.** *Una función  $f : G \rightarrow H$  entre grupos topológicos es llamada un **morfismo** si  $f$  es continua y homomorfismo.*



### 5.0.1. Problemas

**Problema 5.0.6.** Si  $H$  es un subgrupo del grupo topológico  $G$ , prueba que  $H$  dotado de la topología del subespacio es también un grupo topológico.

**Problema 5.0.7.** Si  $G$  y  $H$  son grupos topológicos, prueba que el grupo producto  $G \times H$  dotado de la topología producto es un grupo topológico.

**Problema 5.0.8.** Prueba que los grupos topológicos  $S^1$  y  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  son isomorfos.

**Problema 5.0.9.** Prueba que un espacio topológico discreto es compacto si y solo si es finito.

**Problema 5.0.10.** Tomemos el subgrupo discreto  $G$  de  $S^1$ , prueba que  $G$  es cíclico finito, es decir  $G = \langle e^{p\pi i} \rangle$ , para algún  $p \in \mathbb{R} - \mathbb{I}$

## 5.1. Grupos Discontinuos

Un grupo  $(G, \cdot)$  **actúa sobre el conjunto**  $X$  si existe una función  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  que verifica las siguientes propiedades

1.  $\alpha(Id, x) = x$  para cada  $x \in X$ .
2.  $\alpha(g \cdot h, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$  para cualesquiera elementos  $g, h$  de  $G$  y para cualquier  $x \in X$ .

**Ejemplo 5.1.1.** *Faltan ejemplos*

**Definición 5.1.2.** Dada un espacio topológico y un grupo  $G$  conformado por homeomorfismos de  $X$  en sí mismo. Si  $x \in X$  llamaremos el **estabilizador de  $x$  por  $G$**  al conjunto

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}.$$

**La órbita de  $x$  por el grupo  $G$**  es el conjunto

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\}.$$

**Ejemplo 5.1.3.** *Falta ejemplo*

**Observación 5.1.4.** El estabilizador  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ , para todo  $x \in X$ .

**Ejemplo 5.1.5.** Tomemos  $\mathbb{R}$  y el grupo  $G$  conformados por las traslaciones  $x \mapsto x + a$ , para cada  $a \in \mathbb{R}$ . Entonces  $G_x = \{Id\}$  y  $G(x) = \mathbb{R}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definición 5.1.6.** Diremos que el grupo  $G$  **actúa propiamente discontinuamente en  $X$**  o  $G$  es **propiamente discontinuo sobre  $X$**  si para todo subconjunto compacto  $K \subset X$  se tiene que la cantidad de elementos  $g$  de  $G$  que satisface  $g(K) \cap K \neq \emptyset$  es finita. [?Thurston, p. 174 Def 8.2.2] [?Kapovich, p: 3 Theorem. 9]. F. Beardon en *The Geometry of Discrete groups* (Definition 5.3.1 p. 94)

## 5.1. GRUPOS DISCONTINUOS CAPÍTULO 5. GRUPOS TOPOLÓGICOS

Allen Hatcher en *Algebraic topology* [6, p.73] define propiamente discontinuamente si para todo punto  $x \in X$  existe un abierto  $U$  de  $x$  tal que la intersección  $g(U) \cap U$  es diferente de vacío para una cantidad finita de elementos  $g$  de  $G$ .

Svetlana Katok en *Fuchsian groups* [10, p.27] define propiamente discontinuamente si todo compacto  $K \subset X$  contiene una cantidad finita de puntos de la órbita  $G(x)$ , para todo  $x \in X$ .

Richard Evan Schwartz en *Mostly Surfaces* [27, p.225] define propiamente discontinuamente si para todo punto  $x \in X$  existe un abierto  $U$  del punto  $x$  tal que el conjunto  $\{g \in G : g(U) \cap U \neq \emptyset\}$  es finito.

### Ejemplo 5.1.7. *Falta ejemplo*

**Observación 5.1.8.** En un espacio Hausdorff  $X$ , los puntos son compactos. Si  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $X$ , entonces para el punto  $x \in X$  existe una cantidad finita de elementos  $g_1, \dots, g_n$  en  $G$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g_i(\{x\}) \cap \{x\} \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Este hecho implica que el estabilizador  $G_x = \{g_1, \dots, g_n\}$ .

Si  $X$  es un espacio compacto, entonces existe una cantidad finita de elementos  $g_1, \dots, g_n$  de  $G$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g_i(X) \cap X = X$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Este hecho implica que  $G$  debe ser un grupo finito. En otras palabras, el estabilizador  $G_x$  es finito, para todo  $x \in X$ .

**Teorema 5.1.9.** Supongamos que el grupo  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $X$ . Entonces

1. Todos subgrupo de  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $X$ .
2. Si  $f$  es un homeomorfismo de  $X$  a  $Y$ , entonces  $f \circ G \circ f^{-1}$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $Y$ .
3. Si  $B$  es un subconjunto de  $X$   $G$ -invariante, entonces  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $B$ .
4. Si  $X$  es un  $\sigma$ -compacto<sup>3</sup>, entonces  $G$  es numerable.

*Demostración.* Solo probaremos el inciso 4, las restantes tres propiedades se dejan como ejercicio para lector. Supongamos que el espacio  $X$  es  $\sigma$ -compacto. El Teorema 7.2 en [3, p.241] implica que existe una colección creciente numerable  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  de subespacios compactos de  $X$  tal que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Ahora, asociaremos recursivamente a cada compacto  $K_n$  un subconjunto finito  $G_n$  de  $G$ . Luego, probaremos que  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ .

Para  $n = 1$ . Para el compacto  $K_1$  existen elementos  $g_1^1, \dots, g_{m_1}^1$  de  $G$ , para algún  $m_1 \in \mathbb{N}$ , tal que  $g_i^1(K_1) \cap K_1 \neq \emptyset$ , con  $i \in \{1, \dots, m_1\}$ . Definimos el subconjunto  $G_1 = \{g_1^1, \dots, g_{m_1}^1\} \subset G$ .

---

<sup>3</sup>Un espacio es  $\sigma$ -compacto si es la unión numerable de subespacios compactos.

## 5.1. GRUPOS DISCONTINUOS CAPÍTULO 5. GRUPOS TOPOLÓGICOS

Para  $n = 2$ . Al considerar el compacto  $K_2$  existen elementos  $g_1^2, \dots, g_{m_2}^2$  de  $G \setminus G_1$ , para algún  $m_1 \in \mathbb{N}$ , tal que  $g_i^2(K_2) \cap K_2 \neq \emptyset$ , con  $i \in \{1, \dots, m_2\}$ . Así, definimos el subconjunto  $G_2 = \{g_1^2, \dots, g_{m_2}^2\} \subset G$ .

Para  $n \in \mathbb{N}$ . Dado el compacto  $K_n$  existen elementos  $g_1^n, \dots, g_{m_n}^n$  de  $G \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i$ , para algún  $m_n \in \mathbb{N}$ , tal que  $g_i^n(K_n) \cap K_n \neq \emptyset$ , con  $i \in \{1, \dots, m_n\}$ . Entonces, definimos el subconjunto  $G_n = \{g_1^n, \dots, g_{m_n}^n\} \subset G$ .

La anterior construcción recursiva nos provee para cada  $n \in \mathbb{N}$  el subconjunto  $G_n$  de  $G$ . El hecho que  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre un  $\sigma$ -compacto, garantiza la igualdad

$$G = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} G_n. \quad (5.1)$$

Más precisamente, si tomamos un elemento arbitrario  $g$  de  $G$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$ , tal que  $g(K_1) \cap K_m \neq \emptyset$ , pues  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Dado que  $K_1 \subset K_m$ , entonces  $g(K_m) \cap K_m \neq \emptyset$ . Así, se sigue que existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $g \in G_i$ . Esto prueba que  $G$  es la unión numerable de subconjuntos finitos y por lo tanto,  $G$  es numerable. La prueba de este hecho es muy sencilla, basta considerar el conjunto  $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$  esta conformado por todos los números primos y seguidamente definir la función  $f : G \rightarrow \mathbb{N}$ , la cual asigna al elemento  $g_i^n$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  y para algún  $i \in \{1, \dots, m_n\}$  el número natural  $p_n^i$ .  $\square$

**Definición 5.1.10.** Dado un espacio topológico  $X$ . Un **espacio cubriente** para  $X$  es un par  $(\tilde{X}, p)$ , siendo  $\tilde{X}$  un espacio topológico y  $p$  es una función de  $\tilde{X}$  a  $X$  con la siguiente propiedad: para cada punto  $x \in X$  existe una vecindad  $U$  tal que  $p^{-1}(U)$  es una unión disjunta de abiertos (**hoja**) de  $\tilde{X}$ , cada uno de estos abiertos es mapeado homeomorficamente sobre  $U$  mediante  $p$ .

**Ejemplo 5.1.11.** Los siguientes son ejemplos de espacios cubrientes.

\* Dada la función  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , definida mediante  $t \mapsto e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . La pareja  $(p, \mathbb{R})$  es un espacio cubriente de  $S^1$ .

\* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos la función  $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ , mediante  $z \mapsto z^n$ . Entonces la pareja  $(f_n, S^1)$  es un espacio cubriente de  $S^1$ .

*Más ejemplos. el plano proyectivo, el toro, todo espacio es cubriente de si mismo*

**Definición 5.1.12.** El grupo  $G$  **actúa libremente sobre**  $X$  si cada estabilizador  $G_x$ , con  $x \in X$  es trivial.

**Ejemplo 5.1.13.** *Falta ejemplo*

A partir del grupo  $G$  conformado por homeomorfismos del espacio  $X$  en sí mismo, podemos definir la siguiente relación de equivalencia  $\sim$  en  $X$ , tal que los elementos  $x, y \in X$  se relacionan  $x \sim y$  si existe un elemento  $g \in G$  tal que  $g(x) = y$ . Cada clase de equivalencia es una órbita  $G(x) = \{g(x) : g \in G\}$ , con  $x \in X$ .

**Ejemplo 5.1.14.** *Falta ejemplo*

**Teorema 5.1.15.** *Si  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre un espacio Hausdorff y localmente compacto  $X$ , entonces el espacio cociente  $X/G$  es Hausdorff. Además, si  $G$  actúa libremente sobre  $X$ , entonces el par  $(p, X)$  es un cubriente de  $X/G$ .*

*Demostración.* Tomemos las clases de equivalencia  $G_x \neq G_y$  en el cociente  $X/G$ . Entonces existe un abierto  $U$  de  $x$  tal que la cerradura  $\overline{U}$  es compacta. Dado que  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $X$  existe una cantidad finita de elementos  $g$  en  $G$  tal que  $g(\overline{U}) \cap \overline{U} \neq \emptyset$ . Solo hay una cantidad finita de puntos en la órbita  $G_y$  que intersectan a  $\overline{U}$ , de lo contrario la órbita  $G_y$  tendría un punto de acumulación  $z$  en  $\overline{U}$ , ello implica que existe una sucesión de elementos diferentes  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $G$  tal que la sucesión  $(g_n(y))_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{U}$  converge al punto  $z$ , este hecho implica que  $g_n(\overline{U}) \cap \overline{U} \neq \emptyset$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , contradiciendo la propiedad del compacto  $\overline{U}$ . Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que el abierto  $U$  no intersecta a la órbita  $G_y$ , es decir  $U \cap G_y = \emptyset$ , este hecho implica que  $g(U) \cap G_y = \emptyset$ , para cada  $g \in G$ . Análogamente, existe una vecindad  $V$  de  $y$  con cerradura  $\overline{V}$  compacta que no intersecta a la órbita  $G_x$ , es decir  $V \cap G_x = \emptyset$ , este hecho implica que  $g(V) \cap G_x = \emptyset$ , para cada  $g \in G$ . Dado que  $X$  es un espacio Hausdorff podemos suponer sin pérdida de generalidad que los abiertos  $U$  y  $V$  son disjuntos *i.e.*,  $U \cap V = \emptyset$ . Los subconjuntos  $p(U)$  y  $p(V)$  son vecindades de  $G_x$  y  $G_y$  respectivamente, pues  $p^{-1}(p(U)) = \cup_{g \in G} g(U)$  y  $p^{-1}(p(V)) = \cup_{g \in G} g(V)$ . Además,  $p(U) \cap p(V) = \emptyset$ . Esto muestra que el cociente  $X/G$  es Hausdorff.

Tomemos  $U$  un abierto del punto  $x$  tal que su cerradura  $\overline{U}$  es compacta. Entonces existen elementos  $g_1, \dots, g_n$  de  $G - \{Id\}$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g_i(\overline{U}) \cap \overline{U} \neq \emptyset$ . Dado que  $G$  actúa libremente sobre  $X$ , entonces  $g_i(x) \neq x$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , usando el hecho que  $G$  está conformado por homeomorfismos de  $X$  en sí mismos, garantiza la existencia de una vecindad  $V \subset U$  que contiene a  $x$  tal que  $g_i(U) \cap U = \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En particular el abierto  $U$  es disjunto de las traslaciones  $g(U)$ , es decir,  $g(U) \cap U = \emptyset$ , para cada  $g \in G - \{Id\}$ . Obsérvese que si  $g_1 \neq g_2 \in G - \{Id\}$ , entonces  $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ . Así, la restricción  $p|_U : U \rightarrow p(U)$  es un homeomorfismo. Como cada hoja  $h(U) \subset \sqcup_{g \in G} g(U) = p^{-1}(p(U))$  es homeomorfa a  $U$ , entonces el par  $(p, X)$  es un cubriente de  $X$ .  $\square$

**Observación 5.1.16.** *En el teorema anterior, si solo consideramos a  $X$  como un espacio localmente compacto, entonces el cociente  $X/G$  es  $T_1$ .*

**Ejemplo 5.1.17.** *Estudiar la acción de  $P$  sobre  $\mathbb{R}^2$ .*

**Definición 5.1.18.** *El punto  $x \in X$  es **errante** bajo  $G$  si existe un abierto  $U$  del punto  $x$  tal que existen una cantidad finita de elementos  $g$  de  $G$  tal que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$ .*

Varios autores definen errante como  $G$  actúa discontinuamente sobre el punto  $x \in G$ .

**Definición 5.1.19.** *Diemos que el grupo  $G$  **actúa discontinuamente en**  $x \in X$  o es un **grupo discontinuo sobre**  $x \in X$  si existe una vecindad  $U$  que contiene a  $x$  tal que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$  se satisface para un número finito de elementos  $g \in G$ . La **región de discontinuidad de**  $G$  es el subconjunto  $\Omega(G) \subset X$  conformado por los puntos donde  $G$  actúa discontinuamente.*

**Ejemplo**

**Definición 5.1.20.** *Diemos que el grupo  $G$  **actúa discontinuamente** en  $x \in X$  o es un **grupo discontinuo sobre**  $x \in X$  si existe una vecindad  $U$  que contiene a  $x$  tal que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$  se satisface para un número finito de elementos  $g \in G$ . La **región de discontinuidad de  $G$**  es el subconjunto  $\Omega(G) \subset X$  conformado por los puntos donde  $G$  actúa discontinuamente.*

**Observación 5.1.21.** *La región de discontinuidad  $\Omega(G) \subset X$  es abierta, pues dado el punto  $x$  de  $\Omega(G)$  existe un abierto  $U$  que contiene al punto  $x$  y una cantidad finita de elementos  $g_1, \dots, g_n$  de  $G$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g_i(U) \cap U \neq \emptyset$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Si consideramos cualquier elemento  $y$  en el abierto  $U$  se sigue que  $g_1, \dots, g_n$  son los únicos elementos de  $G$  que satisfacen  $g_i(U) \cap U \neq \emptyset$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , lo cual implica que  $U \subset \Omega(G)$ .*

*Si  $G$  actúa discontinuamente sobre  $X$ , la órbita de  $x$  es un subconjunto discreto de  $X$ , para cada  $x \in X$ .*

**Teorema 5.1.22.** *La región de discontinuidad  $\Omega(G)$  es invariante bajo  $G$  i.e.,  $g(\Omega(G)) = \Omega(G)$  para todo  $g \in G$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\Omega(G) \neq \emptyset$  y verifiquemos la igualdad  $g(\Omega(G)) = \Omega(G)$ , para cada  $g \in G$ .

\* Probaremos la contención  $g(\Omega(G)) \subset \Omega(G)$ . Tomemos el elemento  $x \in g(\Omega(G))$ , dado que  $g$  es un homeomorfismo, entonces existe un único elemento  $y \in \Omega(G)$  y una vecindad  $W$  de  $y$  tal que  $g(y) = x$  y una cantidad finita  $g_1, \dots, g_n$  de elementos en  $G$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  que satisfacen  $g_i(W) \cap W \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces  $g(W) = U$  es una vecindad del punto  $x$  tal que  $gg_1g^{-1}, \dots, gg_ng^{-1}$  son los únicos elementos de  $G$  que satisfacen  $gg_ig^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

\* Finalmente, veamos que  $g(\Omega(G)) \supset \Omega(G)$ . Tomemos  $x \in \Omega(G)$ , entonces existe  $y \in X$  tal que  $g(y) = x$ . Veamos que  $y \in \Omega(G)$ . Por hipótesis, existe un abierto  $U$  de  $x$  y una cantidad finita  $g_1, \dots, g_n$  de elementos de  $G$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g_i(U) \cap U \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces  $g^{-1}(U) = W$  es un abierto de  $y$  y  $g^{-1}g_1g, \dots, g^{-1}g_ng$  son los únicos elementos de  $G$  que satisfacen  $g^{-1}g_ig(W) \cap W \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

**Teorema 5.1.23.** *Si  $G$  actúa libremente sobre el espacio Hausdorff  $X$  y  $X$  es errante bajo  $G$ , entonces la proyección  $\pi : X \rightarrow X/G$  es una proyección cubriente.*

**Observación 5.1.24.** *Las definiciones **propiaamente discontinuamente** y **discontinuo** no son equivalentes. Basta tomar el espacio  $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  y el grupo  $G = \langle (x,y) \mapsto (2x, \frac{y}{2}) \rangle \cong \mathbb{Z}$ . Entonces  $G$  actúa discontinuamente sobre  $X$ , sin embargo no actúa propiaamente discontinuamente sobre  $X$ . Para probar este último basta con tomar un compacto conexo que contenga a los puntos  $(1,0)$  y  $(0,1)$ .*

## 5.1. GRUPOS DISCONTINUOS

---

**Teorema 5.1.25.** *Si  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre el espacio localmente compacto<sup>4</sup>  $X$ , entonces  $G$  actúa discontinuamente sobre  $X$ .*

*Demostración.* Dado el punto  $x \in X$  existe un abierto  $U$  de  $x$  tal que su cerradura  $\overline{U}$  es compacta. Dado que  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $X$  entonces existen una cantidad finita de elementos  $g$  de  $G$  tal que  $g(\overline{U}) \cap \overline{U} \neq \emptyset$ . Como  $U \subset \overline{U}$ , entonces existe una cantidad finita de elementos  $g$  de  $G$  tal que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$ .  $\square$

### 5.1.1. Problemas

**Problema 5.1.26.** *Prueba que el estabilizador  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ , para todo  $x \in X$ .*

**Problema 5.1.27.** *Dada un espacio topológico y un grupo  $G$  conformado por homeomorfismos de  $X$  en sí mismo. Prueba que  $G_x$  estabilizador de  $x$  por  $G$  es un subgrupo de  $G$ .*

**Problema 5.1.28.** *Prueba el Teorema 5.1.9.*

**Definición 5.1.29.** *Si  $G$  es un grupo de homeomorfismos del espacio topológico  $X$  en sí mismo, entonces  $G$  actúa discontinuamente sobre  $X$  si para todo punto  $x \in X$  existe un abierto  $U$  que continene a  $x$  tal que  $g(U) \cap U = \emptyset$ , para cada  $g \in G - \{Id\}$ . [5, p. 208]*

**Definición 5.1.30.** *Si  $G$  es un grupo de homeomorfismos del espacio topológico  $X$  en sí mismo, entonces  $G$  actúa libremente discontinuamente sobre el punto  $x \in X$  si existe un abierto  $U$  que continene a  $x$  tal que  $g(U) \cap U = \emptyset$ , para cada  $g \in G - \{Id\}$ .*

### 5.1.2. Grupos Fuchsianos

**Definición 5.1.31.** *Un subgrupo  $H$  de un grupo topológico  $G$  es llamado **grupo discreto** si  $H$  es un subespacio discreto de  $G$ .*

**Ejemplo 5.1.32.** *Son grupos discretos los siguientes conjuntos:*

- \* Los enteros  $\mathbb{Z}$ .
- \* El grupo producto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .
- \* El conjunto  $GL(n, \mathbb{Z})$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- \* El conjunto  $PSL(2, \mathbb{Z})$ .
- \* El grupo generado  $\langle e^{i\frac{p}{q}\pi} \rangle$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$  tal que  $q \neq 0$ .

**Teorema 5.1.33.** *Si  $G$  es un subgrupo discreto de  $(\mathbb{C}, +)$ , entonces  $G$  satisface alguna de las siguientes condiciones*

- \* El grupo  $G$  es trivial.

---

<sup>4</sup>El espacio  $X$  es **localmente compacto** si para todo punto  $x \in X$  existe un abierto  $U$  de  $x$  tal que su clausura  $\overline{U}$  es compacta.

## 5.1. GRUPOS DISCONTINUOS CAPÍTULO 5. GRUPOS TOPOLÓGICOS

\* Existe un elemento  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$  tal que  $G = \{nz : n \in \mathbb{Z}\}$ . Este hecho implica que  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

\* Existen elementos  $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$  linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $G = \{nz + mw : n, m \in \mathbb{Z}\}$ . Este hecho implica que  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Teorema 5.1.34.** Si  $G$  es un grupo discreto no trivial de  $(\mathbb{R}, +)$ , entonces  $G$  es cíclico infinito.

*Demostración.* Tomemos  $x$  el real positivo más pequeño en  $G$  es decir  $x$  es el elemento en  $G$  tal que  $x > 0$  y  $|x| \leq |y|$  para todo  $y \in G - \{0\}$ . Entonces cíclico infinito  $\langle x \rangle$  es un subgrupo de  $G$ . Probaremos que  $\langle x \rangle = G$ . Consideremos el real positivo  $y \in G$ , de la propiedad arquimediana de los reales, existe un número natural  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$kx \leq y \leq (k+1)x.$$

Restamos el término  $kx$  en la anterior desigualdad y obtenemos

$$0 \leq y - kx \leq x.$$

Dado que  $x$  es el real positivo más próximo a 0, entonces  $y = kx$  o  $y = (k+1)x$ . Para cualquiera de las dos anteriores igualdades se concluye que  $y \in \langle x \rangle$ .  $\square$

**Teorema 5.1.35.** Todo subgrupo discreto  $G$  de un grupo compacto es finito si y solo si es compacto.

*Demostración.* Este hecho es consecuencia inmediata de la afirmación: Un espacio discreto es compacto y solo si es finito (véase [3, p. 222]).  $\square$

**Ejemplo 5.1.36.** El subgrupo  $G = \langle e^{p\pi i} : p \in \mathbb{R} - \mathbb{I}^5 \rangle$  de  $S^1$  es discreto. Nótese que  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_s$ , para algún  $s \in \mathbb{N}$ .

El subgrupo  $G = \langle [p, 0], [0, q] : p, q \in \mathbb{R} - \mathbb{I} \rangle$  del toro  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  es discreto. Nótese que  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_r * \mathbb{Z}_s$ , para algunos  $r, s \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 5.1.37.** El subgrupo  $H$  de  $G$  es discreto si y solo si no existen sucesiones de elementos diferentes en  $H$  que convergan al elemento neutro.

*Demostración.* Probemos la necesidad. Tomemos una sucesión  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  conformada por elementos de  $H$  tal que  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow Id$ , como  $H$  es discreto existe un abierto  $U$  en  $G$  tal que  $H \cap U = \{Id\}$ . Para el abierto  $U$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $h_n = Id$  para cada  $n \geq N$ .

Ahora, probaremos la suficiencia por contradicción. Supongamos que existe un elemento  $h$  en  $H$  tal que para todo abierto  $U$  de  $h$  se satisface que  $U \cap (H - \{h\}) \neq \emptyset$ , este hecho es equivalente a que exista una sucesión  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  conformada por elementos diferentes de  $H$  tal que  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow h$ . Dado que la aplicación  $g \mapsto g^{-1}$  es continua, entonces la sucesión  $(h^{-1}h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  esta conformada por elementos diferentes de  $H$  y además, converge al elemento identidad  $Id$ . Este hecho es una contradicción, pues no existen dichas sucesiones en  $H$ .  $\square$

---

<sup>5</sup> $\mathbb{I}$  denota el conjunto de los irracionales.

## 5.1. GRUPOS DISCONTINUOS CAPÍTULO 5. GRUPOS TOPOLÓGICOS

**Observación 5.1.38.** Si el grupo discreto  $G$  actúa discontinuamente sobre el espacio  $X$ , la órbita  $O_x$  es un subconjunto discreto de  $X$ , para todo  $x \in X$ .

**Teorema 5.1.39.** Si  $G$  actúa discontinuamente sobre  $X$ , entonces  $G$  es discreto.

*Demostración.* Consideremos una sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  conformada por elementos de  $G$  que converge al elemento  $Id$  y, el elemento  $x \in X$ . Recordemos que la acción

$$\alpha : G \times X \rightarrow X,$$

es continua. Si consideramos la sucesión  $(g_n, x)_{n \in \mathbb{N}}$  en el producto  $G \times X$ , entonces la sucesión  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  converge al punto  $Id(x) = x$ . Dado que  $G$  actúa discontinuamente en  $X$ , entonces existe un abierto  $U$  de  $x$  y existen  $h_1, \dots, h_n$  elementos en  $G$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $h_i(U) \cap U \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces existen una cantidad finita  $g_{i_1}, \dots, g_{i_m}$  de la sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $g_{i_k}(U) \cap U \neq \emptyset$ , para  $k \in \{1, \dots, m\}$  y  $g_n(U) \cap U = \emptyset$ , para todo  $n \in \mathbb{N} - \{i_1, \dots, i_m\}$ . Por otro lado, existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que  $g_l(x) \in U$  para cada  $l \geq L$ . Dado que  $G$  actúa discontinuamente sobre  $X$  se sigue que  $g_n = Id$ , para todo  $n \geq N$ , siendo  $N = \max\{i_1, \dots, i_m, L\}$ . De no ser cierto, entonces  $g_l(x) = x$ , para cada  $l \geq L$  pues la acción es se debe cumplir que  $\square$

Un subgrupo  $G$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  es **fuchsiano**<sup>6</sup> si es discreto.

**Lema 5.1.40.** Dado el punto  $z \in \mathbb{N}$  y el valor real  $\varepsilon > 0$  definimos el subconjunto

$$R(z, \varepsilon) = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) : \rho(z, T(z)) < \varepsilon\} \subset PSL(2, \mathbb{R})$$

el cual es compacto y contiene a la identidad.

*Demostración.* Introducimos la norma  $||| : GL(2, \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$  definida mediante

$$|||A||| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{|\det(A)|}}$$

siendo  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Nótese que  $|||\lambda A||| = |||A|||$  para toda matriz  $A \in GL(2, \mathbb{R})$  y cada  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Dado que la norma  $|||$  es una función continua, entonces para  $r > \sqrt{2}$  la imagen inversa del cerrado  $[0, r]$  bajo  $|||$  es el subconjunto cerrado

$$\{A \in GL(2, \mathbb{R}) : |||A||| \leq r\} \subset GL(2, \mathbb{R}), \quad (5.2)$$

el cual contiene a la matriz identidad. Adicionalmente, el conjunto anteriormente descrito es acotado y por lo tanto, es un subconjunto compacto de  $GL(2, \mathbb{R})$ .  $\square$

<sup>6</sup>El nombre de *fuchsiano* fue introducido por H. Poincaré en 1882 (véase [25]).



## 5.1. GRUPOS DISCONTINUOS CAPÍTULO 5. GRUPOS TOPOLÓGICOS

**Lema 5.1.41.** Si  $G$  es un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , entonces para cada elemento  $z \in \mathbb{H}$  y cada  $\varepsilon > 0$  el conjunto

$$\{T \in G : \rho(z, T(z)) \leq \varepsilon\}$$

es finito. Además, si para cada  $z \in \mathbb{H}$  y existe un real  $\varepsilon_x > 0$  tal que el conjunto  $\{T \in G : \rho(z, T(z)) \leq \varepsilon\}$  es finito, entonces  $G$  es discreto.

*Demostración.* Sabemos que  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa transitivamente sobre el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , entonces para cada  $z \in \mathbb{H}$  existe un elemento  $\bar{T} \in PSL(2, \mathbb{R})$  tal que  $\bar{T}(z) = i$ . A partir de la función  $T$  es fácil verificar que los conjuntos  $R(z, \varepsilon)$  y  $R(i, \varepsilon)$  están en biyección.

Por otro lado, dada la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  del Teorema ?? se sigue que

$$\begin{aligned} \cosh(\rho(i, T(z))) &= 1 + \frac{|i - T(i)|^2}{2\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(T(i))}, \\ &= 1 + \frac{\left|i - \frac{ai+b}{ci+d}\right|^2}{2}, \\ &\quad \frac{|ci+d|^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{\|T\|^2}{2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ahora, si consideramos la transformaciones de Möbius  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  que satisface  $\rho(i, T(i)) < \varepsilon$ , entonces de esta última relación se sigue

$$2 \cosh(\rho(i, T(i))) = \|T\|^2 < 2 \cosh(\varepsilon).$$

Recordemos que  $\cosh(\varepsilon) > 1$ , entonces  $\sqrt{2 \cosh(\varepsilon)} > \sqrt{2}$ . Del lema 5.1.40 y el hecho de ser  $\Gamma$  discreto se concluye que  $R(z, \varepsilon)$  es finito, pues de no serlo existiría una sucesión de elementos distintos de  $\Gamma$  que converge a la identidad.

Contrariamente, si el conjunto

$$\{T \in G : \rho(z, T(z)) \leq \varepsilon\}$$

es finito, de lema 5.1.40 se sigue que el conjunto  $\{T \in G : \rho(z, T(z)) < \varepsilon\}$  es abierto que contiene a la identidad. Ahora, como  $GL(2, \mathbb{R})$  es Hausdorff, existe un abierto  $U$  en  $GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $U \cap G = \{Id\}$ .  $\square$

**Teorema 5.1.42.** El subgrupo  $G$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  es fuchsiano si y solo si actúa propiamente discontinuamente sobre  $\mathbb{H}$ .

*Demostración.* Veamos que si  $G$  es un subgrupo fuchsiano, entonces  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ . Tomemos el subconjunto compacto  $K \subset$

## 5.1. GRUPOS DISCONTINUOS

---

$\mathbb{H}$ , entonces existe un elemento  $z \in K$  y un valor real  $r > 0$  tal que la bola hiperbólica  $B(z, r)$  contiene al compacto  $K$ . Nótese que si  $T$  es un elemento de  $G$  tal que  $\rho(z, T(z)) \leq r$ , entonces  $K \cap T(K) \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $B(z, r) \cap T(B(z, r)) \neq \emptyset$ . De existir una cantidad infinita de elementos  $T$  de  $G$  que satisface que  $K \cap T(K) \neq \emptyset$ , entonces el conjunto  $\{T \in G : \rho(z, T(z)) \leq r\}$  debe ser también infinito. Sin embargo, el lema 5.1.41 afirma que dicho conjunto es finito. Por lo tanto, solo una cantidad finita de elementos  $T$  de  $G$  satisfacen  $K \cap T(K) \neq \emptyset$ .

Probemos la condición suficiente. Tomemos el subgrupo  $G$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  el cual actúa propiamente discontinuamente sobre el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ . Dado que  $\mathbb{H}$  es localmente compacto, entonces  $G$  actúa discontinuamente sobre  $\mathbb{H}$  (véase Teorema 5.1.25). Ahora, del teorema 5.1.39 se sigue que  $G$  es discreto, por lo tanto  $G$  es un grupo fuchsiano.  $\square$

**Corolario 5.1.43.** *Para cada subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{H}$  y cada subgrupo discreto  $G < PSL(2, \mathbb{R})$  solo una cantidad finita de elementos de  $G$  tienen puntos fijos en  $K$ .*

# Capítulo 6

## De interés

Una **superficie de Riemann** (conexa)  $X$  es una variedad compleja de dimensión compleja 1.

Si sobre una superficie de Riemann  $X$  existe una vecindad  $V$  tal que sea conformemente equivalente a  $\Delta - \{0\}$ , entonces diremos que  $X$  tiene una **ponchadura** en  $V$ . Por el teorema de singularidades removibles, existe una superficie de Riemann

**Teorema 6.0.1.** (*Teorema de Riemann de Singularidades Removibles*) [Fulton, Theorem 1.8 p. 5] *Dado un subconjunto abierto  $U$  de la superficie de Riemann  $X$  y el punto  $x \in U$ . Supongamos que la función  $f : U - \{x\} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y es acotada en alguna vecindad de  $x$ . Entonces  $f$  puede ser extendida a una única función holomorfa  $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ .*

Entonces existe una superficie de Riemann  $\hat{X}$  tal que  $X$  se mapea biholomorfamente sobre  $\hat{X} - \{1\text{punto}\}$ .

Las superficies orientales compactas son clasificadas salvo

# Capítulo 7

## El flujo Geodésico

plano tangente

tangente unitario

### Acknowledgements

The author was partially supported by UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MANIZALES. Camilo Ramírez Maluendas have dedicated this work to his beautiful family: Marbella and Emilio, in appreciation of their love and support.

# Bibliografía

- [1] Euclid, *The Thirteen books of Euclid's Elements*, translated and edited by T. L. Heath, vol. III, Cambridge University Press, 1926.
- [2] Manfredo Perdigão do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [3] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London-Sydney, 1978. Reprinting of the 1966 original; Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.
- [4] Judith N. Cederberg, *A course in modern geometries*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1989 original. MR1409363
- [5] Gareth A. Jones and David Singerman, *Complex functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. An algebraic and geometric viewpoint. MR890746
- [6] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [7] Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen I*, Math. Ann. **16** (1880), no. 4, 441–528 (German).
- [8] Tristan Needham, *Visual complex analysis*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997. MR1446490
- [9] Bruce P. Palka, *An introduction to complex function theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991. MR1078017
- [10] Svetlana Katok, *Fuchsian groups*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [11] John B. Conway, *Functions of one complex variable. II*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 159, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1344449
- [12] Michael J. Croww, *A History of Vector Analysis, The Evolution of the Idea of a Vectorial System.*, Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press, 1967.
- [13] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*, 2nd ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.
- [14] Luis A. Santaló, *Geometrías no Euclidianas*, Cuadernos de Eudeba, vol. 45, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1976.
- [15] William Abikoff, *The uniformization theorem*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), no. 8, 574-592.
- [16] Alan F. Beardon, *A Premier on Riemann Surfaces*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [17] ———, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1983.

- [18] H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean geometry*, 6th ed., MAA Spectrum, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1998. MR1628013
- [19] Henri de Saint-Gervais, *Uniformization of Riemann Surfaces Revisiting a hundred-year-old theorem*, European Mathematical Society, 2010.
- [20] H. M. Farkas and I Kra, *Riemann Surfaces*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [21] L. R. Ford, *The fundamental region for a Fuchsian group*, Bull. Amer. Math. Soc. **31** (1925), no. 9-10, 531–539.
- [22] Svetlana Katok, *Fuchsian groups, geodesic flows on surfaces of constant negative curvature and symbolic coding of geodesics*, Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic, Clay Math. Proc., vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 243–320.
- [23] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman, *Basic complex analysis*, 2nd ed., W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [24] Bernard Maskit, *Kleinian groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 287, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [25] H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsians*, Acta Math. **1** (1882), 1–62.
- [26] Otto Schreier, *Abstrakte kontinuierliche Gruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), no. 1, 15–32 (German).
- [27] Richard Evan Schwartz, *Mostly surfaces*, Student Mathematical Library, vol. 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.