Ejercicio 5

$$(PO)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \underbrace{\sum_1^n |x_i|}_{\|x\|_1} = f(x)$$

a) * Para probar que $f(x)$ es convexa primero veamos que todas las normas son convexas, es decir, $g(x)=\|x\|$ es convexa.

Sea $x,y\in\mathbb{R}^n$ y $t\in[0,1]$

$$\Rightarrow \|tx+(1-t)y\| \underset{\uparrow\text{desigualdad triangular}}{\leq} \|tx\|+\|(1-t)y\| = t\|x\|+(1-t)\|y\|$$

$$\Rightarrow g(tx+(1-t)y)\leq t\,g(x)+(1-t)\,g(y)$$

$\Rightarrow$ Las normas son convexas

* Luego veamos que si $h(x)$ es convexa y no negativa $\Rightarrow h^2(x)$ es convexa

Sabemos que:

$$h(tx+(1-t)y)\leq t\,h(x)+(1-t)\,h(y)$$

Elevamos al cuadrado a ambos lados y como $h(x)\geq 0\ \forall x \Rightarrow$ se mantiene la desigualdad

$$h^2(tx+(1-t)y)\leq \underbrace{t^2h^2(x)+(1-t)^2h^2(y)+2t(1-t)h(x)h(y)}_{\circledast}$$

Trabajemos sobre $\circledast$, sumamos y restamos terminos

$$\circledast = t^2h^2(x)+(1-t)^2h^2(y)+2t(1-t)h(x)h(y)-t\,h^2(x)-(1-t)h^2(y)$$
$$+t\,h^2(x)+(1-t)\,h(y)$$

Agrupando los 5 primeros terminos:

$$\circledast = \underbrace{-t(1-t)\left[h^2(x)+h^2(y)+2h(x)h(y)\right]}_{\overset{\wedge}{0}} + th^2(x)+(1-t)h^2(y)$$

$$\Rightarrow \circledast \leq th^2(x)+(1-t)h^2(y)$$

$$\Rightarrow h^2(tx+(1-t)y) \leq th^2(x)+(1-t)h^2(y) \Rightarrow h^2 \text{ convexa}$$

Ahora con estos dos resultados, veamos como aplicarlos a (P0).

- $\|x\|_1$ es convexa por ser una norma

- $\|Ax+b\|$ es convexa por ser una norma compuesta con una función lineal (ver ej 1c)

- $\|Ax+b\|^2$ es convexa porque $\|Ax+b\|$ es convexa y no negativa

- $\frac{1}{2}\|Ax+b\|^2+\|x\|_1$ es convexa por ser la suma positiva de funciones convexas

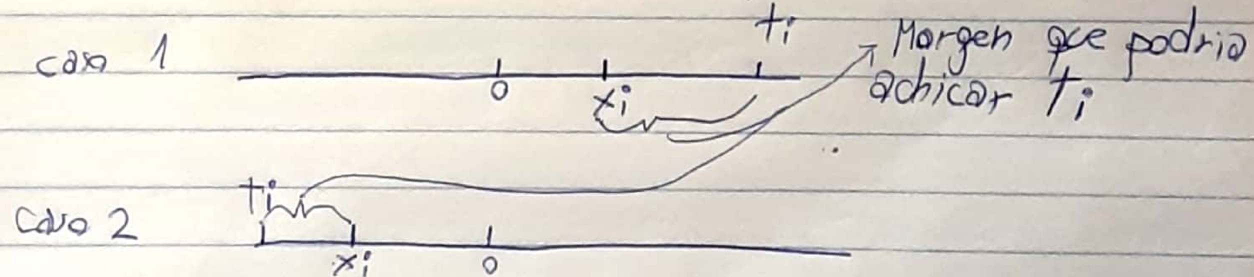
b) (QP) $\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ t\in\mathbb{R}^n}} \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2+\sum_{i=1}^{n} t_i = f(x,t)$

$$\text{s.t: } \begin{array}{l} x_i \leq t_i \\ -x_i \leq t_i \end{array}$$

Supongamos que $(\bar{x},\bar{t})$ son solucion de QP
Sabemos que $t_i \geq |x_i| \ \forall i$ por cumplir las restricciones.

Vamos a probar que $\bar{t}=|\bar{x}|$, o lo que es lo mismo: $\bar{t}_i=|\bar{x}_i| \ \forall i$.

Supongamos por absurdo que $\bar{t}_i > |\bar{x}_i|$



$$f(\bar{x},\bar{t})=\frac{1}{2}\|A\bar{x}-b\|^2+\sum_{i=1}^{n}\bar{t}_i \leq \frac{1}{2}\|A\bar{x}-b\|^2+\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

Entonces si $\bar{t}_i>|x_i| \Rightarrow \bar{t}_i$ no seria el minimo
$\Rightarrow \bar{t}_i=|\bar{x}_i|$

Sabemos que en el minimo se cumple la siguiente relacion entre variables

$$\boxed{\bar{t}_i=|x_i|}$$

Escaneado con CamScanner

Entoces sabemos que podemos restringir la funcion $f(x,t)$ en $f(x,|x|)$ y buscar el minimo aqui y sera el mismo.

Buscar el minimo es $f(x,|x|)$ no es más que resolver el problema PQ