Ejercicio 4

Parte a

El problema de optimización equivalente con la variable de slack t es

$$
\begin{aligned}
\min_{(\mathbf{p},\mathbf{g},\mathbf{t})} \quad & g_1 + t \\
\text{sujeto a:} \quad & p_1 + p3 - g_1 = 0 && (\lambda_1) \\
& p_2 + p3 + g_2 = d_2 && (\lambda_2) \\
& p_1 - p_2 = d_3 && (\lambda_3) \\
& p_1 + p_2 - p3 = 0 && (\nu) \\
& p_2 \leq R && (\mu_1) \\
& -p_2 \leq R && (\mu_2) \\
& g_1 \geq 0 && (\mu_3) \\
& g_2 \geq 0 && (\mu_4) \\
& t \geq max\{0, 4(g_2 - 40MW)\} && (\mu_t)
\end{aligned}
$$

Notar que la ultima restricción se puede dividir en 2 restricciones. De esta forma el problema a resolver por computadora es

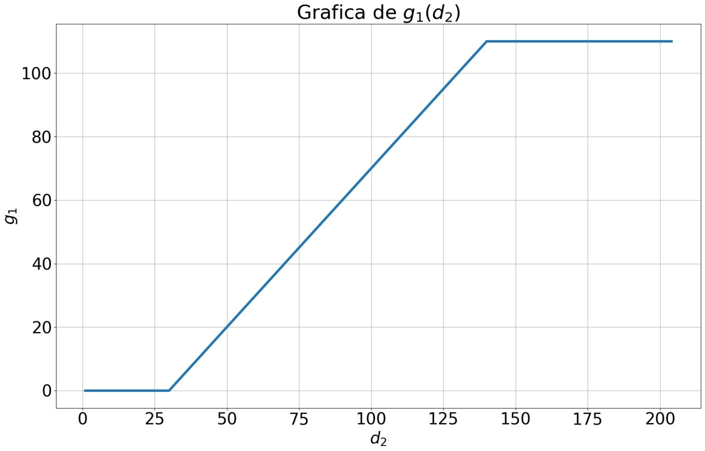
$$
\begin{aligned}
\min_{(\mathbf{p},\mathbf{g},\mathbf{t})} \quad & g_1 + t \\
\text{sujeto a:} \quad & p_1 + p3 - g_1 = 0 && (\lambda_1) \\
& p_2 + p3 + g_2 = d_2 && (\lambda_2) \\
& p_1 - p_2 = d_3 && (\lambda_3) \\
& p_1 + p_2 - p3 = 0 && (\nu) \\
& p_2 \leq R && (\mu_1) \\
& -p_2 \leq R && (\mu_2) \\
& g_1 \geq 0 && (\mu_3) \\
& g_2 \geq 0 && (\mu_4) \\
& t \geq 0 && (\mu_5) \\
& t \geq 4(g_2 - 40MW) && (\mu_6)
\end{aligned}
$$

Parte b

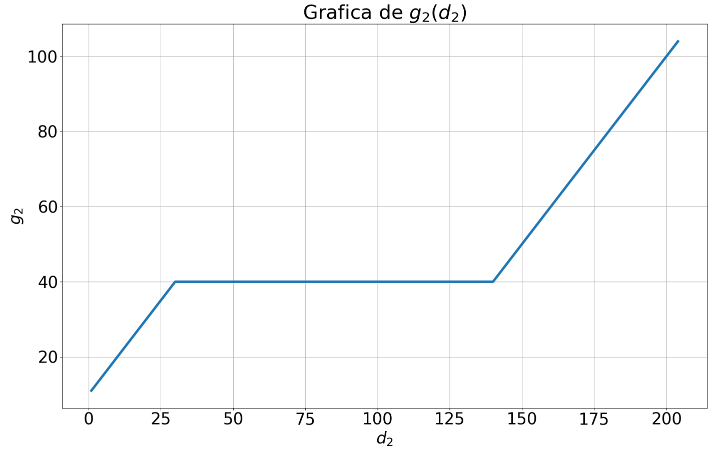
Para esta parte se fijan los parámetros R y d_3 en:

$$
\begin{cases} R = 30\text{MW} \\ d_3 = 10\text{MW} \end{cases}
$$

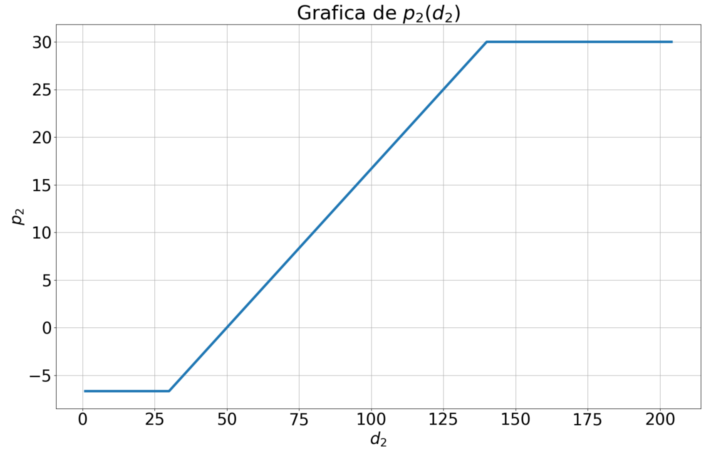
Se resuelve el problema variando d_2 entre los enteros en el rango entre 0 y 205. Las gráficas que se obtienen se pueden ver en la Figura 1.



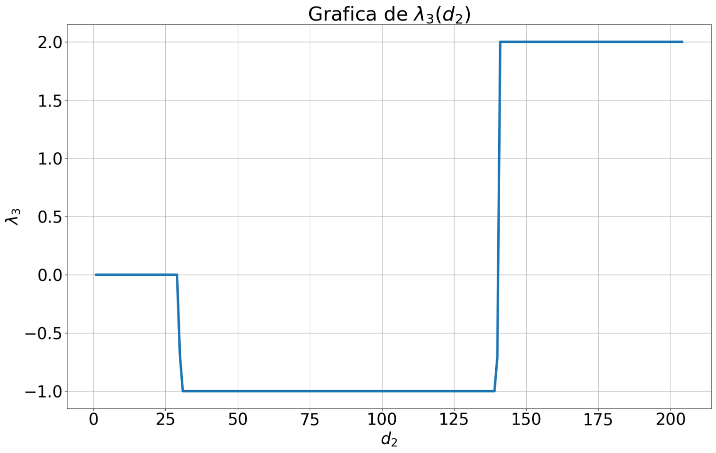
(a)



(b)



(c)



(d)

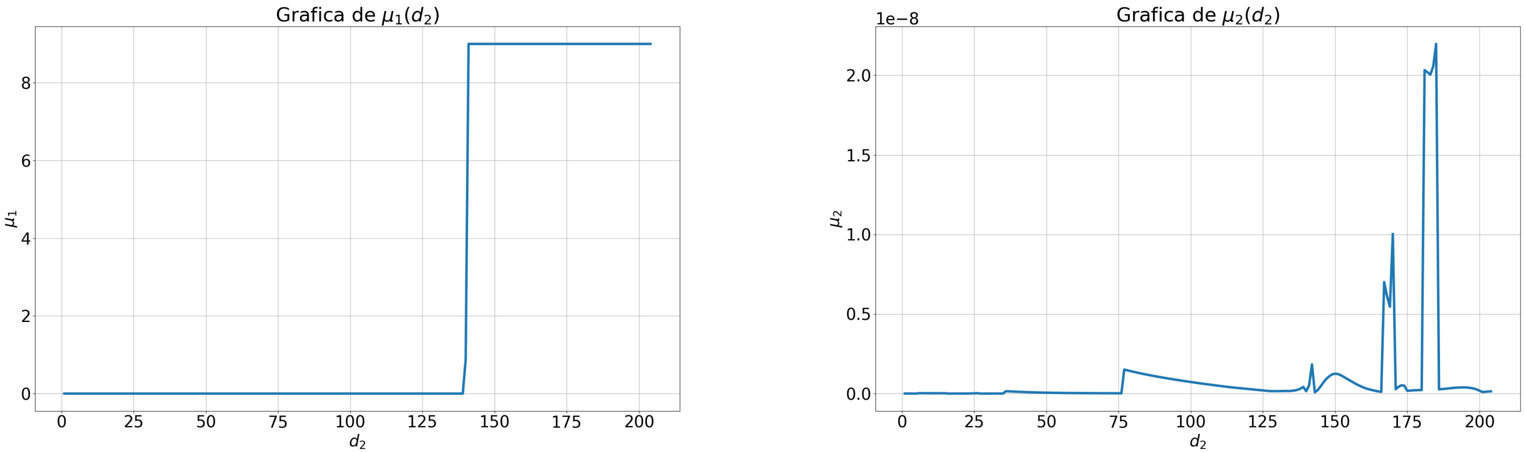
Figure 1: Gráficas de parámetros obtenidos en función de d_2

Lo primero a destacar es que se observan dos claros "quiebres" en las cuatro gráficas. Estos se dan en los valores correspondientes a $d_2 = 30MW$ y $d_2 = 140MW$. Los dos quiebres se corresponden a interpretaciones intuitivas de la realidad.

El primer quiebre se da debido a que mientras se consuman menos de $40MW$ el generador 2 es capaz de suministrar toda la potencia a costo 0, pero cuando se supera este valor el costo de generación de g_2 sera 4 por cada MW extra, mientras que el costo de g_1 es 1 por cada MW, siendo más barato encender el generador 1 y apagar el generador 2. El quiebre se da en $d_2 = 30MW$ ya que la demanda total se iguala a los $40MW$, notar que $d_1 = 10MW$ y por lo tanto $d = d_1 + d_2 = 40MW$.

El segundo quiebre se debe a que por la linea de 2 a 3 puede pasar un máximo de $|p_2| < R = 30MW$, lo que lleva a que no es posible suministrar toda la potencia que se desee desde g_1 a d_2 (recordar que por la restricción $p_3 = p_1 + p_2$ tampoco se puede enviar directo desde g_1 a d_2 por p_3). Este quiebre es en $d_2 = 140MW$ ya que este es el valor que hace necesario transmitir más de los $30MW$ permitidos por la linea. Como consecuencia, para satisfacer la demanda nueva, es necesario volver a encender el generador 1.

Las explicaciones anteriores se corresponden a interpretaciones intuitivas del problema en cuestión. Ahora analicemos cuantitativamente los resultados obtenidos para los multiplicadores, para esto se presentan las gráficas de λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 los cuales son de interés.
Notar que bien se podría analizar, por ejemplo el valor obtenido de λ_1, pero esto no tiene una interpretación clara de la realidad ya que querría decir que el consumo de potencia sea mayor/menor a la generación, lo cual no es posible y por lo tanto se decide no analizar.
En la Figura 2 se observa las gráficas mencionadas



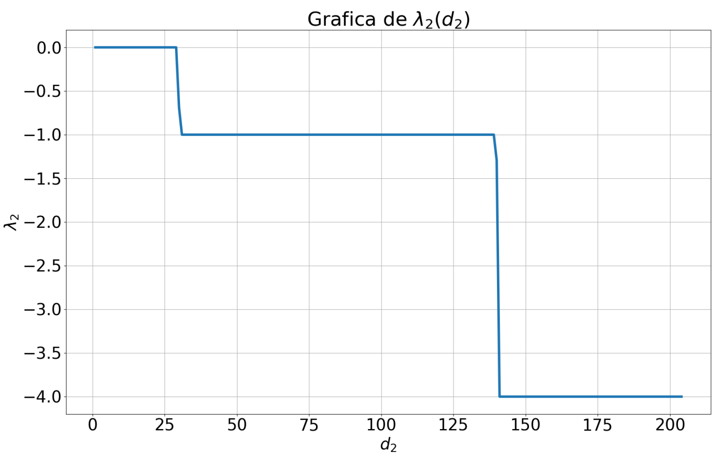
(a) (b)

Figure 2: Gráficas de μ_1 y μ_2 obtenidos en función de d_2

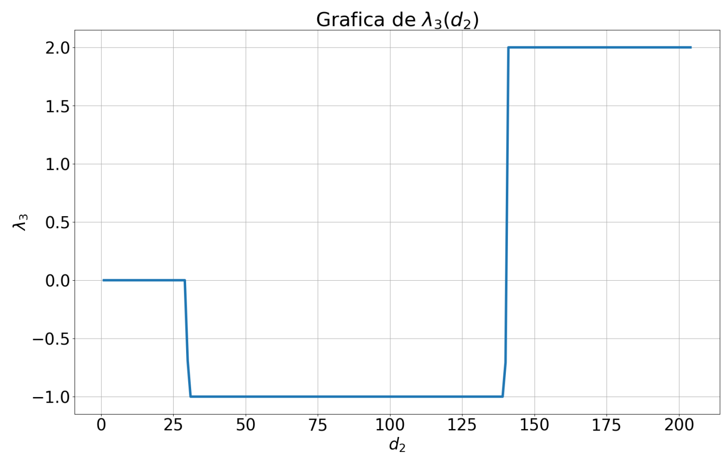
Para interpretar las gráficas anteriores es útil el *Teorema de Sensibilidad (TdS)*. Mirando la gráfica de μ_1 se observa que su valor es 0 hasta que se active su restricción, cuando esto ocurre su valor salta a 9, lo que indica que (por el Tds) ante un incremento dR en R, el costo se decrementara en $9dR$. Es decir, podría ser de vital importancia aumentar la capacidad máxima de transmisión entre 2 y 3 para disminuir el costo.

En tanto, en la gráfica de μ_2 se ve que esta es siempre 0, por cuestiones numéricas algunos valores son cercanos a $2e-8$. Lo anterior representa que nunca se activa la limitación de transmitir más de R desde 2 hasta 3.

Para responder la pregunta de para que valores d_2 es conveniente ofrecer energía gratis en 3, es necesario observar la Figura 3, que contiene la gráfica de λ_3.



(a)



(b)

Figure 3: Gráficas de λ_2 y λ_3 obtenidos en función de d_2

En la gráfica λ_3 de anterior se observa:

- En un principio $\lambda_3 = 0$, lo que implica que al modificar d_3 el costo no se vera afectado, esto se debe a que aun puedo continuar entregando potencia a costo 0 desde g_1.

- Luego $\lambda_3 = -1$, lo que lleva a que aumentos en d_3 produzcan un aumento en el costo.

- Por ultimo, y mas importante, cuando d_2 es mayor a $140MW$, se tiene que $\lambda_3 = 2$; esto quiere decir que si aumentamos d_3 ¡el costo disminuye! Siendo esto absolutamente contra intuitivo.

Lo anterior se puede explicar debido a que cuando en d_2 se solicita mucha potencia lo más conveniente seria que la suministrase el generador 1, pero esto no es posible por la restricción $|p_2| < R$. Sin embargo, si hacemos que d_3 consuma potencia, el valor de p_2 disminuirá cumpliendo así la restricción. Esto permite que llegue potencia desde el generador 1 hasta d_2 a un menor costo a pesar de una mayor demanda.
Agregar que el causante de lo anterior es la ecuación asociada a ν, la cual a primera vista no tiene una explicación intuitiva.

Por completitud, se añadió la gráfica de $\lambda_2(d_2)$, que muestra que $\lambda_2 < 0$ para todo d_2, indicando que siempre que se aumente el consumo en 2 se aumentara su costo. Además, esto se puede corroborar en la Figura 4.

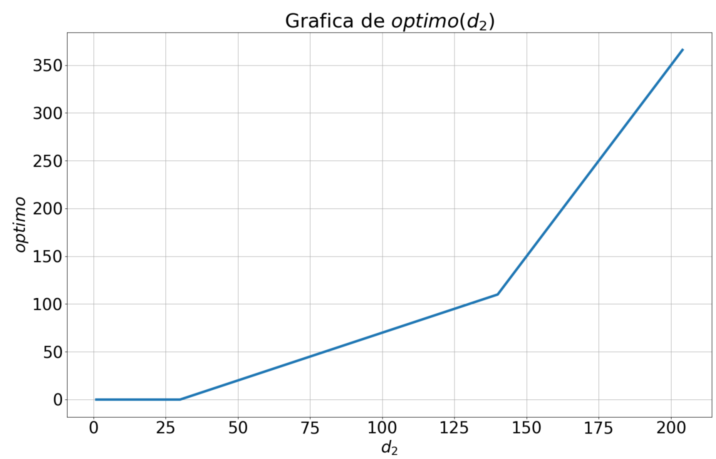


Figure 4: Costo óptimo al variar d_2 y demás parámetros fijos.