Ejercicio 1

a) $g(x) = \sum_i w_i f_i(x) \quad , w_i \geq 0$

Sabemos que f_i es convexa $\forall i$

$$\Rightarrow f_i(tx + (1-t)y) \leq t f_i(x) + (1-t) f_i(y)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
$\forall t \in [0,1]$

Queremos probar que g es convexa.
Es decir, que se cumple

$$\underbrace{g(tx+(1-t)y)}_{} \overset{?}{\leq} t g(x) + (1-t) g(y)$$

trabajamos solo sobre el termino izquierdo

convexidad de f_i

$$\sum_i w_i f_i(tx+(1-t)y) \underset{✱}{\leq} \sum_i w_i [t f_i(x) + (1-t) f_i(y)]$$

$$= t \underbrace{\sum_i w_i f_i(x)}_{= g(x)} + (1-t) \underbrace{\sum_i w_i f_i(y)}_{= g(y)}$$

Por lo tanto nos queda

$$g(tx+(1-t)y) \leq t g(x) + (1-t) g(y)$$

$\Rightarrow$ g convexa

✱ Ademas de convexidad, hay que pedir que $w_i > 0$, lo que esta dado por hipotesis

b) $h(x) = \max\{f_i(x) : i = 1, \dots, k\}$

$h(tx + (1-t)y) = \max\{f_i(tx + (1-t)y)\}$

Supongamos que j es el indice de la función que es máxima en $tx + (1-t)y$

$\Rightarrow h(tx + (1-t)y) = f_j(tx + (1-t)y)$

Como f_j es convexa

$f_j(tx + (1-t)y) \leq t f_j(x) + (1-t) f_j(y)$

$\Rightarrow h(tx + (1-t)) \leq t f_j(x) + (1-t) f_j(y)$

Por otro lado sabemos que

$\begin{cases} f_j(x) \leq h(x) \\ f_j(y) \leq h(y) \end{cases} \Rightarrow t f_j(x) + (1-t) f_j(y) \leq t h(x) + (1-t) h(y)$

$\Rightarrow h(tx + (1-t)) \leq t h(x) + (1-t) h(y)$

$\Rightarrow h$ convexa

c) $\ell(x) = f_1(Ax+b)$

$\ell(tx+(1-t)y) = f_1(A(tx+(1-t)y))$

Operamos en la expresión anterior:

$$\ell(tx+(1-t)y) \overset{\text{sumo y resto } tb}{=} f_1(tAx+(1-t)Ay+tb+(1-t)b)$$

$$= f_1(t(Ax+b)+(1-t)(Ay+b))$$

$$\overset{f_1 \text{ convexa}}{\leq} t\underbrace{f_1(Ax+b)}_{\ell(x)}+(1-t)\underbrace{f(Ay+b)}_{\ell(y)}$$

$$= t\,\ell(x) + (1-t)\,\ell(y)$$

$\Rightarrow \ell(tx+(1-t)y) \leq t\,\ell(y)+(1-t)\,\ell(y)$

$\Rightarrow \ell$ convexa

d) $Y = \bigcap_i X_i$

Tomemos dos puntos $z, w \in Y$

$\Rightarrow z, w \in X_i \ \forall i$

Como X_i es convexo $\forall i$

$\Rightarrow q_t = tz + (1-t)w \in X_i \ \forall i$

Por def de interseccòn $q_t \in Y$

$\Rightarrow q_t = tz + (1-t)w \in Y$

Como z, w son cualquier punto de Y
y verifican la def de convexidad

$\Rightarrow Y$ es convexo

e) $B(c,r) = \{x : \|c-x\| \leq r\}$

Sea $z, w \in B(c,r)$. Es decir:

$$\begin{cases} \|c-z\| \leq r \\ \|c-w\| \leq r \end{cases}$$

Veamos si $p = tz + (1-t)w \in B(c,r)$

Es decir si

$$\|c-p\| \leq r$$

$$\|c-p\| = \|c - (tz + (1-t)w)\|$$

sumo y resto tc $= \|tc + (1-t)c - tz - (1-t)w\|$

$$= \|t(c-z) + (1-t)(c-w)\|$$

desigualdad triangular $\leq \|t(c-z)\| + \|(1-t)(c-w)\|$

$$= t\underbrace{\|c-z\|}_{\leq r} + (1-t)\underbrace{\|c-w\|}_{\leq r}$$

$$\leq tr + (1-t)r = r$$

$\Rightarrow \|c - [tz + (1-t)w]\| \leq r$

$\Rightarrow tz + (1-t)w \in B(c,r) \quad \forall z, w \in B(c,r)$
$\forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow B(c,r)$ es convexa

f) $C = \{ \sum_i \theta_i x_i : \sum_i \theta_i , \theta_i \geq 0 \ \forall i \}$

Sea $z, w \in C$. Entonces se cumple:

$$\begin{cases} \exists \theta_z / z = \sum_i \theta_{zi} x_i \ \text{ y } \ \sum_i \theta_{zi} = 1 \\ \exists \theta_w / w = \sum_i \theta_{wi} x_i \ \text{ y } \ \sum_i \theta_{wi} = 1 \end{cases}$$

Veamos si $p = tw + (1-t) z \in C$ $\quad \forall w, z \in C$
$\forall t \in [0,1]$

Sustituimos w, z por su valor

$$p = t \sum_i \theta_{zi} x_i + (1-t) \sum_i \theta_{wi} x_i$$

$$p = \sum_i \underbrace{[t \theta_{zi} + (1-t)\theta_{wi}]}_{\theta_{pi}} x_i = \sum_i \theta_{pi} x_i$$

Si probamos que $\begin{cases} \theta_{pi} \geq 0 \ \forall i \\ \sum \theta_{pi} = 1 \end{cases} \Rightarrow C$ es convexo

Veamos

* $\theta_{pi} \geq 0$: θ_{pi} es la suma de elementos positivos $\Rightarrow \theta_{pi} \geq 0$

* $$\sum_i \theta_{pi} = \sum_i t\theta_{zi} + (1-t)\theta_{wi} = t \overbrace{\sum_i \theta_{zi}}^{=1} + (1-t) \overbrace{\sum_i \theta_{wi}}^{=1}$$
$$= t + (1-t) = 1$$

$\Rightarrow C$ es convexo