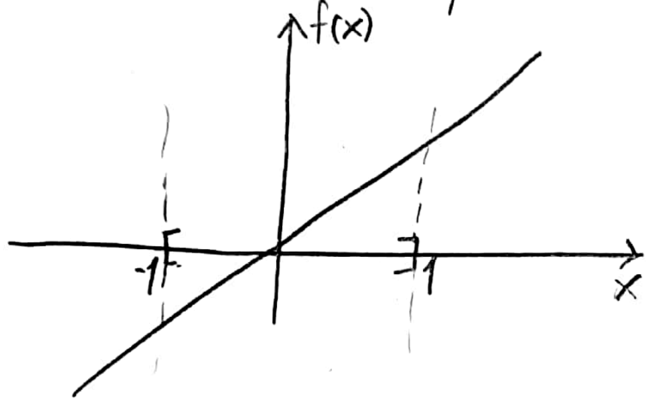
Ejercicio 1

$$(P)\begin{cases} \min & f(x) \\ st & g(x) \le 0 \end{cases}$$

$*$ $f(x) = x \qquad g(x) = x^2 - 1$

a) Graficamente el problema a resolver es:



Por lo que:

$\boxed{x^* = -1}$

$\boxed{f^* = -1}$

b) Paso 1

$$L(x,\mu) = x + \mu(x^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\mu x = 0 \iff x = \frac{-1}{2\mu}$$

Paso 2

$$d(\mu) = L\left(\frac{-1}{2\mu}, \mu\right) = \frac{-1}{2\mu} + \mu\left(\frac{1}{4\mu^2} - 1\right)$$

$$d(\mu) = \frac{-1}{4\mu} - \mu$$

Paso 3

$$(D)\begin{cases} \max & \frac{-1}{4\mu}-\mu \\ st & \mu \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial d}{\partial \mu} = \frac{1}{4\mu^2}-1=0 \Leftrightarrow \mu=\pm 1/2$$

como $\mu \geq 0 \Rightarrow \boxed{\mu^*=1/2}$

y $d(\mu^*)=\boxed{d^*=-1}$

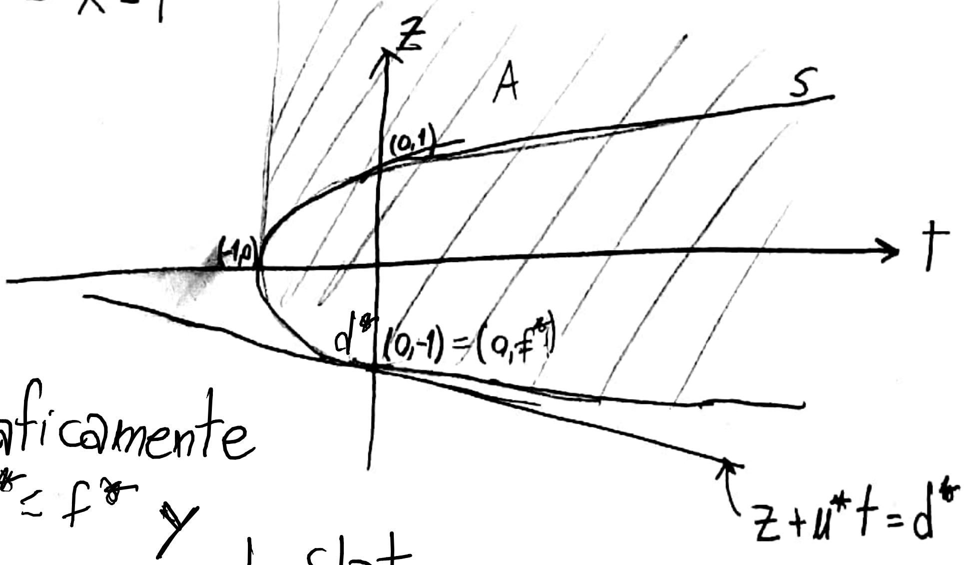
c) Se cumple la condicion de slater sii

$\exists \bar{x} \in X / g(\bar{x})<0$

Ver que $\exists \bar{x}=0 / g(0)=-1<0 \Rightarrow$ se cumple slater

Como $d^*=f^*$ se cumple dualidad fuerte y debil

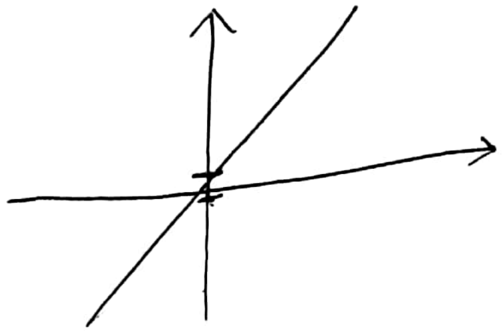
d) $z=x$
$t=x^2-1 \Rightarrow t=z^2-1$



Ver graficamente que $d^* \leq f^*$ y además se cumple Slater

* $f(x)=x$ $\quad g(x)=x^2$

a)



$\Rightarrow \boxed{f^*=0}$

$\boxed{x^*=0}$

b) Paso 1

$$L(x,\mu)= x+\mu x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1+2\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2\mu}$$

Paso 2

$$d(\mu)=L\left(\frac{1}{2\mu},\mu\right)= \frac{-1}{2\mu}+\frac{1}{4\mu} = \frac{-1}{4\mu}$$

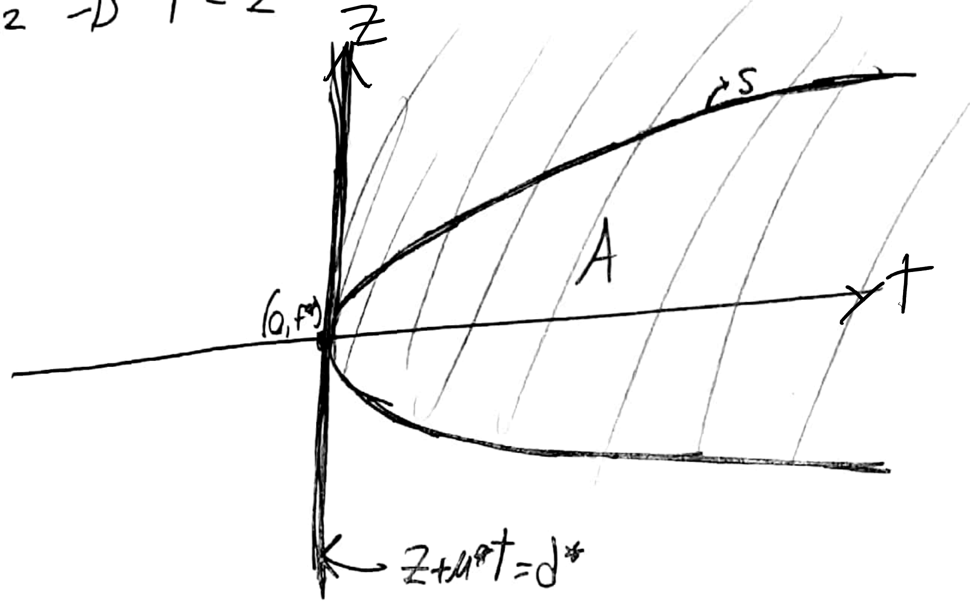
Paso 3

$$(D)\begin{cases} \max \frac{-1}{4\mu} \\ \mu \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mu^*=+\infty} \quad \boxed{d^*=0}$$

c) En este caso $\nexists\, \bar{x} \in X / g(\bar{x})<0 \Rightarrow$ no se cumple slater

Se cumple dualidad fuerte y debil porque $f^*=d^*$

d) $z = x$
$t = x^2$ $\Rightarrow$ $t = z^2$

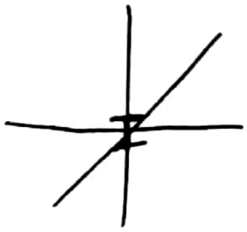


Se verifica que la recta que soporta al conjunto tiene pendiente ∞.

Además, se observa que no se cumple slater porque no existe ningún punto de S con $t < 0$

* $f(x) = x \qquad g(x) = |x|$

a)



$$\boxed{f^* = 0}$$

$$\boxed{x^* = 0}$$

b) Paso 1

$$L(x,\mu) = x + \mu|x| = \begin{cases} x(1+\mu) & \text{si } x > 0 \\ x(1-\mu) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Caso $x > 0$

$$L(x,\mu) = x(1+\mu)$$

como $\mu > 0$ el mínimo en esta región se da en $x_{opt} = 0 \quad \forall \mu > 0$

- Caso $x < 0$

$$L(x,\mu) = x(1-\mu)$$

$$x_{opt} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene que

$$x^* = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Paso 2

$$d(\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Paso 3

$$(D)\ \begin{cases} \max\limits_{u \geq 0} & \begin{cases} -\infty & \text{si } u<1 \\ 0 & \text{si } u \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Toda la region $[1,\infty)$ hace que $d=0$ y se maximice

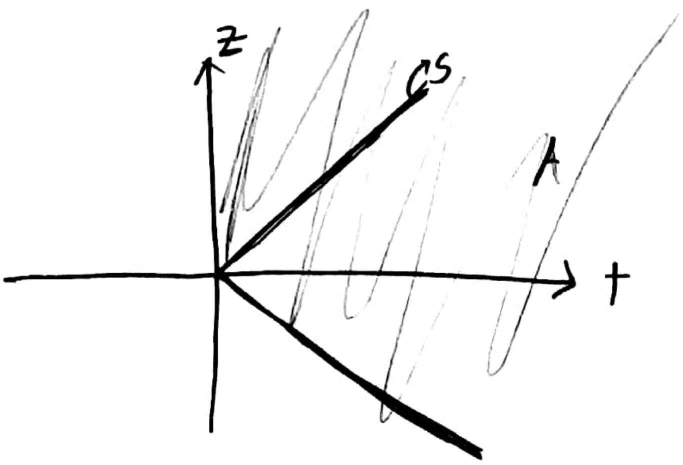
$$\Rightarrow \boxed{d^* = 0}$$

$$\boxed{u^* = [1,\infty)}$$ ← abuso de notación

c) No se cumple Slater ya que $\nexists\, \bar{x} \in X \,/\, |\bar{x}| < 0$

se cumple dualidad fuerte y debil

d) $z = x$
$t = |x|$ $\Rightarrow t = |z|$



Notar que como $t=|z|$ no es diferenciable no existe una unica recta tangente. Notar que u puede tomar cualquier valor correspondiente a los subgradientes de $t=|z|$

* $f(x) = x^3 \qquad g(x) = -x+1$

a)

$\Rightarrow \boxed{f^* = 1}$ $\boxed{x^* = 1}$

b) Paso 1

$$L(x,\mu) = x^3 + \mu(1-x)$$

Notar que al ser un polinomio de grado 3 no es valido anular la derivada para hallar el infimo.

Notar que $\lim\limits_{x \to -\infty} L(x,\mu) = -\infty \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

Paso 2

$$d(\mu) = -\infty$$

Paso 3

$$(D) \begin{cases} \max & -\infty \\ \text{st} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

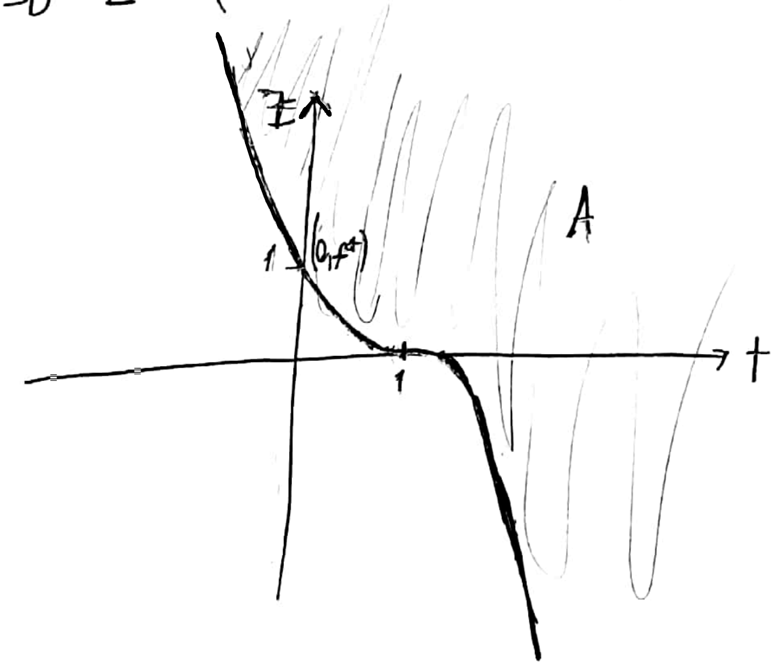
Se tiene que $d(\mu) = -\infty \ \forall \mu \Rightarrow \boxed{d^* = -\infty}$ $\boxed{\mu^* = [0, +\infty)}$

c) Se cumple slater porque

$$\exists \bar{x}=2 \,/\, g(2)=-2+1=-1<0$$

Hay un GAP $=\infty$ por lo que no se cumple dualidad fuerte. Si se cumple dualidad debil porque $d^* \leq f^*$

d) $\begin{matrix} z = x^3 \\ t = -x+1 \end{matrix} \Rightarrow z = (1-t)^3$



En este caso no existe ninguna recta que soporte al conjunto. Se puede interpretar que $d=-\infty$ es una recta que corta por $-\infty$.

Ejercicio 2

Por KKT tenemos que una condición necesaria de optimalidad es:

$$\nabla L_{x,y,z}(x^*, y^*, z^*, u^*) = 0 \qquad (1)$$
$$g(x^*, y^*, z^*) \leq 0$$

Además, como el problema es convexo entonces se cumple complementary slackness. Es decir:

$$u_j^* g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, 6 \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se desprende que bien $u_j^* = 0$ o $g_j(x^*) = 0$. De esta forma, para cada j se deben resolver dos problemas. Si se sigue esta estrategia, entonces se tendran 2^6 problemas. Notar que varios de estos problemas son incompatibles sin necesidad de plantearlos, en particular aquellos en los que deba cumplirse simultaneamente $x=0, x=1$; $y=0, y=1$; $z=0, z=1$. Por lo que la cantidad se reduce a 27 casos posibles.

Analizemos los 4 casos solicitados

- Si se da en el interior notar que $g_j(x^*,y^*,z^*)<0$.

lo que implica que $\mu_j=0 \ \forall j$ (por ecuación (2)).
Por (1) el gradiente de f se debe anular.

- Si se da en una cara se tendra que

$$\begin{cases} g_j(x^*,y^*,z^*)<0 & \forall j\neq k \\ g_k(x^*,y^*,z^*)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_j=0 \ \forall j\neq k \\ \mu_k \geq 0 \end{cases}$$

Solo el multiplicador asociado a la restriccion de la cara puede ser distinto de 0.

Notar que μ_k en $\nabla L_{x,y,z}$ solo aparecera en una de las tres componentes. Ademas $g_k=0$ determinara el valor de x, y o z. Por lo tanto, con las 2 ecuaciones restantes de ∇L se podra hallar el punto candidato (2 ecuaciones con 2 incognitas).

- Si se da en una arista, habra 2 restricciones tal que $g_l(x^*, y^*, z^*) = 0$, $g_m(x^*, y^*, z^*) = 0$ y $g_j(x^*, y^*, z^*) < 0$ $\forall j \neq l, m$. Por lo que $\mu_j = 0$ $\forall j \neq l, m$.
Las ecuaciones $g_l = 0$ y $g_m = 0$ determinarar el valor de dos de las variables x, y, z.
Por otro lado μ_l y μ_m solo aparecen en 2 componentes del gradiente, quedando una componente que no depende de μ. Entonces se puede determinar la variable restante con esa ecuacion.

- Los vertices se añaden automaticamente como candidatos a minimos.

En conclusión, el procedimiento consiste en hallar todos los candidatos posibles en el interior, caras, aristas y vertices; quedandose con aquel que de menor valor de f.

* Comencemos con los vertices

- $f(0,0,0)=0$
- $f(0,0,1)=1$
- $f(0,1,0)=0$
- $f(0,1,1)=1$
- $f(1,0,0)=-7$
- $f(1,0,1)=-8$
- $f(1,1,0)=-7$
- $f(1,1,1)=-8$

* Ahora veamos el interior

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x-2z-10 \\ 4y-2 \\ -2x+6z-2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

← no cumple la restriccion

$\Rightarrow$ no hay candidatos

* Calculemos ahora en cada una de las aristas

▸ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$ La ecuacion de ∇L de interes es

$$6z-2=0 \Rightarrow z=1/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

- $f(0,0,1/3) = -1/3$

▸ $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 4y-2=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $f(0,1/2,0) = -1/2$

▸ $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 6x-10=0 \Rightarrow x=\frac{10}{6} \Rightarrow$ no cumple restricción

$\Rightarrow$ no hay candidato

- $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow -2+6z-2=0 \Rightarrow z=2/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

  - $f(1,1,2/3) = -25/3$

- $\begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 4y-2=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  - $f(1,1/2,1) = -8{,}5$

- $\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 6x-2-10 \Rightarrow x=2 \Rightarrow$ no cumple restricción $\Rightarrow$ no hay candidato

- $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 6z-2=0 \Rightarrow z=1/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

  - $f(0,1,1/3) = -1/3$

- $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -2+6z-2=0 \Rightarrow z=\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

  - $f(1,0,2/3) = -25/3$

- $\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 4y-2=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  - $f(0,1/2,1) = 1/2$

- $\begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 4y-2=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  - $f(1,1/2,0) = -7{,}5$

▸ $\begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 6x-2-10=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow$ no cumple restriccion

▸ $\begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 6x-10=0 \Rightarrow x=\frac{10}{6} \Rightarrow$ no cumple restricción

* Ahora se busca en las 6 caras

▸ $x=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y=2 \\ 6z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

• $f(0,1/2,1/3)=-5/6$

▸ $x=1$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y=2 \\ 6z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

• $f(1,1/2,2/3)=-53/6$

▸ $y=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x-2z=10 \\ -2x+6z=+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ no cumple restricción

▸ $y=1$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x-2z=10 \\ -2x+6z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ no cumple restricción

- $z=0$

$$\begin{cases} 6x=10 \\ 4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ no cumple restricción

- $z=1$

$$\begin{cases} 6x=12 \\ 4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ no cumple restricción

Observando todos los candidatos se tiene que el mínimo valor de f es $-53/6$ en el punto

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3

$$(P)\begin{cases}\min & \frac{1}{2}\|a\|^2 \\ st. & y_j(a^Tx_j+b)\geq 1\end{cases}\qquad j=1,\dots,m$$

a) Se buscara obtener el problema dual.

Paso 1

$$L(a,b,u)=\frac{1}{2}\|a\|^2-\sum_{j=1}^m u_j\left[y_j(a^Tx_j+b)-1\right]$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\|a\|^2-\sum_{j=1}^m u_j(y_j a^Tx_j-1)}_{L_1(a,u)}\underbrace{-b\sum_{j=1}^m u_j y_j}_{L_2(b,u)}$$

$$=L_1(a,u)+L_2(b,u)$$

Busquemos ahora los $a(u)$ y $b(u)$ óptimos de $L(a,b,u)$.

$$\frac{\partial L_1}{\partial a}=a-\sum_{j=1}^m u_j y_j x_j=0\Leftrightarrow \boxed{a=\sum_{j=1}^m u_j y_j x_j}$$

Mientras que el $b(u)$ no se puede hallar derivando L_2 ya que es una función Lineal. Por lo tanto el factor que multiplica a b debera ser 0, en caso contrario puedo hacer que con $b=\pm\infty$ el $L=-\infty$

Paso 2

$$L_1\Big(\overbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j x_j}^{a}, \mu\Big) = \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j x_j^T \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i x_i}^{①} - \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j \Big(\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i x_i\Big) x_j^T}^{②} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j}_{③}$$

Si se reordenan los terminos de ② se llega a que ② = ①. Por lo que

$$L_1\Big(\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j x_j, \mu\Big) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j x_j^T \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \mu_j \underbrace{\frac{1}{2} y_j y_i x_j^T x_i}_{Q_{ji}} \mu_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

Notar que se tiene $\sum_{i,j} Q_{ji}\mu_j\mu_i$ la cual es una forma cuadratica cuya representacion matricial es $\mu^T Q \mu$.

Además notar que la sumatoria de todos los componentes de un vector (μ) se puede escribir como el producto interno de un vector de 1's con μ.

Entonces:

$$L_1(a^*(\mu), \mu) = -\mu^T Q \mu + \mathbb{1}^T \mu$$

$$\text{con } Q_{ij} = \frac{1}{2} y_i y_j \langle x_i, x_i \rangle$$

Escaneado con CamScanner

Para $L_2(b^*(u),u)$ tendremos que bien es $-\infty$ o 0.

$$L_2(b^*(u),u) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \sum_{j=1}^{m} u_j y_j \neq 0 \quad (= y^T u) \\ 0 & \text{si } \sum_{j=1}^{m} u_j y_j = 0 \end{cases}$$

Paso 3

Se plantea $d(u)$ como $d(u) = L_1(a^*(u),u) + L_2(b^*(u),u)$

$$\Rightarrow d(u) = \begin{cases} -\infty & \text{si } y^T u \neq 0 \\ -u^T Q u + \mathbb{1}^T u & \text{si } y^T u = 0 \end{cases}$$

El problema dual es:

$$(D_1) \begin{cases} \max\limits_{u} \begin{cases} -\infty & \text{si } y^T u \neq 0 \\ -u^T Q u + \mathbb{1}^T u & \text{si } y^T u = 0 \end{cases} \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Notar que el caso de $-\infty$ puede ser escrito como una restriccion. Es decir, D1 se puede reescribir como:

$$(D) \begin{cases} \max -u^T Q u + \mathbb{1}^T u \\ \text{st} \quad y^T u = 0 \\ \qquad u \geq 0 \end{cases} \qquad \text{con } Q_{ij} = y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle$$

b) (P) es un problema convexo. Esto implica que se cumple dualidad fuerte y por lo tanto tambien se cumple complementary slackness (c.s.).

C.S. dice que se cumple ① o ②

$$\begin{cases} y_j(a^T x_j + b) = 1 & ① \\ \mu_j = 0 & ② \end{cases}$$

La condición ① implica que x_j es un vector de soporte. Si no es vector de soporte μ_j sera 0.

Como $a = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j x_j$ y $\mu_j = 0 \ \forall j \,/\, x_j$ no es de soporte

$\Rightarrow$ a es combinacion lineal de vectores de soporte

Ejercicio 4

Parte a

El problema de optimización equivalente con la variable de slack t es

$$
\begin{aligned}
\min_{(\mathbf{p},\mathbf{g},\mathbf{t})} \quad & g_1 + t \\
\text{sujeto a:} \quad & p_1 + p3 - g_1 = 0 && (\lambda_1) \\
& p_2 + p3 + g_2 = d_2 && (\lambda_2) \\
& p_1 - p_2 = d_3 && (\lambda_3) \\
& p_1 + p_2 - p3 = 0 && (\nu) \\
& p_2 \leq R && (\mu_1) \\
& -p_2 \leq R && (\mu_2) \\
& g_1 \geq 0 && (\mu_3) \\
& g_2 \geq 0 && (\mu_4) \\
& t \geq max\{0, 4(g_2 - 40MW)\} && (\mu_t)
\end{aligned}
$$

Notar que la ultima restricción se puede dividir en 2 restricciones. De esta forma el problema a resolver por computadora es

$$
\begin{aligned}
\min_{(\mathbf{p},\mathbf{g},\mathbf{t})} \quad & g_1 + t \\
\text{sujeto a:} \quad & p_1 + p3 - g_1 = 0 && (\lambda_1) \\
& p_2 + p3 + g_2 = d_2 && (\lambda_2) \\
& p_1 - p_2 = d_3 && (\lambda_3) \\
& p_1 + p_2 - p3 = 0 && (\nu) \\
& p_2 \leq R && (\mu_1) \\
& -p_2 \leq R && (\mu_2) \\
& g_1 \geq 0 && (\mu_3) \\
& g_2 \geq 0 && (\mu_4) \\
& t \geq 0 && (\mu_5) \\
& t \geq 4(g_2 - 40MW) && (\mu_6)
\end{aligned}
$$

Parte b

Para esta parte se fijan los parámetros R y d_3 en:

$$
\begin{cases}
R = 30\text{MW} \\
d_3 = 10\text{MW}
\end{cases}
$$

Se resuelve el problema variando d_2 entre los enteros en el rango entre 0 y 205. Las gráficas que se obtienen se pueden ver en la Figura 1.

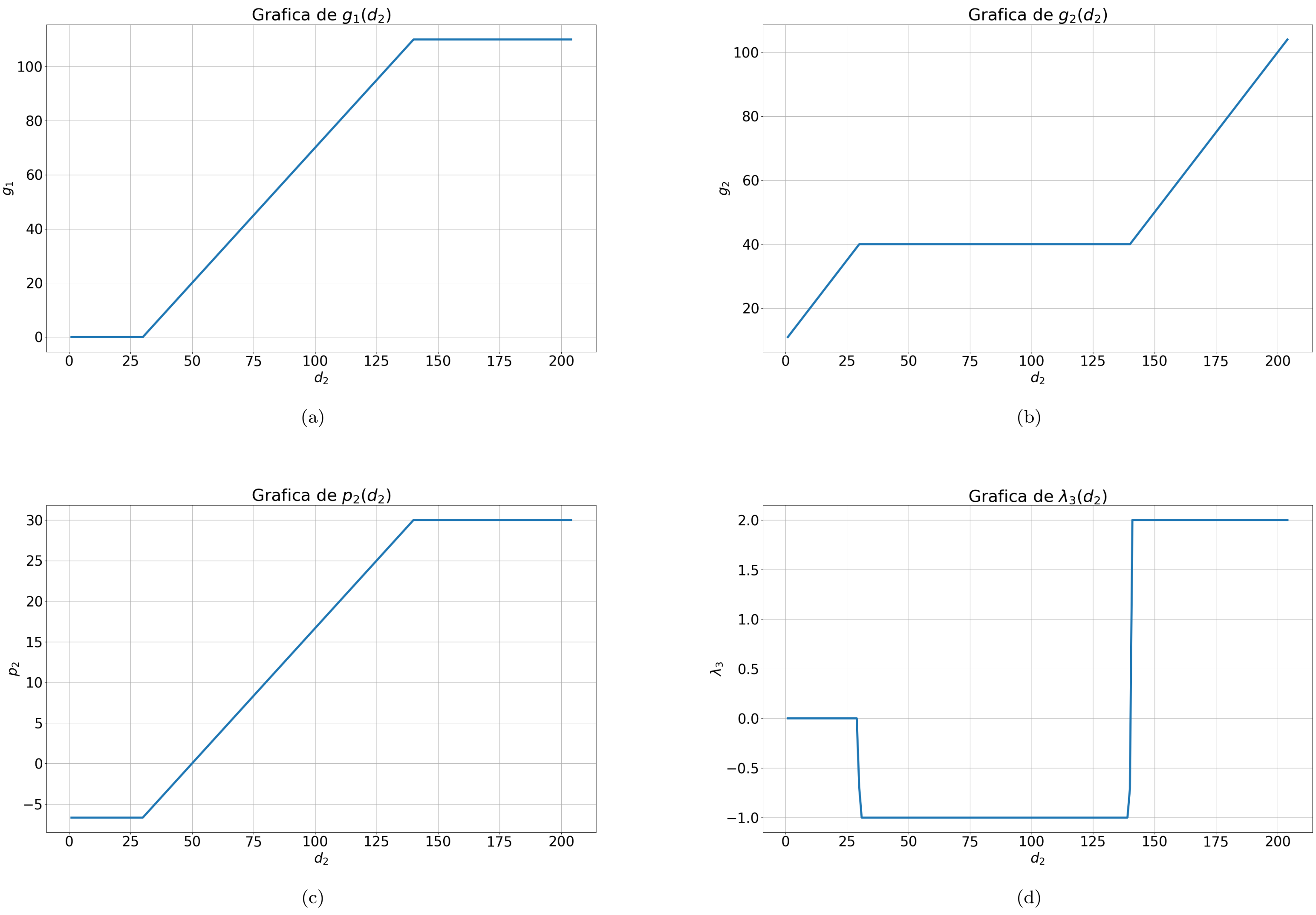


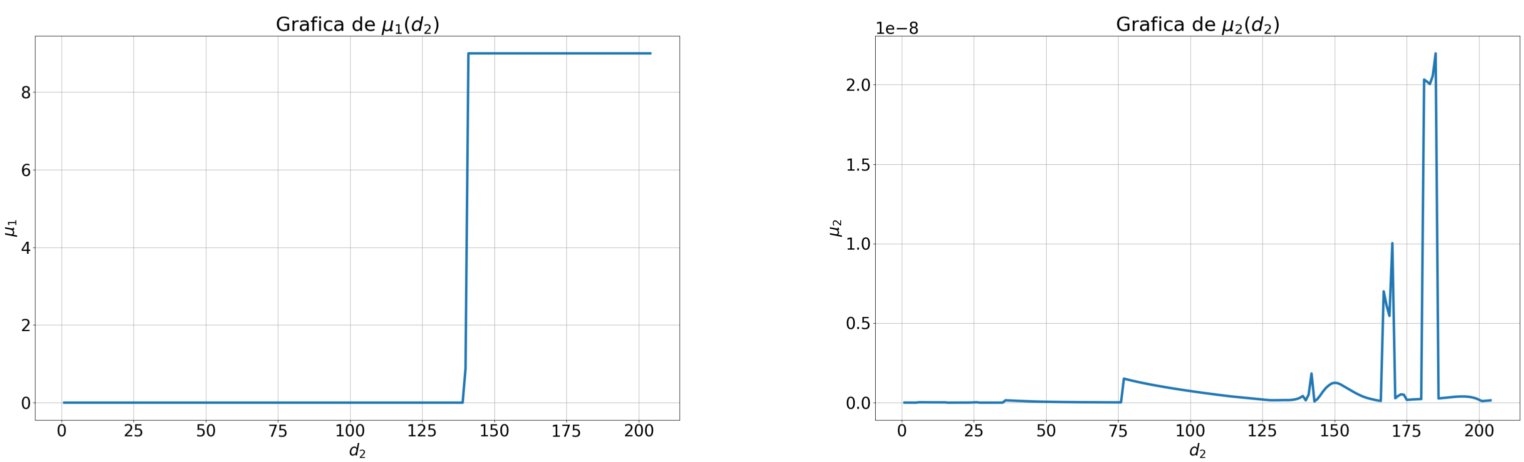
Figure 1: Gráficas de parámetros obtenidos en función de d_2

Lo primero a destacar es que se observan dos claros "quiebres" en las cuatro gráficas. Estos se dan en los valores correspondientes a $d_2 = 30MW$ y $d_2 = 140MW$. Los dos quiebres se corresponden a interpretaciones intuitivas de la realidad.

El primer quiebre se da debido a que mientras se consuman menos de $40MW$ el generador 2 es capaz de suministrar toda la potencia a costo 0, pero cuando se supera este valor el costo de generación de g_2 sera 4 por cada MW extra, mientras que el costo de g_1 es 1 por cada MW, siendo más barato encender el generador 1 y apagar el generador 2. El quiebre se da en $d_2 = 30MW$ ya que la demanda total se iguala a los $40MW$, notar que $d_1 = 10MW$ y por lo tanto $d = d_1 + d_2 = 40MW$.

El segundo quiebre se debe a que por la linea de 2 a 3 puede pasar un máximo de $|p_2| < R = 30MW$, lo que lleva a que no es posible suministrar toda la potencia que se desee desde g_1 a d_2 (recordar que por la restricción $p_3 = p_1 + p_2$ tampoco se puede enviar directo desde g_1 a d_2 por p_3). Este quiebre es en $d_2 = 140MW$ ya que este es el valor que hace necesario transmitir más de los $30MW$ permitidos por la linea. Como consecuencia, para satisfacer la demanda nueva, es necesario volver a encender el generador 1.

Las explicaciones anteriores se corresponden a interpretaciones intuitivas del problema en cuestión. Ahora analicemos cuantitativamente los resultados obtenidos para los multiplicadores, para esto se presentan las gráficas de λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 los cuales son de interés.
Notar que bien se podría analizar, por ejemplo el valor obtenido de λ_1, pero esto no tiene una interpretación clara de la realidad ya que querría decir que el consumo de potencia sea mayor/menor a la generación, lo cual no es posible y por lo tanto se decide no analizar.
En la Figura 2 se observa las gráficas mencionadas



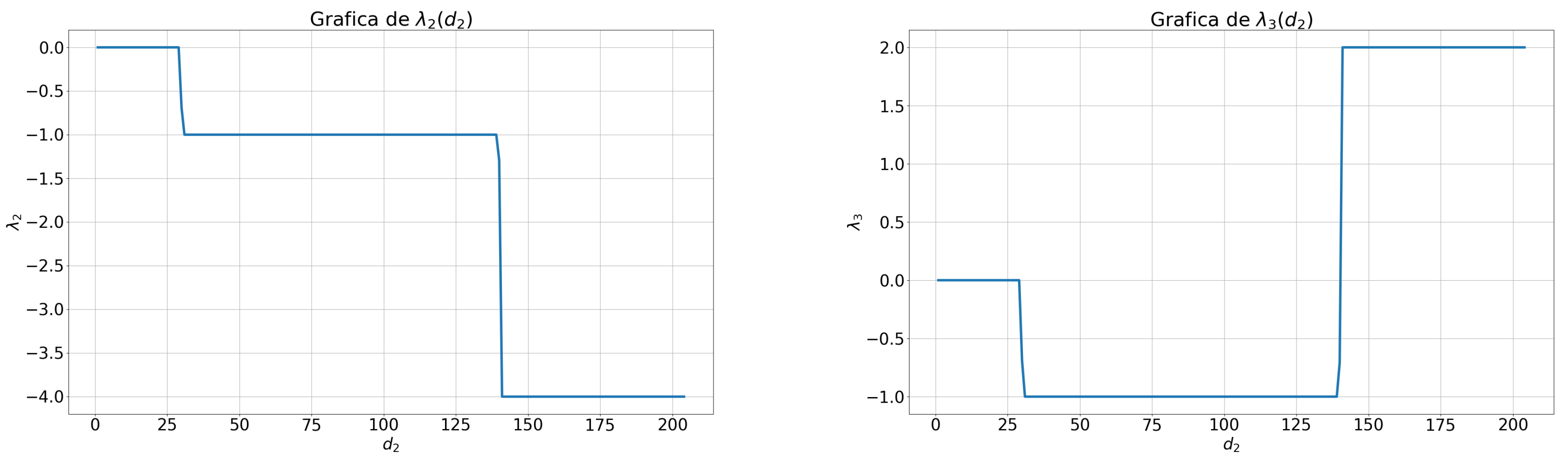
(a) (b)

Figure 2: Gráficas de μ_1 y μ_2 obtenidos en función de d_2

Para interpretar las gráficas anteriores es útil el *Teorema de Sensibilidad (TdS)*. Mirando la gráfica de μ_1 se observa que su valor es 0 hasta que se active su restricción, cuando esto ocurre su valor salta a 9, lo que indica que (por el Tds) ante un incremento dR en R, el costo se decrementara en $9dR$. Es decir, podría ser de vital importancia aumentar la capacidad máxima de transmisión entre 2 y 3 para disminuir el costo.

En tanto, en la gráfica de μ_2 se ve que esta es siempre 0, por cuestiones numéricas algunos valores son cercanos a $2e-8$. Lo anterior representa que nunca se activa la limitación de transmitir más de R desde 2 hasta 3.

Para responder la pregunta de para que valores d_2 es conveniente ofrecer energía gratis en 3, es necesario observar la Figura 3, que contiene la gráfica de λ_3.



(a) (b)

Figure 3: Gráficas de λ_2 y λ_3 obtenidos en función de d_2

En la gráfica λ_3 de anterior se observa:

- En un principio $\lambda_3 = 0$, lo que implica que al modificar d_3 el costo no se vera afectado, esto se debe a que aun puedo continuar entregando potencia a costo 0 desde g_1.

- Luego $\lambda_3 = -1$, lo que lleva a que aumentos en d_3 produzcan un aumento en el costo.

- Por ultimo, y mas importante, cuando d_2 es mayor a $140MW$, se tiene que $\lambda_3 = 2$; esto quiere decir que si aumentamos d_3 ¡el costo disminuye! Siendo esto absolutamente contra intuitivo.

Lo anterior se puede explicar debido a que cuando en d_2 se solicita mucha potencia lo más conveniente seria que la suministrase el generador 1, pero esto no es posible por la restricción $|p_2| < R$. Sin embargo, si hacemos que d_3 consuma potencia, el valor de p_2 disminuirá cumpliendo así la restricción. Esto permite que llegue potencia desde el generador 1 hasta d_2 a un menor costo a pesar de una mayor demanda.
Agregar que el causante de lo anterior es la ecuación asociada a ν, la cual a primera vista no tiene una explicación intuitiva.

Por completitud, se añadió la gráfica de $\lambda_2(d_2)$, que muestra que $\lambda_2 < 0$ para todo d_2, indicando que siempre que se aumente el consumo en 2 se aumentara su costo. Además, esto se puede corroborar en la Figura 4.

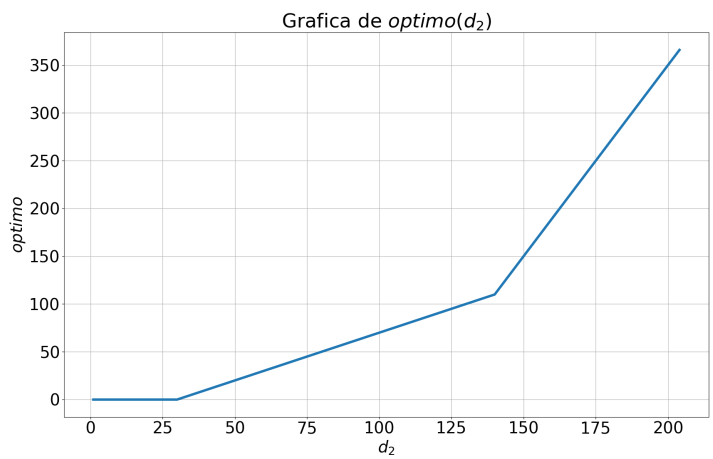


Figure 4: Costo óptimo al variar d_2 y demás parámetros fijos.

Ejercicio 5

a)
$$(PB)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & x^T P_0 x + 2 q_0^T x + r_0 \\ \text{st.} & x_i^2 = 1 \quad \forall i \end{cases}$$

Observar que cada restricción se puede escribir como:

$$x^T P_i x + 2 q_i^T x + r_i = 0$$

con

$$P_i = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & \end{matrix} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$q_i = \vec{0}$$
$$r_i = -1$$

Entoces (PB) se puede escribir así:

$$(PB)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & x^T P_0 x + 2 q_0^T x + r_0 \\ \text{st.} & x^T P_i x + 2 q_i^T x + r_i = 0 \quad \forall i \end{cases}$$

Notar que (PB) es un QCQP no convexo. El problema dual de este tipo de problemas es el presente en el Apendice A (caso 2) de las notas del curso.

$$(DB)\begin{cases} \max\limits_{\lambda, P, q, r, t, x} & t \\ st: & x = \begin{pmatrix} P & q \\ q^T & r-t \end{pmatrix} \geq 0 \\ & P = P_0 + \sum \lambda_i P_i \\ & q = q_0 + \sum \lambda_i q_i \\ & r = r_0 + \sum \lambda_i r_i \end{cases}$$

Con P_i, q_i, r_i como en la hoja anterior.

c) Llamemos $f_{PB}^*, d_{PB}^*, f_{PA}^*$ al valor óptimo de (PB), (DB), (PA) respectivamente.

Por dualidad debil se tiene:

$$f_{PB}^* \geq d_{PB}^*$$

Además, se sabe que la solución de (PA) cumple las restricciones de (PB) ya que al calcular el signo todos los valores son 1 o -1. Entonces como la solución de (PA) es un punto factible de (PB) se tiene

$$f_{PA}^* \geq f_{PB}^*$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f_{PA}^* \geqslant f_{PB}^* \geqslant d_{PB}^*}$$

De esta forma es posible acotar el valor funcional del óptimo resolviendo (PA) y (DB).

Parte d

Para resolver (PA) primero es necesario resolver (PC), el cual se resuelve utilizando *cvxpy*. La solución óptima de (PC) y (PA) son:

$$x^*_{PC} = \begin{bmatrix} -0.07764526 \\ -0.21715162 \\ -0.3382036 \\ -0.45104309 \\ -0.54575124 \\ -0.65819184 \\ -0.76869162 \\ -1.00000000 \\ -1.00000000 \\ -1.00000000 \end{bmatrix}, x^*_{PA} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para estos casos se tiene los siguientes valores de f^*

$$f^*_{PC} = 53.08$$
$$f^*_{PA} = 73.00$$

Además se resuelve (DB) también mediante *cvxpy* y se obtiene el siguiente valor óptimo del problema dual

$$d^*_{PB} = 67.99$$

Observar que se verifica la condición $f^*_{PA} > d^*_{PB}$.

Parte e

Se calculan todas las combinaciones posibles de vectores x formados por 1 y -1. El x^*_{PB} resultante es

$$x^*_{PB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cuyo valor óptimo es

$$f^*_{PB} = 69.00$$

Notar que se cumplen las desigualdad $f^*_{PA} > f^*_{PB} > d^*_{PB}$.

Nota: Todo el código se encuentra disponible en los archivos adjuntos. En particular hay un archivo para resolver (PA) y (PC), otro archivo para (DB) y uno más para (PB).