Entregable 1: optimalidad, métodos de descenso

30 de agosto de 2020

Ejercicio 1 - Convexidad

Sean $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})$ funciones convexas, y $X_1, X_2, \ldots, X_p \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos no vacíos.

a) Probar que $g(\mathbf{x}) = \sum_i w_i f_i(\mathbf{x})$ es convexa si $w_i \geq 0$.

b) Probar que $h(\mathbf{x}) = \max\{f_i(\mathbf{x}) : i = 1, \ldots, k\}$ es convexa.

c) Probar que $l(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ es convexa.

d) Probar que $Y = \bigcap_i X_i$ es un conjunto convexo

e) Mostrar que una bola Euclidea cualquiera $B(\mathbf{c}, r) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{c} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ es convexa.

f) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Mostrar que la envolvente (en inglés, "convex hull") de esos puntos:

$$C = \left\{ \sum_i \theta_i x_i : \sum_i \theta_i = 1, \theta_i \geq 0, \forall i \right\}$$

es un conjunto convexo, como su nombre lo indica.

Ejercicio 2 - Interpretación geométrica

Considérese el problema

$$\begin{aligned}
(P1)\ \min_{x,y}\ & -\log\left(y^2 - x^2\right) \\
\text{sujeto a: } & x^2 + y^2 \leq 1 \\
& 2x - y \leq 0 \\
& y \geq 1/2 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}$$

Usando los resultados del ejercicio 1, pruebe que

a) La función de costo es convexa (sugerencia: recordar que $\log a + \log b = \log ab$)

b) El conjunto factible X dado por las restricciones es convexo.

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ 2x - y \leq 0,\ y \geq 1/2\}$$

c) Represente en un dibujo el conjunto X y de las curvas de nivel de la función de costo.

d) A partir de los diagramas de la parte c) deduzca que la solución del problema (P1) es $(x^*, y^*) = (0, 1)$

Ejercicio 3 - Puntos críticos y óptimos globales

El objetivo de este ejercicio es revisar los conceptos de puntos críticos, óptimos locales, globales y puntos silla, prestando atención al efecto de las restricciones. La idea en este entregable es resolver los problemas de forma gráfica. Más adelante en el curso se resolverán de una forma más sistemática utilizando el Lagrangiano y las condiciones de Karush Kuhn Tucker.

Grafique las funciones objetivo de los siguientes problemas y obtenga los mínimos globales. Estudie los puntos donde se anula el gradiente indicando si estos puntos críticos son mínimos locales o globales, máximos locales o globales, puntos silla, o si caen fuera del conjunto factible.

a)

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}} 4x^4 - x^3 - 4x^2 + 1 \\ &\text{s. to: } -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}} x^3 \\ &\text{s. to: } -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}} (x-a)^2 + 1 \\ &\text{s. to: } -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Discuta en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

d)

$$\begin{aligned} &\min_{(x\in\mathbb{R}^2} \|x - \bar{x}\|^2 + 1 \\ &\text{s. to: } x \in [0,1]^2 \end{aligned}$$

con $\bar{x} = (2, 1/2)$ y $[0,1]^2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x_1 \leq 1, \ 0 \leq x_2 \leq 1\}$

Represente en $\mathbb{R}^2$ las curvas de nivel de la función $f(x) = \|x - \bar{x}\|^2 + 1$, y el conjunto $B = [0,1]^2$ como intersección de los conjuntos $S_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x_1 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ y $S_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Indique si la fución objetivo $f(x)$ y el conjunto factible B son convexos.

Ejercicio 4 - Descenso por gradiente

Considere el problema de mínimos cuadrados

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$ corresponden a **A.asc** y **b.asc** en los archivos adjuntos a este obligatorio.

a) Escribir la condición de optimalidad para este problema. Expresar y calcular la solución exacta del problema anterior, $\mathbf{x}^*$

b) Implementar y probar el método de descenso por gradiente para los siguientes tipos de paso: a) paso fijo $s = \frac{1}{2\|\mathbf{A}\|_2^2}$, b) paso decreciente $s_k = 0{,}01 * \frac{1}{k}$, c) paso exacto (line search), d) regla de Armijo.

c) Graficar el valor del error relativo $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^t\|/\|\mathbf{x}^*\|$ vs. iteración t para los cuatro algoritmos implementados.

d) Escribir un breve informe incluyendo código, gráficas y conclusiones.

Ejercicio 5 - Problemas equivalentes

Sea el problema no diferenciable sin restricciones

$$(P0) \min_{\mathbf{x} \in R^n} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{1}$$

a) Pruebe que (P0) es convexo.

b) Muestre que el problema (P0) es equivalente al siguiente problema cuadrático con restricciones, introduciendo las variables auxiliares $t_i,\ i = 1, \ldots, n$

$$(QP) \min_{\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{t} \in R^n} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \sum_{i=1}^{n} t_i \tag{2}$$

$$\text{sujeto a: } x_i \leq t_i \tag{3}$$

$$-x_i \leq t_i \tag{4}$$

c) Argumente que (QP) es convexo. ¿Puede un problema convexo ser equivalente a uno no convexo?

d) Utilice un software de resolución de problemas de optimización para resolver (QP) para $n = 2$ con la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$ del ejercicio anterior (se listan ejemplos en Julia y CVX en la última página de este entregable, y se puede ejecutar *online* desde el repositorio *git* del curso). Reporte los valores óptimos $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{t}^*$ e indique como estan relacionados entre si.

Ejercicio 6 - Mínimos cuadrados con restricción

a) Indique si el siguiente problema es convexo

$$\begin{aligned} &\min_{(x,y)} \{\ 5x^2 + 5y^2 + 5x - 3y - 6xy + 5/4\ \} \\ \text{sujeto a} \quad & x^2 + y^2 \leq R^2 \end{aligned}$$

con $R \in \mathbb{R}^+$ constante.

b) Muestre que la restricción está activa para $R < 1/2$.

c) Escriba un programa que resuelva el problema anterior para $R = 1/4$ utilizando el método *projected gradient* (PGD) con $\alpha = 1$, y $s^k = 1/k$ y *line search* como métodos de elección del paso s^k. Grafique a) la sucesión de puntos obtenidos por el método en el plano (x^k, y^k), b) el valor de la función de costo y c) el valor de $\|(x^k, y^k) - (x^{k-1}, y^{k-1})\|$.

d) Considere la siguiente variación del problema. ¿Es un problema convexo?

$$\begin{aligned} &\min_{(x,y)} \{\ 5x^2 + 5y^2 + 5x - 3y - 6xy + 5/4\ \} \\ \text{sujeto a} \quad & x^2 + y^2 \geq 1 \end{aligned}$$

Pruebe PGD con pasos $s^k = 1/k$ y $\alpha = 1$ partiendo de $(x^0, y^0) = (0, 0)$ y de $(x^0, y^0) = (1/2, 1/2)$.

Ejemplo para Matlab-CVX

```
%cd C:\personal\cvx
cvx_setup

load A.asc
load b.asc
lambda=1;

%planteo del problema dentro del entorno cvx
cvx_begin
cvx_precision high
variables x(2) t(2)
minimize(0.5*(A*x-b)'*(A*x-b)+lambda*sum(t))
subject to
    t>=x
    t>=-x
cvx_end
opt_val=0.5*(A*x-b)'*(A*x-b)+lambda*sum(t)
sol_xt=[x t]
```

Ejemplo para Julia-Convex

```
In [1]: #Pkg.add("JuMP")
        #Pkg.add("Convex")
        #Pkg.build("SCS")
        using Convex
        x = Variable(2)
        t = Variable(2)
        b = [8; 5; -3; 10; 4]
        A = [-41 20; -46 -8; -5 -33; -55 1; -55 -6]
        lambda=1;
        ones=[1 1]
        p = minimize(0.5*square(norm(A*x-b))+lambda*ones*t)
        p.constraints += x <= t
        p.constraints += -x <=t
        solve!(p)
        println(round(p.optval, 4))
        println(round(x.value, 4))
        println(round(t.value, 4))
```