Ejercicio 2

Por KKT tenemos que una condición necesaria de optimalidad es:

$$\nabla L_{x,y,z}(x^*, y^*, z^*, u^*) = 0 \qquad (1)$$
$$g(x^*, y^*, z^*) \leq 0$$

Además, como el problema es convexo entonces se cumple complementary slackness. Es decir:

$$u_j^* g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, 6 \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se desprende que bien $u_j^* = 0$ o $g_j(x^*) = 0$. De esta forma, para cada j se deben resolver dos problemas. Si se sigue esta estrategia, entonces se tendran 2^6 problemas.

Notar que varios de estos problemas son incompatibles sin necesidad de plantearlos, en particular aquellos en los que deba cumplirse simultaneamente $x=0, x=1$; $y=0, y=1$; $z=0, z=1$. Por lo que la cantidad se reduce a 27 casos posibles.

Analizemos los 4 casos solicitados.

- Si se da en el interior notar que $g_j(x^*, y^*, z^*) < 0$. Lo que implica que $\mu_j = 0 \ \forall j$ (por ecuación (2)). Por (1) el gradiente de f se debe anular.
- Si se da en una cara se tendra que

$$\left.\begin{array}{l} g_j(x^*, y^*, z^*) < 0 \quad \forall j \neq k \\ g_k(x^*, y^*, z^*) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_j = 0 \ \forall j \neq k \\ \mu_k \geq 0 \end{array}\right.$$

Solo el multiplicador asociado a la restriccion de la cara puede ser distinto de 0.

Notar que μ_k en $\nabla L_{x,y,z}$ solo aparecera en una de las tres componentes. Ademas $g_k = 0$ determinara el valor de x, y o z. Por lo tanto, con las 2 ecuaciones restantes de ∇L se podra hallar el punto candidato (2 ecuaciones con 2 incognitas).

• Si se da en una arista, habra 2 restricciones tal que $g_l(x^*,y^*,z^*)=0$ y $g_m(x^*,y^*,z^*)=0$ y $g_j(x^*,y^*,z^*)<0$ $\forall j\neq l,m$. Por lo que $\mu_j=0$ $\forall j\neq l,m$.
Las ecuaciones $g_l=0$ y $g_m=0$ determinarar el valor de dos de las variables x,y,z.
Por otro lado μ_l y μ_m solo aparecen en 2 componentes del gradiente, quedando una componente que no depende de μ. Entonces se puede determinar la variable restante con esa ecuacion.

• Los vertices se añaden automaticamente como candidatos a minimos.

En conclusión, el procedimiento consiste en hallar todos los candidatos posibles en el interior, caras, aristas y vertices; quedandose con aquel que de menor valor de f.

* Comencemos con los vertices

- $f(0,0,0)=0$
- $f(0,0,1)=1$
- $f(0,1,0)=0$
- $f(0,1,1)=1$
- $f(1,0,0)=-7$
- $f(1,0,1)=-8$
- $f(1,1,0)=-7$
- $f(1,1,1)=-8$

* Ahora veamos el interior

$$\nabla f=\begin{pmatrix}6x-2z-10\\4y-2\\-2x+6z-2\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

← no cumple la restriccion

$\Rightarrow$ no hay candidatos

* Calculemos ahora en cada una de las aristas

▸ $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ La ecuacion de ∇L de interes es

$$6z-2=0 \Rightarrow z=1/3 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1/3\end{pmatrix}$$

- $f(0,0,1/3)=-1/3$

▸ $\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases} \Rightarrow 4y-2=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix}$

- $f(0,1/2,0)=-1/2$

▸ $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases} \Rightarrow 6x-10=0 \Rightarrow x=\frac{10}{6} \Rightarrow$ no cumple restricción

$\Rightarrow$ no hay candidato

- $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow -2+6z-2=0 \Rightarrow z=2/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

  - $f(1,1,2/3) = -25/3$

- $\begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 4y-2=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  - $f(1,1/2,1) = -8{,}5$

- $\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 6x-2-10 \Rightarrow x=2 \Rightarrow$ no cumple restricción $\Rightarrow$ no hay candidato

- $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 6z-2=0 \Rightarrow z=1/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

  - $f(0,1,1/3) = -1/3$

- $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -2+6z-2=0 \Rightarrow z=\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

  - $f(1,0,2/3) = -25/3$

- $\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 4y-2=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  - $f(0,1/2,1) = 1/2$

- $\begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 4y-2=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  - $f(1,1/2,0) = -7{,}5$

- $\begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 6x-2-10=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow$ no cumple restricción

- $\begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 6x-10=0 \Rightarrow x=\frac{10}{6} \Rightarrow$ no cumple restricción

* Ahora se busca en las 6 caras

- $x=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y=2 \\ 6z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

• $f(0,1/2,1/3) = -5/6$

- $x=1$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y=2 \\ 6z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

• $f(1,1/2,2/3) = -53/6$

- $y=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x-2z=10 \\ -2x+6z=+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ no cumple restricción

- $y=1$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x-2z=10 \\ -2x+6z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ no cumple restricción

- $z=0$

$$\begin{cases} 6x=10 \\ 4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ no cumple restricción

- $z=1$

$$\begin{cases} 6x=12 \\ 4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ no cumple restricion

Observando todos los candidatos se tiene que el mínimo valor de f es $-53/6$ en el punto

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}}$$