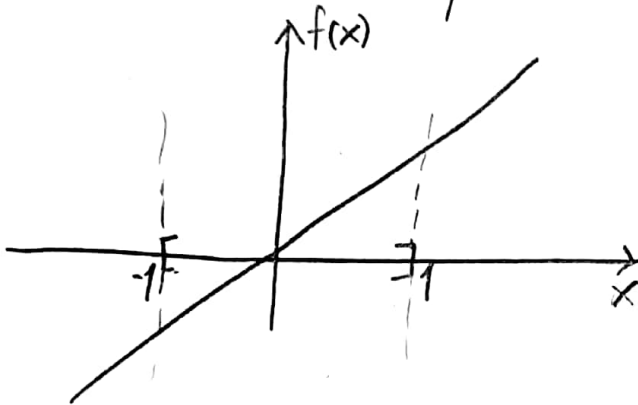


Ejercicio 1

$$(P) \begin{cases} \min & f(x) \\ \text{st} & g(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$* \quad f(x) = x \quad \quad g(x) = x^2 - 1$$

a) Gráficamente el problema a resolver es:



Por lo que:

$$\boxed{x^* = -1}$$

$$\boxed{f^* = -1}$$

b) Paso 1

$$L(x, \mu) = x + \mu(x^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\mu x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2\mu}$$

Paso 2

$$d(\mu) = L\left(-\frac{1}{2\mu}, \mu\right) = \frac{-1}{2\mu} + \mu\left(\frac{1}{4\mu^2} - 1\right)$$

$$d(\mu) = \frac{-1}{4\mu} - \mu$$

Paso 3

$$(D) \begin{cases} \max & \frac{-1}{4u} - u \\ \text{st} & u \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial d}{\partial u} = \frac{1}{4u^2} - 1 = 0 \Rightarrow u = \pm 1/2$$

$$\text{como } u \geq 0 \Rightarrow \boxed{u^* = 1/2}$$

$$\text{y } d(u^*) = \boxed{d^* = -1}$$

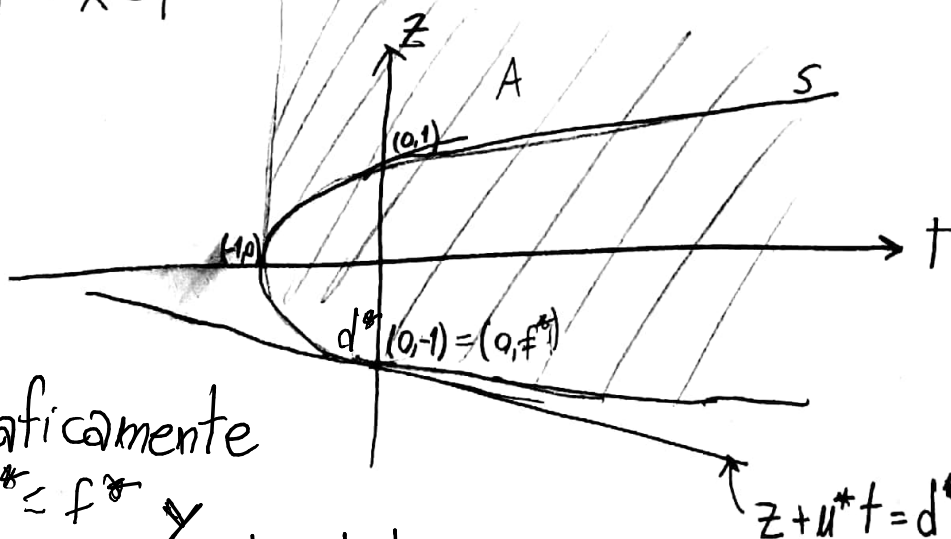
c) Se cumple la condición de Slater sii

$$\exists \bar{x} \in X / g(\bar{x}) < 0$$

Ver que $\exists \bar{x} = 0 / g(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ se cumple Slater

Como $d^* = f^*$ se cumple dualidad fuerte y débil

$$d) \begin{cases} z = x^2 \\ t = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow t = z - 1$$

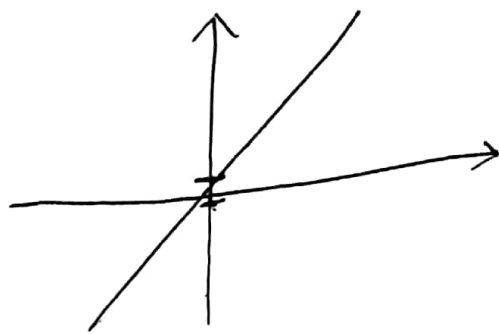


Ver gráficamente
que $d^* = f^*$ y
además se cumple Slater

$$* f(x) = x$$

$$g(x) = x^2$$

a)



$$\Rightarrow \begin{cases} f^* = 0 \\ x^* = 0 \end{cases}$$

b) Paso 1

$$L(x, u) = x + ux^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2ux = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2u}$$

Paso 2

$$d(u) = L\left(-\frac{1}{2u}, u\right) = -\frac{1}{2u} + \frac{1}{4u} = -\frac{1}{4u}$$

Paso 3

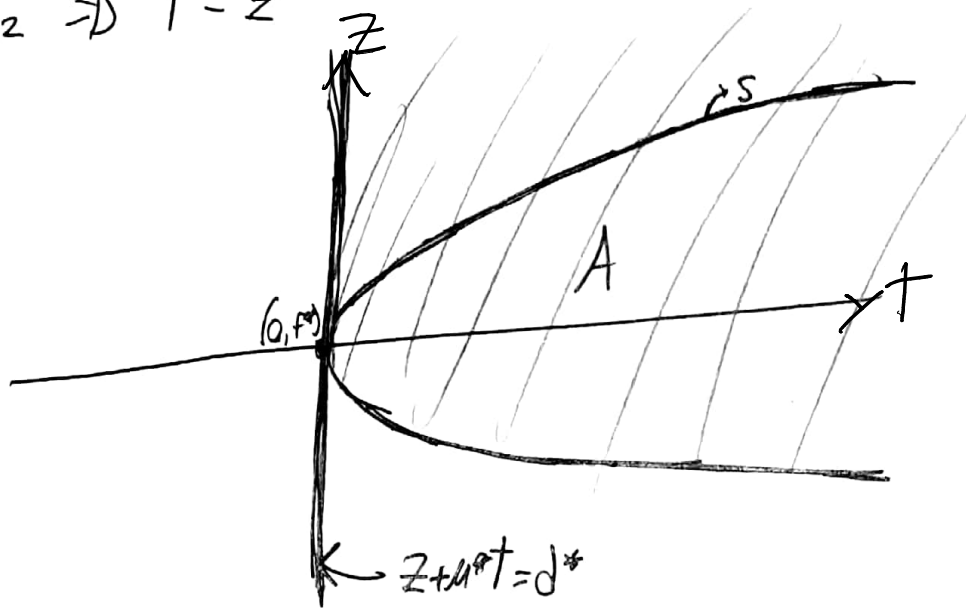
$$(D) \begin{cases} \max \\ u > 0 \end{cases} \frac{-1}{4u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^* = +\infty \\ d^* = 0 \end{cases}$$

c) En este caso $\nexists \bar{x} \in X / g(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$ no se cumple Slater

Se cumple dualidad fuerte y debil porque $f^* = d^*$

d) $z = x \Rightarrow t = z^2$
 $t = x^2 \Rightarrow t = z^2$

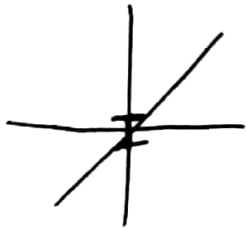


Se verifica que la recta que soporta al conjunto tiene pendiente ∞ .

Además, se observa que no se cumple Slater porque no existe ningún punto de S con $t < 0$

$$* f(x) = x \quad g(x) = |x|$$

a)



$$\boxed{f^* = 0}$$

$$\boxed{x^* = 0}$$

b) Paso 1

$$L(x, \mu) = x + \mu|x| = \begin{cases} x(1+\mu) & \text{si } x > 0 \\ x(1-\mu) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Caso $x > 0$

$$L(x, \mu) = x(1+\mu)$$

como $\mu > 0$ el mínimo en esta región se da en $x = 0 \quad \forall \mu > 0$

- Caso $x < 0$

$$L(x, \mu) = x(1-\mu)$$

$$x_{opt} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene que

$$x^* = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Paso 2

$$d(\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Paso 3

$$(D) \max_{u \geq 0} \begin{cases} -\infty & \text{si } u < 1 \\ 0 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

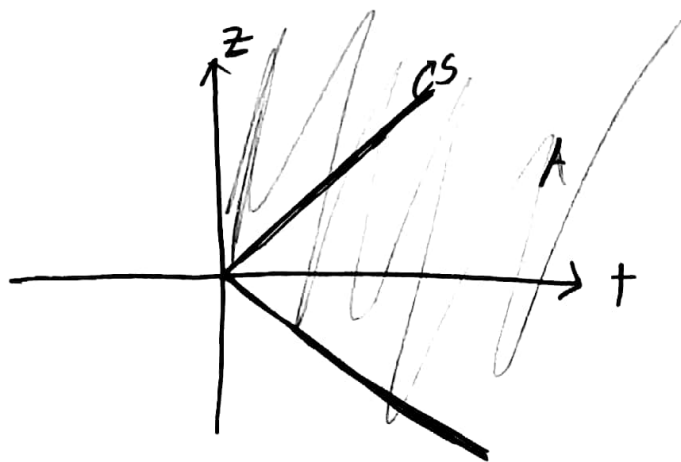
Toda la region $[1, \infty)$ hace que $d = 0$ y se maximice

$$\Rightarrow \boxed{d^* = 0}$$
$$\boxed{u^* = [1, \infty)} \leftarrow \text{abuso de notaci3n}$$

c) No se cumple Slater ya que
 $\nexists x \in X / |x| < 0$

Se cumple dualidad fuerte y debil

$$d) \begin{aligned} z &= x \\ t &= |x| \end{aligned} \Rightarrow t = |z|$$



Notar que como $t = |z|$ no es diferenciable no existe una unica recta tangente. Notar que u puede tomar cualquier valor correspondiente a los subgradiientes de $t = |z|$

$$* f(x) = x^3 \quad g(x) = -x + 1$$

a)



\Rightarrow

$$\boxed{f^* = 1}$$

$$\boxed{x^* = 1}$$

b) Paso 1

$$L(x, u) = x^3 + u(1 - x)$$

Notar que al ser un polinomio de grado 3 no es válido anular la derivada para hallar el infimo.

Notar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} L(x, u) = -\infty \quad \forall u \in \mathbb{R}$

Paso 2

$$d(u) = -\infty$$

Paso 3

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max -\infty \\ \text{st } u \geq 0 \end{array} \right.$$

Se tiene que $d(u) = -\infty \quad \forall u \Rightarrow$

$$\boxed{d^* = -\infty}$$

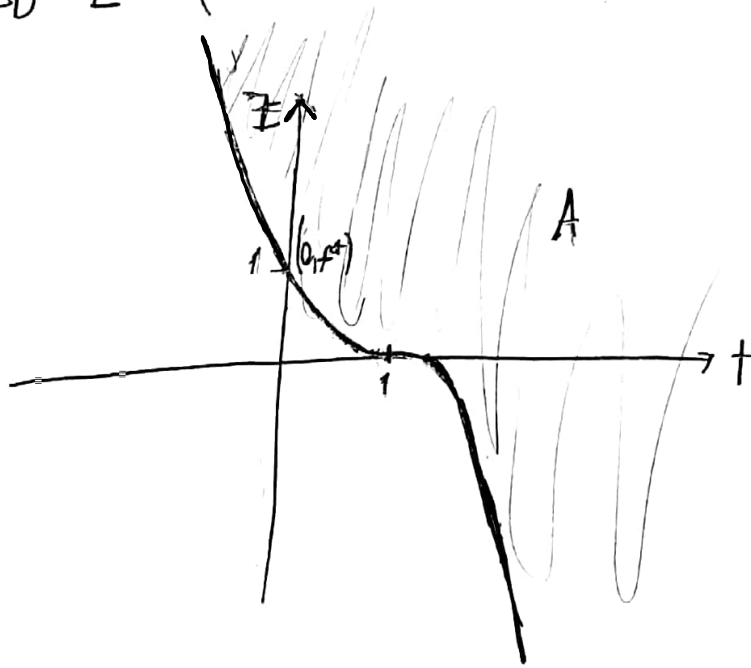
$$\boxed{u^* = [0, \infty)}$$

c) Se cumple Slater porque

$$\exists \bar{x} = 2 / g(2) = -2 + 1 = -1 < 0$$

Hay un GAP = ∞ por lo que no se cumple dualidad fuerte. Si se cumple dualidad débil porque $d^* \leq f^*$

d) $z = x^3$
 $t = -x + 1 \Rightarrow z = (1-t)^3$



En este caso no existe ninguna recta que soporte al conjunto. Se puede interpretar que $d = -\infty$ es una recta que corta por $-\infty$.