Ejercicio 2

a) Veamos si la función de costo f es convexa.

$f(x,y) = -\log(y^2-x^2) = -\log((x-y)(x+y))$

sugerencia

$\overset{?}{=} -\log(x-y) - \log(x+y)$

Notar que tanto $x-y$ como $x+y$ son un caso particuar de la expresion vectorial $Ax+b$.

* $x-y$: $A_1=(1,-1)$ $b_1=0$
* $x+y$: $A_2=(1,1)$ $b_2=0$

Sea $g(x) = -\log(x)$ con $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x,y) = g(x-y) + g(x+y)$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = g(A_1\vec{x}) + g(A_2\vec{x})$

Si probamos que $g(x)$ es convexa $\Rightarrow$ f sera convexa. Esto es aplicando las propiedades a y c de Ejercicio 1.

$g(x) = -\log(x)$ $g'(x) = -\frac{1}{x}$ $g''(x) = \frac{1}{x^2}$

Ver que $g''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ g es convexa

Como g convexa $\Rightarrow$ f convexa

b) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, 2x-y \leq 0$
$y \geq 1/2\}$

Intentaremos ver que X es la interseccion de conjuntos convexos.

* $x^2+y^2 \leq 1$ es el conjunto $B(0,1)$ que vimos en el ejercicio 1 que es convexo

* $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ 2x-y \leq 0 \\ y \geq 1/2 \end{matrix}\right\}$ Son todos semiplanos y los semiplanos son convexos

Entonces X es la intersección de 4 conjuntos convexos. Por la parte d de ejercicio 1

$\Rightarrow$ X es convexo