

Ejercicio 5

$$a) \quad (PB) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & x^T P_0 x + 2q^T x + r \\ \text{st.} & x_i = 1 \quad \forall i \end{cases}$$

Observar que cada restricción se puede escribir como:

$$x^T P_i x + 2q_i^T x + r_i = 1$$

con

$$P_i = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{matrix} & \begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \circ & \circ & \circ \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$q_i = \vec{0}$$
$$r_i = -1$$

Entonces (PB) se puede escribir así:

$$(PB) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & x^T P_0 x + 2q^T x + r \\ \text{st.} & x^T P_i x + 2q_i^T x + r_i = 1 \quad \forall i \end{cases}$$

Notar que (PB) es un QCQP no convexo. El problema dual de este tipo de problemas es el presente en el Apéndice A (caso 2) de las notas del curso.

$$\begin{aligned}
 & \max_{\lambda, P, q, r, t, x} \quad t \\
 & \text{st: } X = \begin{pmatrix} P & q \\ q^T & r-t \end{pmatrix} \geq 0 \\
 & P = P_0 + \sum \lambda_i P_i \\
 & q = q_0 + \sum \lambda_i q_i \\
 & r = r_0 + \sum \lambda_i r_i
 \end{aligned}
 \quad (DB)$$

Con P_i, q_i, r_i como en la hoja anterior.

c) Llamemos $f_{PB}^*, d_{PB}^*, f_{PA}^*$ al valor óptimo de (PB), (DB), (PA) respectivamente.

Por dualidad débil se tiene:

$$f_{PB}^* \geq d_{PB}^*$$

Además, se sabe que la solución de (PA) cumple las restricciones de (PB) ya que al calcular el signo todos los valores son 1 o -1. Entonces como la solución de (PA) es un punto factible de (PB) se tiene

$$f_{PA}^* \geq f_{PB}^*$$

Por lo tanto:

$$f_{PA}^* \geq f_{PB}^* \geq d_{PB}^*$$

De esta forma es posible acotar el valor funcional del óptimo resolviendo (PA) y (DB).

Parte d

Para resolver (PA) primero es necesario resolver (PC) , el cual se resuelve utilizando *cvxpy*. La solución óptima de (PC) y (PA) son:

$$x_{PC}^* = \begin{bmatrix} -0.07764526 \\ -0.21715162 \\ -0.3382036 \\ -0.45104309 \\ -0.54575124 \\ -0.65819184 \\ -0.76869162 \\ -1.00000000 \\ -1.00000000 \\ -1.00000000 \end{bmatrix}, x_{PA}^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para estos casos se tiene los siguientes valores de f^*

$$\begin{aligned} f_{PC}^* &= 53.08 \\ f_{PA}^* &= 73.00 \end{aligned}$$

Además se resuelve (DB) también mediante *cvxpy* y se obtiene el siguiente valor óptimo del problema dual

$$d_{PB}^* = 67.99$$

Observar que se verifica la condición $f_{PA}^* > d_{PB}^*$.

Parte e

Se calculan todas las combinaciones posibles de vectores x formados por 1 y -1 . El x_{PB}^* resultante es

$$x_{PB}^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cuyo valor óptimo es

$$f_{PB}^* = 69.00$$

Notar que se cumplen las desigualdad $f_{PA}^* > f_{PB}^* > d_{PB}^*$.

Nota: Todo el código se encuentra disponible en los archivos adjuntos. En particular hay un archivo para resolver (PA) y (PC) , otro archivo para (DB) y uno más para (PB) .