Ejercicio 5

a)
$$(PB)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & x^T P_0 x + 2q_0^T x + r_0 \\ \text{st.} & x_i = 1 \quad \forall i \end{cases}$$

Observar que cada restricción se puede escribir como:

$$x^T P_i x + 2 q_i^T x + r_i = 0$$

con

$$P_i = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & i & \end{matrix} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$q_i = \vec{0}$$

$$r_i = -1$$

Entoces (PB) se puede escribir así:

$$(PB)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & x^T P_0 x + 2q_0^T x + r_0 \\ \text{st.} & x^T P_i x + 2q_i^T x + r_i = 0 \quad \forall i \end{cases}$$

Notar que (PB) es un QCQP no convexo. El problema dual de este tipo de problemas es el presente en el Apendice A (caso 2) de las notas del curso.

$$(DB)\begin{cases} \max\limits_{\lambda, P, q, r, t, x} & t \\ st: & X = \begin{pmatrix} P & q \\ q^T & r-t \end{pmatrix} \succeq 0 \\ & P = P_0 + \sum \lambda_i P_i \\ & q = q_0 + \sum \lambda_i q_i \\ & r = r_0 + \sum \lambda_i r_i \end{cases}$$

Con P_i, q_i, r_i como en la hoja anterior.

c) Llamemos f_{PB}^*, d_{PB}^*, f_{PA}^* al valor óptimo de (PB), (DB), (PA) respectivamente.

Por dualidad debil se tiene:

$$f_{PB}^* \geq d_{PB}^*$$

Además, se sabe que la solución de (PA) cumple las restricciones de (PB) ya que al calcular el signo todos los valores son 1 o -1. Entonces como la solución de (PA) es un punto factible de (PB) se tiene

$$f_{PA}^* \geq f_{PB}^*$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f_{PA}^* \geq f_{PB}^* \geq d_{PB}^*}$$

De esta forma es posible acotar el valor funcional del óptimo resolviendo (PA) y (DB).

Parte d

Para resolver (PA) primero es necesario resolver (PC), el cual se resuelve utilizando *cvxpy*. La solución óptima de (PC) y (PA) son:

$$x^*_{PC} = \begin{bmatrix} -0.07764526 \\ -0.21715162 \\ -0.3382036 \\ -0.45104309 \\ -0.54575124 \\ -0.65819184 \\ -0.76869162 \\ -1.00000000 \\ -1.00000000 \\ -1.00000000 \end{bmatrix}, x^*_{PA} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para estos casos se tiene los siguientes valores de f^*

$$f^*_{PC} = 53.08$$
$$f^*_{PA} = 73.00$$

Además se resuelve (DB) también mediante *cvxpy* y se obtiene el siguiente valor óptimo del problema dual

$$d^*_{PB} = 67.99$$

Observar que se verifica la condición $f^*_{PA} > d^*_{PB}$.

Parte e

Se calculan todas las combinaciones posibles de vectores x formados por 1 y -1. El x^*_{PB} resultante es

$$x^*_{PB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cuyo valor óptimo es

$$f^*_{PB} = 69.00$$

Notar que se cumplen las desigualdad $f^*_{PA} > f^*_{PB} > d^*_{PB}$.

Nota: Todo el código se encuentra disponible en los archivos adjuntos. En particular hay un archivo para resolver (PA) y (PC), otro archivo para (DB) y uno más para (PB).