

Ejercicio 2

Por KKT tenemos que una condición necesaria de optimalidad es:

$$\nabla L_{x,y,z}(x^*, y^*, z^*, u^*) = 0 \quad (1)$$

$$g_j(x^*, y^*, z^*) \leq 0$$

Además, como el problema es convexo entonces se cumple complementary slackness. Es decir:

$$u_j^* g_j(x^*) = 0 \quad \forall j=1, \dots, 6 \quad (2)$$

De la ecuación (2) se desprende que bien $u_j^* = 0$ o $g_j(x^*) = 0$. De esta forma, para cada j se deben resolver dos problemas. Si se sigue esta estrategia, entonces se tendrán 2^6 problemas:

Notar que varios de estos problemas son incompatibles sin necesidad de plantearlos, en particular aquellos en los que deba cumplirse simultáneamente $x=0, x=1$; $y=0, y=1$; $z=0, z=1$. Por lo que la cantidad se reduce a 27 casos posibles.

Analizemos los 4 casos solicitados.

2

- Si se da en el interior notar que $g_j(x^*, y^*, z^*) < 0$.
 lo que implica que $u_j = 0 \forall j$ (por ecuación (2)).
 Por (1) el gradiente de f se debe anular.

- Si se da en una cara se tendrá que

$$\left\{ \begin{array}{l} g_j(x^*, y^*, z^*) < 0 \quad \forall j \neq k \\ g_k(x^*, y^*, z^*) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_j = 0 \quad \forall j \neq k \\ u_k \geq 0 \end{array} \right.$$

Solo el multiplicador asociado a la restricción de la cara puede ser distinto de 0.

Notar que u_k en $\nabla L_{x,y,z}$ solo aparecerá en una de las tres componentes. Además $g_k = 0$ determinará el valor de x, y o z . Por lo tanto, con las 2 ecuaciones restantes de ∇L se podrá hallar el punto candidato (2 ecuaciones con 2 incógnitas).

- Si se da en una arista, habrá 2 restricciones tal que $g_e(x^*, y^*, z^*) = 0$, $g_m(x^*, y^*, z^*) = 0$ y $g_j(x^*, y^*, z^*) < 0 \quad \forall j \neq e, m$. Por lo que $u_j = 0 \quad \forall j \neq e, m$.

Las ecuaciones $g_e = 0$ y $g_m = 0$ determinarán el valor de dos de las variables x, y, z .

Por otro lado u_e y u_m solo aparecen en 2 componentes del gradiente, quedando una componente que no depende de u . Entonces se puede determinar la variable restante con esa ecuación.

- Los vertices se añaden automáticamente como candidatos a mínimos.

En conclusión, el procedimiento consiste en hallar todos los candidatos posibles en el interior, caras, aristas y vertices; quedándose con aquel que de menor valor de f .

* Comencemos con los vertices

4

- $f(0,0,0) = 0$
- $f(0,0,1) = 1$
- $f(0,1,0) = 0$
- $f(0,1,1) = 1$
- $f(1,0,0) = -7$
- $f(1,0,1) = -8$
- $f(1,1,0) = -7$
- $f(1,1,1) = -8$

* Ahora veamos el interior

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x - 2z - 10 \\ 4y - 2 \\ -2x + 6z - 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{no cumple la restricci3n}$$

\Rightarrow no hay candidatos

* Calculemos ahora en cada una de las aristas

► $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$ La ecuaci3n de ∇L de inter3s es $6z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

- $f(0,0,1/3) = -1/3$

► $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $f(0,1/2,0) = -1/2$

► $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{6} \Rightarrow$ no cumple restricci3n
 \Rightarrow no hay candidato

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow -2 + 6z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(1, 1, 2/3) = -25/3$$

$$\begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(1, 1/2, 1) = -8,5$$

$$\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 6x - 2 - 10 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{no comp. restriction} \\ \Rightarrow \text{no max candidate}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 6z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(0, 1, 1/3) = -1/3$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -2 + 6z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(1, 0, 2/3) = -25/3$$

$$\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(0, 1/2, 1) = 1/2$$

$$\begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(1, 1/2, 0) = -7,5$$

► $y=0$
 $z=1 \Rightarrow 6x - 2 - 10 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ no cumple restricción

► $y=1$
 $z=0 \Rightarrow 6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{6} \Rightarrow$ no cumple restricción

* Ahora se busca en las 6 caras

► $x=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y = 2 \\ 6z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

• $f(0, 1/2, 1/3) = -5/6$

► $x=1$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y = 2 \\ 6z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

• $f(1, 1/2, 2/3) = -53/6$

► $y=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x - 2z = 10 \\ -2x + 6z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ no cumple restricción

► $y=1$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x - 2z = 10 \\ -2x + 6z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ no cumple restricción

► $z=0$

$$\begin{cases} 6x=10 \\ 4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ no cumple restricción}$$

► $z=1$

$$\begin{cases} 6x=12 \\ 4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ no cumple restricción}$$

Observando todos los candidatos se tiene que el mínimo valor de f es $-53/6$ en el punto

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}}$$