Ejercicio 6

a) $\underset{x,y}{\min}$ $5x^2+5y^2+5x-3y-6xy+5/4 = f(x,y)$
(P)
S.t: $x^2+y^2 \leq R^2 \quad R\in\mathbb{R}^+$

Para probar que f es convexa calculemos $\nabla^2 f$.

$$\nabla f=(10x+5-6y,\ 10y-3-6x)$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$ cuyos valores propios son $\lambda_1=4 \quad \lambda_2=16$

Como los valores propios son todos mayores a 0 $(\lambda_i>0\ \forall i) \Rightarrow \nabla^2 f$ es definda positiva $\forall x,y$
$\Rightarrow$ f es convexa
La region factible es convexa por ser $B((0,0),R)$ y se probo su convexidad en 1)e) $\Rightarrow$ (P) es convexo

b) Como f es convexa, $\nabla f(\bar{x})=0$ es una condición suficiente y necesario de optimalidad

$$\nabla f(\bar{x},\bar{y})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10\bar{x}-6\bar{y}=-5 \\ -6\bar{x}+10\bar{y}=3 \end{cases} \Rightarrow (\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{-1}{2},0\right)$$

Sustituyendo en la restriccion; con $R<1/2$
$$(-1/2)^2+0^2 \leq R^2 < \frac{1}{2}$$

Lo cual no cumple la desigualdad $\Rightarrow$ la restricción esta activa