Ejercicio 3

Parte a

$$\min_{x \in R} f(x) = 4x^4 - x^3 - 4x^2 + 1$$

$$s.to : -1 \leq x \leq 1$$

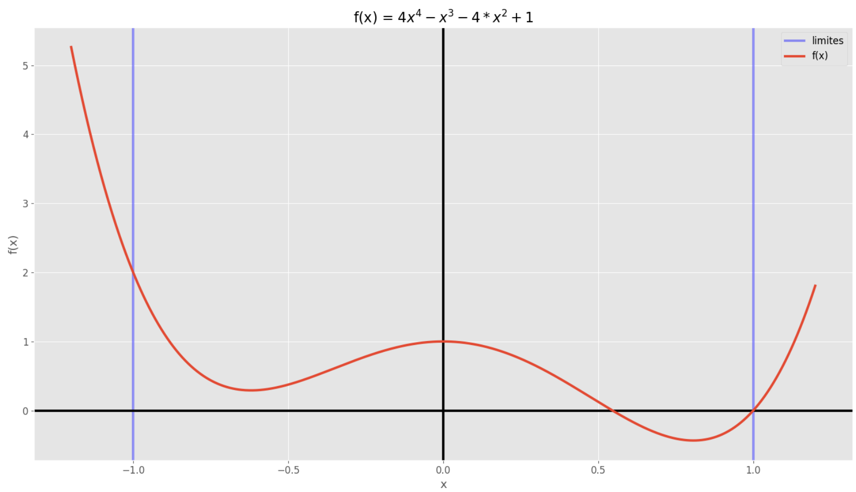

Figure 5

Derivando $f(x)$ se tiene $f'(x) = 16x^3 - 3x^2 - 8x$, la cual se anula en

$$\bar{x} = \begin{cases} -0.62 \\ 0.81 \\ 0 \end{cases}$$

A partir de la gráfica se realiza la siguiente clasificación para estos puntos

$$\bar{x} = \begin{cases} -0.62 & \text{mínimo local} \\ 0.81 & \text{mínimo global} \\ 0 & \text{máximo local} \end{cases}$$

Los tres puntos están dentro del conjunto y el mínimo se da en uno de ellos, en particular en 0.81.

Parte b

$$\min_{x \in R} f(x) = x^3$$

$$s.to : -1 \leq x \leq 1$$

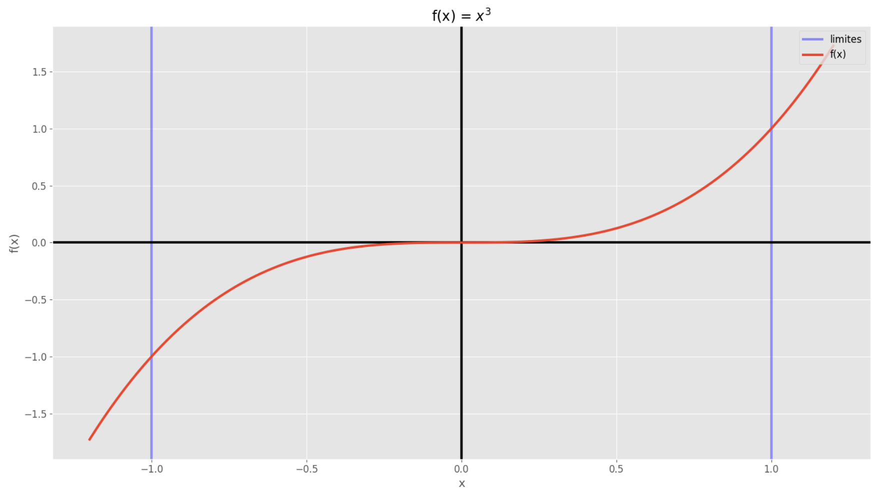

Figure 6

El gradiente de f es $f'(x) = 3x^2$.
Este se anula únicamente en $\bar{x} = 0$, el cual como se ve en la gráfica es un punto silla dentro de la región factible.

El mínimo se da en el extremo -1 del conjunto.

Parte c

$$\min_{x \in R} f(x) = (x - a)^2 + 1$$

$$s.to : -1 \leq x \leq 1$$

Se gráfica la función $f(x)$ para varios valores de a.

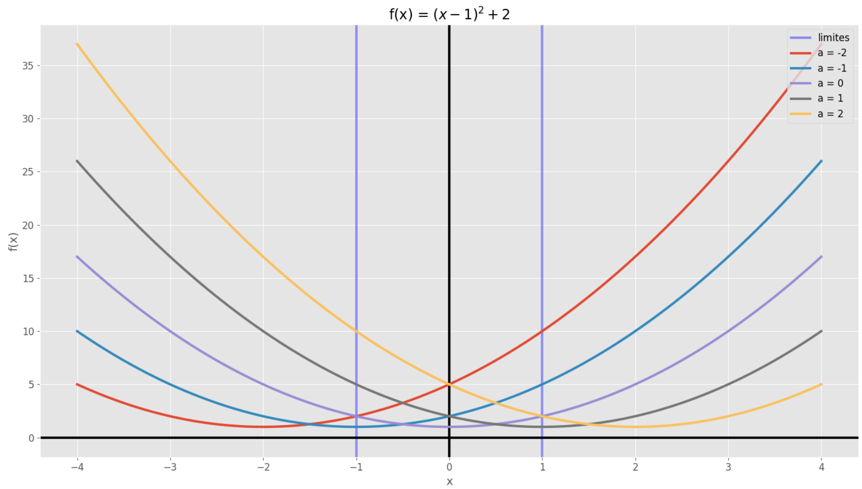

Figure 7

La derivada de la función es $f'(x) = 2(x-a)$, la cual se anula en $\bar{x} = a$. El punto $\bar{x}$ es un mínimo local, observar que el valor de a determina donde se da el mínimo de la parábola f.

Si $|a| > 1$ el mínimo local estará fuera del conjunto factible, por lo tanto, el problema con restricciones tendrá su mínimo en uno de sus extremos.

Existen 3 casos posibles

$$\bar{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } a < 1 \\ a & \text{si } |a| \leq 1 \\ 1 & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Parte d

$$\min_{(x)\in R^2} f(x) = \|x - x^*\|^2 + 1$$

$$\text{s. to: } x \in [0,1]^2$$

Dado que $\|.\|^2$ es convexa (se prueba en el Ejercicio 5) y por la propiedad del Ejercicio 1 parte c, se tiene que $\|x - \bar{x}\|^2$ es convexo. Sumarle 1 no altera la convexidad, ya a suma de funciones convexas es convexa, por lo tanto $f(x)$ lo es.

Veamos si $B = [0,1]^2 = S_1 \cap S_2$ es convexo. Basta probar que S_1 y S_2 sean convexos, ya que la intersección de ambos también lo seria. Ambos conjuntos son semiplanos de R^2, por lo que son convexos.

El gradiente de f es $\nabla f(x) = 2(x - x^*)$, anulándose en $\bar{x} = x^*$. Este es un mínimo local, que se encuentra fuera de la región factible.

A continuación se muestran las curvas de nivel junto con la región factible.

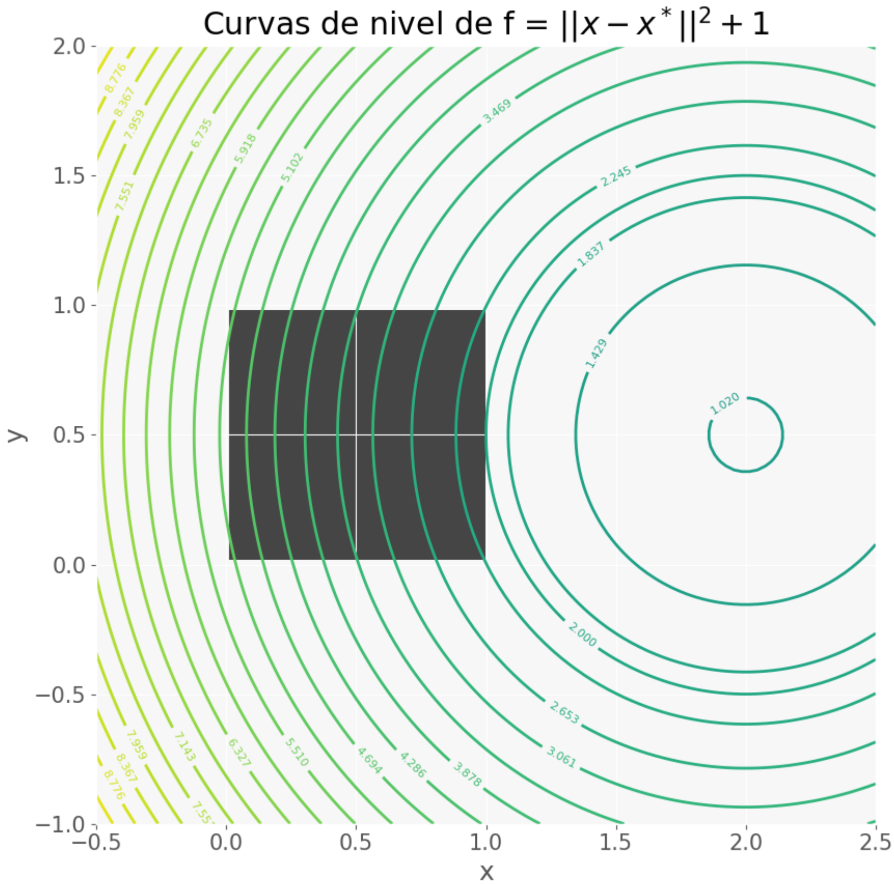

Figure 8: Cuanto mas amarillento el valor de la curva de nivel, mayor el valor asociado. La región gris corresponde a la zona factible.

Gráficamente se puede apreciar que la curva de nivel de menor valor que intersecta a la región factible es aquella asociada al valor 2. Este corte se da en el punto $\bar{x} = (1, \frac{1}{2})$, el cual es el mínimo del problema