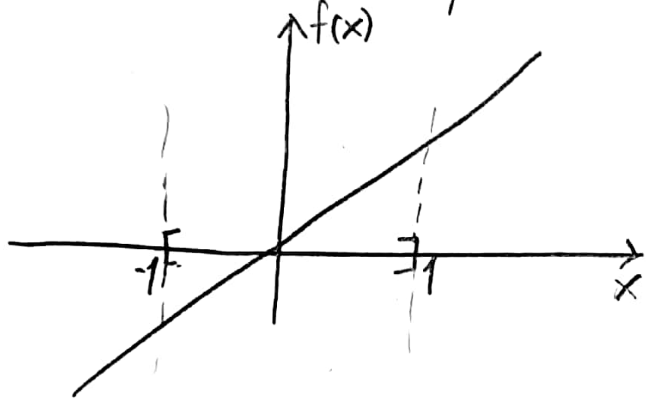
Ejercicio 1

$$(P)\begin{cases} \min & f(x) \\ st & g(x) \leq 0 \end{cases}$$

$*\ f(x) = x \qquad g(x) = x^2 - 1$

a) Graficamente el problema a resolver es:



Por lo que:

$$\boxed{x^* = -1}$$

$$\boxed{f^* = -1}$$

b) Paso 1

$$L(x,\mu) = x + \mu(x^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\mu x = 0 \iff x = \frac{-1}{2\mu}$$

Paso 2

$$d(\mu) = L\left(\frac{-1}{2\mu}, \mu\right) = \frac{-1}{2\mu} + \mu\left(\frac{1}{4\mu^2} - 1\right)$$

$$d(\mu) = \frac{-1}{4\mu} - \mu$$

Paso 3

$$(D)\begin{cases} \max & \frac{-1}{4u} - u \\ st & u \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial d}{\partial u} = \frac{1}{4u^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1/2$$

como $u \geq 0 \Rightarrow \boxed{u^* = 1/2}$

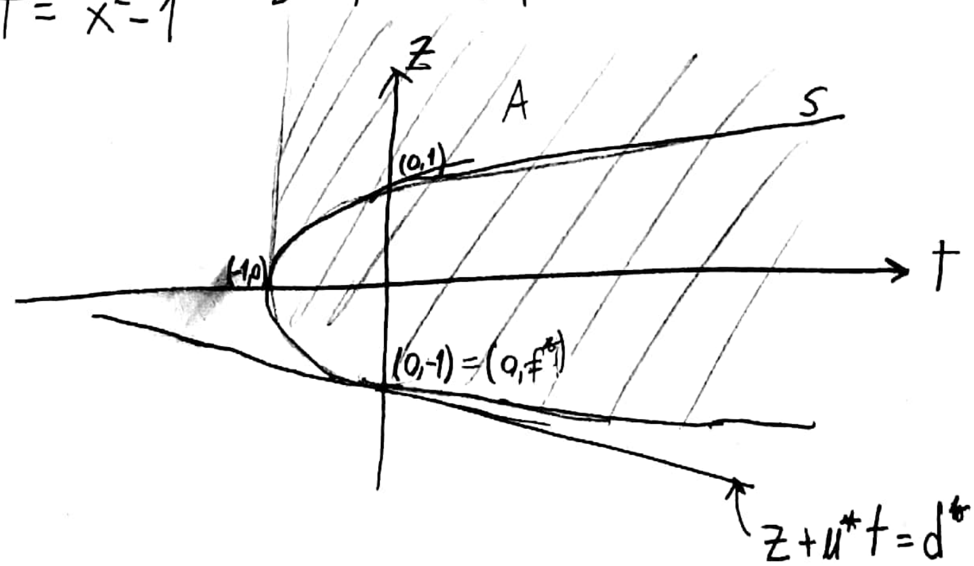
y $d(u^*) = \boxed{d^* = -1}$

c) Se cumple la condicion de slater sii
$\exists \bar{x} \in X / g(\bar{x}) < 0$

Ver que $\exists \bar{x} = 0 / g(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ se cumple slater

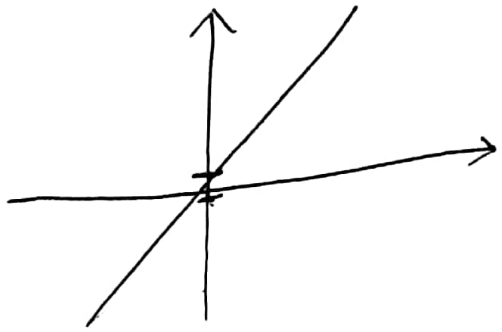
Como $d^* = f^*$ se cumple dualidad fuerte y debil

d) $z = x$
$t = x^2 - 1 \Rightarrow t = z^2 - 1$



* $f(x) = x \qquad g(x) = x^2$

a)



$\Rightarrow \boxed{f^* = 0}$
$\boxed{x^* = 0}$

b) Paso 1

$$L(x,\mu) = x + \mu x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\mu x = 0 \iff x = \frac{-1}{2\mu}$$

Paso 2

$$d(\mu) = L\left(\frac{1}{2\mu}, \mu\right) = \frac{-1}{2\mu} + \frac{1}{4\mu} = \frac{-1}{4\mu}$$

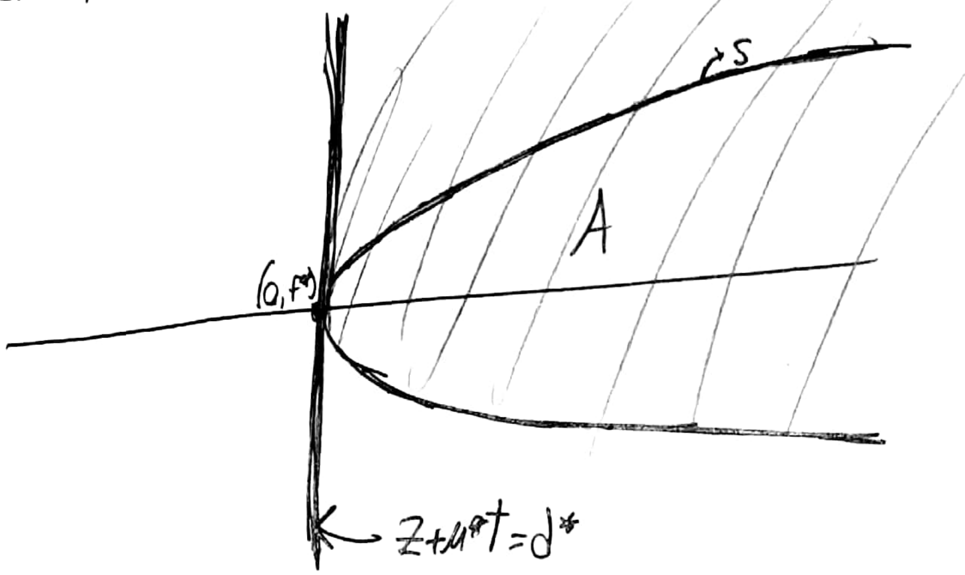
Paso 3

$$(D)\begin{cases} \max & \frac{-1}{4\mu} \\ \mu \geq 0 & \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mu^* = +\infty} \quad \boxed{d^* = 0}$$

c) En este caso $\nexists\, \bar{x} \in X \,/\, g(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$ no se cumple slater

Se cumple dualidad fuerte y debil porque $f^* = d^*$

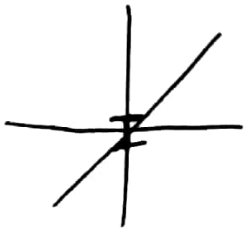
d) $Z = X$
$t = x^2$ $\Rightarrow$ $t = Z^2$



Se verifica que la recta que soporta al conjunto tiene pendiente ∞.

$* \quad f(x) = x \qquad g(x) = |x|$

a)



$\boxed{f^* = 0}$

$\boxed{x^* = 0}$

b) Paso 1

$$L(x,\mu) = x + \mu|x| = \begin{cases} x(1+\mu) & \text{si } x > 0 \\ x(1-\mu) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Caso $x>0$

$$L(x,\mu) = x(1+\mu)$$

como $\mu > 0$ el mínimo en esta región se da en $x_{opt} = 0 \ \forall \mu > 0$

- Caso $x<0$

$$L(x,\mu) = x(1-\mu)$$

$$x_{opt} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene que

$$x^* = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Paso 2

$$d(\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 1 \\ 0 & \text{si } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Paso 3

(D) $\begin{cases} \max\limits_{u \geq 0} & \begin{cases} -\infty & \text{si } u<1 \\ 0 & \text{si } u \geq 1 \end{cases} \end{cases}$

Toda la region $[1,\infty)$ hace que $d=0$ y se maximice

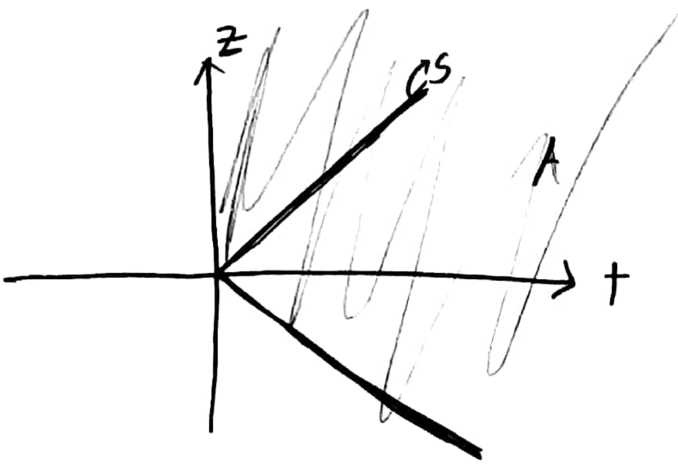
$\Rightarrow \boxed{d^* = 0}$

$\boxed{u^* = [1,\infty)}$ ← abuso de notación

c) No se cumple Slater ya que $\nexists\, \bar{x} \in X \,/\, |\bar{x}| < 0$

se cumple dualidad fuerte y debil

d) $z = x$
$t = |x|$ $\Rightarrow t = |z|$



Notar que como $t=|z|$ no es diferenciable no existe una unica recta tangente. Notar que u puede tomar cualquier valor correspondiente a los subgradientes de $t=|z|$

* $f(x) = x^3 \qquad g(x) = -x+1$

a)

$\Rightarrow \boxed{f^* = 1}$ $\boxed{x^* = 1}$

b) Paso 1

$$L(x,\mu) = x^3 + \mu(1-x)$$

Notar que al ser un polinomio de grado 3 no es valido anular la derivada para hallar el infimo.

Notar que $\lim\limits_{x \to -\infty} L(x,\mu) = -\infty \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

Paso 2

$$d(\mu) = -\infty$$

Paso 3

$$(D) \begin{cases} \max & -\infty \\ \text{st} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

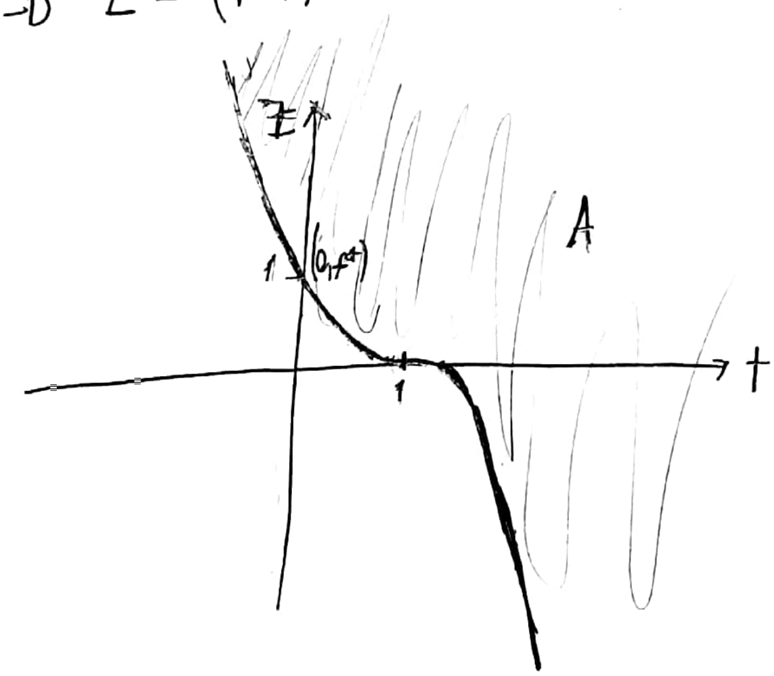
Se tiene que $d(\mu) = -\infty \ \forall \mu \Rightarrow \boxed{d^* = -\infty}$ $\boxed{\mu^* = [0, +\infty)}$

c) Se cumple slater porque

$$\exists \bar{x} = 2 \; / \; g(2) = -2+1 = -1 < 0$$

Hay un GAP $= \infty$ por lo que no se cumple dualidad fuerte. Si se cumple dualidad debil porque $d^* \leq f^*$

d) $z = x^3$
$t = -x+1$ $\Rightarrow$ $z = (1-t)^3$



En este caso no existe ninguna recta que soporte al conjunto. Se puede interpretar que $d = -\infty$ es una recta que corta por $-\infty$.