Métodos Númericos para la Ciencia e Ingeniería: Informe Tarea 1

Camila Castillo Pinto

24 de Septiembre, 2015

1 Introducción

En este informe se explica y analiza el procedimiento para integrar una función mediante el Método del Trapecio y el Método de Simpson, creando un algoritmo propio. Además se comparan los resultados obtenidos a partir de este algoritmo con los resultados que dan los algoritmos predeterminados de Python, como también el tiempo de ejecución de éstos. También se calculan la Luminosidad total del Sol y el radio del Sol.

El método del trapecio se utilizó para integrar el espectro del Sol, el cual fue graficado previamente, mientras que el método de Simpson se utilizó para integrar la función de Planck:

$$B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{1}$$

La integral de esta función se asume conocida y corresponde a:

$$P = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \tag{2}$$

2 Problema 1

El problema 1 consistió en cargar los datos del espectro solar y graficarlos.

2.1 Procedimiento

Se utilizó Python para cargar los datos del espectro solar del archivo *sun_AM0.dat*, mediante comandos se hizo la conversión de unidades: de $[nm]$ a $[\mu m]$ para la longitud de onda y de $[\frac{W}{m^2 \cdot nm}]$ a $[\frac{erg}{cm^2 \cdot s \cdot \mu m}]$ para el flujo; y luego se graficaron estas dos cantidades. (Para mas detalle ver archivo *codigo.py*)

2.2 Resultados

El gráfico de Flujo versus Longitud de onda resultante se muestra a continuación en la Figura 1:

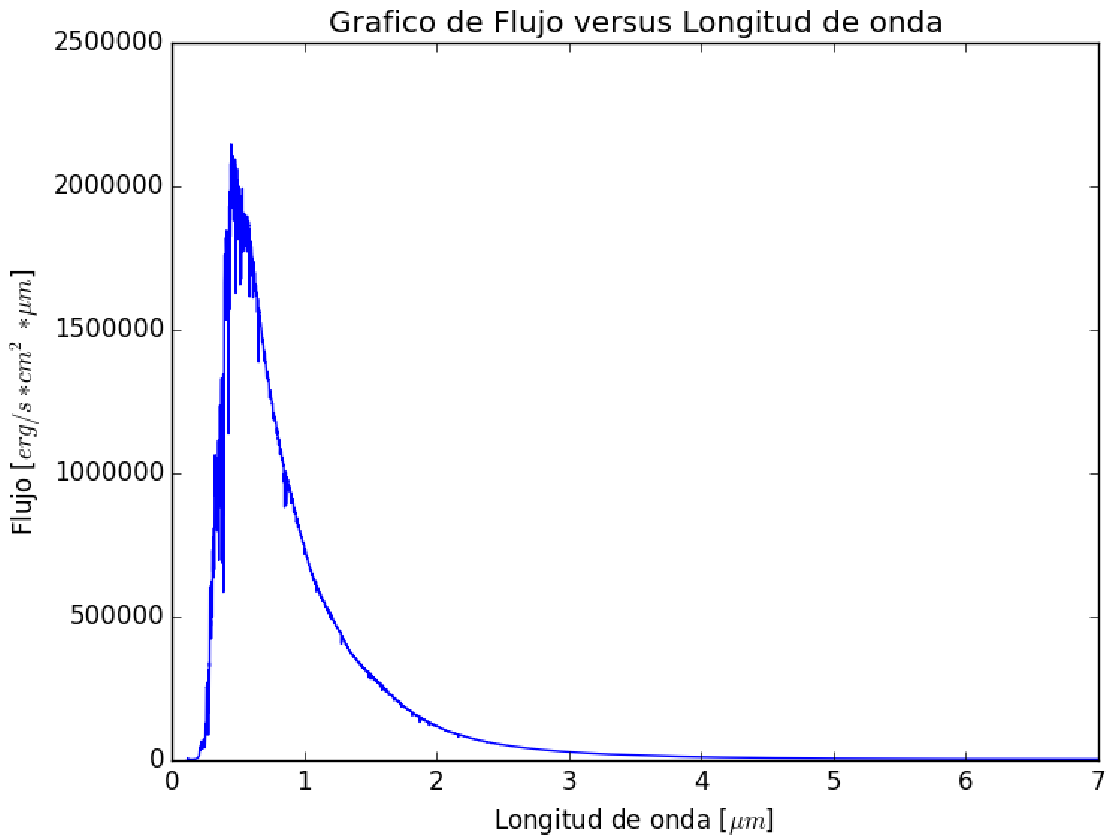

Figure 1: Gráfico de Flujo vs Longitud de onda. Representa el espectro del Sol.

3 Problema 2

El problema 2 consistió en integrar la función que se graficó para obtener el valor del área bajo la curva y luego calcular el valor de la luminosidad total del Sol.

3.1 Procedimiento

Se utilizó el método del trapecio para la integración del espectro. Este método consiste en aproximar el valor de la integral de una función por el de la función lineal que pasa a travs de los puntos $(x1, y(x1))$ y $(x2, y(x2))$, luego el área bajo la función lineal corresponde a la integral de la función (Ver Figura 2).

El área de un trapecio está dada por la ecuación 3:

$$A = \frac{(x2 - x1)(y(x1) + y(x2))}{2} \tag{3}$$

De esta manera, dividiremos la función del espectro solar en varios trapecios de manera que al sumar el área de cada uno de ellos, el valor resultante será aproximadamente la integral del espectro solar (ecuación 4):

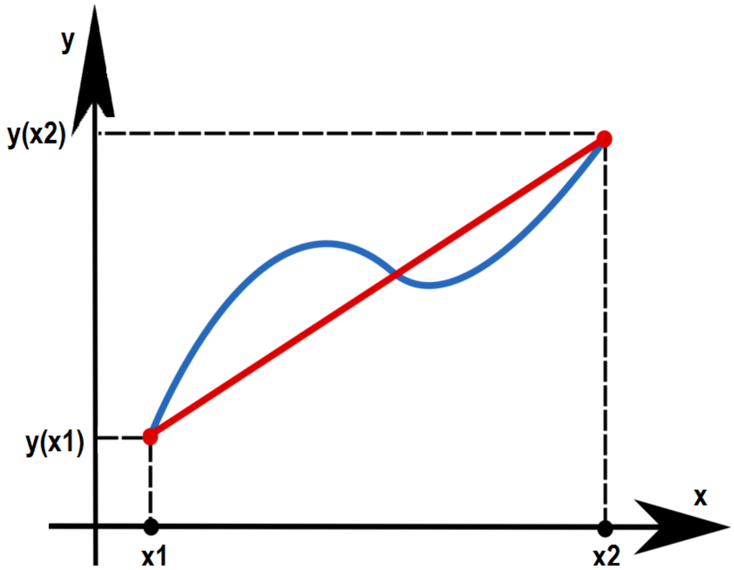

Figure 2: Método del trapecio: la integral de la función en azul se aproxima al área bajo la recta en rojo.

$$A_{total} = \sum_{i=1}^{1696} \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_i + y_{i+1})}{2} \tag{4}$$

Como se cargaron los datos desde el archivo *sun_AM0.dat*, los 1697 valores para x e y fueron guardados en vectores, así la sumatoria parte desde el primer elemento de cada vector y termina en el penúltimo valor ya que la fórmula del área contiene un elemento con subíndice $i + 1$.

3.2 Resultados

El valor obtenido al integrar el espectro solar mediante el método del Trapecio fue: $I_{espectro} = 1.366 \cdot 10^6 [\frac{erg}{cm^2 s}] = K_s$

Como la unidad de medida de este valor es cantidad de energía por unidad de área y unidad de tiempo, entonces corresponde a la cantidad llamada **Constante Solar**. Para calcular la luminosidad total del Sol se utilizó la fórmula que aparece a continuación:

$$L_s = 4 * \pi * a_o^2 * K_s \tag{5}$$

Donde L_s es la luminosidad total, K_s corresponde a la constante solar y a_0 es una unidad astronómica.

El resultado de la luminosidad total del sol fue: $L_s = 3.8418 \cdot 10^{33} [\frac{erg}{s}]$

4 Problema 3

El problema 3 consistió en integrar numéricamente la función de Planck (ver ecuación 1) para estimar la energia total por unidad de area emitida por un cuerpo negro con la temperatura efectiva del sol y también estimar el radio efectivo del sol.

4.1 Procedimiento

La indicación del enunciado mostraba que la integral de la función de Planck correspondía a la ecuación (2), por lo que la integral que muestra esta ecuación se calculó mediante el Método de Simpson, para luego multiplicarla por la constante que la acompaña para obtener el valor de la integral de la función de Planck.

Además el enunciado sugería el cambio de variable $y = arctan(x)$, que al aplicarlo, la integral quedó de la forma:

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \frac{tan^3(x)}{(e^{tan(x)} - 1)cos^2(x)} \tag{6}$$

Es importante notar que la integral diverge en 0, por lo que se utilizó el Método del Punto Medio para calcular la integral en este punto. Este método consiste en aproximar la integral de la función mediante un rectángulo, cuya altura corresponde al del punto medio del intervalo, como se muestra en la Figura 3:

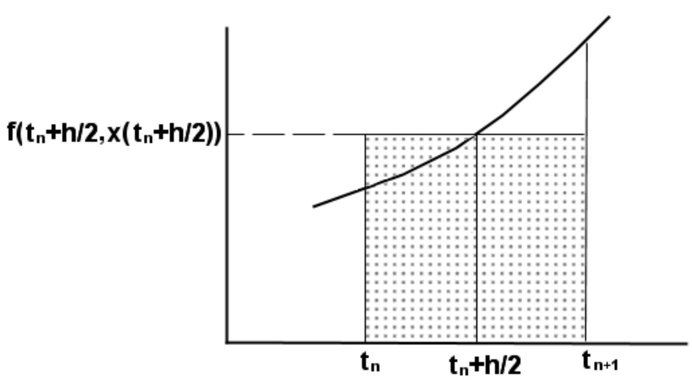

Figure 3: Método del punto medio: la integral de la función se aproxima al área del rectángulo sombreado.

Para el resto de los puntos la integral se calculó con el Método de Simpson visto en clases:

$$S = \frac{4 * T_{2n}}{3} - \frac{T_n}{3} \tag{7}$$

Donde S es el valor de la integral con Simpson, T_n y T_{2n} corresponden al valor de la integral usando el método del trapecio para n puntos y $2n$ puntos, respectivamente. Entonces como ya se entiende el método del trapecio, calcular el valor de la integral con Simpson usando esta fórmula se vuelve simple.

Luego, para tener el valor de la integral basta con sumar la cantidad S y la cantidad obtenida a partir del método del punto medio. Finalmente este valor se multiplica por las constantes, tomando la temperatura efectiva del Sol: $5776[K]$ y se obtiene el valor de la integral de la función de Planck P.

El cálculo del radio efectivo del Sol se hizo mediante la fórmula:

$$r_{sol} = \sqrt{\frac{K_s a_o^2}{P}} \tag{8}$$

4.2 Resultados

El valor obtenido de la integral de la función de Planck fue: $P = 6.32006789 \cdot 10^7 [\frac{J}{m^2 \cdot s}]$ y corresponde al flujo de energía por unidad de área emitida por un cuerpo negro.

El valor obtenido del radio efectivo del sol fue: $r_{sol} = 6.9551 \cdot 10^8 [m]$, que es consistente con el valor real del radio del sol : $6.96 \cdot 10^8 [m]$.

5 Problema 4

El problema 4 consistió en usar métodos predeterminados de Python para calcular las integrales de los problemas 2 y 3, comparando luego los resultados obtenidos y el tiempo de ejecución de éstos con los algoritmos propios.

5.1 Procedimiento

Se utilizó el método *scipy.integrate.trapz* para re-calcular las integrales del espectro y de la función de Planck y el método *scipy.integrate.quad* para re-calcular la integral de la función de Planck. Ambos métodos vienen predeterminados por Python, de forma que reciben los parámetros correspondientes y entregan el resultado.

Para calcular el tiempo de ejecución de cada algoritmo (predeterminado y propio) se utilizó el comando *time.time()*, el cual fija el tiempo que se demora en ejecutar un código. Entonces se fijó el tiempo al principio y al final de cada algoritmo, de manera que al tomar la resta entre estos dos el resultado corresponde al tiempo que tarda en ejecutarse el algoritmo.

5.2 Resultados

Los valores de las integrales calculadas ahora con los métodos predeterminados se resumen en la Tabla 1 y los tiempos de ejecución de cada algoritmo se resumen en la Tabla 2.

	.trapz	.quad	Algoritmo propio
Integral del Espectro $[erg/cm^2 s]$	$1.366090 \cdot 10^6$	-	$1.366090 \cdot 10^6$
Integral de Func. Planck $[J/m^2 s]$	$6.32006748 \cdot 10^7$	$6.32006797 \cdot 10^7$	$6.32006789 \cdot 10^7$

Table 1: Resultados de las Integrales con los métodos de Python y con algoritmo propio.

Algoritmo	Tiempo de ejecución [s]
Parte 2, algoritmo propio	1.371
Parte 2, método .trapz	0.015
Parte 3, algoritmo propio	0.064
Parte 3, método .trapz	0
Parte 3, método .quad	0.0159

Table 2: Tiempos de ejecución para cada algoritmo.

6 Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos de las integrales que se pedían calcular se concluye que los algoritmos implementados son tan efectivos como los algoritmos predeterminados por Python, ya que obtuvieron resultados muy similares (Ver Tabla 1).

Sin embargo, la gran diferencia se observa en el tiempo que tardan en ejecutarse: los algoritmos implementados tardaron más en ejecutarse que aquellos algoritmos predeterminados de Python (Ver Tabla 2).

Esta diferencia se puede deber a que los algoritmos implementados sólo pretendían llegar a un resultado correcto, más allá de ser eficiente al ejecutarse; en otras palabras, el parámetro de 'tiempo de ejecución' no fue considerado con gran importancia al momento de programar, mientras que los métodos predeterminados de Python sí toman en cuenta este punto.

Cabe destacar que en general el tiempo de ejecución es muy importante al momento de programar, sobre todo cuando se requiere hacer cálculos complejos con gran cantidad de variables y de valores, por lo que no es recomendable dejarlo de lado.