INF5130 - Algorithmique

Série d'exercices - 2

Exercice 1. Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $f(n) \geq 0$ et $g(n) \geq 0$ pour tout n. Prouvez que

$$f(n) + g(n) \in \Theta(max(f(n), g(n)))$$

en utilisant la définition de la notation Θ.

Exercice 2. Soit a et b deux constantes réelles strictement positives. Prouvez que,

$$(n + a)^b \in \Theta(n^b)$$

pour n un entier naturel, en utilisant la définition de la notation Θ. Si cette équation vous semble trop abstraite, remplacez a par 15 et b par 10.

Exercice 3. Prouvez que $a^{\log_b(n)} = n^{\log_b(a)}$ pour tout nombre naturel $n > 0$, tout nombre réel $a > 0$ et tout nombre réel $b > 1$.

Suggestion : servez-vous du fait que la fonction $\log_b(x)$ est injective, c'est-à-dire que $\log_b(x) = \log_b(y)$ si et seulement si $x = y$.

Exercice 4. Classez les fonctions suivantes par ordre croissant ; autrement dit, si la fonction $f(n)$ est dans $o(g(n))$, $f(n)$ doit être placée à gauche de $g(n)$. Si $f(n) \in \Theta(g(n))$, $f(n)$ doit être placée au-dessus ou au-dessous de $g(n)$ (c'est-à-dire au même niveau que $g(n)$).

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n,\ n^3,\ \log^2(n),\ \log(n!),\ 2^{2^n},\ (\sqrt{n})^{\log(n)},\ 2^{\log(n)},\ (\log(n))^{\log(n)},\ 4^{\log(n)},\ n!, \sqrt{\log(n)}$$

Remarque : tous les logarithmes sont des logarithmes dans la base deux.

Exercice 5. Pour chacun des énoncés suivants, dites s'il est *Vrai* ou *Faux*. Justifiez brièvement chacune de vos réponses. Tous les logarithmes sont des logarithmes dans la base deux.

(a) $\Theta(2n) = \Theta(n)$

(b) $\left(\frac{n}{\log(n)}\right)^2 \in o\left(\frac{n^2}{\log(n)}\right)$

(c) $n^{\frac{1}{2}} \in \omega(\sqrt{n})$

(d) $\log(4^n) \in \Theta(n)$

(e) $2^n \in \Omega(3^n)$

Exercice 6. Chacun des énoncés ci-dessous est faux. Montrez-le en donnant un contre-exemple, c'est-à-dire en remplaçant $f(n)$ et $g(n)$ par des fonctions particulières pour lesquelles l'énoncé est faux.

(a) Si $f(n) \in O(g(n))$, alors $2^{f(n)} \in O\left(2^{g(n)}\right)$

(b) $f(n) + g(n) \in \Theta(\min(f(n), g(n)))$