Série 6

1 Exercise 1

1.1 Question A

Donner le paranthèsage optimal pour le produit matriciel suivant : $A_{1(1\times5)} \times A_{2(5\times10)} \times A_{3(10\times3)} \times A_{4(3\times2)}$. Détaillez vos calculs et donner le résultat de la matrice M et FRONTIÈRE.

1.2 Question B

Refaire le même processus, mais avec les matrices suivantes :

1. $A_1 : 2 \times 1$
2. $A_2 : 1 \times 4$
3. $A_3 : 4 \times 2$
4. $A_4 : 2 \times 5$
5. $A_5 : 5 \times 1$
6. $A_6 : 1 \times 3$

2 Exericse 2

Utiliser l'approche dynamique présentée dans le chapitre 6 pour trouver l'arbre binaire de recherche qui minimise le nombre moyen de comparaisons lors d'une recherche fructeuse parmi 5 clés ayant des probabiblités de recherche données dans le tableau suivant. Vous devez déterminer les matrices C et RACINE ainsi que l'arbre binaire associé et l'espérance du temps de recherche.

k	1	2	3	4	5
p_k	$0,5$	$0,25$	$0,1$	$0,08$	$0,07$

3 Exercise 3

Soit un robot qui commence à la coordonnée $(1,1)$ dans une matrice $n \times m$ et les déplacement qui peut faire est soit aller à droite ou en bas. Son but est de ce rendre à la case (n,m).

Exemple de problème :

D				
				A

3.1 Question A

Faite un schéma récursif pour savoir combien de chemins possibles le robot peut prendre. Indice : remplissez le schéma suivant :

$$M[i,j] = \begin{cases} ... & ... \\ ... & ... \\ ... & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2 Question B

Écrivez l'algorithme qui permet de résoudre ce problème.

4 Exercise 4

Considérez le problème qui consiste à remettre un certain montant d'argent en utilisant le plus petit nombre de pièces ou billets disponible.
Par exemple, si nous disposons de pièces de $1, 5, 11$ et 25 unités et que nous devons faire la monnaie de 29 unités, la solution est de remettre une pièce de 25 unités, la solution est de remettre une pièce de 25 unités et quatre pièces à d'une unité, un total de cinq pièces.
Soit n, le nombre de pièces distinctes (4 dans l'example) et soit P, un tableau de nombres naturels non nuls, dont les indices vont de 1 à n contenant les valeurs des n pièces. On suppose ici que nous disposons d'un nombre illimité de chaque type de pièce. Soit L le montant dont on veut obtenir la monnaie. Dans ce problème, les valeurs des pièces sont strictement positives. Le montant à remettre est un nombre entier non négatif. On assume que le tableau P est en ordre croissant. Nous allons utiliser une matrice C de n lignes numérotées de 1 à n et $L+1$ colonnes numérotées de 0 à L où $C[i,j]$ contient le nombre minimal de pièces pour rendre la monnaie d'un montant j si l'on se limite seulement qu'aux pièces de valeur $P_1, P_2, ..., P_i$. Si la monnaie ne peut être rendue, $C[i,j]$ sera égal à l'infini.

4.1 Question A

Peu importe P, que vaut $C[1,j]$ pour $0 \leq j \leq L$

4.2 Question B

Peu importe P, que vaut $C[i, 0]$ pour $1 \leq j \leq n$

4.3 Question C

Peu importe P, que vaut $C[i, 1]$ pour $1 \leq j \leq n$

4.4 Question D

Supposons que $P = [1, 5, 11, 25]$ et que $L = 20$, donnez le contenu de la matrice C.

4.5 Question E

Donnez une équation de récurrence pour $C[i, j]$. N'oubliez pas les conditions initiales (cas de base)

$$C[i, j] = \begin{cases} ... & \text{Si j = 0} \\ ... & \text{Si i = 1 et ...} \\ ... & \text{Si i = 1 et ...} \\ ... & \text{Si j} < P_i \\ ... & \text{sinon} \end{cases}$$

4.6 Question F

Donnez la complexité de votre algorithme en fonction de n le nombre de pièces et L le montant à échanger.