Solution partielle série 2

Andrey Martinez Cruz

Table des matières

1 Exercise 1

Pour démontrer que

$$f(n) + g(n) \in \Theta(\max(f(n), g(n))) \tag{1}$$

il faut démontrer que

$$f(n) + g(n) \in \mathcal{O}(\max(f(n), g(n))) \wedge f(n) + g(n) \in \Omega(\max(f(n), g(n))) \tag{2}$$

Une façon de réprésenter celà est la suivante :

$$C_1 \max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq C_2 \max(f(n), g(n)) \tag{3}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

Démontrons d'abord que $f(n)+g(n) \in \mathcal{O}(\max(f(n), g(n)))$. Pour essayer de voir pair de constantes c et x telle que $f(n) + g(n) \leq c \cdot \max(f(n), g(n)), \forall n, n > x$ respecte cette inéquation, on peut essayer de voir ce qui se passe si la fonction qui grossit le plus vite est $f(n)$ et $g(n)$.

Pour $f(n)$, si $f(n)+g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, alors on pourrait s'attendre que $max(f(n), g(n)) = f(n)$ et donc,

$$f(n) \leq c \cdot f(n) \text{ est vrai pour } c = 1 \text{ et } x = 0.$$

.
Dans le cas de $g(n)$, si $f(n) + g(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, alors $max(f(n), g(n)) = g(n)$ et donc,

$$g(n) \leq c \cdot g(n) \text{ est vrai pour } c = 1 \text{ et } x = 0.$$

.
Dans le cas, où on ne peut pas départager c'est qui qui grossit plus vite, on a l'inéquation suivante :

$$f(n) + g(n) \leq \max(f(n), g(n))$$

Sachant que la partie de droite de l'inéquation est composée de deux parties, on peut faire de même pour la partie gauche ce qui donne :

$$f(n) + g(n) \leq \max(f(n), g(n)) + \max(f(n), g(n))$$

$$f(n) + g(n) \leq 2 \times \max(f(n), g(n))$$

En faisant cela, on obtient une constante $c = 2$ et cette inéquation est vraie pour $x = 0$ et pour tout $n > 0$. Donc, cela démontre que $f(n) + g(n) \in \mathcal{O}(\max(f(n), g(n)))$.

Démonstrons que $f(n) + g(n) \in \Omega(\max(f(n), g(n)))$. Essayons de voir ce qui se passe dans le cas où $\max((f(n), g(n)) = f(n)$ et dans le cas où c'est $g(n)$.

1. $f(n)$:

$$f(n) + g(n) \geq c \cdot \max(f(n), g(n))$$

$$f(n) + g(n) \geq c \cdot f(n)$$

$$1 + \tfrac{g(n)}{f(n)} \geq 1$$

   L'inéquation est respecté pour $c = 1$ et $x = 0$ telle que $n > x$.

2. $g(n)$:

$$f(n) + g(n) \geq c \cdot \max(f(n), g(n))$$

$$f(n) + g(n) \geq c \cdot g(n)$$

   $\tfrac{f(n)}{g(n)} + 1 \geq 1$ L'inéquation est respecté pour $c = 1$ et $x = 0$ telle que $n > x$.

En ayant analysé les deux cas, l'inéquation suivante :

$$f(n) + g(n) \geq c \cdot \max(f(n), g(n)) \tag{4}$$

est vraie aussi avec $c = 1$ et $x = 0$ telle que $n > x$. Donc, cela démontre que $f(n) + g(n) \in \Omega(\max(f(n), g(n)))$. La grosse inéquation est aussi bel et bien respectée avec les constantes $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$ pour tout $n > 0$ si on reprend les constantes trouvées dans les démonstrations précédentes. En ayant démontré que $f(n) + g(n) \in \mathcal{O}(\max(f(n), g(n)))$ et $f(n) + g(n) \in \Omega(\max(f(n), g(n)))$ soient vraies, alors cela démontre que $f(n) + g(n) \in \Theta(\max(f(n), g(n)))$.

2 Exercise 3

Supposant que $x = a^{\log_b(n)}$ et $y = n^{\log_b(a)}$. En se fiant au fait que le fonction $\log_b(x)$ est injective si et seulement si $x = y$ pour $\log_b(x) = \log_b(y)$, on peut substituer x et y dans l'équation ci-haut.

$$\log_b(x) = \log_b(y)$$

$$\log_b(a^{\log_b(n)}) = \log_b(n^{\log_b(a)})$$

$$\log_b(n)\log_b(a) = \log_b(a)\log_b(n)$$

$$\log_b(n) = \log_b(n)$$

3 Exercise 5

3.1 Question A

Pour savoir si cette énoncé est vrai, on peut essayer de démontrer que $2n \in \Theta(n)$. Pour démontrer cela, il faut d'abord démontrer que $2n \in \mathcal{O}(n)$ et $2n \in \Omega(n)$.

Démontrons d'abord que $2n \in \mathcal{O}(n)$.

$$2n \leq c \cdot n$$

L'inéquation est vrai pour $c = 2$ pour tout $n > 0$. Donc, $2n \in \mathcal{O}(n)$.

Démontrons maintenant que $2n \in \Omega(n)$.

$$2n \geq c \cdot n$$

Cette inéquation est vraie pour $c = 1$ pour tout $n > 0$. Donc, $2n \in \Omega(n)$. Par conséquent, en ayant démontré que $2n \in \mathcal{O}(n)$ et $2n \in \Omega(n)$, alors, $2n \in \Theta(n)$. En ayant démontré cela, on peut faire aussi conclure que $n \in \Theta(2n)$. En conclusion, l'énoncé est vrai.

3.2 Question B

Essayons de trouver des constantes c et x telle que

$$(\frac{n}{\log(n)})^2 < c \cdot (\frac{n^2}{\log(n)}), \forall n, n > x \tag{5}$$

$$\frac{n}{\log^2(n)} < c \cdot \frac{n^2}{\log(n)}$$

$$\frac{n^2 \times \log(n)}{\log^2(n)} < c \cdot \frac{n^2 \times \log(n)}{\log(n)}$$

$$\frac{n^2}{\log(n)} < n^2$$

$$\frac{n^2 \times \log(n)}{\log(n)} < c \cdot n^2 \times \log(n)$$

$$n^2 < c \cdot n^2 \log(n)$$

Cette inéquation est vraie pour $c = 1$ et $x = 2$ telle que $n > x$. Donc cela démontre que $(\frac{n}{\log(n)})^2 \in \wr(\frac{n^2}{\log(n)})$

3.3 Question C

L'énoncé de cette question est fausse, car $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$ et la définition ω signifie que $n^{\frac{1}{2}}$ grossit strictement plus vite que lui-même. Ce qui est contradictoire à la défintion de ω.

3.4 Question D

Afin de vérifier si l'énoncé est vrai, on peut déjà simplifier la fonction $\log(4^n)$ qui se simplifie en $n \log(4) = 2n$. Or, $2n \in \Theta(n)$. Et donc, cet énoncé est vraie.

3.5 Question E

Essayons de démontrer cet énoncé en supposant que c'est vrai. Si l'énoncé savère vrai, alors il des constantes c et x telle que $2^n \geq c \times 3^n$ pour $\forall n, n > x$.

$$\begin{gathered} 2^n \geq 3^n \\ \sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{3} \\ 2 \geq 3 \end{gathered}$$

Or, on aboutit à une contradiction, car 2 ne peut pas jamais être plus grand ou égale à 3 et donc, il n'existe pas de c et x qui satisfait l'équation et par conséquent, l'énoncé est faux.