Corrigé révision 2

1 Diviser pour régner et équations de récurrences aux divisions finies

1.1 Exercise 1

1.1.1 Équation 1

$T(n) \in \Theta(n^2)$

1.1.2 Équation 2

$T(n) \in \Theta(n \log n)$

1.1.3 Équation 3

$T(n) \in \Theta(n \log n)$

1.1.4 Équation 4

$T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$

1.1.5 Équation 5

$T(n) \in \Theta(n^2)$

1.2 Exercise 2

1.2.1 Question A

$$T(81) = \sum_{i=0}^{\log_3 81} 4^i (\frac{81}{3^i})^2$$

1.2.2 Question B

$$\sum_{i=0}^{\log_3 81} 4^i = \frac{1-4^5}{1-4} = 341$$

1.2.3 Question C

$T(n) \in \Theta(n^2)$

1.3 Exericse 3

1.3.1 Question A

Le nombre de noeuds est le suivant :

$$
\begin{aligned}
nbNoeuds &= \sum_{i=0}^{\log 64} 2^i \\
&= \frac{1-2^7}{1-2} = 127
\end{aligned}
$$

1.3.2 Question B

En posant $n = 2^p$:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log n} 2^i (\frac{n}{2^i} \log \frac{n}{2^i}) \\
&= \sum_{i=0}^{p} 2^i (\frac{2^p}{2^i} \log \frac{2^p}{2^i}) \\
&= \sum_{i=0}^{p} 2^p \log \frac{2^p}{2^i} \\
&= \sum_{i=0}^{p} 2^p \log 2^{p-i} \\
&= \sum_{i=0}^{p} 2^p (p-i) \\
&= 2^p \sum_{i=0}^{p} p - i \\
&= 2^p (p^2 + p - \frac{p^2+p}{2}) \\
&= 2^p \frac{p^2+p}{2} \\
&= n \frac{\log^2 n + \log n}{2} \in \Theta(n \log^2 n)
\end{aligned}
$$

2 Exercise 4

1. **Fonction** CalculerLog(n , b)

```
    Si n < b alors
        Renvoyer 0
    Fin Si
    Renvoyer 1 + CalculerLog(⌊n/b⌋, b)
Fin Fonction
```

3 Programmation dynamique

3.1 Question 1

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 48 & 60 & 148 & 276 \\ & 0 & 36 & 84 & 212 \\ & & 0 & 144 & 336 \\ & & & 0 & 192 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$frontiere = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 3 & 4 \\ & & & 3 & 3 \\ & & & & 4 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Paranthèsage optimale :

$$A_1(((A_2A_3)A_4)A_5)$$

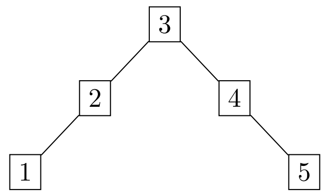
Nombre de multiplication scalaire : 276

3.2 Question 2

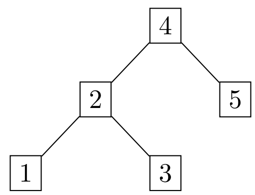
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,10 & 0,35 & 0,85 & 1,45 & 2,05 \\ & 0 & 0,15 & 0,55 & 1,15 & 1,65 \\ & & 0 & 0,25 & 0,80 & 1,2 \\ & & & 0 & 0,30 & 0,70 \\ & & & & 0 & 0,20 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$racine = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2,3 & 3 & 3,4 \\ & 2 & 3 & 3 & 4 \\ & & 3 & 4 & 4 \\ & & & 4 & 4 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

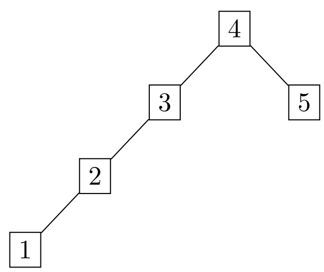
Arbre optimal #1 :



Arbre optimal #2 :



Arbre optimal #3 :



Espérance de recherche pour les trois : $2,05$

3.3 Question 3

Matrice des coûts :

	Y		G	C	G	G	A	T	C	G	T	A	T
X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	0	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
A	1	3	4	4	6	8	8	10	12	14	16	18	20
C	2	6	5	4	6	8	10	11	10	12	14	16	18
T	3	9	8	7	6	8	10	10	12	14	12	14	16
C	4	12	11	8	9	8	10	12	10	12	14	14	16
T	5	15	14	11	10	11	13	10	12	12	12	14	14
A	6	18	17	14	13	14	11	13	12	14	15	12	14
G	7	21	18	17	14	13	14	13	15	12	14	15	14

Matrice des distances :

	Y	G	C	G	G	A	T	C	G	T	A	T
X		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	1	↖, ↑	↖	←	←	↖	←	←	←	←	↖, ←	←
C	2	↖	↖	↖, ←	↖, ←	↖, ←	↖	↖	←	←	←	←
T	3	↑	↑	↖	↖, ←	←	↖	←	↖	↖	←	↖, ←
C	4	↖, ↑	↖	↖, ↑	↖	↖, ←	←	↖	←	←	↖	←
T	5	↖, ↑	↑	↖	↖, ↑	↖, ←, ↑	↖	←	↖	↖	←	↖
A	6	↑	↑	↑	↖, ↑	↖	↖, ←	↖	←	↑	↖	←
G	7	↖	↑	↖	↖	↑	↖	↖, ←, ↑	↖	←	↑	↖

Une solution possible est le suivant et son coût est de 14:

```
X = -A--CTC-TAG
    |||||||||||
    ISIISSSISSS
    |||||||||||
Y = GCGGATCGTAT
```

Note : les deux autres matrices rerprésentent le résultat obtenu si on avait inversé la séquence X et Y.

Matrice des coûts :

	Y		A	C	T	C	T	A	G
X		0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	2	4	6	8	10	12	14
G	1	3	4	4	6	8	10	12	12
C	2	6	5	4	6	6	8	10	12
G	3	9	8	7	6	8	8	10	10
G	4	12	11	10	9	8	10	12	10
A	5	15	12	13	12	11	13	10	12
T	6	18	15	15	13	14	11	13	12
C	7	21	18	15	16	13	14	13	15
G	8	24	21	18	17	16	17	16	13
T	9	27	24	21	18	19	16	18	16
A	10	30	27	24	21	20	19	16	18
T	11	33	30	27	24	23	20	19	18

Matrice des distances :

	Y	A	C	T	C	T	A	G
X		1	2	3	4	5	6	7
G	1	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow, \leftarrow$	$\nwarrow, \leftarrow$	$\nwarrow, \leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$
C	2	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
G	3	$\uparrow$	$\nwarrow, \uparrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow, \leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$
G	4	$\uparrow$	$\nwarrow, \uparrow$	$\nwarrow, \uparrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow, \leftarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$
A	5	$\nwarrow$	$\nwarrow, \uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow, \uparrow$	$\nwarrow, \leftarrow, \uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$
T	6	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow, \uparrow$	$\nwarrow$
C	7	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow, \leftarrow, \uparrow$
G	8	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$
T	9	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$
A	10	$\nwarrow, \uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$
T	11	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow, \uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$

Une solution optimale possible est le suivant et son coût est de 18 :

```
X = GCGGATCGTAT
    |||||||||||
    DSDDSSSDSSS
Y = -A--CTC-TAG
```

3.4 Question 4

3.4.1 Question A

$$M[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si i = 1 et j = 1} \\ 1 & \text{si j = 1} \\ 1 & \text{si i =1} \\ M[i-1,j] + M[i,j-1] + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.4.2 Question B

```
Fonction ComptérChemins (n,m)
    M ← initialiserMatrice(n, m)
    i ← 1 haut n faire
        j ← 1 haut m faire
            Si i = 1 ∧ j = 1 alors
                M[i, j] ← 0
            Sinon si i = 1 ∨ j = 1
                M[i, j] ← 1
            Sinon
                M[i, j] ← M[i − 1, j] + M[i, j − 1] + 1
            Fin Si
        Fin Pour
    Fin Pour
    Renvoyer M[n, m]
Fin Fonction
```

3.5 Question 5

3.5.1 Question A

Le nombre de multiplication scalaire est de 24.

3.5.2 Question B

Le nombre de multiplication scalaire est de 32.

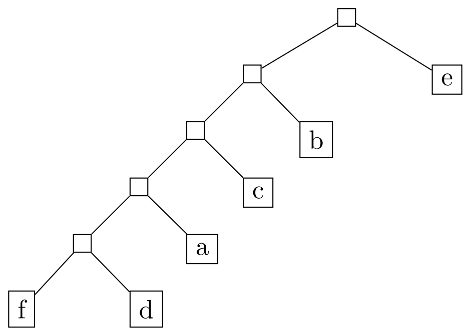
3.5.3 Question C

Avec 4 matrices, l'exponentiation à la russe donne 24 multiplications scalaires.
Avec 5 matrices, l'exponentiation à la russe donne 32 multiplications scalaires.

4 Algorithmes gloutons

4.1 Exercise 1

Arbre :



Encodage des caractères :

- a : 0001
- b : 01
- c : 001
- d : 00001
- e : 1
- f : 00000

Longueur en moyenne : 1,8

4.2 Exercise 2

Tâches trié par pénalité :

Tâches	2	8	9	4	1	3	6	7	5
Échéance	2	5	4	3	3	2	5	1	4
Pénalité	100	100	90	45	40	30	10	5	3

Résultat de l'insertion des tâches :

		3	1	5	6
i	7	2	4	9	8
d_i	1	2	3	4	5
$N_i(F)$	0	1	3	4	5

Ordre des tâches à exécuter :

$$t_2 \to t_4 \to t_1 \to t_9 \to t_8$$

Coût des pénalités : $t_7 + t_3 + t_5 + t_6 = 5 + 30 + 3 + 10 = 48$

4.3 Exercise 3

Solution dans le solutionnaire du devoir d'automne 2022.

4.4 Exercise 4

Table des poids avec leurs ratios valeurs poids :

i	1	2	3	4	5	6
P_i	50	20	12	40	20	40
v_i	75	45	24	90	30	88
$\frac{v_i}{P_i}$	1,5	2,25	2	2,25	1,5	2,2

Table des poids avec leurs ratios valeurs poids triés en ordre décroissant :

i	2	4	6	3	1	5
P_i	20	40	40	12	50	20
v_i	45	90	88	24	75	30
$\frac{v_i}{P_i}$	2,25	2,25	2,2	2	1,5	1,5

- $x_2 = 35$, $P_{max} = 3$
- $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$

Le poids du sac est de 700 et sa valeur est de 1575.