

Solution série 4

Andrey Martinez Cruz

Table des matières

1	Exercice 1	3
1.1	Question A	3
1.1.1	Méthode itérative	3
1.1.2	Méthode en arbre	4
1.1.3	Théorème maître	5
1.2	Question B	5
1.2.1	Méthode itérative	5
1.2.2	Méthode en arbre	6
1.2.3	Théorème maître	7
1.3	Question C	7
1.4	Question D	7
1.4.1	Méthode itérative	8
1.4.2	Méthode en arbre	9
1.4.3	Théorème maître	9
2	Exercice 2	10
2.1	Question A	10
2.2	Question B	11
2.3	Question C	11
2.4	Question D	11
3	Exercice 3	12
3.1	Raccourci	12
3.2	Par la définition originale du théorème maître	13
4	Exercice 4	13
4.1	Question A	13
4.2	Question B	13
4.3	Question C	13
4.4	Question D	13
4.5	Question E	13
4.6	Question F	14
5	Exercice 5	14

6	Exericse 6	14
7	Exerice 7	14

1 Exercice 1

La résolution des équations de récurrence se fera de trois façon : itérative, en arbre et par le théorème maître.

1.1 Question A

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

1.1.1 Méthode itérative

En posant, $n = 8$, on a le pattern suivant :

$$\begin{aligned} T(8) &= 7T(4) + f(8) \\ &= 7(7T(2) + f(4)) + f(8) \\ &= 7(7(T(1) + f(2)) + f(4)) + f(8) \\ &= 7(7(7f(1) + f(2)) + f(4)) + f(8) \\ &= 7(7^2f(1) + 7f(2)) + f(4) + f(8) \\ &= 7^3f(1) + 7^2f(2) + 7f(4) + f(8) \end{aligned}$$

En voyant ce motif, on peut formuler la sommation suivante :

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} 7^i f(n^{\log_2 n - i}) \quad (1)$$

en posant $n = 2^p$ on obtient la substitution suivante :

$$T(2^p) = \sum_{i=0}^p 7^i f(2^{p-i})$$

Maintenant résolvons cette équation :

$$\begin{aligned}
T(2^p) &= \sum_{i=0}^p 7^i f(2^{p-i}) \\
&= \sum_{i=0}^p 7^i (2^{p-i})^3 \\
&= \sum_{i=0}^p 7^i 2^{3p-3i} \\
&= 2^{3p} \sum_{i=0}^p 7^i 2^{-3i} \\
&= 2^{3p} \sum_{i=0}^p \frac{7^i}{2^{3i}} \\
&= 2^{3p} \sum_{i=0}^p \left(\frac{7}{8}\right)^i \\
&= 2^{3p} \left(\frac{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{p+1}}{1 - \frac{7}{8}} \right) \\
&= 2^{3p} \left(\frac{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{p+1}}{\frac{1}{8}} \right) \\
&= n^3 \left(\frac{1 - 2n^{\log_2 \frac{7}{8}}}{\frac{1}{8}} \right) \\
&= n^3 (8 - 16n^{\log_2 \frac{7}{8}}) \\
&= 8n^3 - 16n^{\log_2 7} \in \Theta(n^3)
\end{aligned}$$

1.1.2 Méthode en arbre

En dessinant l'arbre d'appel, on remarque qu'à partir du niveau 1 on fait 7 appel de $T(n)$ dans lequel on divise par 2. Et ce processus est répétée jusqu'à atteindre $T(1)$ qui atteint la profondeur $\log_2 n$. Pour chaque niveau, le travail effectif fait est de $7^i \frac{n^3}{2^i}$ où i représente le niveau de profondeur atteint.

Donc, la sommation du travail total fait à chaque niveau est de

$$T(n) = n^{\log_2 7} + \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 7^i \left(\frac{n^3}{2^{3i}} \right)$$

La résolution de cette équation de récurrence est la suivante en posant $n = 2^p$.

$$\begin{aligned}
T(2^p) &= 2^{p \log_2 7} + \sum_{i=0}^{p-1} 7^i \left(\frac{2^{3p}}{2^{3i}} \right) \\
&= 2^{p \log_2 7} + 2^{3p} \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{7}{8} \right)^i \\
&= 2^{p \log_2 7} + 2^{3p} \left(\frac{1 - \left(\frac{7}{8} \right)^p}{1 - \frac{7}{8}} \right) \\
&= 2^{p \log_2 7} + 2^{3p} \left(\frac{1 - \left(\frac{7}{8} \right)^p}{\frac{1}{8}} \right) \\
&= n^{\log_2 7} + n^3 \left(\frac{1 - n^{\log_2 \frac{7}{8}}}{\frac{1}{8}} \right) \\
&= n^{\log_2 7} + n^3 (8 - 8n^{\log_2 \frac{7}{8}}) \\
&= n^{\log_2 7} + 8n^3 - 8n^{\log_2 7} \\
&= 8n^3 - 7n^{\log_2 7} \in \Theta(n^3)
\end{aligned}$$

1.1.3 Théorème maître

On a $\alpha = 7$ et $\beta = 2$. Cela donne $c = \log_\alpha \beta = \log_2 7$. Dans notre cas, on pourrait être dans le cas 3, mais d'abord vérifions cela :

$$\alpha f\left(\frac{n}{\beta}\right) \leq cf(n), 0 < c < 1, n \geq n_0$$

$$7 \frac{n^3}{8} \leq cn^3$$

$$\frac{7}{8}n^3 \leq n^3$$

Cela est vrai pour $c = \frac{7}{8}$ et $n_0 = 0$. Pour l'autre vérification, on a $n^3 \in \Omega(n^{\log_2 7 + \epsilon})$ qui est vrai pour $\epsilon = 0, 1$ et donc en ayant vérifié ces deux conditions, $T(n) \in \Theta(n^3)$.

1.2 Question B

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

1.2.1 Méthode itérative

En posant, $n = 9$, on a le pattern suivant :

$$\begin{aligned}
T(9) &= 4T(3) + f(9) \\
&= 4(4T(1) + f(3)) + f(9) \\
&= 4(4f(1) + f(3)) + f(9) \\
&= 16f(1) + 4f(3) + f(9)
\end{aligned}$$

En voyant ce motif, on peut formuler la sommation suivante :

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_3 n} 4^i f(n^{\log_3 n - i}) \quad (2)$$

en posant $n = 3^p$ on obtient la substitution suivante :

$$T(3^p) = \sum_{i=0}^p 4^i f(3^{p-i})$$

Maintenant résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} T(3^p) &= \sum_{i=0}^p 4^i f(3^{p-i}) \\ &= \sum_{i=0}^p 4^i 3^{p-i} \\ &= 3^p \sum_{i=0}^p \left(\frac{4}{3}\right)^i \\ &= 3^p \left(\frac{1 - \frac{4^{p+1}}{3}}{1 - \frac{4}{3}} \right) \\ &= 3^p \left(\frac{1 - \frac{4^{p+1}}{3}}{-\frac{2}{3}} \right) \\ &= 3^p \left(\frac{1 - \frac{4^{p+1}}{3}}{-\frac{2}{3}} \right) \\ &= n \left(\frac{1 - \frac{4n^{\log_3 \frac{4}{3}}}{3}}{-\frac{2}{3}} \right) \\ &= n(-1, 5 + 2n^{\log_3 \frac{4}{3}}) \\ &= 2n^{\log_3 4} - 1, 5n \in \Theta(n^{\log_3 4}) \end{aligned}$$

1.2.2 Méthode en arbre

En dessinant l'arbre d'appel, on remarque qu'à partir du niveau 1 on fait 4 appel de $T(n)$ dans lequel on divise par 3. Et ce processus est répétée jusqu'à atteindre $T(1)$ qui atteint la profondeur $\log_3 n$. Pour chaque niveau, le travail effectif fait est de $4^i \frac{n}{3^i}$ où i représente le niveau de profondeur atteint.

Donc, la sommation du travail total fait à chaque niveau est de

$$T(n) = n^{\log_3 4} + \sum_{i=0}^{\log_3 n - 1} \left(\frac{4}{3}\right)^i n$$

La résolution de cette équation de récurrence est la suivante en posant $n = 3^p$.

$$\begin{aligned} T(3^p) &= 3^{p \log_3 4} + \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{4}{3}\right)^i 3^p \\ &= 3^{p \log_3 4} + 3^p \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{4}{3}\right)^i \\ &= 3^{p \log_3 4} + 3^p \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^p}{1 - \frac{4}{3}} \right) \\ &= 3^{p \log_3 4} + 3^p \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^p}{-\frac{2}{3}} \right) \\ &= n^{\log_3 4} + n \left(\frac{1 - n^{\log_3 \frac{4}{3}}}{-\frac{2}{3}} \right) \\ &= n^{\log_3 4} + n \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} n^{\log_3 \frac{4}{3}} \right) \\ &= n^{\log_3 4} + \frac{3}{2} n^{\log_3 4} - \frac{3}{2} n \\ &= \frac{5}{2} n^{\log_3 4} - \frac{3}{2} n \in \Theta(n^{\log_3 4}) \end{aligned}$$

1.2.3 Théorème maître

On a $\alpha = 4$ et $\beta = 3$. Cela donne $c = \log_\alpha \beta = \log_3 4$. On a $n \in \mathcal{O}(n^{\log_3 4 - \epsilon})$ qui est vrai pour $\epsilon = 1$ et donc, $T(n) \in \Theta(n)$.

1.3 Question C

La solution se trouve dans les diapositives du dépôt. :)

1.4 Question D

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{4}\right) + n^3$$

1.4.1 Méthode itérative

En posant, $n = 16$, on a le pattern suivant :

$$\begin{aligned} T(16) &= 8T(4) + f(16) \\ &= 8(8T(1) + f(4)) + f(16) \\ &= 8(8f(1) + f(4)) + f(16) \\ &= 64f(1) + 8f(4) + f(16) \end{aligned}$$

En voyant ce motif, on peut formuler la sommation suivante :

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n} 8^i f(n^{\log_4 n - i}) \quad (3)$$

en posant $n = 4^p$ on obtient la substitution suivante :

$$T(3^p) = \sum_{i=0}^p 8^i f(4^{p-i})$$

Maintenant résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} T(3^p) &= \sum_{i=0}^p 8^i f(4^{p-i}) \\ &= \sum_{i=0}^p 8^i (4^{p-i})^3 \\ &= \sum_{i=0}^p 8^i 4^{3p-3i} \\ &= 4^{3p} \sum_{i=0}^p \left(\frac{8}{64}\right)^i \\ &= 4^{3p} \sum_{i=0}^p \left(\frac{1}{8}\right)^i \\ &= 4^{3p} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{8}} \right) \\ &= 4^{3p} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{p+1}}{\frac{7}{8}} \right) \\ &= n^3 \left(\frac{1 - \frac{n^{\log_4 \frac{1}{8}}}{8}}{\frac{7}{8}} \right) \\ &= n^3 \left(\frac{8}{7} - \frac{8n^{\log_4 \frac{1}{8}}}{35} \right) \\ &= \frac{8}{7}n^3 - \frac{8}{35}n^{\log_4 \frac{1}{8} + 3} \in \Theta(n^3) \end{aligned}$$

1.4.2 Méthode en arbre

En dessinant l'arbre d'appel, on remarque qu'à partir du niveau 1 on fait 8 appel de $T(n)$ dans lequel on divise par 4. Et ce processus est répétée jusqu'à atteindre $T(1)$ qui atteint la profondeur $\log_4 n$. Pour chaque niveau, le travail effectif fait est de $8^i \frac{n^3}{4^{3i}}$ où i représente le niveau de profondeur atteint.

Donc, la sommation du travail total fait à chaque niveau est de

$$T(n) = n^{\log_4 8} + \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} 8^i \left(\frac{n^3}{4^{3i}} \right)$$

La résolution de cette équation de récurrence est la suivante en posant $n = 4^p$.

$$\begin{aligned} T(4^p) &= 4^{p \log_4 8} + \sum_{i=0}^{p-1} 8^i \left(\frac{4^{3p}}{4^{3i}} \right) \\ &= 4^{p \log_4 8} + 4^{3p} \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{8} \right)^i \\ &= 4^{p \log_4 8} + 4^{3p} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{8} \right)^p}{1 - \frac{1}{8}} \right) \\ &= 4^{p \log_4 8} + 4^{3p} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{8} \right)^p}{\frac{7}{8}} \right) \\ &= n^{\log_4 8} + n^3 \left(\frac{1 - n^{\log_4 \frac{1}{8}}}{\frac{7}{8}} \right) \\ &= n^{\log_4 8} + n^3 \left(\frac{8}{7} - \frac{8}{7} n^{\log_4 \frac{1}{8}} \right) \\ &= \frac{8}{7} n^3 + n^{\log_4 8} - \frac{8}{7} n^{-\log_4 8 + 3} \in \Theta(n^3) \end{aligned}$$

1.4.3 Théorème maître

On a $\alpha = 8$ et $\beta = 4$. Cela donne $c = \log_\alpha \beta = \log_4 8$. Dans notre cas, on pourrait être dans le cas 3, mais d'abord vérifions cela :

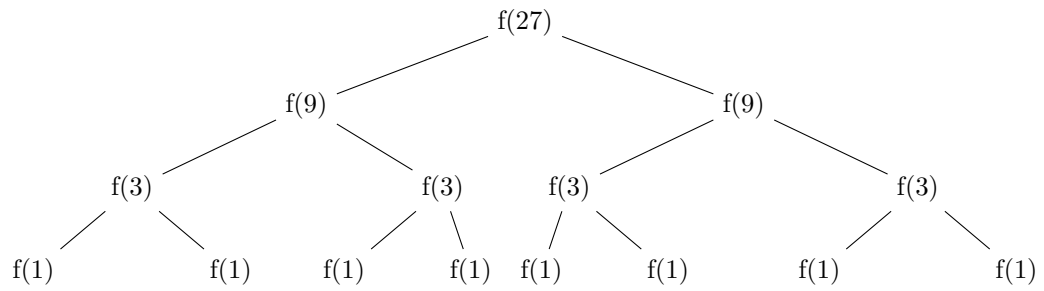
$$\alpha f\left(\frac{n}{\beta}\right) \leq c f(n), 0 < c < 1, n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} 8 \frac{n^3}{64} &\leq c n^3 \\ \frac{1}{8} n^3 &\leq n^3 \end{aligned}$$

Cela est vrai pour $c = \frac{1}{8}$ et $n_0 = 0$. Pour l'autre vérification, on a $n^3 \in \Omega(n^{\log_4 8 + \epsilon})$ qui est vrai pour $\epsilon = 0,1$ et donc en ayant vérifié ces deux conditions, $T(n) \in \Theta(n^3)$.

2 Exercise 2

2.1 Question A



2.2 Question B

Pour savoir le travail totale, il faut faire la sommation du travail de chaque niveau ou le niveau 0 est $f(27)$ et le dernier niveau est $f(1)$.

- Niveau 0 : $1 \times f(27) = 27$
- Niveau 1 : $2 \times f(9) = 2 \times 9 = 18$
- Niveau 2 : $4 \times f(3) = 4 \times 3 = 12$
- Niveau 3 : $8 \times f(1) = 8$

Donc, la sommation du travail fait à chaque niveau est de $27 + 18 + 12 + 8 = 65$.

2.3 Question C

Ce qu'on remarque c'est qu'à chaque niveau, le travail effectué à certain niveau est le suivant : $2^a \frac{n}{3^a}$ où a correspond au niveau de l'arbre. Donc, en posant $n = 3^p$, on a $2^a \frac{3^p}{3^a} = 2^a \times 3^{p-a}$.

Par conséquent, le travail effectué à un certain niveau peut être représenté de la manière suivante :

- Niveau 0 : 3^p
- Niveau 1 : $2^1 \times 3^{p-1}$
- Niveau 2 : $2^2 \times 3^{p-2}$
- Niveau i : $2^i \times 3^{p-i}$

2.4 Question D

En généralisant cela, la charge de travail total est représentable de la manière suivante :

$$T(3^p) = \sum_{i=0}^p 2^i 3^{p-i}$$

Maintenant on peut faire une analyse classique de celle-ci pour trouver la complexité de $T(n)$.

$$\begin{aligned}
T(3^p) &= \sum_{i=0}^p 2^i 3^{p-i} \\
&= \sum_{i=0}^p 2^i 3^{-i} 3^p \\
&= 3^p \sum_{i=0}^p \left(\frac{2}{3}\right)^i \\
&= 3^p \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\
&= 3^p \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}}{\frac{1}{3}} \right) \\
&= n \left(\frac{1 - \frac{2}{3} n^{\log_3 \frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}} \right) \\
&= n(3 - 2n^{\log_3 \frac{2}{3}}) \\
&= 3n - 2n^{\log_3 2} \in \Theta(n)
\end{aligned}$$

Note : le travail totale fait au dernier niveau est égale à $n^{\log_3 2}$ et le dernier niveau est $\log_3 n$. Il était possible d'arriver au même conclusion on utilisant la sommation suivante substitué en 3^p :

$$T(3^p) = 3^{p \log_3 2} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^i 3^{p-i}$$

3 Exercise 3

Avant de trouver un c telle que $T'_a \in o(T_a)$, il faut d'abord trouver la complexité de T_a .

En utilisant le théorème maître pour trouver la complexité de T_A , on $\alpha = 7$, $\beta = 2$ et $\lambda = 2$. On $c = \log_\alpha \beta = \log_2 7$.

3.1 Raccourci

Ici $c > \lambda$, donc, on est dans le premier cas du théorème maître et donc, $T_A \in \Theta(n^{\log_2 7})$.

3.2 Par la définition originale du théorème maître

Dans ce cas, $n^2 \in \mathcal{O}(n^{\log_2 7 - \epsilon})$ est vrai avec $\epsilon = 0,1$ et donc, on est dans le premier cas du théorème maître ce qui conclut que $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$.

Maintenant, dans le cas de $T_{A'}$, on aura la valeur de $\log_\alpha \beta$ suivante : $\log_4 c$. En revanche, λ est la même valeur que dans T_A . Ici, ce qu'on peut remarquer c'est que $\log_2 7 \approx 2,8074$. Et donc, pour trouver le plus gros c possible qui fait que $T'_a \in o(T_a)$ est vraie, il faut que $T_{a'}$ se retrouve dans le premier cas du théorème maître. On remarque que si $c = 16$, on tomberais dans le deuxième cas du théorème ($\log_4 16 = 2$) et grossir un peu plus c nous rapprocherai de la valeur $\log_2 7$. Donc, c est au moins supérieur à 16. Pour trouver la plus grande valeur de c possible qui rend la complexité citée précédemment vraie, il faut trouver le point d'intersection entre $\log_4 c$ et $\log_2 7$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\log_4 c &= \log_2 7 \\ c &= 4^{\log_2 7} \\ c &\approx 4^{2,8074} \\ c &\approx 49\end{aligned}$$

Or, $\log_4 49 \approx 2,8074$. Donc, pour prendre la plus grande valeur possible qui fait que la complexité précisée précédemment soit vrai, il faut prendre le prédécesseur de 49 qui est 48. $\log_4 48 \approx 2,7925 < 2,8074$ respecte notre contrainte. Donc, $c = 48$.

4 Exercice 4

4.1 Question A

$$T(n) \in \Theta(\log n)$$

4.2 Question B

$$T(n) \in \Theta(n)$$

4.3 Question C

$$T(n) \in \Theta(n!)$$

4.4 Question D

$$T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$$

4.5 Question E

$$T(n) \in \Theta(n)$$

4.6 Question F

$$T(n) \in \Theta(n^2 \log^3 n)$$

5 Exercice 5

En posant $p = 2$ en à la le développement :

$$\begin{aligned} T(2^{2^2}) &= T(16) = T(\sqrt{16}) + f(16) \\ &= T(\sqrt{4}) + f(4) + f(16) \\ &= f(1) + f(4) + f(16) \end{aligned}$$

En essayant de développer plus en détail, on remarque le motif suivant :

$$T(2^{2^p}) = T(2^{2^{p-1}}) + 1 = T(2^{2^{p-2}}) + 2 = T(2^{2^{p-i}}) + i = \dots = T(2^{2^0}) + p = T(4) + p$$

Or, $p = \log \log n$ et donc $T(n) \in \Theta(\log \log n)$

6 Exercice 6

1. **Procédure** TRANSFORMER(x, b, P)
2. Si $x \geq b$ alors
3. empiler($P, x \bmod b$)
4. $x \leftarrow x \div b$
5. transformer(x, b, P)
6. Fin Si alors
7. Fin Procédure

Complexité temporelle : $T(n) \in \Theta(\log_b n)$

7 Exercice 7

Les fonctions utilisées pour les liste chaînées sont les suivantes :

- estVide : Vérifie si la liste chaînée est vide $\Theta(1)$
- obtenirTete : Obtient l'élément en tête de la liste chaînée $\Theta(1)$
- inserer : Inserer l'élément au début de la liste $\Theta(1)$
- retirerDebut : Retire l'élément en tête de la liste chaînée $\Theta(1)$

1. **Fonction** RENVERSER(L_1, L_2)

2. Si estVide(L_1) alors
3. Renvoyer L_2
4. element \leftarrow obtenirTete(L_1)
5. insérer(L_2 , element)
6. retirerDebut(L_1)
7. Renvoyer Renverser(L_1 , L_2)
8. Fin Fonction

La complexité de cette fonction peut être représentée ainsi :

$$T(n) = T(n - 1) + 1 \in \Theta(n)$$