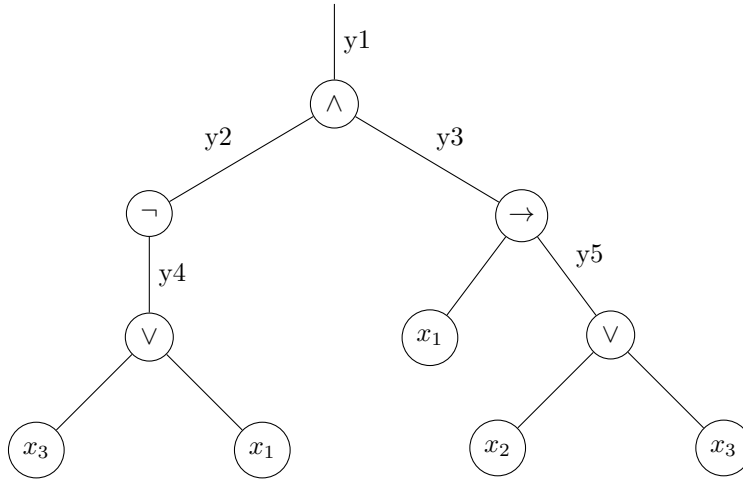


Corrigé série 9

1 Exercise 1

Pour l'étape #1, on a l'arbre syntaxique suivant :



Donc, l'équation ϕ' peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
 \phi' &= y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge y_3)) \wedge (y_2 \leftrightarrow \neg y_4) \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow y_5)) \wedge (y_4 \leftrightarrow (x_3 \vee x_1)) \wedge (y_5 \leftrightarrow (x_2 \vee x_3)) \\
 &= \bigwedge_{i=1}^6 \phi'_i \\
 &= \phi'_1 \wedge \phi'_2 \wedge \phi'_3 \wedge \phi'_4 \wedge \phi'_5 \wedge \phi'_6
 \end{aligned}$$

Pour l'étape #2, il faut transformer toutes les clauses en littéraux à trois variables :

1. ϕ_1''' :

y_1	y_1
0	0
1	1

Donc, $\neg\phi_1'' = \neg y_1$ et par conséquent, $\phi_1'' = y_1$. Dû que la clause contient seulement un littéral d'une seule variable, il faut ajouter deux autres variables supplémentaires ce qui donne le résultat suivant :

$$\phi_1''' = (y_1 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (y_1 \vee z_1 \vee \neg z_2) \wedge (y_1 \vee \neg z_1 \vee z_2) \wedge (y_1 \vee \neg z_1 \vee \neg z_2)$$

2. $\phi_2''' :$

y_1	y_2	y_3	$y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge y_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Donc,

$$\neg\phi_2'' = (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge y_3) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg y_3) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge y_3) \vee (y_1 \wedge y_2 \wedge \neg y_3)$$

et par conséquent,

$$\phi_2'' = (y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg y_3) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee y_3) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee \neg y_3) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee y_3)$$

Dû qu'il y a déjà des clauses à trois variables dans la clause, alors $\phi_2''' = \phi_2''$.

3. $\phi_3''' :$

y_2	y_4	$y_1 \leftrightarrow \neg y_4$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Donc,

$$\neg\phi_3'' = (\neg y_2 \wedge y_4) \vee (y_2 \wedge \neg y_4)$$

et par conséquent,

$$\phi_3'' = (y_2 \vee \neg y_4) \wedge (\neg y_2 \vee y_4)$$

Dû qu'il y a seulement des littéraux à deux variables, il faut ajouter une variable supplémentaire dans notre clause et donc,

$$\phi_3''' = (y_2 \vee \neg y_4 \vee a) \wedge (\neg y_2 \vee y_4 \vee a) \wedge (y_2 \vee \neg y_4 \vee \neg a) \wedge (\neg y_2 \vee y_4 \vee \neg a)$$

4. ϕ_4''' :

y_3	x_1	y_5	$y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow y_5)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Donc,

$$\neg\phi_4'' = (\neg y_3 \wedge \neg x_1 \wedge \neg y_5) \vee (\neg y_3 \wedge \neg x_1 \wedge y_5) \vee (\neg y_3 \wedge x_1 \wedge y_5) \vee (y_3 \wedge x_1 \wedge \neg y_5)$$

et par conséquent,

$$\phi_4'' = (y_3 \vee x_1 \vee y_5) \wedge (y_3 \vee x_1 \vee \neg y_5) \wedge (y_3 \vee \neg x_1 \vee \neg y_5) \wedge (\neg y_3 \vee \neg x_1 \vee y_5)$$

Dû qu'il y a déjà des clauses à trois variables dans la clause, alors $\phi_4''' = \phi_4''$.

5. ϕ_5''' :

y_4	x_3	x_1	$(y_4 \leftrightarrow (x_3 \vee x_1))$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Donc,

$$\neg\phi_5'' = (\neg y_4 \wedge \neg x_3 \wedge x_1) \vee (\neg y_4 \wedge x_3 \wedge \neg x_1) \vee (\neg y_4 \wedge x_3 \wedge x_1) \vee (y_4 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_1)$$

et par conséquent,

$$\phi_5'' = (y_4 \vee x_3 \vee \neg x_1) \wedge (y_4 \vee \neg x_3 \vee x_1) \wedge (y_4 \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_4 \vee x_3 \vee x_1)$$

Dû qu'il y a déjà des clauses à trois variables dans la clause, alors $\phi_5''' = \phi_5''$.

6. ϕ_6''' :

y_5	x_2	x_3	$(y_5 \leftrightarrow (x_2 \vee x_3))$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Donc,

$$\neg\phi_6'' = (\neg y_5 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg y_5 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg y_5 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (y_5 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$$

et par conséquent,

$$\phi_6'' = (y_5 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (y_5 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (y_5 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg y_5 \vee x_2 \vee x_3)$$

Dû qu'il y a déjà des clauses à trois variables dans la clause, alors $\phi_6''' = \phi_6''$.

2 Exercice 2

1. ϕ_3''' :

y_2	y_3	y_4	$(y_2 \leftrightarrow (y_3 \vee y_4))$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Donc,

$$\neg\phi_3'' = (\neg y_2 \wedge \neg y_3 \wedge y_4) \vee (\neg y_2 \wedge y_3 \wedge \neg y_4) \vee (\neg y_2 \wedge y_3 \wedge y_4) \vee (y_2 \wedge \neg y_3 \wedge \neg y_4)$$

et par conséquent,

$$\phi_3'' = (y_2 \vee y_3 \vee \neg y_4) \wedge (y_2 \vee \neg y_3 \vee y_4) \wedge (y_2 \vee \neg y_3 \vee \neg y_4) \wedge (\neg y_2 \vee y_3 \vee y_4)$$

Dû qu'il y a déjà des clauses à trois variables dans la clause, alors $\phi_3''' = \phi_3''$.

2. ϕ_4''' :

y_3	x_1	x_2	$y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Donc,

$$\neg\phi_4'' = (\neg y_3 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg y_3 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg y_3 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (y_3 \wedge x_1 \wedge \neg x_2)$$

et par conséquent,

$$\phi_4'' = (y_3 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (y_3 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (y_3 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_3 \vee \neg x_1 \vee x_2)$$

Dû qu'il y a déjà des clauses à trois variables dans la clause, alors $\phi_4''' = \phi_4''$.

3. $\phi_5''' :$

y_4	y_5	$y_4 \leftrightarrow \neg y_5$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Donc,

$$\neg\phi_5'' = (\neg y_4 \wedge y_5) \vee (y_4 \wedge \neg y_5)$$

et par conséquent,

$$\phi_5'' = (y_4 \vee \neg y_5) \wedge (\neg y_4 \vee y_5)$$

Dû qu'il y a seulement des littéraux à deux variables, il faut ajouter une variable supplémentaire dans notre clause et donc,

$$\phi_5''' = (y_4 \vee \neg y_5 \vee a) \wedge (\neg y_4 \vee y_5 \vee a) \wedge (y_4 \vee \neg y_5 \vee \neg a) \wedge (\neg y_4 \vee y_5 \vee \neg a)$$

4. $\phi_6''' :$

y_5	y_6	x_4	$(y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4))$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Donc,

$$\neg\phi_6'' = (\neg y_5 \wedge \neg y_6 \wedge x_4) \vee (\neg y_5 \wedge y_6 \wedge \neg x_4) \vee (\neg y_5 \wedge y_6 \wedge x_4) \vee (y_5 \wedge \neg y_6 \wedge \neg x_4)$$

et par conséquent,

$$\phi_6'' = (y_2 \vee y_6 \vee \neg x_4) \wedge (y_2 \vee \neg y_6 \vee x_4) \wedge (y_2 \vee \neg y_6 \vee \neg x_4) \wedge (\neg y_2 \vee y_6 \vee x_4)$$

Dû qu'il y a déjà des clauses à trois variables dans la clause, alors $\phi_6''' = \phi_6''$.

5. ϕ_7''' :

y_6	x_1	x_3	$(y_6 \leftrightarrow (\neg x_1 \leftrightarrow x_3))$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Donc,

$$\neg\phi_7'' = (\neg y_6 \wedge \neg x_1 \wedge x_3) \vee (\neg y_6 \wedge x_1 \wedge \neg x_3) \vee (y_6 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee (y_6 \wedge x_1 \wedge x_3)$$

et par conséquent,

$$\phi_7'' = (y_6 \vee x_1 \vee \neg x_3) \wedge (y_6 \vee \neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg y_6 \vee x_1 \vee x_3) \wedge (\neg y_6 \vee \neg x_1 \vee \neg x_3)$$

Dû qu'il y a déjà des clauses à trois variables dans la clause, alors $\phi_7''' = \phi_7''$.

3 Exercice 3

3.1 Question A

ϕ est satisfaisable.

3.2 Question B

ϕ n'est pas satisfaisable, car on trouve une composante connexe qui contient une variable et son inverse (x_5 et $\neg x_5$).

4 Exercice 4

Réponses possibles (non exhaustif):

1. $x_1, x_2, x_3 = 1$
2. $x_1 = 1, x_3 = 0$ et x_2 peut prendre n'importe quel valeur.
3. $x_1 = 1$ et $x_2, x_3 = 0$.
4. $x_2, x_3 = 0$ et x_1 peut prendre n'importe quel valeur.
5. $x_1, x_2 = 0$ et x_3 peut prendre n'importe quel valeur.