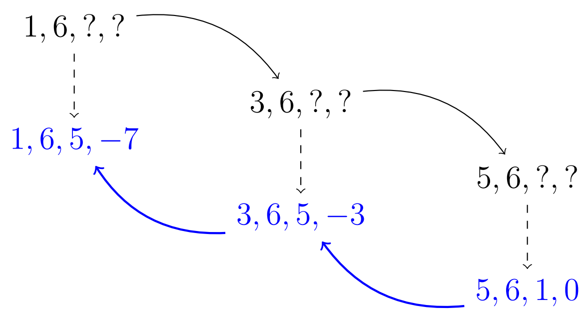
INF5130 - Algorithmique

Solution série d'exercices - 3

Exercice 1.

(a) Voici une trace de l'appel qui illustre le contenu de la pile d'exécution. Chaque élément de la table contient les valeurs de B_I, B_S, n_1 et n_2 (dans cet ordre).



(b) BIDON() retourne le plus grand nombre entier du tableau (retourné dans le paramètre n_1) et le plus petit nombre entier du tableau (retourné dans le paramètre n_2).

(c) L'équation de récurrence est $T(n) = T(n-2) + 3$. Nous observons aussi que $T(2) = 1$, puisqu'il suffit d'une comparaison pour ordonner deux nombres.

(d) En appliquant la méthode itérative, il est facile de constater que,

$$T(n) = T(n-2) + 3 = T(n-4) + 2 \times 3 = \ldots = T\left(n - 2 \times \frac{n-2}{2}\right) + \frac{n-2}{2} \times 3$$

Donc $T(n) = T(2) + 3\left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{3n}{2} - 2$.

Exercice 2.

(a) $T(n) = 2T(n-1) + 1$ et $T(1) = 1$.

(b) Le calcul de $T(n)$ pour les petites valeurs de n nous donne $T(2) = 2T(1) + 1 = 3$, $T(3) = 2T(2) + 1 = 7$, $T(4) = 2T(3) + 1 = 15$, $T(5) = 2T(4) + 1 = 31$, etc.. Il est facile de poser la conjecture $T(n) = 2n - 1$ et de la prouver par induction sur n.

Exercice 3. On donne ci-dessous une version récursive de l'algorithme. Il en existe aussi une version itérative.

```
fonction pointFixe(Tab : tableau, B_I, B_S : entier naturel) : booléen
    si B_S < B_I alors
        retourner Faux
    sinon
        m ← (B_I + B_S) ÷ 2
        si T[m] = m alors
            retourner Vrai
        sinon si T[m] < m alors
            retourner pointFixe(Tab, m + 1, B_S)
        sinon
            retourner pointFixe(Tab, B_I, m − 1)
        fin si
    fin si
fin fonction
```

Exercice 4. La fonction suivante retourne la racine carrée entière de n à condition que celle-ci soit comprise entre B_I et $B_S - 1$. L'appel $\text{RACINE}(n, 1, n)$ retournera donc la racine carrée entière de n. On suppose que n est supérieur ou égal à 2 et que B_I est strictement inférieur à B_S.

```
fonction racine(n, B_I, B_S : entier naturel) : entier naturel
    si B_S = B_I + 1 alors
        retourner B_I
    sinon
        milieu ← (B_I + B_S) ÷ 2
        si milieu × milieu > n alors
            retourner racine(n, B_I, milieu)
        sinon
            retourner racine(n, milieu, B_S)
        fin si
    fin si
fin fonction
```

Exercice 5.

(a) Nous pouvons appliquer la méthode itérative pour résoudre l'équation $T(n) = T(n-1) + T(1) + n$. Nous obtenons alors,

$$T(n) = T(n-1) + T(1) + n = T(n-2) + T(1) + (n-1) + T(1) + n$$

et, en général, pour chaque i compris entre 1 et $n-1$,

$$T(n) = T(n-i) + T(1) + (n-i+1) + T(1) + (n-i+2) + \ldots + T(1) + n$$

Lorsque i est égal à $n-1$, nous obtenons,

$$T(n) = T(1) + \sum_{j=2}^{n}(T(1)+j) = nT(1) + \sum_{j=2}^{n} j = nT(1) + \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

(b) Supposons d'abord que n est pair. Par un raisonnement semblable à celui de la sous-question (a), nous obtenons,

$$T(n) = T(n-2k) + T(2) + (n-2k+2) + T(2) + (n-2k+4) + \ldots + T(2) + n$$

pour tout k compris entre 1 et $\frac{n}{2}-1$. En remplaçant k par $\frac{n}{2}-1$, nous obtenons

$$T(n) = T(2) + \sum_{\ell=2}^{\frac{n}{2}}(T(2)+2\ell) = \frac{n}{2}T(2) + 2\sum_{\ell=2}^{\frac{n}{2}} \ell = \frac{n}{2}T(2) + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) - 2$$

Si n est impair, la formule est un peu différente puisqu'elle contiendra la somme de tous les nombres impairs inférieurs ou égaux à n (au lieu de la somme des nombres pairs compris entre 4 et n).

$$T(n) = T(1) + \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(T(2)+2\ell+1) = T(1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor T(2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \ell$$

En appliquant la formule qui donne la somme d'une série arithmétique, nous obtenons finalement,

$$T(n) = T(1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor T(2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$$

(c) Le même raisonnement qu'en (b) nous permet de conclure que $T(n)$ est au moins aussi grand que,

$$a\sum_{\ell=2}^{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor} \ell$$

et donc que $T(n)$ est dans $\Theta(n^2)$ quelle que soit la valeur de la constante a.