INF5130 - Algorithmique

Série d'exercices - 4

Exercice 1. Pour chacune des équations suivantes, trouvez une fonction $f(n)$ aussi simple que possible telle que $T(n) = \Theta(f(n))$.

(a) $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^3$ (b) $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$ (c) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3$

Exercice 2. Considérez une procédure récursive appelée MYSTÈRE dont le temps d'exécution est donné par l'équation de récurrence $T(n) = 2T(n/3) + n$, n dénote la taille de l'entrée de MYSTÈRE. On suppose aussi que $T(1) = 1$.

(a) En supposant que $n = 27$, dessinez l'arborescence de tous les appels récursifs déclenchés par un appel de MYSTÈRE. Dans chaque noeud de l'arborescence, indiquez la taille de l'entrée correspondant à ce noeud.

(b) Sous les mêmes hypothèses qu'en (a), donnez le travail non récursif effectué à chaque niveau de l'arborescence par tous les appels appartenant à ce niveau. Évaluez le travail effectué par un appel de MYSTÈRE lorsque son entrée est de taille 27.

(c) Supposons maintenant que n est de la forme 3^p pour un certain entier positif p. Donnez le travail non récursif effectué au niveau 0, au niveau 1, au niveau 2 et au niveau i (où i est une constante quelconque et anonyme).

(d) Sous les mêmes hypothèses qu'en (c), évaluez le travail effectué par MYSTÈRE lorsque n est de la forme 3^p. Exprimez ce travail en fonction de n.

Exercice 3. Le temps d'exécution de l'algorithme A est donné par l'équation de récurrence $T_A(n) = 7T_A(\frac{n}{2}) + n^2$, alors que celui de l'algorithme A' est donné par l'équation $T_{A'}(n) = cT_{A'}(\frac{n}{4}) + n^2$ (où c est un entier positif inconnu). Supposez que $T_{A'}(n)$ est dans $o(T_A(n))$. Quelle est la plus grande valeur possible pour c ?

Exercice 4. Pour chacune des équations suivantes, donnez une estimation aussi précise que possible de $T(n)$. Vous devez exprimer vos estimations à l'aide de la notation Θ. Justifiez brièvement chacune de vos réponses.

(a) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$ (c) $T(n) = nT(n-1)$ (e) $T(n) = 3T\frac{n}{4}) + n$

(b) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \sqrt{n}$ (d) $T(n) = 9T\frac{n}{3}) + n^2$

Exercice 5. Considérez l'équation $T(n) = T(\sqrt{n})+1$, où le cas de base est $T(2) = 1$. En supposant que n est de la forme 2^{2^p} pour un entier p strictement positif, appliquez la méthode itérative afin de trouver la solution de cette équation.