Solution série 4

Andrey Martinez Cruz

Table des matières

1 Exercise 1

La résolution des équations de récurrence se fera de trois façon : itérative, en arbre et par le théorème maître.

1.1 Question A

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^3$

1.1.1 Méthode itérative

En posant, $n = 8$, on a le pattern suivant :

$$\begin{aligned}
T(8) &= 7T(4) + f(8) \\
&= 7(7T(2) + f(4)) + f(8) \\
&= 7(7(T(1) + f(2)) + f(4)) + f(8) \\
&= 7(7(7f(1) + f(2)) + f(4)) + f(8) \\
&= 7(7^2 f(1) + 7f(2)) + f(4)) + f(8) \\
&= 7^3 f(1) + 7^2 f(2) + 7f(4) + f(8)
\end{aligned}$$

En voyant ce motif, on peut formuler la sommation suivante :

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} 7^i f(n^{\log_2 n - i}) \tag{1}$$

en posant $n = 2^p$ on obtient la substitution suivante :

$$T(2^p) = \sum_{i=0}^{p} 7^i f(2^{p-i})$$

Maintenant résoulons cette équation :

$$
\begin{aligned}
T(2^p) &= \sum_{i=0}^{p} 7^i f(2^{p-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{p} 7^i (2^{p-i})^3 \\
&= \sum_{i=0}^{p} 7^i 2^{3p-3i} \\
&= 2^{3p} \sum_{i=0}^{p} 7^i 2^{-3i} \\
&= 2^{3p} \sum_{i=0}^{p} \frac{7i}{2^{3i}} \\
&= 2^{3p} \sum_{i=0}^{p} (\frac{7}{8})^i \\
&= 2^{3p} (\frac{1-(\frac{7}{8})^{p+1}}{1-\frac{7}{8}}) \\
&= 2^{3p} (\frac{1-(\frac{7}{8})^{p+1}}{\frac{1}{8}}) \\
&= n^3 (\frac{1-2n^{\log_2 \frac{7}{8}}}{\frac{1}{8}}) \\
&= n^3 (8 - 16n^{\log_2 \frac{7}{8}}) \\
&= 8n^3 - 16n^{\log_2 7} \in \Theta(n^3)
\end{aligned}
$$

1.1.2 Méthode en arbre

En dessinant l'arbre d'appel, on remarque qu'à partir du niveau 1 on fait 7 appel de $T(n)$ dans lequel on divise par 2. Et ce processus est répetée jusqu'à atteindre $T(1)$ qui atteint la profondeur $\log_2 n$. Pour chaque niveau, le travail effectif fait et de $7^i \frac{n^3}{2^i}$ où i représente le niveau de profondeur atteint.

Donc, la sommation du travail total fait à chaque niveau est de

$$
T(n) = n^{\log_2 7} + \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 7^i (\frac{n^3}{2^{3i}})
$$

.

La résolution de cette équation de récurrence est la suivante en posant $n = 2^p$.

$$
\begin{aligned}
T(2^p) &= 2^{p\log_2 7} + \sum_{i=0}^{p-1} 7^i (\frac{2^{3p}}{2^{3i}}) \\
&= 2^{p\log_2 7} + 2^{3p} \sum_{i=0}^{p-1} (\frac{7}{8})^i \\
&= 2^{p\log_2 7} + 2^{3p} (\frac{1-(\frac{7}{8})^p}{1-\frac{7}{8}}) \\
&= 2^{p\log_2 7} + 2^{3p} (\frac{1-(\frac{7}{8})^p}{\frac{1}{8}}) \\
&= n^{\log_2 7} + n^3 (\frac{1-n^{\log_2 \frac{7}{8}}}{\frac{1}{8}}) \\
&= n^{\log_2 7} + n^3 (8 - 8n^{\log_2 \frac{7}{8}}) \\
&= n^{\log_2 7} + 8n^3 - 8n^{\log_2 7} \\
&= 8n^3 - 7n^{\log_2 7} \in \Theta(n^3)
\end{aligned}
$$

1.1.3 Théorème maître

On a $\alpha = 7$ et $\beta = 2$. Cela donne $c = \log_\alpha \beta = \log_2 7$. Dans notre cas, on pourrait être dans le cas 3, mais d'abord vérifions cela :

$$\alpha f(\frac{n}{\beta}) \leq cf(n), 0 < c < 1, n \geq n_0$$

$$7\frac{n^3}{8} \leq cn^3$$
$$\frac{7}{8}n^3 \leq n^3$$

Cela est vrai pour $c = \frac{7}{8}$ et $n_0 = 0$. Pour l'autre vérification, on a $n^3 \in \Omega(n^{\log_2 7+\epsilon})$ qui est vrai pour $\epsilon = 0,1$ et donc en ayant vérifier ces deux conditions, $T(n) \in \Theta(n^3)$.

1.2 Question B

$T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$

1.2.1 Méthode itérative

En posant, $n = 9$, on a le pattern suivant :

$$
\begin{aligned}
T(9) &= 4T(3) + f(9) \\
&= 4(4T(1) + f(3)) + f(9) \\
&= 4(4f(1) + f(3)) + f(9) \\
&= 16f(1) + 4f(3) + f(9)
\end{aligned}
$$

En voyant ce motif, on peut formuler la sommation suivante :

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_3 n} 4^i f(n^{\log_3 n - i}) \tag{2}$$

en posant $n = 3^p$ on obtient la substitution suivante :

$$T(3^p) = \sum_{i=0}^{p} 4^i f(3^{p-i})$$

Maintenant résoulons cette équation :

$$\begin{aligned}
T(3^p) &= \sum_{i=0}^{p} 4^i f(3^{p-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{p} 4^i 3^{p-i} \\
&= 3^p \sum_{i=0}^{p} (\frac{4}{3})^i \\
&= 3^p (\frac{1 - \frac{4}{3}^{p+1}}{1 - \frac{4}{3}}) \\
&= 3^p (\frac{1 - \frac{4}{3}^{p+1}}{-\frac{2}{3}}) \\
&= 3^p (\frac{1 - \frac{4}{3}^{p+1}}{-\frac{2}{3}}) \\
&= n (\frac{1 - \frac{4n^{\log_3 \frac{4}{3}}}{3}}{-\frac{2}{3}}) \\
&= n(-1,5 + 2n^{\log_3 \frac{4}{3}}) \\
&= 2n^{\log_3 4} - 1,5n \in \Theta(n^{\log_3 4})
\end{aligned}$$

1.2.2 Méthode en arbre

En dessinant l'arbre d'appel, on remarque qu'à partir du niveau 1 on fait 4 appel de $T(n)$ dans lequel on divise par 3. Et ce processus est répetée jusqu'à atteindre $T(1)$ qui atteint la profondeur $\log_3 n$. Pour chaque niveau, le travail effectif fait et de $4^i \frac{n}{3^i}$ où i représente le niveau de profondeur atteint.

Donc, la sommation du travail total fait à chaque niveau est de

$$T(n) = n^{\log_3 4} + \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} (\frac{4}{3})^i n$$

.

La résolution de cette équation de récurrence est la suivante en posant $n = 3^p$.

$$\begin{aligned}
T(3^p) &= 3^{p\log_3 4} + \sum_{i=0}^{p-1}(\frac{4}{3})^i 3^p \\
&= 3^{p\log_3 4} + 3^p \sum_{i=0}^{p-1}(\frac{4}{3}) \\
&= 3^{p\log_3 4} + 3^p(\frac{1-(\frac{4}{3})^p}{1-\frac{4}{3}}) \\
&= 3^{p\log_3 4} + 3^p(\frac{1-(\frac{4}{3})^p}{-\frac{2}{3}}) \\
&= n^{\log_3 4} + n(\frac{1-n^{\log_3 \frac{4}{3}}}{-\frac{2}{3}}) \\
&= n^{\log_3 4} + n(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}n^{\log_3 \frac{4}{3}}) \\
&= n^{\log_3 4} + \frac{3}{2}n^{\log_3 4} - \frac{3}{2}n \\
&= \frac{5}{2}n^{\log_3 4} - \frac{3}{2}n \in \Theta(n^{\log_3 4})
\end{aligned}$$

1.2.3 Théorème maître

On a $\alpha = 4$ et $\beta = 3$. Cela donne $c = \log_\alpha \beta = \log_3 4$. On a $n \in \mathcal{O}(n^{\log_3 4-\epsilon})$ qui est vrai pour $\epsilon = 1$ et donc, $T(n) \in \Theta(n)$.

1.3 Question C

La solution se trouve dans les diapositives du dépôt. :)

1.4 Question D

$T(n) = 8T(\frac{n}{4}) + n^3$

1.4.1 Méthode itérative

En posant, $n = 16$, on a le pattern suivant :

$$\begin{aligned} T(16) &= 8T(4) + f(16) \\ &= 8(8T(1) + f(4)) + f(16) \\ &= 8(8f(1) + f(4)) + f(16) \\ &= 64f(1) + 8f(4) + f(16) \end{aligned}$$

En voyant ce motif, on peut formuler la sommation suivante :

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n} 8^i f(n^{\log_4 n - i}) \tag{3}$$

en posant $n = 4^p$ on obtient la substitution suivante :

$$T(3^p) = \sum_{i=0}^{p} 8^i f(4^{p-i})$$

Maintenant résoulons cette équation :

$$\begin{aligned} T(3^p) &= \sum_{i=0}^{p} 8^i f(4^{p-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{p} 8^i (4^{p-i})^3 \\ &= \sum_{i=0}^{p} 8^i 4^{3p-3i} \\ &= 4^{3p} \sum_{i=0}^{p} (\frac{8}{64})^i \\ &= 4^{3p} \sum_{i=0}^{p} (\frac{1}{8})^i \\ &= 4^{3p} (\frac{1 - (\frac{1}{8})^{p+1}}{1 - \frac{1}{8}}) \\ &= 4^{3p} (\frac{1 - (\frac{1}{8})^{p+1}}{\frac{7}{8}}) \\ &= n^3 (\frac{1 - \frac{n^{\log_4 \frac{1}{8}}}{8}}{\frac{7}{8}}) \\ &= n^3 (\frac{8}{7} - \frac{8n^{\log_4 \frac{1}{8}}}{35}) \\ = \frac{8}{7} n^3 - \frac{8}{35} n^{\log_4 \frac{1}{8} + 3} &\in \Theta(n^3) \end{aligned}$$

1.4.2 Méthode en arbre

En dessinant l'arbre d'appel, on remarque qu'à partir du niveau 1 on fait 8 appel de $T(n)$ dans lequel on divise par 4. Et ce processus est répetée jusqu'à atteindre $T(1)$ qui atteint la profondeur $\log_4 n$. Pour chaque niveau, le travail effectif fait et de $8^i \frac{n^3}{4^{3i}}$ où i représente le niveau de profondeur atteint.

Donc, la sommation du travail total fait à chaque niveau est de

$$T(n) = n^{\log_4 8} + \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} 8^i(\frac{n^3}{4^{3i}})$$

.

La résolution de cette équation de récurrence est la suivante en posant $n = 4^p$.

$$\begin{aligned}
T(4^p) &= 4^{p\log_4 8} + \sum_{i=0}^{p-1} 8^i(\frac{4^{3p}}{4^{3i}}) \\
&= 4^{p\log_4 8} + 4^{3p}\sum_{i=0}^{p-1}(\frac{1}{8})^i \\
&= 4^{p\log_4 8} + 4^{3p}(\frac{1-(\frac{1}{8})^p}{1-\frac{1}{8}}) \\
&= 4^{p\log_4 8} + 4^{3p}(\frac{1-(\frac{1}{8})^p}{\frac{7}{8}}) \\
&= n^{\log_4 8} + n^3(\frac{1-n^{\log_4 \frac{1}{8}}}{\frac{7}{8}}) \\
&= n^{\log_4 8} + n^3(\frac{8}{7} - \frac{8}{7}n^{\log_4 \frac{1}{8}}) \\
&= \frac{8}{7}n^3 + n^{\log_4 8} - \frac{8}{7}n^{-\log_4 8+3} \in \Theta(n^3)
\end{aligned}$$

1.4.3 Théorème maître

On a $\alpha = 8$ et $\beta = 4$. Cela donne $c = \log_\alpha \beta = \log_4 8$. Dans notre cas, on pourrait être dans le cas 3, mais d'abord vérifions cela :

$$\alpha f(\frac{n}{\beta}) \leq cf(n), 0 < c < 1, n \geq n_0$$

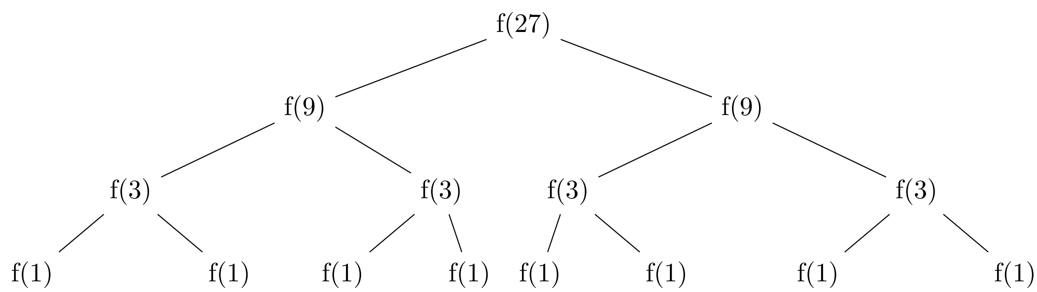
$$8\frac{n^3}{64} \leq cn^3$$

$$\frac{1}{8}n^3 \leq n^3$$

Cela est vrai pour $c = \frac{1}{8}$ et $n_0 = 0$. Pour l'autre vérification, on a $n^3 \in \Omega(n^{\log_4 8+\epsilon})$ qui est vrai pour $\epsilon = 0,1$ et donc en ayant vérifier ces deux conditions, $T(n) \in \Theta(n^3)$.

2 Exercise 2

2.1 Question A



2.2 Question B

Pour savoir le travail totale, il faut faire la sommation du travail de chaque niveau ou le niveau 0 est $f(27)$ et le dernier niveau est $f(1)$.

- Niveau 0 : $1 \times f(27) = 27$
- Niveau 1 : $2 \times f(9) = 2 \times 9 = 18$
- Niveau 2 : $4 \times f(3) = 4 \times 3 = 12$
- Niveau 3 : $8 \times f(1) = 8$

Donc, la sommation du travail fait à chaque niveau est de $27+18+12+8 = 65$.

2.3 Question C

Ce qu'on remarque c'est qu'à chaque niveau, le travail effectué à certain niveau est le suivant : $2^a \frac{n}{3^a}$ où a correspond au niveau de l'arbre. Donc, en posant $n = 3^p$, on a $2^a \frac{3^p}{3^a} = 2^a \times 3^{p-a}$.

Par conséquent, le travail effectué à un certain niveau peut être représenté de la manière suivante :

- Niveau 0 : 3^p
- Niveau 1 : $2^i \times 3^{p-1}$
- Niveau 2 : $2^2 \times 3^{p-2}$
- Niveau i : $2^i \times 3^{p-i}$

2.4 Question D

En généralisant cela, la charge de travail total est représentable de la manière suivante :

$$T(3^p) = \sum_{i=0}^{p} 2^i 3^{p-i}$$

Maintenant on peut faire une analyse classique de celle-ci pour trouver la complexité de $T(n)$.

$$\begin{aligned}
T(3^p) &= \sum_{i=0}^{p} 2^i 3^{p-i} \\
&= \sum_{i=0}^{p} 2^i 3^{-i} 3^p \\
&= 3^p \sum_{i=0}^{p} (\frac{2}{3})^i \\
&= 3^p (\frac{1-(\frac{2}{3})^{p+1}}{1-\frac{2}{3}}) \\
&= 3^p (\frac{1-(\frac{2}{3})^{p+1}}{\frac{1}{3}}) \\
&= n(\frac{1-\frac{2}{3}n^{\log_3 \frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}}) \\
&= n(3-2n^{\log_3 \frac{2}{3}}) \\
&= 3n - 2n^{\log_3 2} \in \Theta(n)
\end{aligned}$$

Note : le travail totale fait au dernier niveau est égale à $n^{\log_3 2}$ et le dernier niveau est $\log_3 n$. Il était possible d'arriver au même conclusion on utilisant la sommation suivante substitué en 3^p :

$$T(3^p) = 3^{p \log_3 2} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^i 3^{p-i}$$

3 Exercise 3

Avant de trouver un c telle que $T'_a \in o(T_a)$, il faut d'abord trouver la complexité de T_a.

En utilisant le théorème maître pour trouver la complexité de T_A, on $\alpha = 7$, $\beta = 2$ et $\lambda = 2$. On $c = \log_\alpha \beta = \log_2 7$.

3.1 Raccourci

Ici $c > \lambda$, donc, on est dans le premier cas du théorème maître et donc, $T_A \in \Theta(n^{\log_2 7})$.

3.2 Par la définition originale du théorème maître

Dans ce cas, $n^2 \in \mathcal{O}(n^{\log_2 7-\epsilon})$ est vrai avec $\epsilon = 0,1$ et donc, on est dans le premier cas du théorème maître ce qui conclut que $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$.

Maintenant, dans le cas de $T_{A'}$, on aura la valeur de $\log_\alpha \beta$ suivante : $\log_4 c$. En revanche, λ est la même valeur que dans T_A. Ici, ce qu'on peut remarquer c'est que $\log_2 7 \approx 2,8074$. Et donc, pour trouver le plus gros c possible qui fait que $T'_a \in o(T_a)$ est vraie, il faut que $T_{a'}$ se retrouve dans le premier cas du théorème maître. On remarque que si $c = 16$, on tomberais dans le deuxième cas du théorème ($\log_4 16 = 2$) et grossir un peu plus c nous rapprocherais de la valeur $\log_2 7$. Donc, c est au moins supérieur à 16. Pour trouver la plus grande valeur de c possible qui rend la complexité citée précédemment vraie, il faut trouver le point d'intersection entre $\log_4 c$ et $\log_2 7$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\log_4 c &= \log_2 7\\ c &= 4^{\log_2 7}\\ c &\approx 4^{2,8074}\\ c &\approx 49\end{aligned}$$

Or, $\log_4 49 \approx 2,8074$. Donc, pour prendre la plus grande valeur possible qui fait que la complexité précisée précédémment soit vrai, il faut prendre le prédecceur de 49 qui est 48. $\log_4 48 \approx 2,7925 < 2,8074$ respecte notre contrainte. Donc, $c = 48$.

4 Exercice 4

4.1 Question A

$T(n) \in \Theta(\log n)$

4.2 Question B

$T(n) \in \Theta(n)$

4.3 Question C

$T(n) \in \Theta(n!)$

4.4 Question D

$T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$

4.5 Question E

$T(n) \in \Theta(n)$

4.6 Question F

$T(n) \in \Theta(n^2 \log^3 n)$

5 Exercise 5

En posant $p = 2$ en à la le développement :

$$\begin{aligned} T(2^{2^2}) &= T(16) = T(\sqrt{16}) + f(16) \\ &= T(\sqrt{4}) + f(4) + f(16) \\ &= f(1) + f(4) + f(16) \end{aligned}$$

En essayant de développer plus en détail, on remarque le motif suivant :

$T(2^{2^p}) = T(2^{2^{p-1}}) + 1 = T(2^{2^{p-2}}) + 2 = T(2^{2^{p-i}}) + i = ... = T(2^{2^0}) + p = T(4) + p$

Or, $p = \log\log n$ et donc $T(n) \in \Theta(\log\log n)$

6 Exericse 6

La solution sera donnée après le labo sur le chapitre diviser pour régner. ;)

7 Exerice 7

Les fonctions utilisées pour les liste chainées sont les suivantes :

- estVide : Vérifie si la liste chainée est vide $\Theta(1)$
- obtenirTete : Obtient l'élément en tête de la liste chainée $\Theta(1)$
- inserer : Inserer l'élément au début de la liste $\Theta(1)$
- retirerDebut : Retire l'élément en tête de la liste chainée $\Theta(1)$

Fonction RENVERSER(L_1, L_2)
    Si estVide(L_1) alors
        Renvoyer L_2
    element$\leftarrow$ obtenirTete(L_1)
    inserer(L_2,element)
    retirerDebut(L_1)
    Renvoyer Renverser(L_1, L_2)
Fin Fonction

La complexité de cette fonction peut être représentée ainsi :

$$T(n) = T(n-1) + 1 \in \Theta(n)$$

.