Parcial 1 - Análisis Numérico

Camilo Jose Narvaez Montenegro
camilonarvaez@javeriana.edu.co

26 de agosto de 2021

1. 2.a) Polinomio de Taylor

$$f(x) = e^x \cos(x); x_0 = 0; P_3(0.5) \tag{1}$$

Lo primero a realizar en este ejercicio es calcular el Polinomio de Taylor de grado 3, el cual se ve a continuación:

$$P_3(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} \tag{2}$$

Las derivadas utilizadas para este cálculo se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(\cos(x) - \sin(x)) \\ f''(x) &= -2e^x \sin(x) \\ f'''(x) &= -2e^x(\cos(x) + \sin(x)) \end{aligned} \tag{3}$$

Se pide además calcular el límite superior del error entre el Polinomio de Taylor y la función original, para esto se utilizar la Cota de Lagrange para el error polinomial, la cual se define como:

$$R_N = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} x^{N+1} \tag{4}$$

Donde $N = 3, c \in x$. Para esto se debe definir un intervalo en x donde evaluar el error. Puesto que el punto a calcular es $x = 0.5$ y se sabe que el polinomio de Taylor tiene errores mayores cuanto más alejado del centro, se utilizará un intervalo ± 1 del valor a calcular, dando $x \in [-0.5, 1.5]$. Realizando los cálculos se obtiene:

$$f^{(4)}(x) = -4e^x \cos(x) \tag{5}$$

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{4e^c \cos(c)}{4!} x^4 \\ &= e^c \cos(c) \frac{x^4}{6} \end{aligned} \tag{6}$$

Para calcular la cota superior, se debe hallar los valores de x y c que maximicen la función. Con solo observarla se ve que se desea maximizar el numerador, por lo que $x = 1.5$ y c será el máximo de la función

$e^c \cos(c)$ en el intervalo $c = [-0.5, 1.5]$. Esto se calculó por medio del Método de Newton, arrojando un valor de $c = 0.78539816$. Colocando esto en la fórmula R_N se puede hallar que:

$$R_N \leq \left| -e^c \cos(c) \frac{1.5^4}{6} \right| \approx 1.3085577 \tag{7}$$

Con esta información se procedió a graficar las dos funciones:

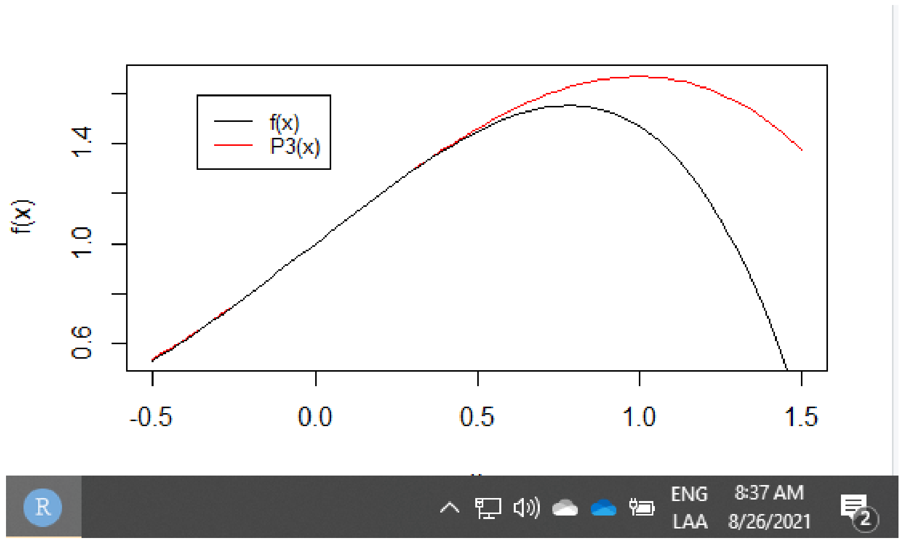

Figura 1: Gráfica de la función original y del polinomio de Taylor

También se graficó la función del error y la cota superior R_N observando que en $x = 1.5$ el error es de :

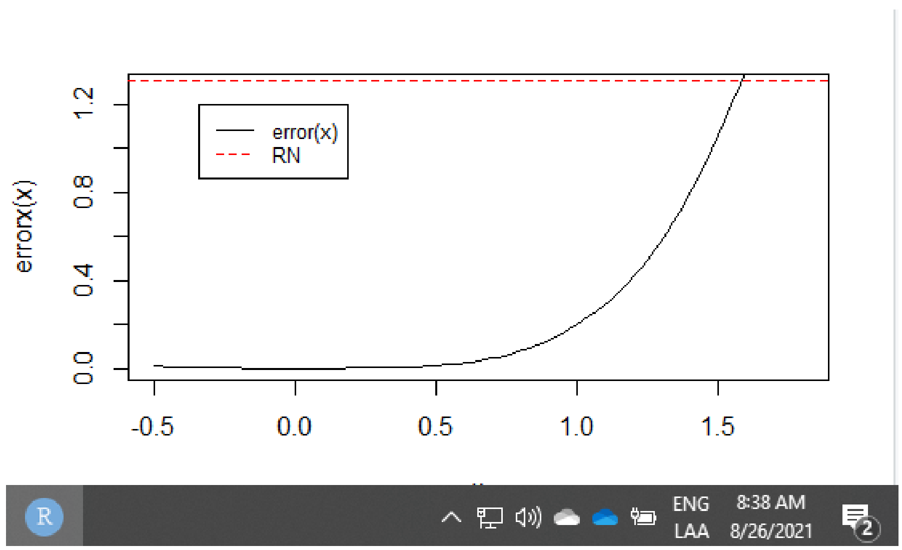

Figura 2: Gráfica del error con la cota superior

Al final, se calculó $P_3(0.5) = 1.4583333$, el valor real es $f(0.5) = 1.446889$. El error absoluto se puede observar en la tabla a continuación con todos los errores calculados en el intervalo con un salto de 0.1:

x	Error Absoluto	Error Relativo
-0.5	0.0093859365	1.7633433 %
-0.4	0.0039276854	0.63615962 %
-0.3	0.001269322	0.17935099 %
-0.2	0.00025601932	0.031906272 %
-0.1	1.6333488e-05	0.001814193 %
0	0	0 %
0.1	1.6999837e-05	0.0015459321 %
0.2	0.00027731198	0.023166165 %
0.3	0.001430626	0.11093827 %
0.4	0.0046051278	0.33514713 %
0.5	0.011444297	0.79095884 %
0.6	0.024140459	1.6052337 %
0.7	0.045463641	2.9517953 %
0.8	0.078784037	5.0810404 %
0.9	0.12808619	8.3775938 %
1	0.19797273	13.479509 %
1.1	0.29365528	21.549865 %
1.2	0.42092989	34.987976 %
1.3	0.58613411	59.716216 %
1.4	0.79608258	115.4997 %
1.5	1.0579779	333.72365 %