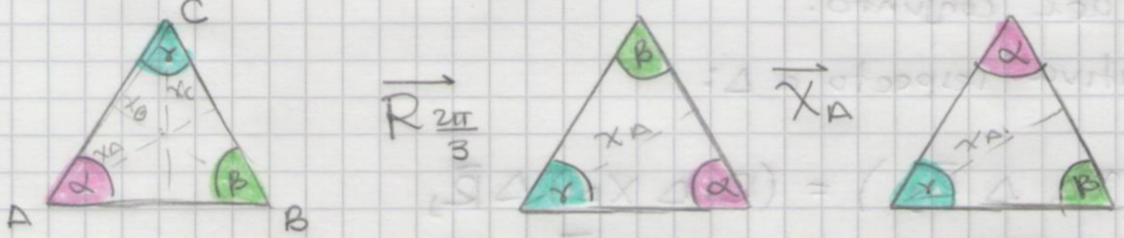
Taller de problemas 2.

2.1.8 Problema 3.

Considere un triangulo equilatero...



$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \quad \overrightarrow{R}_{\frac{2\pi}{3}} \quad (A\gamma, B\alpha, C\beta) \quad \overrightarrow{X}_A \quad (A\gamma, B\beta, C\alpha)$

a) Construya la tabla de multiplicación para G_Δ, vale decir $G_\Delta = \{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_j\}, \{X_K\}\}$ y la operación es concatenación. Donde I es la operación identidad, $\{R_i\}$ conjunto de rotaciones horario, $\{\bar{R}_j\}$ conjunto de rotaciones antihorario, y $\{X_K\}$ rotaciones que dejan invariante el triangulo

$R_1 = (A\beta, B\gamma, C\alpha)$ $\qquad I = (A\alpha, B\beta, C\gamma)$

$\bar{R}_J = (A\gamma, B\alpha, C\beta)$

$X_A = (A\gamma, B\beta, C\alpha)$ $\qquad R_1 \Delta R_1 = \bar{R}_J$

$\qquad \bar{R}_J \Delta \bar{R}_J = R_1$

$X_B = (A\beta, B\alpha, C\gamma)$ $\qquad X_A \Delta X_A = I$

$\qquad X_B \Delta X_B = I$

$X_C = (A\alpha, B\gamma, C\beta)$ $\qquad X_C \Delta X_C = I$

Δ	I	R_i	$\bar{R}_J$	X_A	X_B	X_C
I	I	R_1	$\bar{R}_J$	X_A	X_B	X_C
R_1	R_1	$\bar{R}_J$	I	X_C	X_A	X_B
$\bar{R}_J$	$\bar{R}_J$	I	R_1	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_C	X_B	I	R_1	$\bar{R}_J$
X_B	X_B	X_A	X_C	$\bar{R}_J$	I	R_1
X_C	X_C	X_B	X_A	R_1	$\bar{R}_J$	I

b) Muestre que el conjunto de estas operaciones forman el grupo G_Δ:

i) Cerrado respecto a Δ: De la tabla G_Δ podemos ver que las operaciones entre elementos se mantiene dentro del conjunto.

ii) Asociativa respecto a Δ:

$$R_1 \Delta (X_A \Delta \bar{R}_J) = (R_1 \Delta X_A) \Delta \bar{R}_J$$

$$R_1 \Delta X_B = X_C \Delta \bar{R}_J$$

$$X_A = X_A$$

iii) Existencia de un elemento neutro.

$$I \Delta \bar{R}_J = \bar{R}_J \Delta I = \bar{R}_J$$

iv) Existencia de un elemento inverso.

$$R_1 \Delta \bar{R}_J = I = \bar{R}_J \Delta R_1$$

$$X_A \Delta X_A = I$$

$$X_B \Delta X_B = I$$

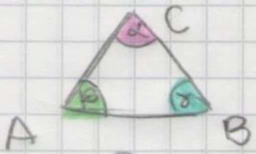
$$X_C \Delta X_C = I$$

v) Conmutativa

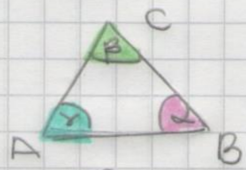
$$X_A \Delta X_C = \bar{R}_J \neq X_C \Delta X_A = R_1$$

G_Δ no es un grupo abeliano, pero es un grupo.

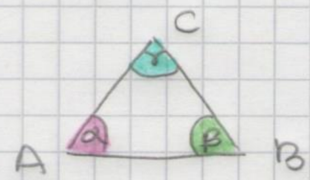
c) Identifique cada una de las R_i y $\bar{R}_j$, y muestre además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, $\{I, X_i\}$, forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.



R_1

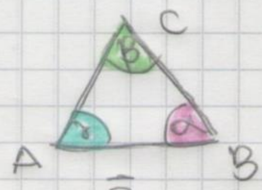


R_2



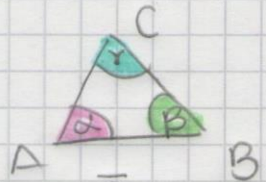
R_3

$\rightarrow R_i$



$\bar{R}_1$

$\bar{R}_2$



$\bar{R}_3$

$\longrightarrow R_j$

Podemos ver que:

$$R_1 = \bar{R}_2 = R_i \in G\Delta$$

$$R_2 = \bar{R}_1 = \bar{R}_j \in G\Delta$$

$$R_3 = \bar{R}_3 = I \in G\Delta$$

Sea $H_1 = \{R_1, R_2, R_3\}$ y $H_2 = \{\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3\}$

$H_1 \subseteq G\Delta$ y $H_2 \subseteq G\Delta$

Probando para H_1

i) $R_1 \Delta R_2 = R_3 \in H_1$

ii) $\exists\, R_1^{-1} \in H_1 \rightarrow R_1 \Delta R_2 = R_3 = I$, por lo tanto R_1 es el simetrico de R_2.

Así mismo aplica para H_2

2.1.8 Problema 10.

Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|P_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y la multiplicación de polinomio por un número (real).

1) P_n es cerrado bajo la suma:

Sean $P_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ y $P_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \in P_n$

$$P_1(x) + P_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$$

Como $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, entonces existe $c_i = a_i + b_i$

$$P_1(x) + P_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in P_n \ ; \ c_i \in \mathbb{R}$$

2) La suma es conmutativa:

Sean $P_1(x), P_2(x) \in P_n$

$$P_1(x) + P_2(x) = P_2(x) + P_1(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + a_i) x^i$$

- La suma de números reales es conmutativa, por lo tanto $a_i + b_i = b_i + a_i$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$$

3) La operación suma es asociativa

Sean $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x) \in P_n$

$$P_1(x) + [P_2(x) + P_3(x)] = [P_1(x) + P_2(x)] + P_3(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \left[\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i\right] = \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right] + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i + c_i) x^i$$

4) Existe un unico elemento neutro

$$|0\rangle = P_0(x) = \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i$$

$$P_1(x) + P_0(x) = P_0(x) + P_1(x) = P_1(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i = \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + 0) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (0 + a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

5) Existe un elemento simetrico para cada elemento de P_n

Sean $P_1(x) \in P_n$ y $P_{-1}(x) \in P_n$

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \;, \quad P_{-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i) x^i$$

$$P_1(x) + P_{-1}(x) = P_0(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + (-a_i)) x_i = \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i$$

Siendo $-a_i$ el simetrico de a_i en los reales:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i = \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i$$

6) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha P(x) \in P_n$

- $\alpha(\beta P_1(x)) = (\alpha\beta) P_1(x)$

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\beta a_i) x^i\right) = (\alpha\beta) \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i$$

β es un numero constante, por lo tanto puede salir de la sumatoria.

$$\alpha\beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = (\alpha\beta) \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

- $(\alpha+\beta) P_1(x) = \alpha P_1(x) + \beta P_1(x)$

$$(\alpha+\beta) \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\underbrace{(\alpha+\beta) a_i}] x^i =$$

propiedad distributiva $\mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha a_i + \beta a_i) x^i =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha a_i x^i + \beta a_i x^i\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta a_i x^i = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

Sí es espacio vectorial

$\cdot\ \alpha\left(P_1(x) + P_2(x)\right) = \alpha P_1(x) + \alpha P_2(x)$

$$\alpha\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right] = \alpha\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \alpha\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$\alpha\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \alpha\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i =$$

$\cdot\ 1 \in \mathbb{R} \to 1 \times P_1(x) = P_1(x)$

$$1 \times \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (1 \times a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = P_1(x)$$

b) Si los coeficientes a_i son enteros, ¿P_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?

No, el producto por escalar, perteneciente a los reales, podría no pertenecer a P_n.

$\alpha \in \mathbb{R}$ y $p(x) \in P_n \to P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$

$\alpha P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i \to$ Podemos afirmar que $\alpha a_i \in \mathbb{R}$ pero no que pertenezca a $\mathbb{Z}$

c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial?

1) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$

$P_{n-1} \subseteq P_n$

Sean $P_1(x)$ y $P_2(x) \in P_{n-1}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha P_1(x) + \beta P_2(x) \in P_{n-1}$? $\to$

$$\alpha\sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i + \beta\sum_{i=0}^{n-2} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-2} \underbrace{(\alpha a_i + \beta b_i)}_{c_i} x^i \in P_{n-1}$$

Sí es subespacio de P_n.

2) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

$P_p \subseteq P_n$ $\quad p(x) \in P_p$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2m} a_i x^i \quad , 2m \leq n-1$$

$p_1(x)$ y $p_2(x) \in P_p$, α y $\beta \in \mathbb{R}$

$\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) \in P_p$?

$$\alpha \sum_{i=0}^{2m} a_i x^i + \beta \sum_{i=0}^{2m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{2m} (\alpha a_i + \beta b_i) x^i \in P_p$$

$2m \leq n-1$

Si es subespacio de P_n. El grado sigue siendo par

3) Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$)

No es subespacio de P_n porque no contiene el nulo de P_n.

4) Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

No es subespacio de P_n porque no contiene el nulo de P_n