Considerando los operadores:

$\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ \rightarrow$ hermítico

$\mathbb{K} = -\mathbb{K}^+ \rightarrow$ Antihermítico

$\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^+ \rightarrow$ Unitario

Con $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos operadores genericos. Probar:

a) En general:

1) $(\mathbb{P}^+)^{-1} = (\mathbb{P}^{-1})^+$

Entonces supondremos los espacios V, W, V^* y W^*, entonces; si $\mathbb{P}$ es lineal $\mathbb{P}^+$ tambien lo sera

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\alpha|V_1\rangle + \beta|V_2\rangle) = \alpha\mathbb{P}|V_1\rangle + \beta\mathbb{P}|V_2\rangle$$

Entonces $\mathbb{P}^+$ es lineal.

tenemos $(\mathbb{P}^+)^{-1} = (\mathbb{P}^{-1})^+$, tenemos que

$$((\mathbb{P}^+)^{-1})^+ = ((\mathbb{P}^{-1})^+)^+ \Rightarrow ((\mathbb{P}^+)^{-1})^+ = \mathbb{P}^{-1}$$

$$\Rightarrow ((\mathbb{P}^+)^{-1})^+\mathbb{P} = \mathbb{I} \Rightarrow \underbrace{(\mathbb{P}^+)^{-1}\mathbb{P}^+}_{} = \mathbb{I}^+ \;//$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{I} = \mathbb{I}^+ \;//$$

2) $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

$\Rightarrow$

$$(PQ)^{-1}P = Q^{-1}I \Rightarrow (PQ)^{-1}(PQ) = I\,I = I^2$$

$$\Rightarrow I = I^2 \checkmark$$

3) Si $[P, Q] = 0$, entonces $P(Q)^{-1} = (Q^{-1})P$

Entonces

$$[P, Q] = PQ - QP = 0$$

$$\Rightarrow PQ = QP \;, \quad \text{como } AB \neq BA$$

Entonces debe ser $P(Q)^{-1} = (Q^{-1})P$

6) Si A es hermitico entonces $\tilde{A} = U^{-1}AU$ tambien

Entonces tenemos: $\tilde{A} = U^{-1}AU$, pero sabemos que $U^{-1} = U^{+} \Rightarrow \tilde{A} = U^{+}AU$

$$\Rightarrow \tilde{A} = AI = A \quad \text{al dar con su adjunto}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{A}^{+} = (U^{-1}AU)^{+} = (AI)^{+} = A^{+}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{+} = A^{+} \quad \text{pero como } A = A^{+}, \text{ entonces}$$

$$\tilde{A}^{+} = A = \tilde{A} \checkmark$$

c) Si $\mathbb{K}$ es un antihermítico entonces

$$\tilde{\mathbb{K}} = U^{-1}\mathbb{K}U$$ también lo será

Entonces

$$\tilde{\mathbb{K}} = U^{-1}\mathbb{K}U = U^{+}\mathbb{K}U$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$$

ahora con el adjunto

$$\tilde{\mathbb{K}}^{+} = (U^{-1}\mathbb{K}U)^{+} = (U^{+}\mathbb{K}U)^{+} = \mathbb{K}^{+} = -\mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^{+} = -\mathbb{K}$$

Por lo tanto $\tilde{\mathbb{K}} = -\tilde{\mathbb{K}}^{+}$ //

d) Dados dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ hermíticos, su composición $\mathbb{A}\mathbb{B}$, será hermítica $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan.

tenemos que: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{+}$ y $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{+}$

Entonces $\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^{+} \Longleftrightarrow [\mathbb{A},\mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}$

Si $\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^{+}$, entonces

$$[\mathbb{A},\mathbb{B}] = [\mathbb{A}^{+},\mathbb{B}^{+}]$$

En efecto, $[\mathbb{A}^{+},\mathbb{B}^{+}] = \mathbb{A}^{+}\mathbb{B}^{+} - \mathbb{B}^{+}\mathbb{A}^{+}$, pero $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{+}$ y $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{+}$

$$\Rightarrow [\mathbb{A}^{+},\mathbb{B}^{+}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}$$ //

e) Si S es el operador real y antihermético e I el operador unidad, probar:

1) $(I-S)$ y $(I+S)$ conmutan.

En efecto;

$$[(I-S),(I+S)] = [I,I]+[I,S]-[S,I]-[S,S]$$
$$= 0+(IS-SI)-(SI-IS)-0$$
$$= 2(IS-SI) = 2[I,S]$$

Por lo tanto si conmutan

2) El operador $(I-S)(I+S)$ es simétrico, mientras que el operador $(I-S)(I+S)^{-1}$ es ortogonal

Entonces $(I-S)(I+S) = ((I-S)(I+S))^{+}$

$\Rightarrow$

$$I^2+IS-SI-S^2 = (I^2+IS-SI-S^2)^{+}$$
$$\cancel{I^2}+IS-SI-S^2 = \cancel{(I^2)^{+}}+(IS)^{+}-(SI)^{+}-(S^2)^{+}$$

Como $I^2 = I$ y $I = I^2$

y $S = -S^{+}$, entonces.

$$IS-SI-SS = IS^{+}-S^{+}I-S^{+}S^{+}$$
$$IS-SI-\cancel{SS} = -IS+SI-\cancel{SS}$$

$\Rightarrow$ Como $AI = IA = A$

$\Rightarrow$ $\cancel{S}\cancel{-S} = \cancel{-S}\cancel{+S}$ $\Rightarrow$ $(I-S)(I+S) = ((I-S)(I+S))^{+}$