a) Sean dos cuaternios $|a_i\rangle$ y $|a_j\rangle \notin |a\rangle$, tal que

$$|a_i\rangle = a_i^\alpha |q_\alpha\rangle \wedge |a_j\rangle = a_j^\alpha |q_\alpha\rangle$$

y definimos las operaciones:

• Suma: $|a_3\rangle = |a_i\rangle + |a_j\rangle$

$$= (a_i^\alpha + a_j^\alpha)|q_\alpha\rangle$$

• multiplicacion por escalar:

$$\beta|a\rangle = \beta a^\alpha |q_\alpha\rangle$$

Para que los cuaternios de la forma $|a\rangle$ sean un espacio vectorial, deben cumplir que:

1) $\forall\ |a_i\rangle, |a_j\rangle \in |a\rangle \Rightarrow |a_k\rangle = |a_i\rangle + |a_j\rangle \in |a\rangle$

$$\Rightarrow |a_1\rangle + |a_2\rangle = (a_i^\alpha |q_\alpha\rangle) + (a_j^\alpha |q_\alpha\rangle)$$

$$= (a_i^\alpha + a_j^\alpha)|q_\alpha\rangle, \quad a_i^\alpha + a_j^\alpha = a_k^\alpha$$

$$= a_k^\alpha |q_\alpha\rangle$$

$$= |a_k\rangle \in |a\rangle \checkmark$$

2) $\forall\ |a_i\rangle, |a_j\rangle \in |a\rangle \Rightarrow |a_i\rangle + |a_j\rangle = |a_j\rangle + |a_i\rangle$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
|a_i\rangle + |a_j\rangle &= (a_i^\alpha |q_\alpha\rangle) + (a_j^\alpha |q_\alpha\rangle) \\
&= (a_i^\alpha + a_j^\alpha)|q_\alpha\rangle \\
&= (a_j^\alpha + a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle \\
&= (a_j^\alpha |q_\alpha\rangle) + (a_i^\alpha |q_\alpha\rangle) \\
&= |a_j\rangle + |a_i\rangle \ /\!/
\end{aligned}
$$

3) $\forall\ |a_i\rangle, |a_j\rangle \in |a\rangle \Rightarrow (|a_i\rangle + |a_j\rangle) + |a_k\rangle = |a_i\rangle + (|a_j\rangle + |a_k\rangle)$

En efecto;

$$
\begin{aligned}
(|a_i\rangle + |a_j\rangle) + |a_k\rangle &= [(a_i^\alpha |q_\alpha\rangle) + (a_j^\alpha + q_\alpha\rangle)] + (a_k^\alpha |q_\alpha\rangle) \\
&= (a_i^\alpha + a_j^\alpha)|q_\alpha\rangle + (a_k^\alpha |q_\alpha\rangle) \\
&= (a_i^\alpha + a_j^\alpha + a_k^\alpha)|q_\alpha\rangle \\
&= (a_i^\alpha |q_\alpha\rangle) + (a_j^\alpha + a_k^\alpha)|q_\alpha\rangle \\
&= |a_i\rangle + [(a_j^\alpha |q_\alpha\rangle) + (a_k^\alpha |q_\alpha\rangle)] \\
&= |a_i\rangle + (|a_j\rangle + |a_k\rangle) \ /\!/
\end{aligned}
$$

4) $\exists |0\rangle : |0\rangle + |a_i\rangle = |a_i\rangle + |0\rangle = |a_i\rangle \; \forall |a_i\rangle \in |a\rangle$

En efecto,

$$\exists |0\rangle : \quad |0\rangle + |a_i\rangle = (0^\alpha |q_\alpha\rangle) + (a_i^\alpha |q_\alpha\rangle)$$
$$= (0^\alpha + a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= a_i^\alpha |q_\alpha\rangle$$
$$= |a_i\rangle$$

5) $\exists |-a_i\rangle \in |a\rangle : |a_i\rangle + |-a_i\rangle = |0\rangle$

En efecto,

$$\exists |-a_i\rangle \in |a\rangle \Rightarrow |a_i\rangle + |-a_i\rangle = (a_i^\alpha |q_\alpha\rangle) + (-a_i^\alpha |q_\alpha\rangle)$$
$$= (a_i^\alpha + (-a_i^\alpha))|q_\alpha\rangle$$
$$= (a_i^\alpha - a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= (0^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= |0\rangle$$

6) $\exists \alpha \in K : \alpha |a_i\rangle \in |a\rangle$, En efecto

$$\alpha |a_i\rangle = \alpha (a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= (\alpha a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle \quad , \; \alpha a_i^\alpha = b_i^\alpha$$
$$= (b_i^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= |b_i\rangle \in |a\rangle$$

7) $\alpha(\beta|a_i\rangle) = (\alpha\beta)|a_i\rangle$

En efecto,

$$\alpha(\beta|a_i\rangle) = \alpha(\beta(a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle)$$
$$= \alpha(\beta a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle)$$
$$= (\alpha\beta a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= (\alpha\beta)a_i^\alpha|q_\alpha\rangle$$
$$= (\alpha\beta)|a_i\rangle$$

8) $(\alpha+\beta)|a_i\rangle = \alpha|a_i\rangle + \beta|a_i\rangle$

En efecto,

$$(\alpha+\beta)|a_i\rangle = (\alpha+\beta)(a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= (\alpha a_i^\alpha + \beta a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= (\alpha a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle + (\beta a_i^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= \alpha|a_i\rangle + \beta|a_i\rangle$$

9) $\alpha(|a_i\rangle + |a_j\rangle) = \alpha|a_i\rangle + \alpha|a_j\rangle$

En efecto,

$$\alpha(|a_i\rangle + |a_j\rangle) = \alpha(a_i^\alpha|q_\alpha\rangle + a_j^\alpha|q_\alpha\rangle)$$
$$= \alpha a_i^\alpha|q_\alpha\rangle + \alpha a_j^\alpha|q_\alpha\rangle$$
$$= \alpha|a_i\rangle + \alpha|a_j\rangle$$

10) $\mathbb{1}|a_i\rangle = |a_i\rangle$, en efecto,

$$\mathbb{1}|a_i\rangle = (\mathbb{1})(a_i^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle)$$
$$= (\mathbb{1})\, a_i^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$$
$$= a_i^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$$
$$= |a_i\rangle \quad \forall\, |a_i\rangle \in |a\rangle$$

b) Sea $|b\rangle \equiv (b^0, \vec{b})$ y $|r\rangle = (r^0, \vec{r})$ y $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$

$$(d^0, \vec{d}) = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + b^j|q_j\rangle) \odot (r^0 + r^i|q_i\rangle)$$
$$= (b^0 r^0 + b^0 r^i|q_i\rangle + r^0 b^j|q_j\rangle + b^j r^i|q_j\rangle|q_i\rangle)$$

$$= (b^0 r^0 + b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + (b^j|q_j\rangle)(r^i|q_i\rangle))$$

$$(d^0, \vec{d}) = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + b^j|q_j\rangle) \odot (r^0 + r^i|q_i\rangle)$$

$$= (b^0 r^0 + b^0 r^i|q_i\rangle + r^0 b^j|q_j\rangle + b^j r^i|q_j\rangle|q_i\rangle)$$

$$= (b^0 r^0 + b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + (b^j|q_j\rangle)(r^i|q_i\rangle))$$

$$= (b^0 r^0 + b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + (b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle)(r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle))$$

$$= (b^0 r^0 + b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + b^1 r^1|q_1\rangle|q_1\rangle + b^1 r^2|q_1\rangle|q_2\rangle + b^1 r^3|q_1\rangle|q_3\rangle$$
$$+ b^2 r^1|q_2\rangle|q_1\rangle + b^2 r^2|q_2\rangle|q_2\rangle + b^2 r^3|q_2\rangle|q_3\rangle$$
$$+ b^3 r^1|q_3\rangle|q_1\rangle + b^3 r^2|q_3\rangle|q_2\rangle + b^3 r^3|q_3\rangle|q_3\rangle)$$

$$= (b^0 r^0 + b^0\vec{r} + r^0\vec{b} - b^1 r^1 + b^1 r^2|q_3\rangle - b^1 r^3|q_2\rangle - b^2 r^1|q_3\rangle - b^2 r^2$$
$$+ b^2 r^3|q_1\rangle + b^3 r^1|q_2\rangle - b^3 r^2|q_1\rangle - b^3 r^3)$$

$$= (b^0 r^0 + b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + (-b^i r_i) + (\varepsilon^{ijk} b_j r_k|q_i\rangle))$$

$$= [(b^0 r^0 - (b^i r_i)) + (b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + \varepsilon^{ijk} b_j r_k|q_i\rangle)]$$

$$\Rightarrow |d\rangle = [(b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}) + (r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})]$$

$$\Rightarrow |d\rangle = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r}) \quad //$$

c) dados $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$, ver que

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$$

$$\Rightarrow |d\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

En efecto,

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^\alpha |q_\alpha\rangle)(r^\alpha |q_\alpha\rangle)$$

$$= (b^0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle)(r^0 + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle)$$

$$= b^0r^0 + b^0r^1|q_1\rangle + b^0r^2|q_2\rangle + b^0r^3|q_3\rangle + b^1r^0|q_1\rangle + b^1r^1|q_1\rangle|q_1\rangle$$
$$+ b^1r^2|q_1\rangle|q_2\rangle + b^1r^3|q_1\rangle|q_3\rangle + b^2r^0|q_2\rangle + b^2r^1|q_2\rangle|q_1\rangle + b^2r^2|q_2\rangle|q_2\rangle$$
$$+ b^2r^3|q_2\rangle|q_3\rangle + b^3r^0|q_3\rangle + b^3r^1|q_3\rangle|q_1\rangle + b^3r^2|q_3\rangle|q_2\rangle$$
$$+ b^3r^3|q_3\rangle|q_3\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |d\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta_\alpha|q_j\rangle + A\, b_j r_k |q_i\rangle$$

En efecto,

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^\alpha |q_\alpha\rangle)(r^\alpha|q_\alpha\rangle)$$

$$= (b^0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle)(r^0 + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle)$$

$$= b^0r^0 + b^0r^1|q_1\rangle + b^0r^2|q_2\rangle + b^0r^3|q_3\rangle + b^1r^0|q_1\rangle + b^1r^1|q_1\rangle|q_1\rangle$$
$$+ b^1r^2|q_1\rangle|q_2\rangle + b^1r^3|q_1\rangle|q_3\rangle + b^2r^0|q_2\rangle + b^2r^1|q_2\rangle|q_1\rangle + b^2r^2|q_2\rangle|q_2\rangle$$
$$+ b^2r^3|q_2\rangle|q_3\rangle + b^3r^0|q_3\rangle + b^3r^1|q_3\rangle|q_1\rangle + b^3r^2|q_3\rangle|q_2\rangle$$
$$+ b^3r^3|q_3\rangle|q_3\rangle$$

$$= b^0r^0 + b^0(r^i|q_i\rangle) + r^0(b^i|q_i\rangle) + (b^ir_i) + b^1r^2|q_3\rangle - b^1r^3|q_2\rangle$$
$$- b^2r^1|q_3\rangle + b^2r^3|q_1\rangle + b^3r^1|q_2\rangle - b^3r^2|q_1\rangle$$

$$= b^0r^0 + b^0(r^i|q_i\rangle) + r^0(b^i|q_i\rangle) + (b^ir_i) + b^1r^2|q_3\rangle - b^2r^1|q_3\rangle$$
$$+ b^3r^1|q_2\rangle - b^1r^3|q_2\rangle + b^2r^3|q_1\rangle - b^3r^2|q_1\rangle$$

$$= (b^\alpha r^\alpha)|q_0\rangle + (b^0r^i + r^0b^i)|q_i\rangle + (b^2r^3 - b^3r^2)|q_1\rangle$$
$$+ (b^3r^1 - b^1r^3)|q_2\rangle + (b^1r^2 - b^2r^1)|q_3\rangle$$

tenemos, re asignando según las definiciones de $a = $ Número, $S^{\alpha j} = S^{j\alpha} \rightarrow (S^{\alpha j}\delta^{0}_{\alpha} + S^{j\alpha}\delta^{0}_{\alpha})$

y $A^{[jk]i} = -A^{[kj]i} \rightarrow (A^{jki}b_j r_k - A^{kji}b_j r_k)$

Entonces teniendo:

$$|d\rangle = (b^{\alpha}r^{\alpha})|q_0\rangle + (b^0 r^i + b^i r^0)|q_i\rangle + (b^2 r^3 - b^3 r^2)|q_1\rangle$$
$$+ (b^3 r^1 - b^1 r^3)|q_2\rangle + (b^1 r^2 - b^2 r^1)|q_3\rangle$$

Podemos denotar entonces:

$$a|q_0\rangle = (b^{\alpha}r^{\alpha})|q_0\rangle \,, \quad S^{\alpha j}\delta^{0}_{\alpha}|q_j\rangle = (b^0 r^i - b^i r^0)|q_i\rangle$$

$$y \quad A^{jki}b_j r_k|q_i\rangle = (b^2 r^3 - b^3 r^2)|q_1\rangle + (b^3 r^1 - b^1 r^3)|q_2\rangle$$
$$+ (b^1 r^2 - b^2 r^1)|q_3\rangle$$

Por lo tanto podemos afirmar que

$$|d\rangle = |b\rangle \circ |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{\alpha j}\delta^{0}_{\alpha}|q_j\rangle + A^{jki}b_j r_k|q_i\rangle$$

d) La operacion $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ genera un cuartenion que resulta del producto punto y cruz de $|a\rangle$ y $|r\rangle$, sabiendo eso podemos decir que $|d\rangle$ no seria ninguna de las anteriores pues depende de una base vectorial y a la vez no, ya que se expresa asi:

$$|d\rangle = d^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$$
$$= d^0|q_0\rangle + d^1|q_1\rangle + d^2|q_2\rangle + d^3|q_3\rangle$$

y $d^0|q_0\rangle$ es una componente escalar. y un pseudovector se asocia a orientaciones de superficies, y un vector a rectas orientadas, podriamos tomar como se explica en el texto a $|d\rangle$ como un hipercomplejo. (tal vez).

i) $n(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a | a \rangle} = \sqrt{|a\rangle^{*} \odot |a\rangle}$

$\Rightarrow$

$$\| |a\rangle \| = \sqrt{(a^0 - a^i |q_i\rangle)(a^0 + a^i |q_i\rangle)}$$

$$= \sqrt{a^0 a^0 + \cancel{a^0 a^i |q_i\rangle} - \cancel{a^0 a^i |q_i\rangle} - a^i a^i}$$

$$= \sqrt{(a^0)^2 - (a^i)^2}$$

Para ser norma debe cumplir que:

1) $\| |a\rangle \| \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(a^0)^2 - (a^i)^2} \geq 0$

$$(a^0)^2 - (a^i)^2 \geq 0$$

$$(a^0)^2 \geq (a^i)^2$$

$$a^0 \geq a^i = a^1 + a^2 + a^3$$

Si $a^0 \ngeq a^i$ no cumpliria el axioma por