Modelska analiza II

Naloga 1 – Navadne diferencialne enacbe: zacetni problem

Marcel Čampa, 27182042

2. marec 2019

Naloga 1

Pri prvi nalogi smo spremljali gibanje planeta okrog sonca. Ce zapisemo *Newtonov gravitacijski zakon*, dobimo enacbo

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r},$$

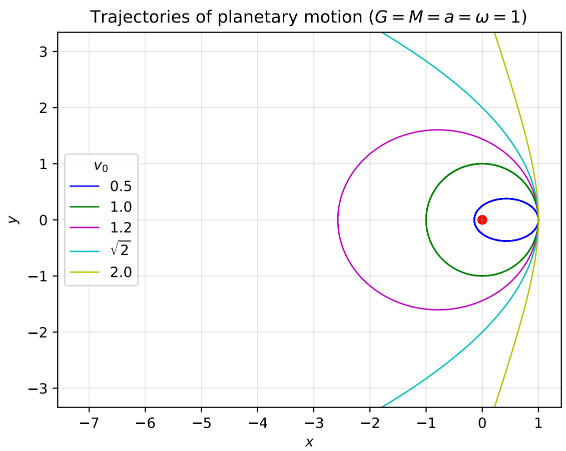
kjer je G gravitacijska konstanta, m masa planeta, M masa sonca, $\mathbf{r}$ pa vektor razdalje med planetom in soncem. Ce zapisemo se $\mathbf{r} = (x, y)^T$ in $\dot{\mathbf{r}} = (u, v)^T$, lahko zgornjo enacbo prepisemo v sistem

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u\\
\dot{y} &= v\\
\dot{u} &= -G\frac{Mx}{(x^2+y^2)^{1.5}}\\
\dot{v} &= -G\frac{My}{(x^2+y^2)^{1.5}}.
\end{aligned}$$

Izberemo si zacetne pogoje

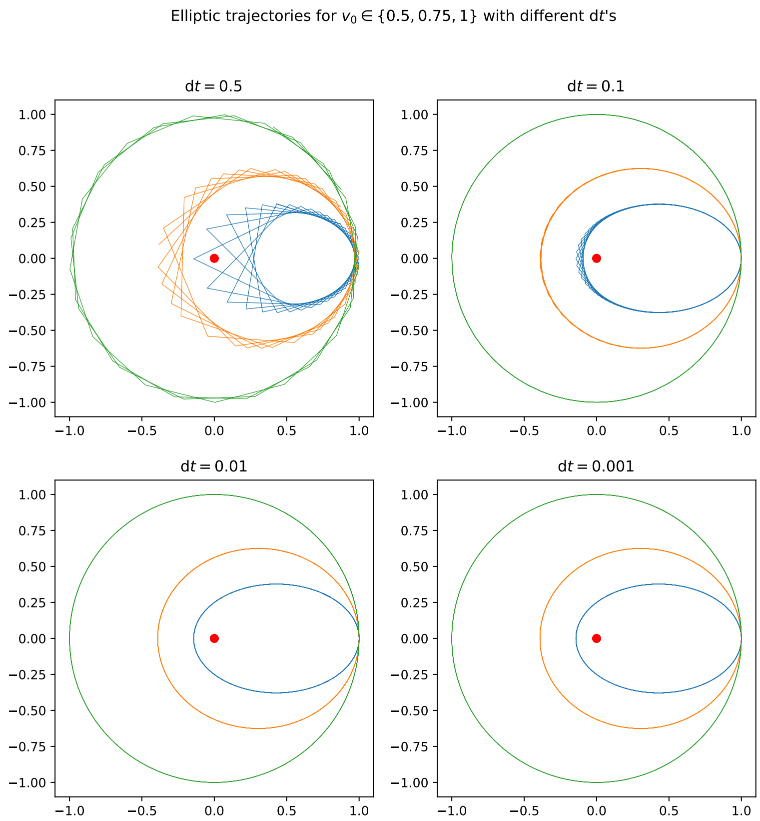
$$x(0) = a, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = a\omega v_0,$$

torej da planet zacne v tocki $\mathbf{r} = (a, 0)^T$, z gibanjem pa zacne navpicno navzgor ob predpostavki, da je $v(0) > 0$. Zaradi poenostavitve sem si izbral $G = M = a = \omega = 1$ in opazoval trajektorije pri razlicnih v_0, kar je predstavljeno na sliki 1. *Opomba: Celo nalogo sem reseval s* `scipy.integrate.ode` *z metodo* `dopri5`*, kar je pravzaprav Runge-Kutta.*



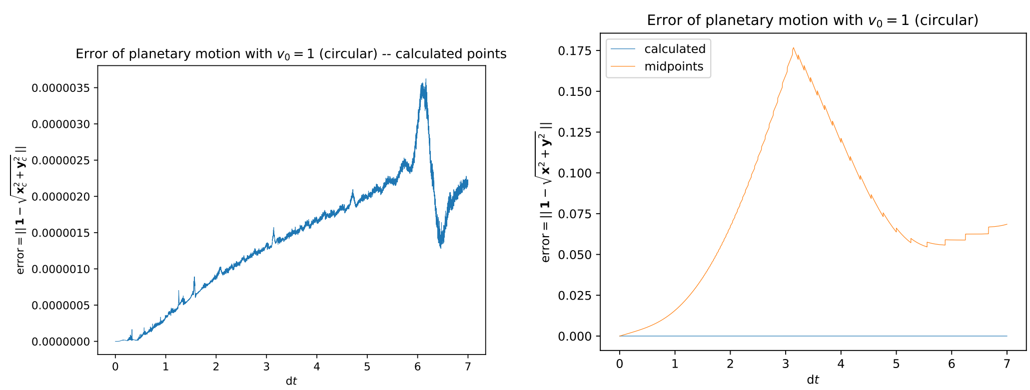
Slika 1: Trajektorije za razlicne v_0. Izkaze se, da je trajektorija za $v_0 \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$ elipsa, za $v_0 = 1$ kroznica, za $v_0 = \sqrt{2}$ hiperbola in za $v_0 > \sqrt{2}$ parabola. Ker je kroznica le posebna oblika elipse, lahko recemo, da je tir elipsa do mejne vrednosti $v_0 = \sqrt{2}$, kjer se elipsa odpre in postane hiperbola, za vecje v_0 pa se odpre v parabolo.

Nato sem se lotil malo analize. V odvisnosti od koraka dt sem si pogledal trajektorije. Pricakovano se manjsi v_0 zahtevajo manjsi dt, saj se za majhne v_0 tir priblizа blizu tocke $(0,0)^T$, kar pomeni, da problem postane nestabilen. To je lepo prikazano na sliki 2.



Slika 2: Opazimo, da pri manjsih v_0 napaka trajektorije ostane tudi do manjsih dt, dokler potem koncno „ne izgine".

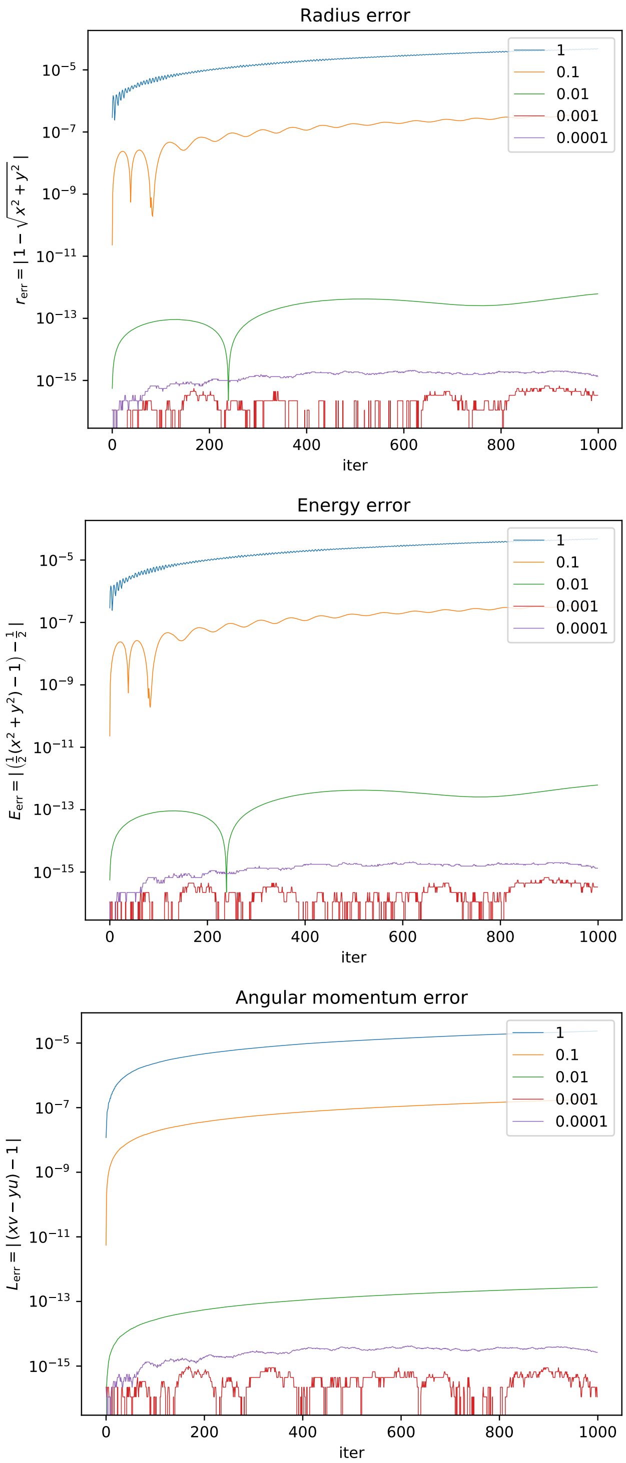
Ogledal sem si se **napako radija v odvisnosti od dolzine koraka** dt. Seveda je pricakovano ta napaka zanemarljivo majhna, vendar vseeno lepo narasca, potem pa se pri $dt = 2\pi$ pricakovano zmanjsa, vendar ne cisto do 0. To lepo prikazuje slika 3 (levo). Potem sem pa namesto izracunanih tock vzel tocke na polovici med izracunanimi, kar nam da boljsi obcutek glede napake kot prejsnji izracun. Spet napaka pricakovano narasca, tokrat pa se obrne ze pri $dt = \pi$, kar je tudi ocitno, saj se sredisce daljice med izracunanimi tockami do $dt = \pi$ priblizuje srediscu $(0,0)^T$, potem pa spet zacne zmanjsevati. To je prikazano na sliki 3 (desno).



Slika 3: Napaka med kroznico $\mathcal{K}((0,0)^T, 1)$ in izracunanimi tockami krivulje (levo) in napaka med kroznico $\mathcal{K}((0,0)^T, 1)$ in sredisci daljic med izracunanimi tockami (desno). Na desni sliki je tudi levi graf.

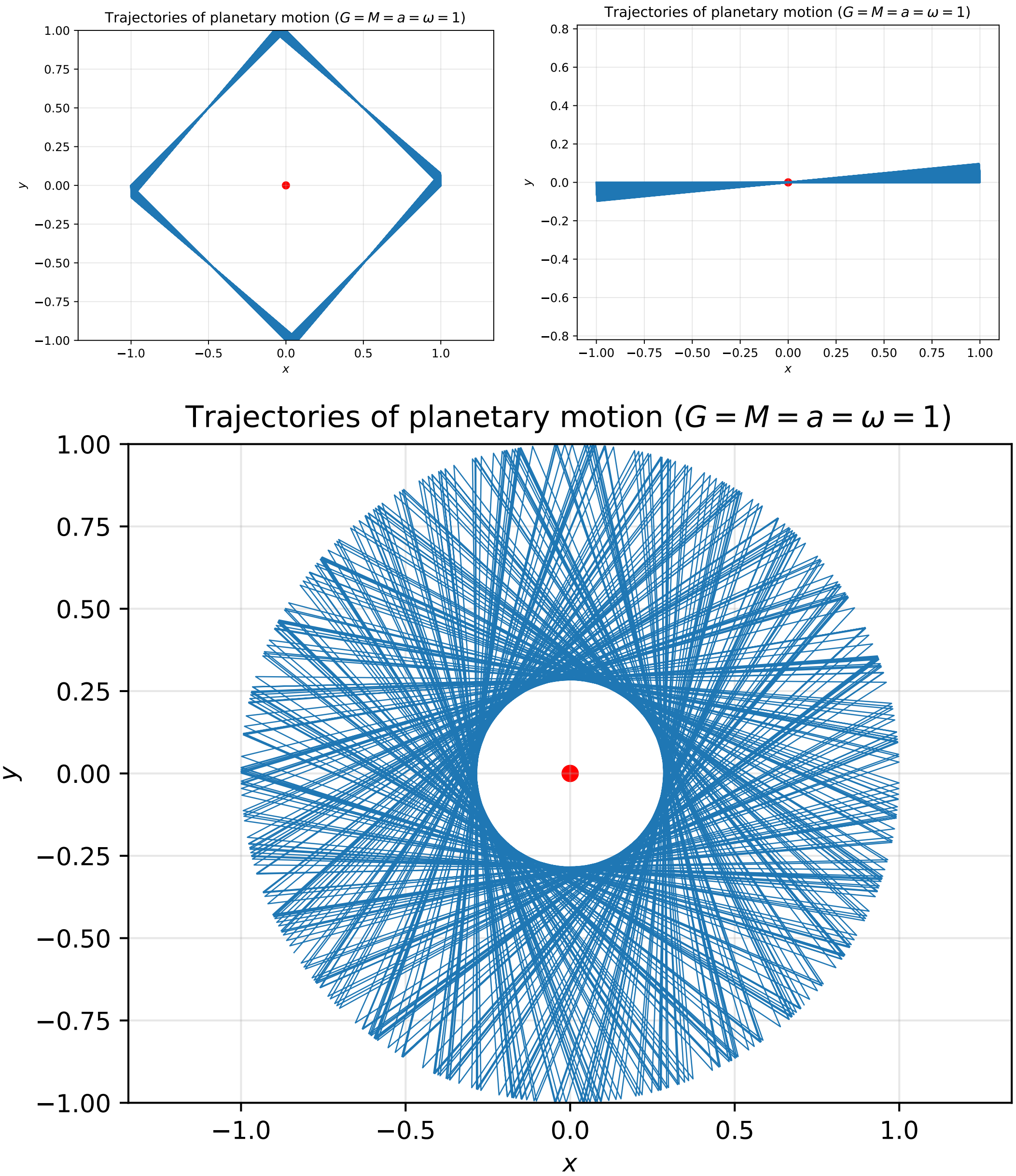
Za konec sem analiziral se **napako radija, energije in vrtilne kolicine v odisnosti od iteracije**. Vse tri grafe je bilo potrebno narisati na logaritemski skali, drugace ne bi videli nic pametnega. Grafi so prikazani na sliki 4, napake smo izracunali s formulami

- napaka razdalje: $r_{\text{err}} = |1 - \sqrt{x^2 + y^2}|$,
- napaka energije: $E_{\text{err}} = |E - E_0| = \left|\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1\right) + \frac{1}{2}\right|$ in
- napaka vrtilne kolicine: $L_{\text{err}} = |L_z - L_{z0}| = |(xv - yu) - 1|$.



Slika 4: Odvisnost napake razdalje (zgoraj), energije (v sredini) in vrtilne kolicine (spodaj) v odvisnosti od casa potovanja – iteracije.

Za konec pa sem se malo poigral se z razlicnimi dt in dobil precej zanimive slike, nekaj od njih je na sliki 5. Seveda te slike nimajo nobenega fizikalnega smisla, sem jih pa vseeno vkljucil zaradi zanimivosti :).



Slika 5: Pri d$t = \pi/2$ dobimo kvadrat (zgoraj levo) in za d$t = \pi$ daljico (zgoraj desno). Pri obeh pa vidimo napako, ki se zgodi, saj kvadrat ni cisti kvadrat, predvsem pa vidimo pri daljici, kako se pocasi zamika po krogu. Za d$t = 10$ pa dobimo precej lep vzorec (spodaj).

Naloga 2

Pri tej nalogi sem zasledoval gibanje planeta okrog sonca, pri cemer vmes mimo pride mimobezna zvezda, ki se giblje po premici

$$\mathbf{r}_z(t) = \begin{bmatrix} -10 + 2v_0 t \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

Iz Newtonovega zakona dobimo

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r} - G\frac{mM}{|r - r_z|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_z).$$

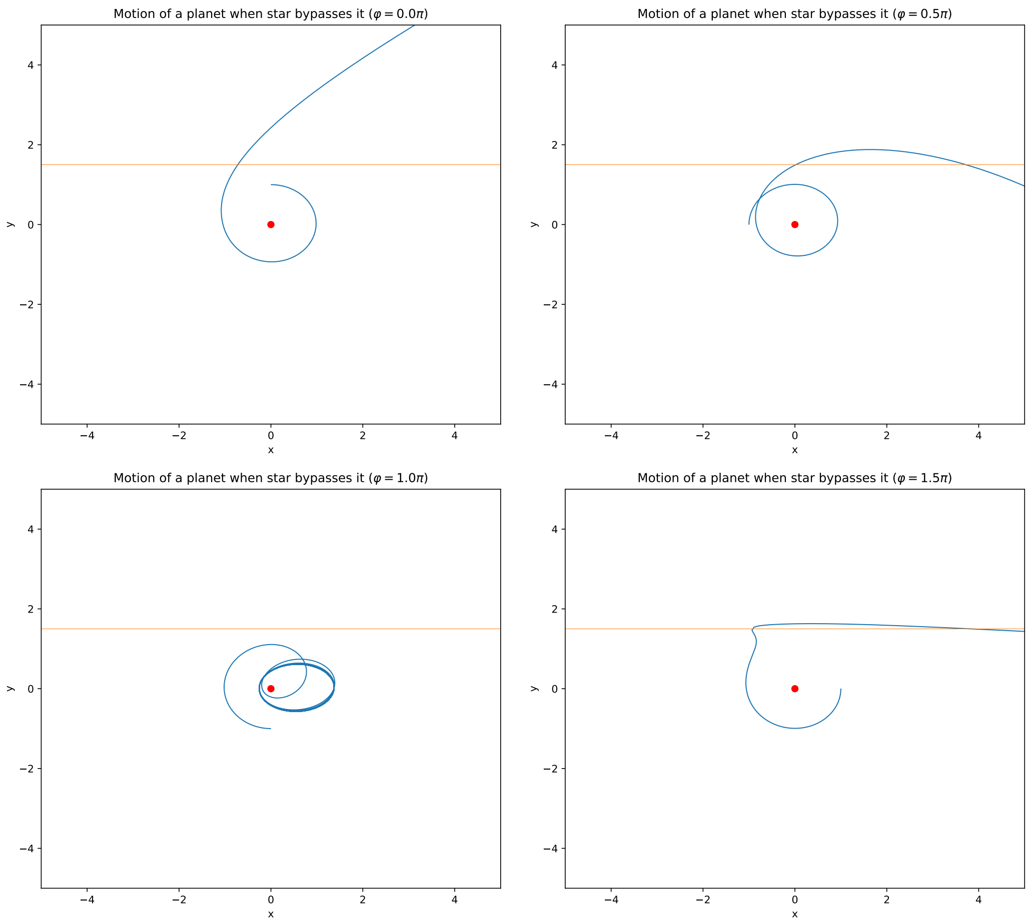
Zopet dobljeno prepisemo v sistem stirih enacb in dobimo

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
\dot{u} &= -G\frac{Mx}{(x^2+y^2)^1.5} - G\frac{M(x-x_z)}{\left((x-x_z)^2+(y-y_z)^2\right)^1.5} \\
\dot{v} &= -G\frac{My}{(x^2+y^2)^1.5} - G\frac{M(y-y_z)}{\left((x-x_z)^2+(y-y_z)^2\right)^1.5}.
\end{aligned}
$$

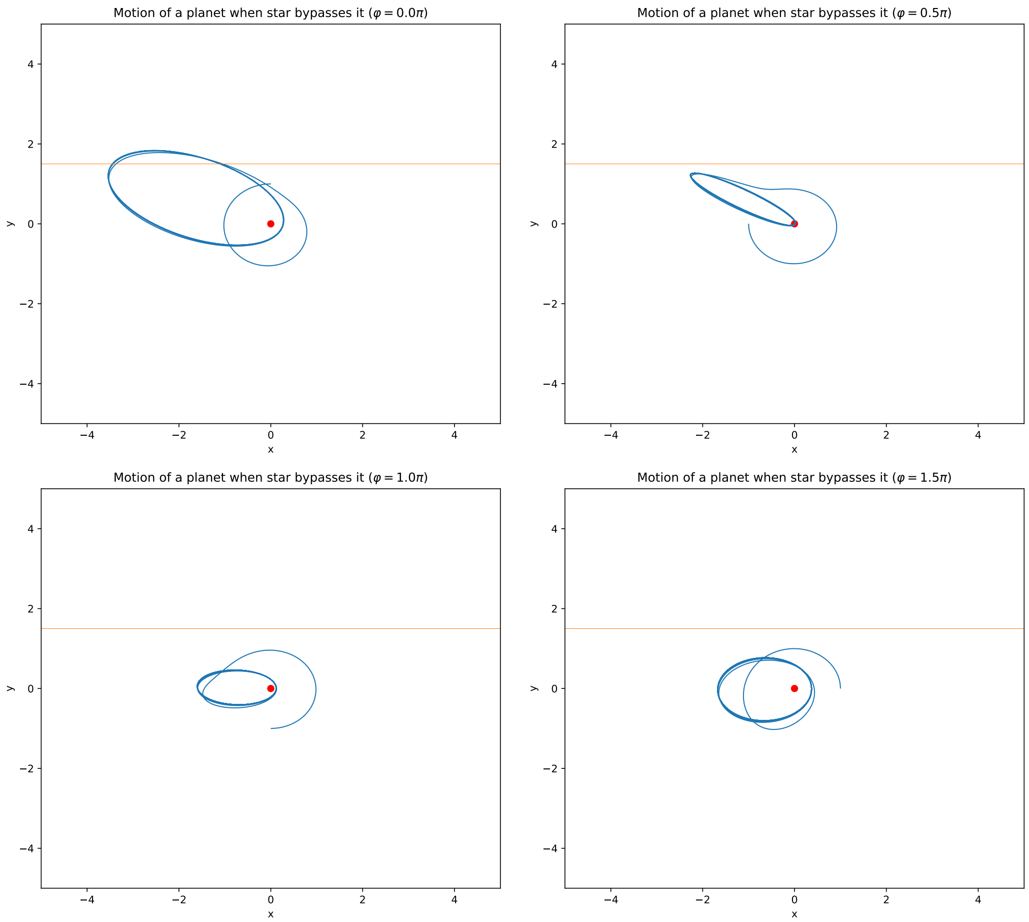
Zaradi poenostavitve si spet izberemo $G = M = a = \omega = 1$. Zacetni pogoji se tokrat malo spremenijo, in sicer jih bomo zapisali v odvisnosti od zacetne faze planeta φ:

$$x(0) = -\sin\varphi, \quad y(0) = \cos\varphi, \quad u(0) = \pm v_0\cos\varphi, \quad v(0) = \pm v_0\sin\varphi,$$

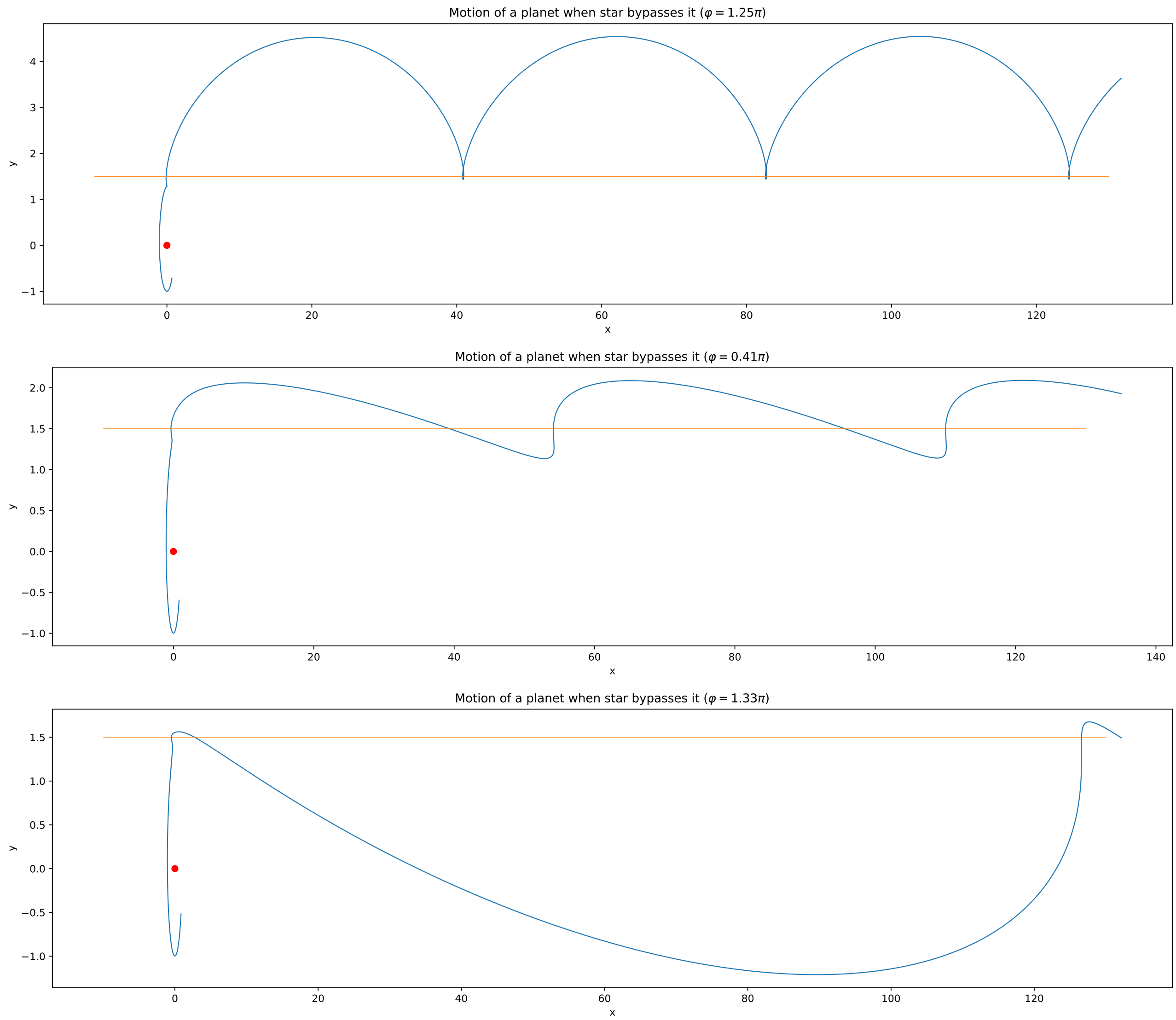
kjer bomo vzeli $v_0 = 1$, $\pm$ v $u(0)$ in $v(0)$ pa nam definirata, v katero smer se bo gibal planet (pri $+$ se giblje v negativni smeri, torej smeri urinega kazalca). Slika 6 prikazuje gibanje v smeri urinega kazalca, slika 7 gibanje v nasprotni smeri urinega kazalca, slika 8 pa prikazuje primere, pri katerih se planet ujame v orbito mimobezne zvezde.



Slika 6: Gibanje v smeri urinega kazalca za razlicne vrednosti zacetne faze φ. Opazimo, da v nekaj primerih planet pobegne od sonca, kar pa se zgodi zato, ker je pri tem gibanju planet dlje casa blizu mimobezne zvezde, torej le-ta dlje casa deluje nanj.



Slika 7: Gibanje v smeri urinega kazalca za razlicne vrednosti zacetne faze φ. Opazimo, da v nekaj primerih planet pobegne od sonca, kar pa se zgodi zato, ker je pri tem gibanju planet dlje casa blizu mimobezne zvezde, torej le-ta dlje casa deluje nanj.



Slika 8: Pri dolocenih vrednostih φ se planet vtiri v orbito mimobezne zvezde. Ocenimo, da to velja za $\varphi \in (1.2\pi, 1.5\pi)$.