

TAREA 5

INDICACIONES:

- Para resolver las 7 preguntas, genere un archivo en Jupyter Notebook, y llámelo **hmw5**. Para escribir las respuestas a preguntas teóricas, usar Markdown. Para las preguntas prácticas use stata, dentro del notebook.
- Usted deberá realizar el PUSH a la carpeta github ECOP2037_NN, antes de la fecha indicada en esta tarea 5.

Función de costo translogarítmica con tres insumos

Considere una función de costo con tres insumos: Labor (p_L), Capital (p_K) y Fuel (p_F). El nivel de producción es Q .

1. Expansión de Taylor de segundo orden

- (a) Escriba la expansión de Taylor de segundo orden de $\ln C(Q, p_L, p_K, p_F)$ alrededor de $(Q, p_L, p_K, p_F) = (1, 1, 1, 1)$, incluyendo términos lineales, cuadráticos y de interacción en $\ln Q, \ln p_L, \ln p_K, \ln p_F$.

Pista: Escriba el resultado final de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\ln C(Q, p_L, p_K, p_F) \approx & \alpha_0 + \alpha_Q \ln Q + \frac{1}{2} \alpha_{QQ} (\ln Q)^2 + \beta_L \ln p_L + \beta_K \ln p_K + \beta_F \ln p_F \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{LL} (\ln p_L)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{KK} (\ln p_K)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{FF} (\ln p_F)^2 \\ & + \gamma_{LK} \ln p_L \ln p_K + \gamma_{LF} \ln p_L \ln p_F + \gamma_{KF} \ln p_K \ln p_F \\ & + \theta_L \ln Q \ln p_L + \theta_K \ln Q \ln p_K + \theta_F \ln Q \ln p_F,\end{aligned}$$

- (b) Escriba la interpretación de los parámetros $\alpha_0, \alpha_Q, \alpha_{QQ}, \beta_i, \gamma_{ij}, \theta_i$.

2. Shares de costo vía Lema de Shephard

Defina los shares de costo $s_i(Q, \mathbf{p}) \equiv \frac{\partial \ln C(Q, \mathbf{p})}{\partial \ln p_i}$ para $i = L, K, F$.

- (a) Derive expresiones aproximadas para s_L, s_K, s_F .
- (b) Verifique la condición *adding-up*, es decir, $s_L + s_K + s_F = 1$.

3. Restricciones teóricas

- (a) Escriba las restricciones de homogeneidad de grado uno en precios: $\sum_i \beta_i = 1, \sum_i \gamma_{ij} = 0, \sum_i \theta_i = 0$.
- (b) Escriba la restricción de simetría: $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

4. Sistema a estimar

- (a) Escriba el sistema formado por la ecuación de costo $\ln C$ y los shares s_L, s_K, s_F .
- (b) Explique por qué, al estimar, se elimina una ecuación de share (por ejemplo, la de Fuel), y muestre cómo la función de costo se puede reescribir normalizada por el precio de Fuel ($\ln p_F$).

5. Estimación SUR

Para esta parte la base de Christensen and Greene (1976), adjunta a esta tarea.

- Estime el sistema $\{\ln C, s_L, s_K\}$, de acuerdo al literal 4.b, mediante SUR sin restricciones.
- Imponga las restricciones de homogeneidad, simetría y adding-up, y reestime el sistema.
- Compare ambos resultados y discuta cuál es más consistente con la teoría.

6. Elasticidades de sustitución Las elasticidades de sustitución miden cómo cambia la combinación de insumos ante cambios relativos en los precios, manteniendo constante el costo mínimo. En el Cuadro 1, se presentan las definiciones de las elasticidades más usadas en este contexto.

Cuadro 1: Elasticidades a partir de la función de costo translogarítmica

Elasticidad	Fórmula en el caso translog	Interpretación
Elasticidad compensada ε_{ij}^c	$\varepsilon_{ij}^c = \frac{\Gamma_{ij}}{s_i}$ $\Gamma_{ij} = \begin{cases} \gamma_{ij} + s_i s_j, & i \neq j \\ \gamma_{ii} + s_i^2 - s_i, & i = j \end{cases}$	Respuesta porcentual de la demanda de insumo i ante un cambio de 1 % en el precio p_j , manteniendo constante el nivel de producción Q . Positiva: sustitutos. Negativa: complementarios.
Allen–Uzawa σ_{ij}^A	$\sigma_{ij}^A = \frac{\Gamma_{ij}}{s_i s_j}$	Mide la curvatura de la función de costo y la facilidad de sustitución entre i y j . Es simétrica: $\sigma_{ij}^A = \sigma_{ji}^A$.
Morishima M_{ij}	$M_{ij} = \varepsilon_{ij}^c - \varepsilon_{jj}^c, \quad i \neq j$	Mide el cambio en la proporción x_i/x_j cuando cambia p_j . Es direccional: $M_{ij} \neq M_{ji}$. Siempre no negativa en una tecnología bien comportada.

- Usando los parámetros estimados en el punto 5 (con las restricciones impuestas) y los shares promedio de la muestra, calcule numéricamente:

- $\varepsilon_{LL}^c, \varepsilon_{KK}^c, \varepsilon_{FF}^c$
- $\varepsilon_{KL}^c, \varepsilon_{LK}^c$
- $\varepsilon_{KF}^c, \varepsilon_{FK}^c$
- $\sigma_{LK}^A, \sigma_{LF}^A, \sigma_{KF}^A$
- M_{LK}, M_{LF}, M_{KF}
- M_{KL}, M_{FL}, M_{FK}

Pista: Usted puede recuperar las elasticidades compensadas que incluye a Fuel usando la restriccion adding-up, en términos de elasticidades:

$$\sum_{j=1}^M s_j \varepsilon_{ij}^c = 0 \quad \forall i.$$

- (b) Interprete los resultados: ¿los insumos son sustitutos o complementarios?

7. Intervalos de confianza con el Método Delta

- (a) Explique cómo el Método Delta permite obtener la varianza aproximada de una función no lineal de los estimadores (en este caso, las elasticidades).
- (b) Calcule intervalos de confianza al 95 % para las elasticidades de sustitución estimadas en el punto 6.

Ejemplo numérico para $(i, j) = (L, K)$. Suponga que de la estimación restringida obtuvo:

$$\hat{\gamma}_{LK} = -0,12, \quad \widehat{\text{se}}(\hat{\gamma}_{LK}) = 0,05, \quad \bar{s}_L = 0,60, \quad \bar{s}_K = 0,30.$$

(a) Allen–Uzawa σ_{LK}^A .

$$\hat{\sigma}_{LK}^A = \frac{\hat{\gamma}_{LK} + \bar{s}_L \bar{s}_K}{\bar{s}_L \bar{s}_K} = \frac{-0,12 + 0,18}{0,18} = \frac{0,06}{0,18} = 0,333\bar{3}.$$

(b) **Método Delta (varianza aproximada).** Si trata \bar{s}_L, \bar{s}_K como fijos (o su error es despreciable frente al de $\hat{\gamma}_{LK}$),

$$g(\gamma_{LK}) = \frac{\gamma_{LK} + s_L s_K}{s_L s_K} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \gamma_{LK}} = \frac{1}{s_L s_K} = \frac{1}{0,18} = 5,555\bar{6}.$$

Entonces

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\sigma}_{LK}^A) \approx \left(\frac{1}{s_L s_K} \right)^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{\gamma}_{LK}) = (5,5556)^2 \times (0,05)^2 \approx 30,864 \times 0,0025 = 0,07716,$$

$$\widehat{\text{se}}(\hat{\sigma}_{LK}^A) \approx \sqrt{0,07716} = 0,2778.$$

(c) **IC del 95 %.**

$$\hat{\sigma}_{LK}^A \pm 1,96 \times \widehat{\text{se}} = 0,333\bar{3} \pm 1,96 \times 0,2778 = 0,333\bar{3} \pm 0,5445.$$

IC_{95%}: $(-0,211, 0,878)$. (La inclusión de 0 indica sustitución débil/no concluyente a este nivel.)

- (c) Interprete: ¿qué significa que el intervalo incluya valores negativos o positivos?