IBMEC SÃO PAULO

MESTRADO EM MACROECONOMIA e FINANÇAS

Disciplina de Computação

Aula 06

Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano

Guia de Estudo para Aula 06

•Aplicação de AutoValores

- Usando autovalor para encontrar pontos ótimos de uma curva
- Usando o toolbox simbólico do Matlab

Geração de superfície

- Utilização da função Mesh do Matlab

Exercícios

- Pontos ótimos de função
- Autovalores na determinação de pontos críticos de uma função

Objetivos da Aula

- Compreender autovalores em otimização.
- Determinar a característica de um ponto crítico.
- Aplicar mínimos quadrados e autovalores.
- Utilizar de forma adequada o Mesh.
- Aprender a usar o toolbox de resolução simbólica do matlab.

Aplicação de Autovalores em Otimização

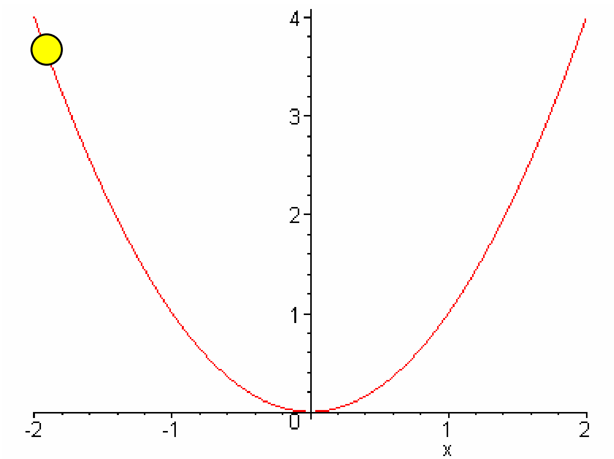
Premissas

Considerando uma função f(x), tem-se que:

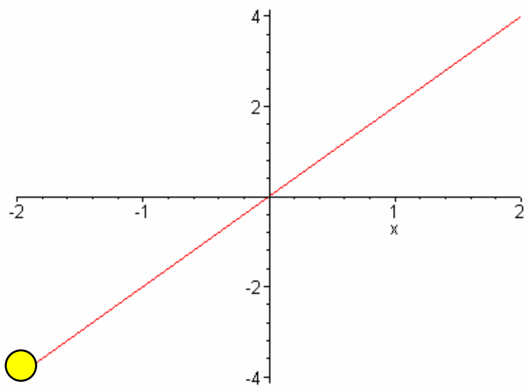
- A primeira derivada igual a zero determina os pontos críticos de f(x).
- Se a segunda derivada calculada no ponto crítico for positiva tem-se ponto de mínimo local.
- Se a segunda derivada calculada no ponto crítico for negativa tem-se ponto de máximo local.
- Se a segunda derivada é nula e ocorre mudança de concavidade na função f(x) o ponto é de inflexão.

Exemplo- 1

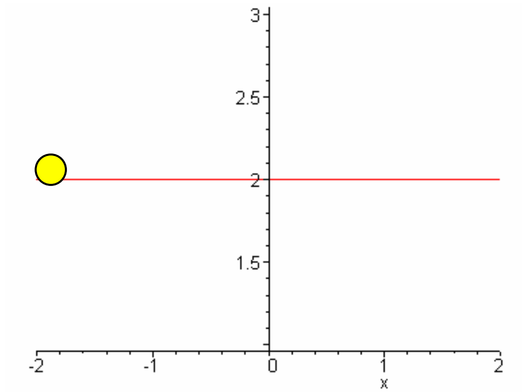
$f(x) = x^2$



Primeira derivada $f'(x) = 2x$

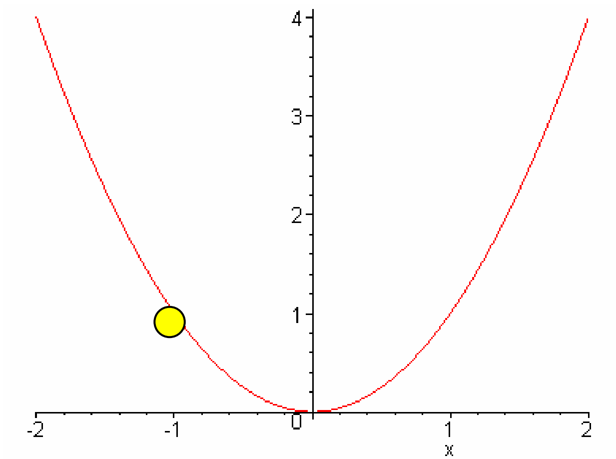


Segunda derivada $f''(x) = 2$

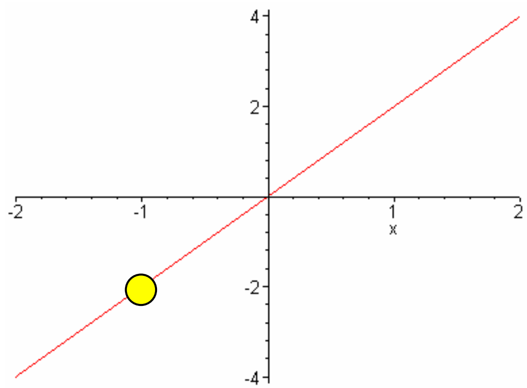


Exemplo

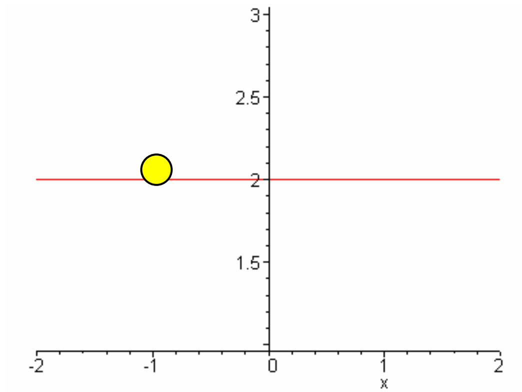
$f(x) = x^2$



Primeira derivada $f'(x) = 2x$

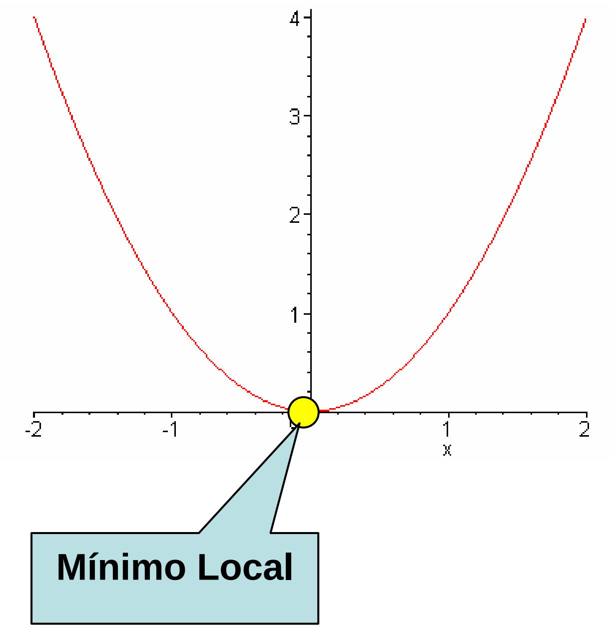


Segunda derivada $f''(x) = 2$

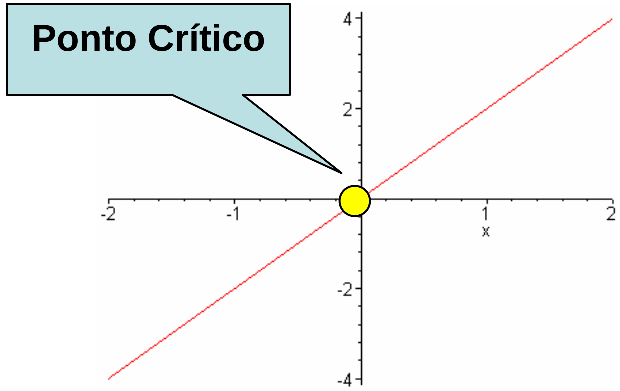


Exemplo

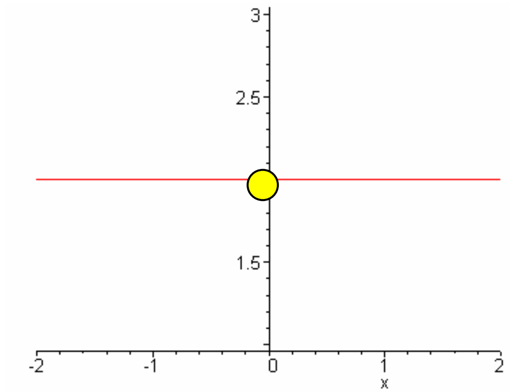
$f(x) = x^2$



Primeira derivada $f'(x) = 2x$

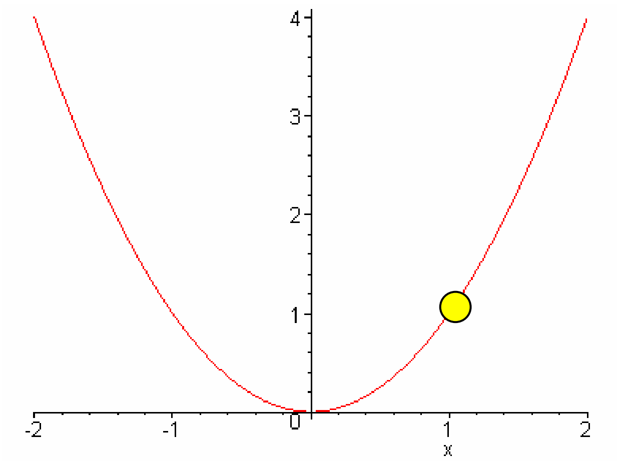


Segunda derivada $f''(x) = 2$

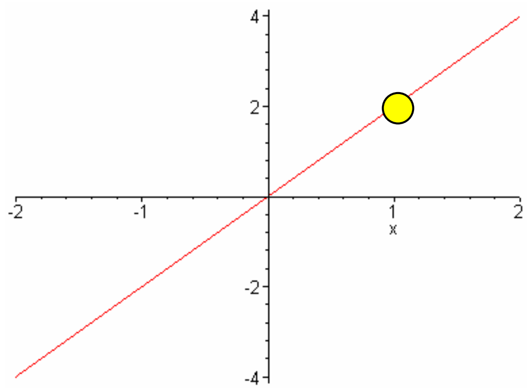


Exemplo

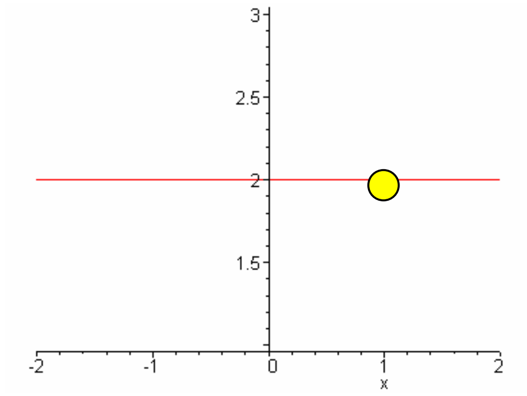
$f(x) = x^2$



Primeira derivada $f'(x) = 2x$

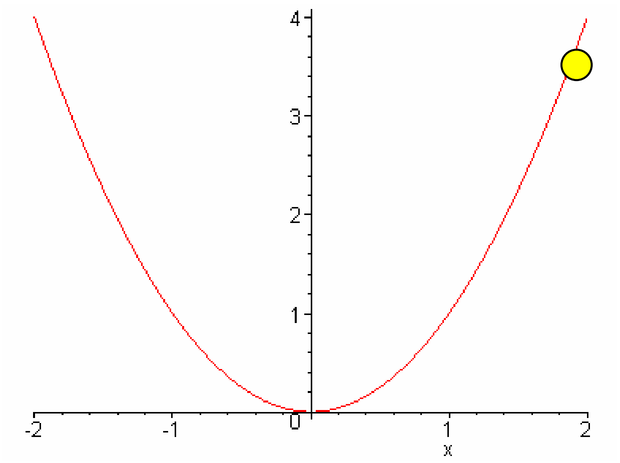


Segunda derivada $f''(x) = 2$

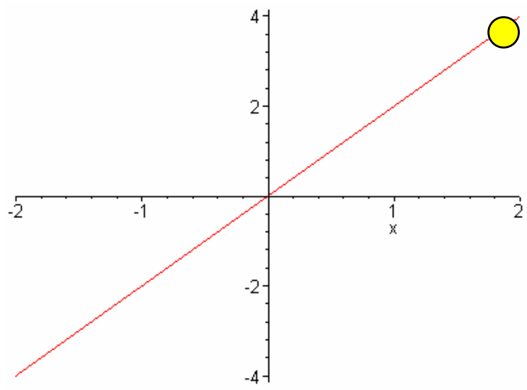


Exemplo

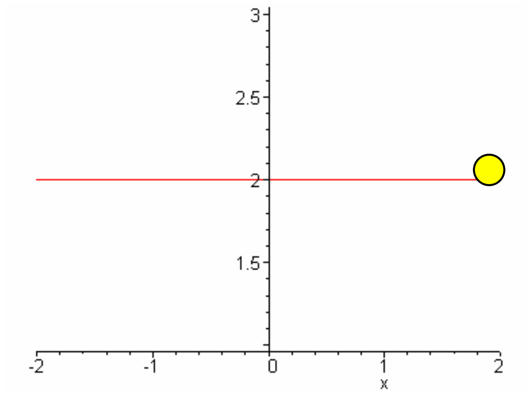
$f(x) = x^2$



Primeira derivada $f'(x) = 2x$

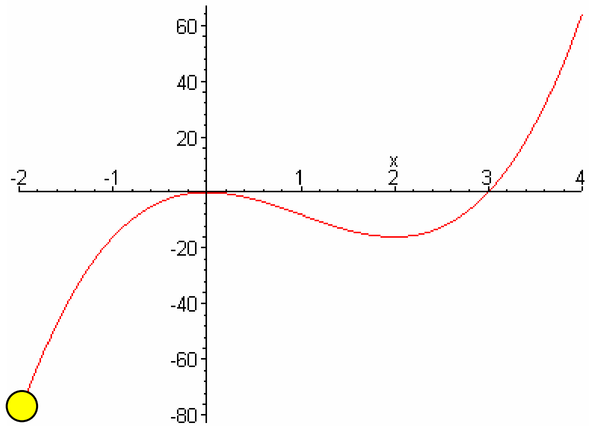


Segunda derivada $f''(x) = 2$

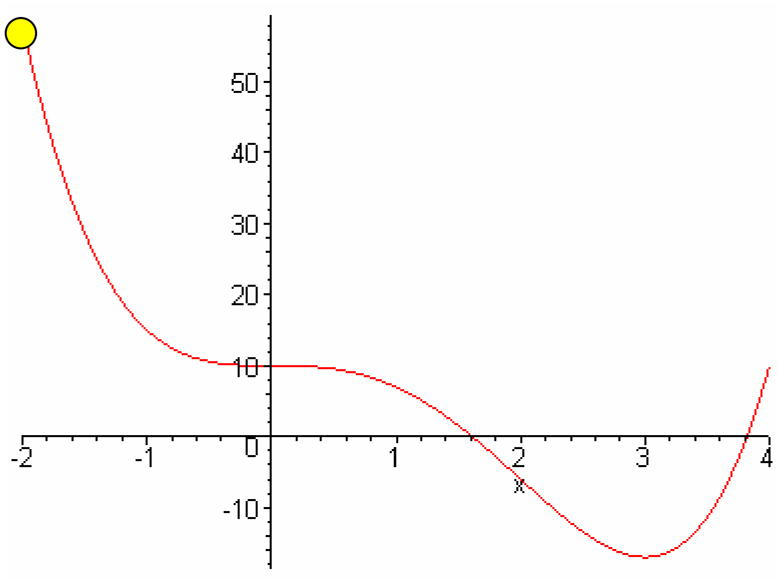


Exemplo-2

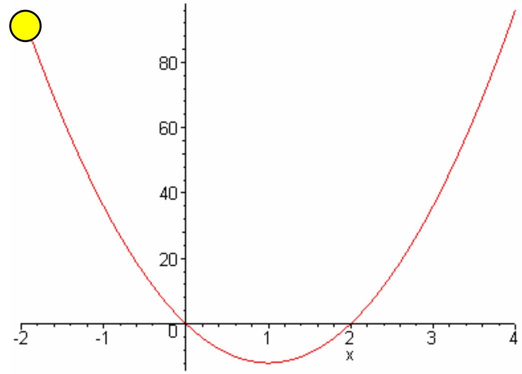
Primeira derivada $f'(x) = 4x^3-12x^2$



$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

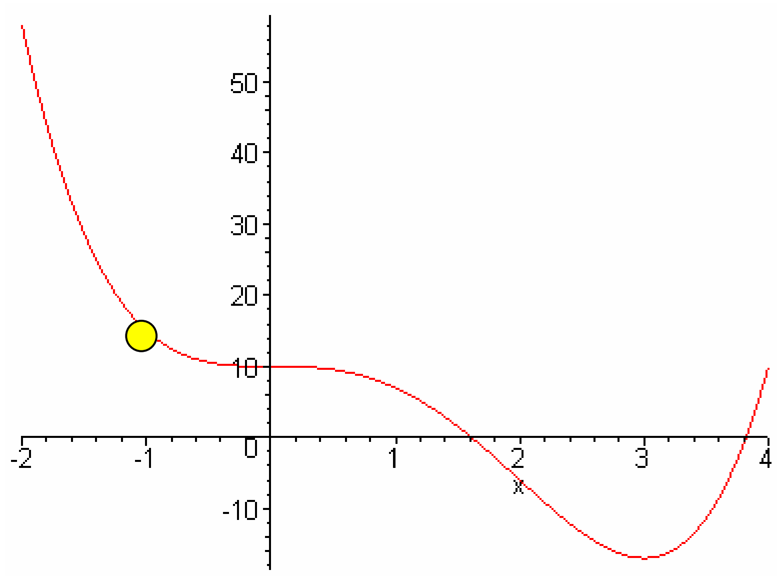


Segunda derivada $f''(x) = 12x^2- 24x$

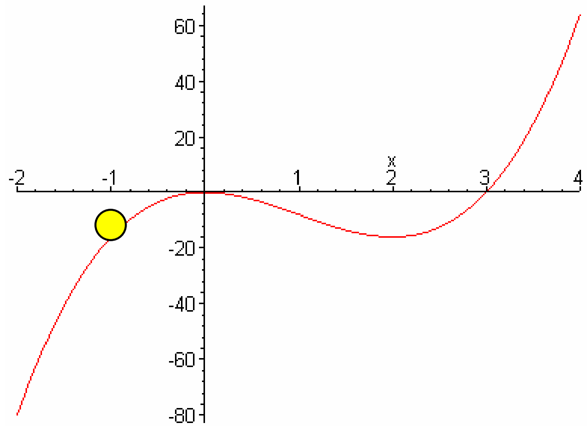


Exemplo

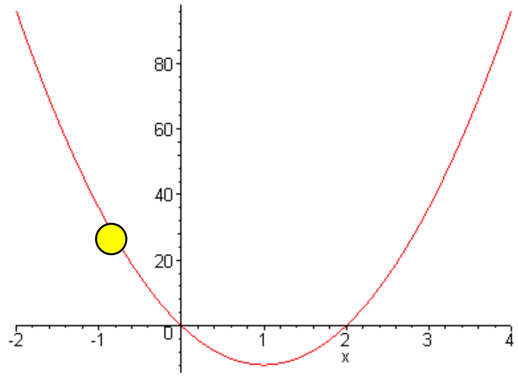
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$



Primeira derivada $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

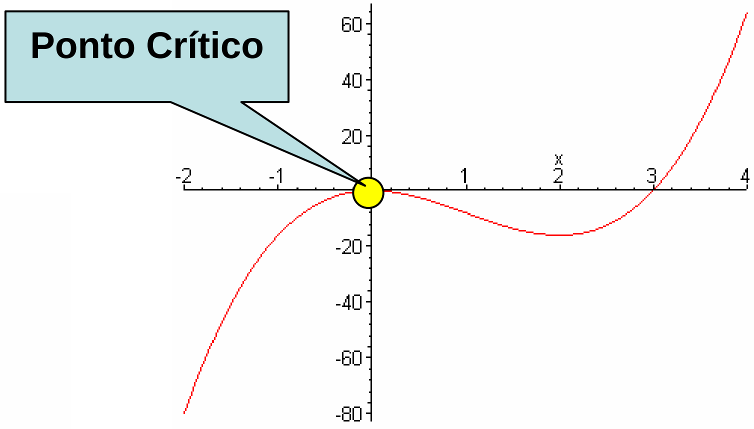


Segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 24x$

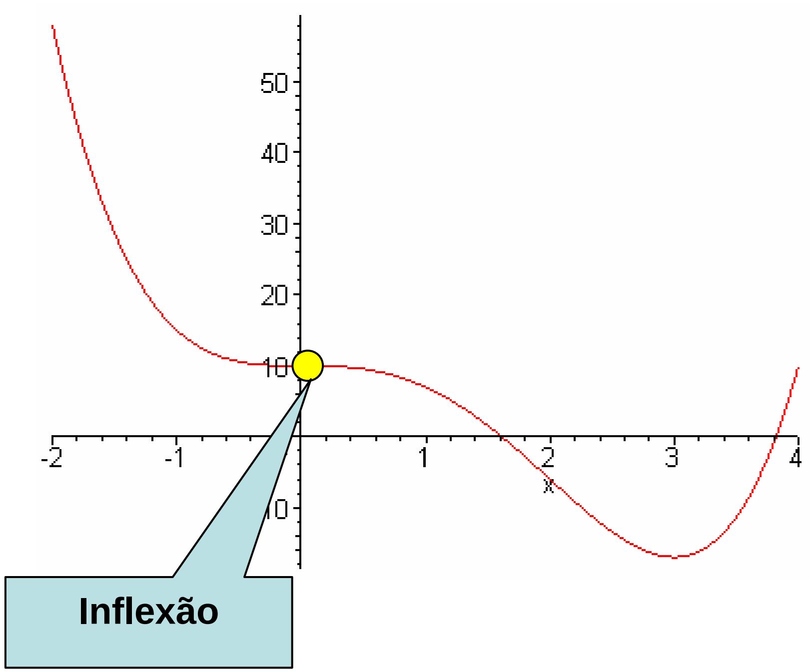


Exemplo

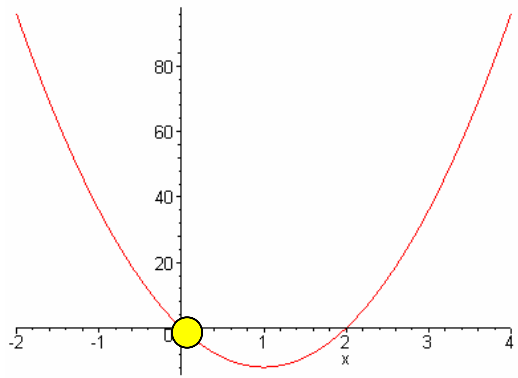
Primeira derivada $f'(x) = 4x^3-12x^2$



$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

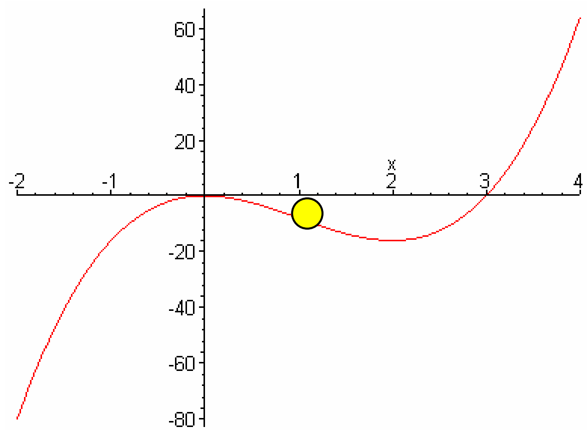


Segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 24x$

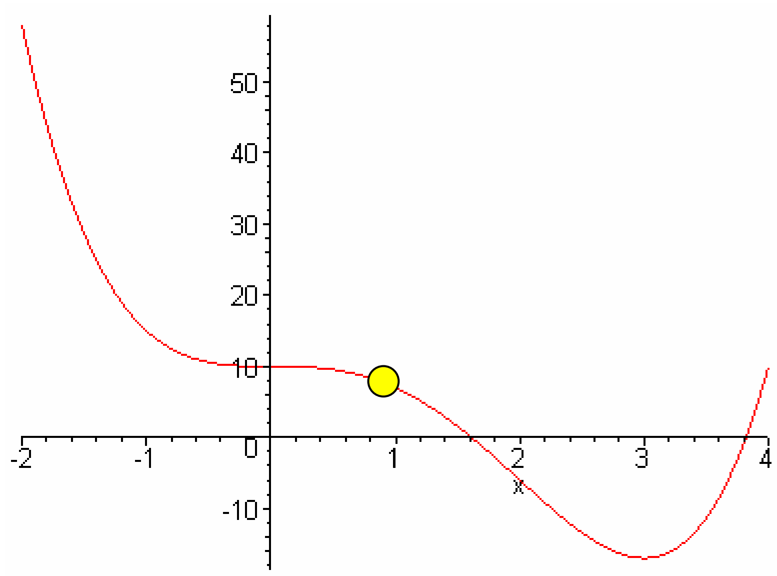


Exemplo

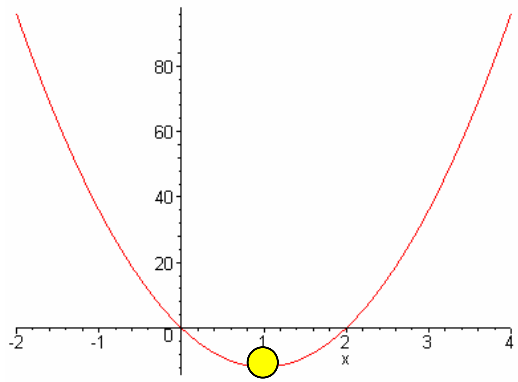
Primeira derivada $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$



$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

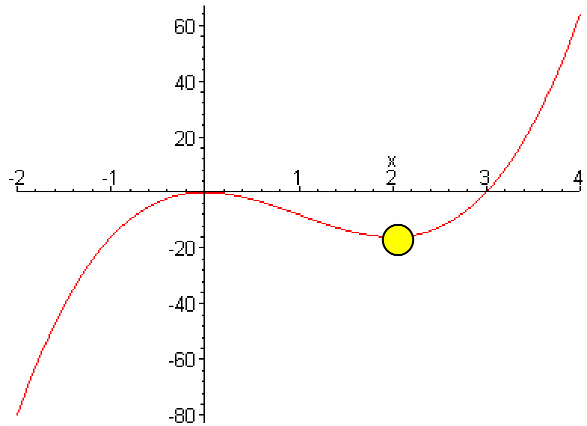


Segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 24x$

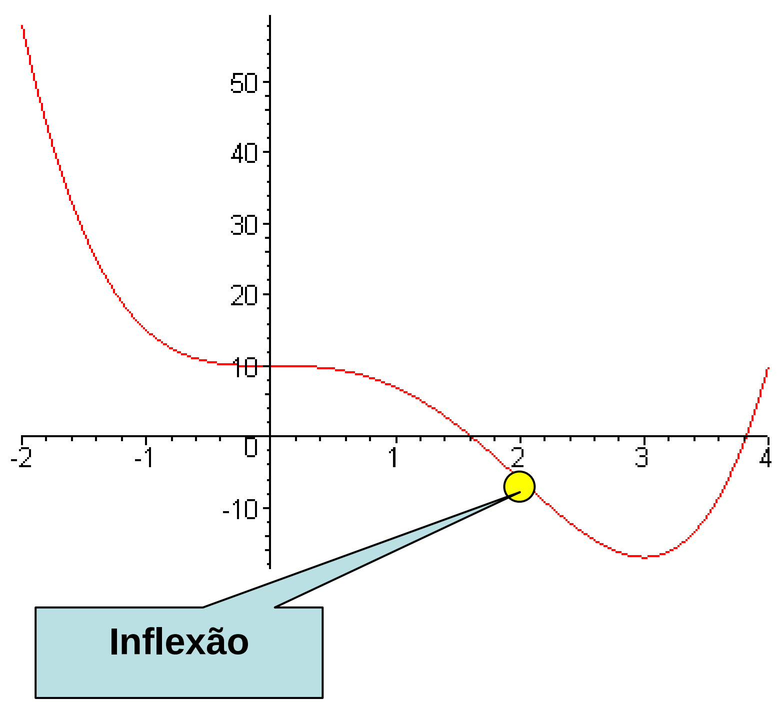


Exemplo

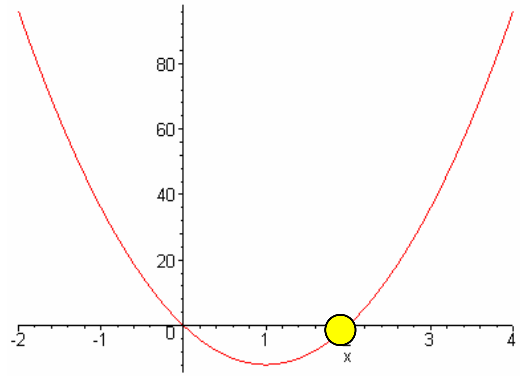
Primeira derivada $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$



$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

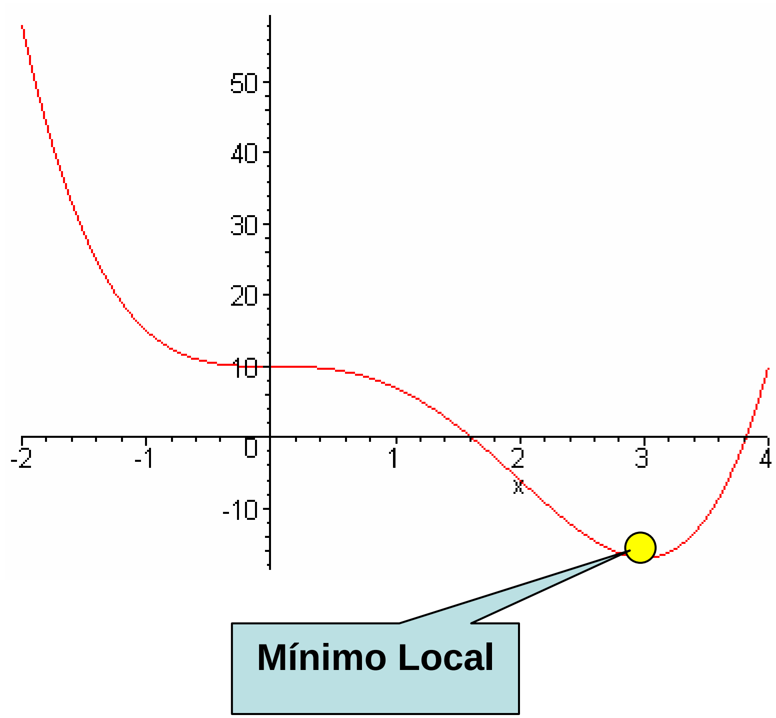


Segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 24x$

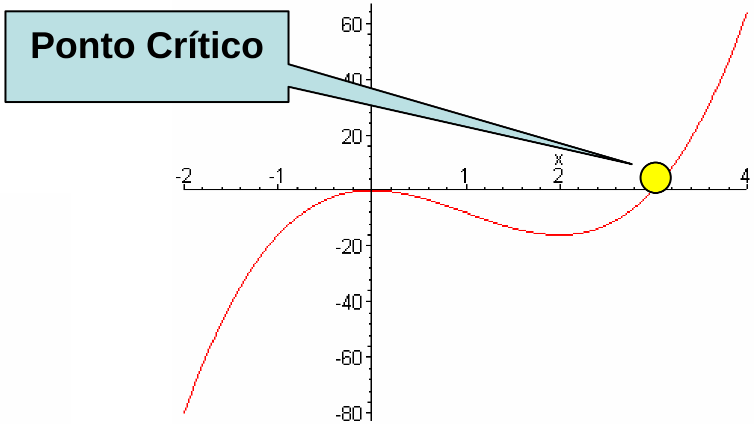


Exemplo

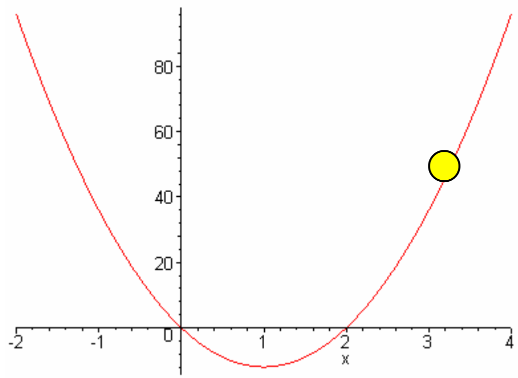
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$



Primeira derivada $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

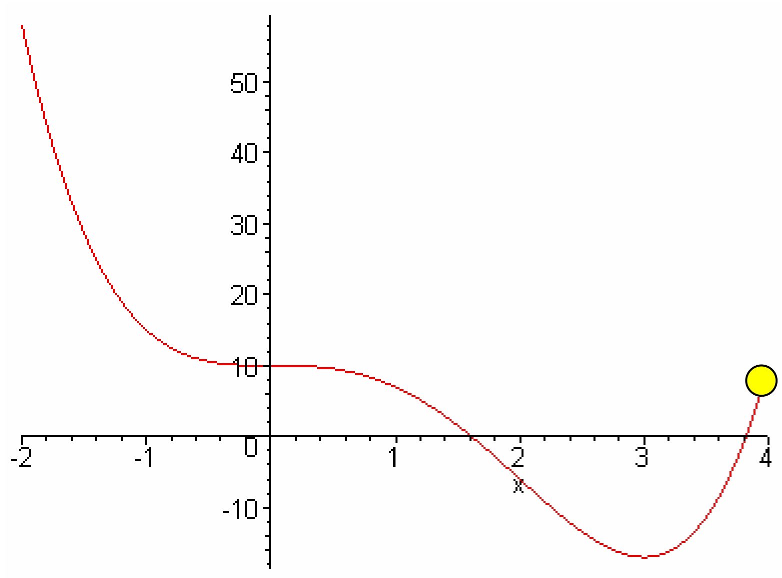


Segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 24x$

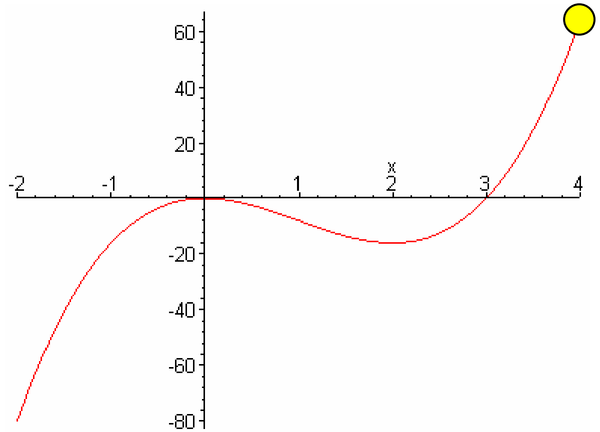


Exemplo

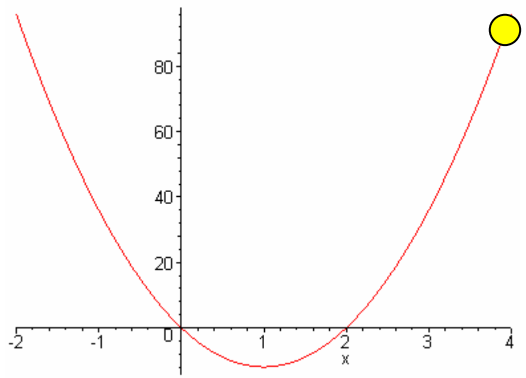
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$



Primeira derivada $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$



Segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 24x$



Funções bivariáveis f(x,y)

Premissas

Dada uma função f(x,y)
•Encontra-se as derivadas parciais de primeira ordem f_x, f_y
•Resolve-se o sistema linear formado pelas derivadas e encontram-se os pontos críticos.
•Calculam-se as derivadas parciais f_{xx} , f_{xy} e f_{yy}.
•Cria-se a matriz *Hessiana:*

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Classificação dos pontos críticos

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz Hessiana

- f(x,y) tem um mínimo em (x^*,y^*) se $\begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$

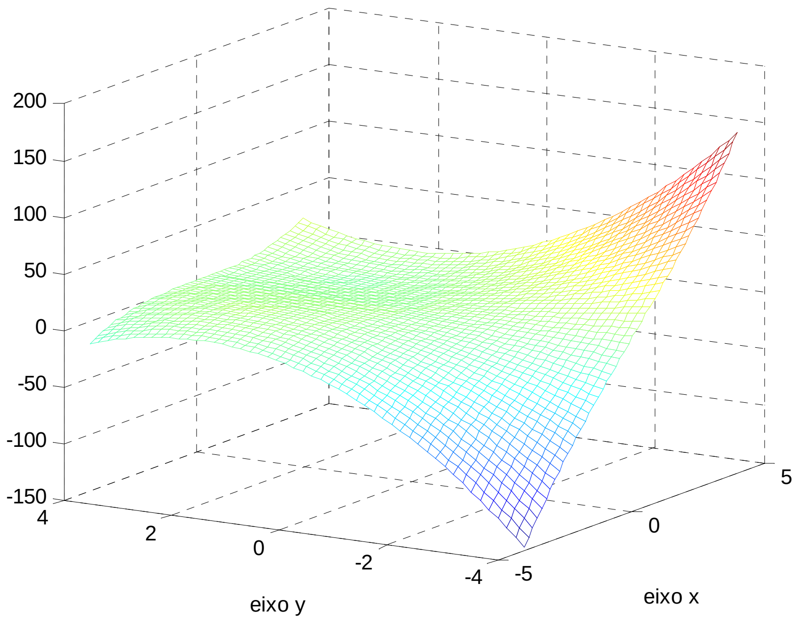
- f(x,y) tem um máximo em (x*,y*) se $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$

- f(x,y) tem uma sela em (x*,y*) se os autovalores tem sinais diferentes.

Exercício

Encontre e classifique todos os pontos estacionários da função

$$f(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy^2-4xy+1$$



Derivadas de primeira ordem

$$f_x = x^2 + y^2 - 4y$$
$$f_y = 2xy - 4x = 2x(y-2)$$

Igualando $f_y = 0$ obtemos, **$x = 0$ ou $y = 2$**

Igualando $f_x = 0$

P/ x = 0

$$0 = 0^2 + y^2 - 4y$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{cases} y = 0 \\ ou \\ y = 4 \end{cases}$$

P/ y = 2

$$0 = x^2 + 2^2 - 8$$
$$\Rightarrow$$
$$x = 2$$
$$ou$$
$$x = -2$$

Ptos Críticos

(0,0)
(0,4)
(2,2)
(-2,2)

A Matriz Hessiana

Derivadas segunda ordem

$$f_{xx} = 2x$$
$$f_{xy} = 2y - 4$$
$$f_{yy} = 2x$$

Matriz Hessiana

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

(x^*,y^*) ponto crítico

$$H = \begin{pmatrix} 2x^* & 2y^* - 4 \\ 2y^* - 4 & 2x^* \end{pmatrix}$$

AutoValores

$(0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -4$$

Ponto de Sela

$(0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -4$$

Ponto de Sela

$(2,2)$

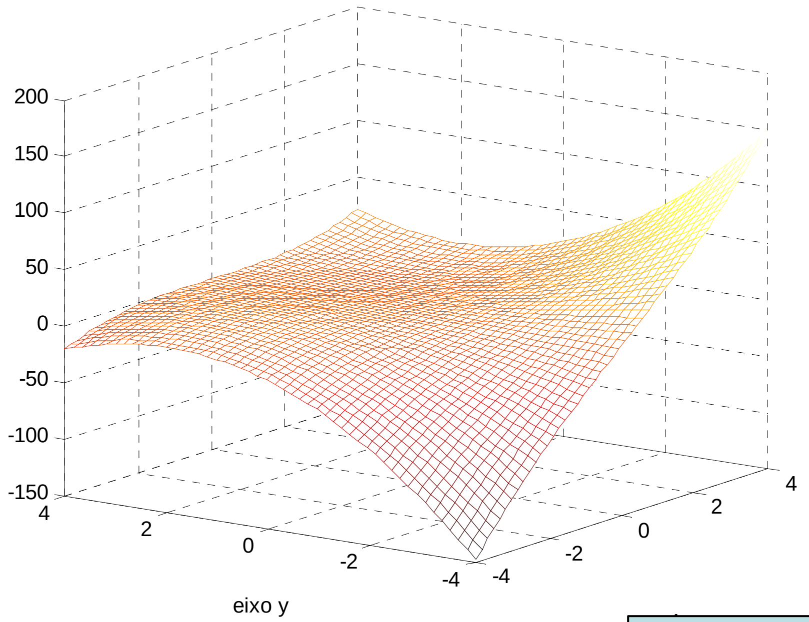
$$H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4$$

Mínimo Local

$(-2,2)$

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -4$$

Máximo Local



CONTORNO de f(x,y)

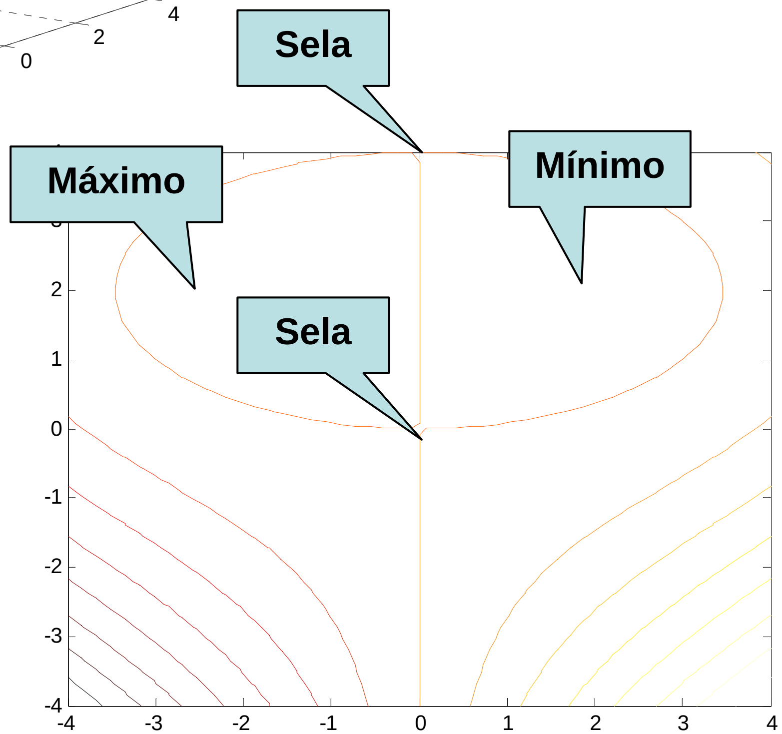


Grafico usando Mesh

- Deve ser criada uma "malha" de pontos para o eixo x e y.
- Antes do comando para criar a malha de pontos, deve ser fornecido um vetor com a quantidade de pontos do eixo:

```
xi=linspace(-4,4,50);
yi=linspace(-4,4,50);
```

início fim Qtde pontos

•Deve ser usado o programa "meshgride" para gerar a malha

```
[xxi,yyi]=meshgrid(xi,yi);
```

•Deve ser inserida a função para plot em 3D

```
zzi=0.333*xxi.^3+xxi.*yyi.^2-4*xxi.*yyi+1;
```

O gráfico

```
mesh(xxi,yyi,zzi)
xlabel('eixo x')
ylabel('eixo y')
colormap hot
```

Programa para plot 3D

Programa para alterar a Matriz de cores:

- Hot (cores quentes)

- Pink (tons de rosa)

- Sem o uso do colormap aparedem cores diversas

Gerando o Contorno de curvas 3D

Programa Contour

Precisa dos pontos inseridos num vetor para eixos x, y e z:

```
contour(xxi,yyi,zzi,15);
colormap hot
```

Qtde de curvas de isolinhas desejadas

Toolbox de Matemática Simbólica

Objetos simbólicos são criados a partir de strings de caracteres ou de valores numéricos usando-se a função sym

```
>> x=sym('x')

x =

x
```

O uso de funções matemáticas

$$\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

```
>> x=sym('x')

x =

x

>> y=1/sqrt(2*x)

y =

1/2*2^(1/2)/x^(1/2)
```

$$\cos(x^2) =$$

```
>> x=sym('x')

x =

x

>> cos(x^2)

ans =

cos(x^2)
```

Matriz simbólica

```
>> syms a b c d
>> M=[a b;c d]

M =

[ a, b]
[ c, d]

>> det(M)

ans =

a*d-b*c
```

Define diversas variáveis simbólicas

Matriz de elementos simbólicos

Determinante

Inserindo valores numéricos

```
>> a=1; b=2; c=3; d=4;
>> M=[a b;c d]

M =

     1     2
     3     4

>> det(M)

ans =

    -2
```

Extraindo numerador e denominador de expressões racionais

$$f = \frac{ax^2}{b-x}$$

```
>> syms x a b
>> f=a*x^2/(b-x)

f =

a*x^2/(b-x)
```

```
>> [n,d]=numden(f)

n =

-a*x^2


d =

-b+x
```

Operações Algébricas

```
>> x=sym('x');
>> f=2*x^2+3*x-5;
>> g=x^2-x+7;
>> f+g

ans =

3*x^2+2*x+2

>> f-g

ans =

x^2+4*x-12
```

```
>> f*g

ans =

(2*x^2+3*x-5)*(x^2-x+7)

>> f/g

ans =

(2*x^2+3*x-5)/(x^2-x+7)
```

Funções Compostas

```
>> f=x^2;
>> g=sin(x);
>> compose(f,g)

ans =

sin(x)^2

>> compose(g,f)

ans =

sin(x^2)
```

$$f(g(x))$$

$$g(f(x))$$

Simplificando Expressões

```
>> f=(x^2-1)*(x-2)*(x-3)

f =

(x^2-1)*(x-2)*(x-3)

>> collect(f)

ans =

x^4-5*x^3+5*x^2+5*x-6

>> factor(ans)

ans =

(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x+1)
```

Agrupa todos os termos semelhantes

Expressa a função como produto de polinômios

Expandindo funções

```
>> expand(f)

ans =

x^4-5*x^3+5*x^2+5*x-6
```

Distribui os produtos sobre as somas

Simplificando funções

```
>> simplify(log(2*x/y))

ans =

log(2)+log(x/y)
```

A função ***pretty***

Forma mais fácil de ver uma expressão matemática

```
>> cos(sqrt(x^2+1))

ans =

cos((x^2+1)^(1/2))

>> pretty(ans)

>>
```

```
        2      1/2
cos((x  + 1)    )
```

Resolvendo Equações (comando Solve)

$$y = ax^2 + bx + x$$

```
>> syms a b c x
>> solve(a*x^2+b*x+c)

ans =

[ 1/2/a*(-b+(b^2-4*a*c)^(1/2))]
[ 1/2/a*(-b-(b^2-4*a*c)^(1/2))]
```

Melhorando a saída

```
>> pretty(ans)

                          [               2           1/2]
                          [     -b + (b  - 4 a c)        ]
                          [1/2 --------------------------]
                          [                 a            ]
                          [                              ]
                          [               2           1/2]
                          [     -b - (b  - 4 a c)        ]
                          [1/2 --------------------------]
                          [                 a            ]
>>
```

Calculando a derivada (diff)

$$\frac{d(ax^2 + bx + x)}{dx}$$

```
>> diff(a*x^2+b*x+c)

ans =

2*a*x+b
```

$$\frac{d(sen^2(x))}{dx}$$

```
>> diff(sin(x)^2)

ans =

2*sin(x)*cos(x)
```

A integração (int(f))

$$\int \frac{1}{x} dx$$

$$\int x.\cos(x)dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

```
>> f=1/x;
>> int(f)

ans =

log(x)
```

```
>> g=x*cos(x);
>> int(g)

ans =

cos(x)+x*sin(x)
```

```
>> int(1/x,1,2)

ans =

log(2)
```

Integral Definida