Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Jörn Müller-Quade
Björn Kaidel, Sebastian Schlag, Sascha Witt

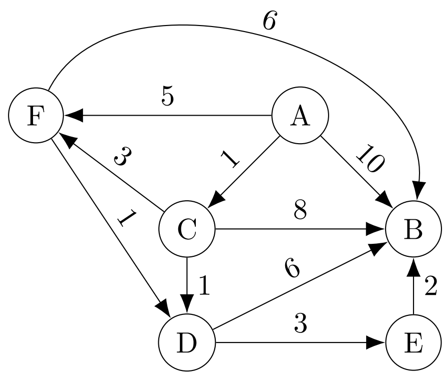
9. Übungsblatt zu Algorithmen I im SoSe 2017

http://crypto.iti.kit.edu/index.php?id=799
{bjoern.kaidel,sascha.witt}@kit.edu

Musterlösungen

Aufgabe 1 (*Dijkstra,* $4+1=5$ *Punkte*)

Sei ein Graph $G = (V, E)$ wie folgend dargestellt.



a) Führen Sie Dijkstras Algorithmus auf G ausgehend vom Knoten A aus. Geben Sie die Reihenfolge der Konten an, in der sie als *scanned* markiert werden. Geben Sie außerdem für jeden Knoten $v \in V$ *alle* Zwischenwerte $d[v]$ und $parent[v]$ an, die während der Ausführung des Algorithmus angenommen werden.

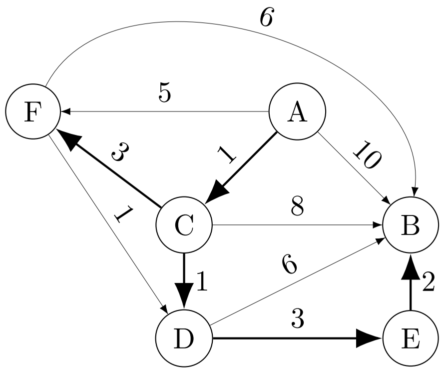
b) Zeichnen Sie den Baum der kürzesten Wege von A zu allen anderen Knoten aus V in G.

Musterlösung:

a) Die Knoten werden in der Reihenfolge A, C, D, F, E, B als *scanned* markiert. Weiter gilt für die Werte von d und parent:

- $d[A] = 0$ und parent$[A] = A$ während der gesamten Ausführung
- $d[B] = \infty$ und parent$[B] = \perp$ nach Initialisierung, $d[B] = 10$ und parent$[B] = A$ nach Relaxieren der von A ausgehenden Kanten, $d[B] = 9$ und parent$[B] = C$ nach Relaxieren der von C ausgehenden Kanten, $d[B] = 8$ und parent$[B] = D$ nach Relaxieren der von D ausgehenden Kanten und schließlich $d[B] = 7$ und parent$[B] = E$ nach Relaxieren der von E ausgehenden Kanten
- $d[C] = \infty, 1$ und parent$[C] = \perp, A$
- $d[D] = \infty, 2$ und parent$[D] = \perp, C$
- $d[E] = \infty, 5$ und parent$[E] = \perp, D$
- $d[F] = \infty, 5, 4$ und parent$[F] = \perp, A, C$

b) Die dick markierten Kanten symbolisieren den Baum:



Aufgabe 2 (*Längste Wege,* $2 + 3 = 5$ *Punkte*)

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph ohne Kreise mit Kantengewichten aus $\mathbb{N}_0$ (es sind also keine negativen Kantengewichte erlaubt!). Im Folgenden bezeichne $f_G(e)$ für $e \in E$ das Kantengewicht von e in G. Anstatt die kürzesten Wege zu berechnen, sollen nun die längsten Wege berechnet werden. Betrachten Sie dazu den folgenden Algorithmenvorschlag:

(1) Es sei m das maximale Kantengewicht in G.

(2) Wir definieren nun einen neuen Graph $G' = (V', E')$ mit $V' = V$ und $E' = E$. Die Kantengewichte für G' definieren wir als $f_{G'}(e) := m - f_G(e)$.

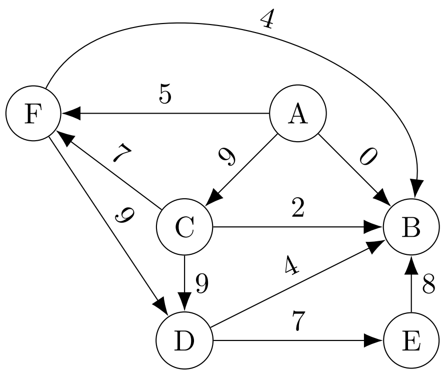
(3) Wir berechnen nun mit Hilfe von Dijkstras Algorithmus die kürzesten Wege in G' und geben diese als längste Wege in G aus.

a) Zeichnen Sie den Graphen G', der vom Algorithmus erzeugt wird, zum in Aufgabe 1 angegebenen Graphen G.

b) Berechnet der obige Algorithmus tatsächlich die längsten Wege in gerichteten und azkylischen Graphen mit Kantengewichten in $\mathbb{N}_0$? Beweisen Sie ihre Behauptung!

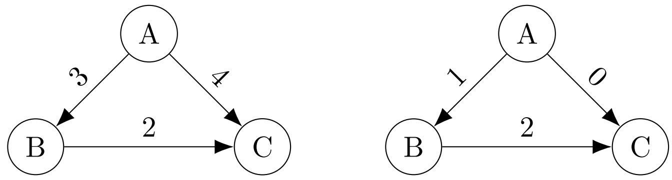
Musterlösung:

a) Der Graph G' sieht folgendermaßen aus (das maximale Kantengewicht in G ist 10):



b) Nein, der Algorithmus berechnet nicht die längsten Wege. Man betrachte als Gegenbeispiel den folgenden Graphen G^* und den daraus vom Algorithmus erzeugten Graphen $G^{*\prime}$:

Graph G^* Graph $G^{*\prime}$



Dijkstras Algorithmus würde im Graphen $G^{*\prime}$ als kürzesten Weg von A nach C den Pfad $\langle A, C\rangle$ mit Länge 0 berechnen. Dieser hätte im Ausgangsgraph G^* die Länge 4. Der Pfad $\langle A, B, C\rangle$ hat aber die Länge 5 und ist damit länger.

Aufgabe 3 ($\mathit{Beweise,}\ 1 + 2 + (2 + 3) = 8\ \mathit{Punkte}$)

In den folgenden Aufgaben betrachten wir gerichtete Graphen mit Kantengewichten in $\mathbb{Z}$, in denen alle Kreise positiv sind (falls überhaupt Kreise existieren). Für jeden Kreis im Graphen ist das aufsummierte Kantengewicht also echt größer Null.

a) Beweisen Sie, dass kürzeste Wege in solchen Graphen keine Kreise enthalten.

b) Beweisen Sie, dass Teilpfade von kürzesten Wegen wiederum kürzeste Wege sind.

c) Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ wie oben beschrieben, in dem vom Knoten $s \in V$ alle Knoten erreichbar sind. Zeigen Sie, dass es einen Baum T mit $n = |V|$ Knoten und Wurzel s gibt, sodass alle Baumpfade kürzeste Wege sind. Gehen Sie dabei in zwei Schritten vor:

   (i) Beweisen Sie die Aussage zuerst unter der Annahme, dass alle kürzesten Wege eindeutig sind und betrachten Sie den Teilgraph T, der aus allen kürzesten Wegen mit Startknoten s besteht. Zeigen Sie mit Hilfe von b), dass T ein Baum ist.

   (ii) Erweitern Sie Ihren Beweis für den allgemeinen Fall mit nicht eindeutigen kürzesten Wegen.

Musterlösung:

a) Angenommen, es gibt einen kürzesten Weg P von u nach v, der einen Kreis enthält. Da G nur positive Kreise enthalten kann, ist das aufsummierte Kantengewicht dieses Kreises positiv. Somit könnten wir den Weg echt verkürzen, indem wir alle Kanten aus dem Weg herausnehmen, die auf dem Kreis liegen. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Weg bereits ein kürzester Weg war.

b) Es sei $P = \langle u, ..., x, ..., y, ...v\rangle$ ein kürzester Weg von u nach v und $Q := \langle x, ..., y\rangle$ ein Teilpfad auf P. Wir nehmen nun zum Widerspruch an, dass es sich bei Q nicht um einen kürzesten Weg von x nach y handelt. Da Q existiert und somit ein Weg von x nach y im Graphen existiert, muss auch ein kürzester Weg $Q' := \langle x, ..., y\rangle \neq Q$ existieren. Ersetzen wir in P den Teilpfad Q durch Q', so ergibt dies weiterhin einen gültigen Weg von u nach v, der nun außerdem kürzer als P ist. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass P bereits der kürzeste Weg von u nach v war. Also muss auch bereits Q ein kürzester Weg von u nach v sein.

c) (i) Es sei T ein Teilgraph von G mit allen n Knoten, der aus den kürzesten Wegen von s zu allen anderen Knoten besteht. Angenommen, es existiert ein Knoten $u \neq s$ mit Eingangsgrad ≥ 2 in T. Also gibt es zwei Kanten (x, u) und (y, u) in T mit $x \neq y$. Da T die Vereinigung von kürzesten Wegen von s ist, gibt es zwei kürzeste Wege $P = \langle s, ..., x, u, ..., v\rangle$ und $Q = \langle s, ..., x, u, ..., w\rangle$. Nach der vorherigen Teilaufgabe sind $\langle s, ..., x, u\rangle$ und $\langle s, ..., y, u\rangle$ zwei kürzeste Wege. Da sie verschieden sind, ist dass ein Widerspruch zur Annahme, dass kürzeste Wege eindeutig sind. Also ist T ein gerichteter Baum mit Wurzel s.

(ii) In einem Graphen ohne negative Kreise oder Kreise mit aufsummiertem Kantengewicht 0 sind die Distanzen der kürzesten Wege eindeutig. Da s jeden Knoten erreichen kann, gibt es eine eindeutige Kürzeste-Wege-Distanz $d_s(v)$ zu jedem Knoten v. Wir konstruieren nun aus G einen Graphen G', der eindeutige kürzeste Wege hat und die Distanzen $d_s(\cdot)$ nicht verändert. Zu Anfang setzen wir $G' = G$. Solange es in G' noch zwei verschiedene kürzeste Wege $P = \langle s, ..., v\rangle$ und $Q = \langle s, ..., v\rangle$ zum Knoten v gibt, gibt es (als Teilpfad auf diesen Wegen) auch noch zwei kürzeste Wege $P' = \langle s, ..., x, u\rangle$ und $Q' = \langle s, ..., y, u\rangle$ mit $x \neq y$. Wir entfernen nun die Kante (y, u), aus G'. Dieses Vorgehen wiederholen wir, bis die kürzesten Wege eindeutig sind.

Wir müssen nun zeigen, dass das Entfernen einer Kante (y, u) die Distanz $d_s(v)$ nicht ändert. Sei $\langle s, ..., y, u, ..., v\rangle$ der kürzeste Weg in G' vor dem Entfernen mit Q' als Präfix. Die Kante (y, u) ist nicht Teil von P', da P' eine Kante (x, u) mit $x \neq y$ enthält. Denn wäre auch (y, u) Teil von P', so müsste P' einen (positiven) Kreis enthalten, im Widerspruch zu a). P' bleibt durch das Entfernen von (y, u) also unverändert. Somit können wir Q' durch P' „ersetzen“ und es ergibt sich ein kürzester Weg mit gleicher Länge in G' nach Entfernen von (y, u). Die Distanz $d_s(v)$ ändert sich somit nicht.

Die kürzesten Wege in G' sind am Ende dieser iterativen Kantenentfernung eindeutig und haben die gleiche Länge wie die Wege in G. Nach der vorherigen Teilaufgabe (i) ist G' ein Baum, was die Aussage beweist.