Grundbegriffe der Algebra

Gruppen

Definition 1. *Eine* ***Gruppe*** $(G, \circ)$ *ist eine Menge mit einer Abbildung* $\circ: G \times G \longrightarrow G$*, sodass gilt:*

> ***Assoziativgesetz.*** $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
>
> ***Neutrales Element.*** $\exists$ *Element* $e \in G$*, sodass* $e \circ a = a$ *für alle* $a \in G$
>
> ***Inverses Element.*** *Für alle Elemente* $a \in G$ *existiert das Inverse* a'*:* $a \circ a' = e$

Bei endlichen Mengen A *wird die Verknüpfung* $\circ$ *auf* A *oft durch eine Verknüfungstafel angegeben.*

Definition 2. *Die* ***symmetrische Gruppe*** */* ***Permutationsgruppe*** S_n *ist die Menge aller Permutationen der Menge* $\{1, 2, \ldots, n\}$

Es gilt $|S_n| = n!$

Definition 3. *Eine Gruppe heisst* ***kommutativ*** *oder* ***abelsch****, falls* $a \circ b = b \circ a$ *für alle* $a, b \in G$*.*

Satz 4. *Eine nichtleere Menge* G *mit einer Verknüpfung* $\circ$ *ist genau dann eine Gruppe, wenn* $\circ$ *assoziativ ist und zu je zwei Elementen* $a, b \in G$ *ein* $x \in G$ *mit* $x\, a = b$ *und ein* $y \in G$ *mit* $a\, y = b$ *existiert.* x *und* y *sind dann eindeutig bestimmt.*

Folgerung 5. *Eine endliche Menge* G *mit einer Verknüfung ist genau dann eine Gruppe, wenn* $\circ$ *assozivativ ist und in der Verknüfungstafel jedes Element von* G *in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auftritt.*

Definition 6. *Eine nichtleere Teilmenge* G' *von* G *heisst* ***Untergruppe*** *von* G*, falls gilt:*

1. $a, b \in G' \Rightarrow a \cdot b \in G'$
2. $a \in G' \Rightarrow a^{-1} \in G'$

G' *ist dann selbst eine Gruppe. Notation:* $G' < G$*.*

Es gilt: $G' < G \Leftrightarrow$ *mit* x *und* y *gehört stets auch* $x\, y^{-1}$ *zu* G'

Definition 7. *Eine lineare Abbildung* $f: A \longrightarrow A'$ *zwischen zwei Gruppen* $(A, \cdot)$ *und* $(A', *)$ *heisst* ***(Gruppen)-Homomorphismus****, falls* $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ *für alle* $x, y \in A$

Ist f *bijektiv, so heisst* f ***Isomorphismus,*** *und* A *und* A' *heissen* ***isomorph:*** $A \cong A'$*.*

Ein Isomorphismus von eine Gruppe in sich selbst heisst ***Automorphismus.***

Bemerkung 8. Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe von $S(X)$ (der symmetrischen Gruppe der Menge X) für eine geeignete Menge X.

Bemerkung 9. Ist $f: A \longrightarrow A'$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt:

1. $f(e) = e'$

   $(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$

2. Bild $f < A'$

   Kern $f < A$

3. f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $f(A) = A'$

   f ist injektiv $\Leftrightarrow$ Kern $f = e$

Bemerkung 10. Für alle $y \in \text{Kern } f$ und alle $x \in A$ gilt:

$$x\,y\,x^{-1} \in \text{Kern } f$$

d.h. Kern f ist invariant unter allen Abbildungen $y \longrightarrow x\,y\,x^{-1}$.

Definition 11. *Eine Untergruppe B von A heisst **Normalteiler** von A ($B \lhd A$), falls für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ gilt: $x\,y\,x^{-1} \in B$*

Beispiele: $A \lhd A$, $\{e\} \lhd A$, Kern $f \lhd A$

Jede Untergruppe einer abelschen Gruppe *ist automatisch ein Normalteiler!*

Satz 12. *Sei $(A, \cdot)$ Gruppe und $B < A$ Untergruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *B ist Normalteiler von A ($B \lhd A$)*

2. *Für alle $x \in A$ gilt: $x \cdot B \cdot x^{-1} = B$*

3. *Für alle $x \in A$ gilt: $x \cdot B = B \cdot x$*

4. *Für alle $x, x', y, y' \in B$ gilt: $(x' \cdot x^{-1} \in B, y' \cdot y^{-1} \in B) \Rightarrow x' \cdot y' \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \in B$*

Satz 13. *Ist A Gruppe, $B \lhd A$ Normalteiler, so ist $A/_B = A/_\sim$ mit $[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$ bezüglich der Äquivalenzrelation*

$$x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in B$$

*eine Gruppe, die sogenannte **Quotienten-** oder **Faktorgruppe** von A nach B.*

Satz 14. ***(Homomorphiesatz für Gruppen)*** *Sind $(A, \cdot)$ und $(A', *)$ Gruppen und $f\colon A \longrightarrow A'$ Homomorphismus, so gilt:*

a) *Die kanonische Projektion $\pi\colon A \longrightarrow A/_{\text{Kern } f}$, $x \longrightarrow [x]$ ist Homomorphismus.*

b) *Es existiert eine Injektion $\tilde{f}\colon A/_{\text{Kern } f} \longrightarrow A'$ mit $f = \tilde{f} \circ \pi$. und $\tilde{f}$ ist Homomorphismus.*

c) *Ist f surjektiv, so gilt $A/_{\text{Kern } f} \cong A'$.*

Folgerung 15. $A/_{\text{Kern } f} \cong f(A) = \text{Bild } f$

Körper und Ringe

Definition 16. *Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ („Addition“) und $\cdot$ („Multiplikation“), sodass gilt:*

a) *$(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe, deren neutrales Element mit 0 bezeichnet wird.*

b) $(K\backslash\{0\},\cdot)$ *ist eine abelsche Gruppe, deren neutrales Element mit* 1 *bezeichnet wird.*

c) $+$ *und* $\cdot$ *erfüllen die Distributivgesetze:*

$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$

Restklassenkörper

Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation $x\sim y\Leftrightarrow$ x und y haben den gleichen Rest bei Division durch $m\in\mathbb{Z}$.

Definition 17. $\mathbb{Z}_m:=\mathbb{Z}/_{\sim}$

Bemerkung 18. $\mathbb{Z}_m$ kann mit $\{[0],[1],\ldots,[m-1]\}$ identifiziert werden und *als Menge* auch mit $\{0,1,\ldots,m-1\}$.

Für $x\sim y$ in $\mathbb{Z}_m$ schreibt man auch $x\equiv y \bmod m$

Satz 19. *Definiere* $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ *mit* $[x]+[y]=[x+y]$, $[x]\cdot[y]=[x\cdot y]$. *Dann ist dies genau dann ein Körper (**Restklassenkörper**), wenn m eine Primzahl ist. Man schreibt in diesem Falle* $\mathbb{Z}_m=:\mathbb{F}_m$.

(Ansonsten ist $\mathbb{Z}_m$ *ein kommutativer Ring mit Eins, der sogenannte **Restklassenring**).*

Körperhomomorphismen

Definition 20. *Eine Abbildung* $f\colon K\longrightarrow K'$ *zwischen zwei Körpern K und K′ heisst **(Körper-) Homomorphismus**, falls gilt:*

a) $f(x+y)=f(x)+'f(y)$

b) $f(x\cdot y)=f(x)\cdot' f(y)$

c) $f(1)=1'$

Bemerkung 21. Ist K ein Körper mit $|K|=p$, p Primzahl, so gilt $K\cong\mathbb{F}_p$.

Wenn c die kleinste Zahl ist, für die im Körper K gilt: $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{c-\text{mal}}=0$, dann heisst c die **Charakteristik** des Körpers K. Falls keine solche Zahl existiert, hat der Körper K die Charakteristik 0. Beispielsweise haben $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Q}$ die Charakteristik 0.

Ringe

Definition 22. *Ein **Ring*** $(R,+,\cdot)$ *ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen + und ·, sodass gilt:*

R1. $(R,+)$ *ist abelsche Gruppe.*

R2. $(R,\cdot)$ *ist **Halbgruppe,** d.h. eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, die abgeschlossen bezüglich dieser Verknüpfung ist.*

R3 (Distributivgesetze). *Es gelten die beiden Distributivgesetze analog zu Körpern.*

Ist $(R,\cdot)$ *kommutativ, dann heisst R **kommutativer Ring**. Besitzt* $(R,\cdot)$ *auch ein neutrales Element, so spricht man von einem **kommutativen Ring mit Einselement***

Bemerkung 23. Jeder Körper ist ein kommutativer Ring mit Eins.

$\mathbb{Z}_m$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Für $m > 1$ ist $m\mathbb{Z} = \{m\, z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ein kommutativer Ring *ohne* Eins.

Matrizen

Definition 24. $\mathbb{K}^{m\times n} := \{m \times n\text{-}\textit{Matrizen über } \mathbb{K}\}$

Bemerkung 25. $\mathbb{K}^{m\times n}$ ist bezüglich komponentenweiser Addition eine abelsche Gruppe.

Definition 26. *Sind $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times k}$, so heisst die $m \times k$-Matrix (c_{ij}) mit*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj}$$

das Produkt $A \cdot B$ von A und B.

Satz 27. *Die Multiplikation von Matrizen hat die folgenden Eigenschaften:*

Assoziativität. $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$

Distributivität. $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$ *und* $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$

Neutrales Element. $E_n\,A = A\,E_n = A$

Folgerung 28. $\mathbb{K}^{n\times n}$ *bildet einen (i.A.* nicht *kommutativen) Ring mit Eins.*

Bemerkung 29. Für kein $n \geqslant 2$ und keinen Körper $\mathbb{K}$ ist $\mathbb{K}^{n\times n}$ ein Körper!

Definition 30. *Existiert zu $A \in K^{n\times n}$ ein multiplikatives Inverses A', so heisst A* ***invertierbar*** *oder* ***regulär****. Dann gilt $A\,A' = A'\,A = E_n$ und man schreibt auch $A' = A^{-1}$.*

Ist A nicht invertierbar, so heisst A ***singulär****.*

Die Menge $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen bildet bezüglich der Matrixmultiplikation eine (i.A. nicht abelsche) Gruppe, die ***allgemeine lineare Gruppe*** *über $\mathbb{K}$.*

Für $n \geqslant 2$ ist auch $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ niemals ein Körper.

Definition 31. *Für $A = ((a_{ij})) \in K^{m\times n}$ ist die* ***Transponierte*** *$A^\top$ von A die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$.*

Bemerkung 32. Für das Transponieren von Matrizen gilt:

a) $(A^\top)^\top = A$

b) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

c) $(A\,B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ (!)

d) A invertierbar $\Leftrightarrow$ $A^\top$ invertierbar, und $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

Definition 33. *$A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ heisst* ***symmetrisch****, falls $A = A^\top$ (dann also auch $n = m$)*

Bemerkung 34. Die Definitionen und Rechenregeln für Matrizen ergeben auch Sinn, wenn $\mathbb{K}$ kein Körper ist, sondern ein kommutativer Ring mit Eins.

Polynome

Definition 35. *Ein* ***Polynom*** *über einem Körper* $\mathbb{K}$ *ist eine* endliche *Folge aus* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ *von Körperelementen* $a_i \in \mathbb{K}$, *d.h.*

$$p = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$$

Schreibweise: $p = (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ *oder* $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ *oder* $p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

Das Polynom $(0, 0, 0, \ldots) =: 0$ *heisst* ***Nullpolynom***.

Für $p \neq 0$ *heisst das grösste* $n \in \mathbb{N}_0$ *mit* $a_n \neq 0$ *der* ***Grad*** *des Polynoms* $(\mathrm{Grad}\, p)$. *Das Nullpolynom hat per Definition den Grad* -1.

Ein Polynom p *heisst* ***normiert***, *wenn* $\mathrm{Grad}\, p = n$ *und* $a_n = 1$.

Definition 36. $\mathbb{K}[X] := \{\text{Polynome über } \mathbb{K}\}$. *Für* $p = (a_i), q = (b_i) \in \mathbb{K}[X]$ *sei*

$$p + q: = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$$

$$p \cdot q := (c_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \,\mathrm{mit}\, c_i := \sum_{k=0}^{i} a_k \cdot b_{i-k}$$

Satz 37. $\mathbb{K}[X]$ *ist bezüglich* $+$ *und* $\cdot$ *ein kommutativer Ring mit Eins. Das Einselement ist das Polynom* $(1, 0, 0, \ldots)$.

$\mathbb{K}[X]$ *ist* kein *Körper, denn* $p := X$ *besitzt kein multiplikatives Inverses.*

Bemerkung 38.

a) $p, q \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow \mathrm{Grad}\,(p + q) \leqslant \max\,\{\mathrm{Grad}\, p, \mathrm{Grad}\, q\}$

b) $p, q \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow \mathrm{Grad}(p \cdot q) = \mathrm{Grad}\, p + \mathrm{Grad}\, q$

c) Jedes $p \in \mathbb{K}[X]$ liefert eine zugehörige Abbildung $x \longrightarrow \sum q_i\, x^i$, die zu p gehörige **Polynomfunktion**.

d) $\pi: \mathbb{K}[X] \longrightarrow \{p(x)\}$ ist surjektiver Homomorphismus von Ringen mit Eins.

   Für *endliche* Körper ist π nicht injektiv, für $|\mathbb{K}| = \infty$ ist π Ringisomorphismus!

Satz 39. ***(Division mit Rest)*** *Zu allen Polynomen* $p, q \in \mathbb{K}[X]$ *existieren* eindeutig *bestimmte Polynome* $r, s \in \mathbb{K}[X]$ *mit*

$$p = s \cdot q + r$$

und $\mathrm{Grad}\, r < \mathrm{Grad}\, q$.

Definition 40. $x_0 \in \mathbb{K}$ *heisst* ***Nullstelle*** *des Polynoms* $p \in \mathbb{K}[X]$, *wenn* x_0 *Nullstelle der zugehörigen Polynomfunktion ist, d.h.* $p(x_0) = 0$.

Folgerung 41. *$x_0 \in \mathbb{K}$ ist Nullstelle von $p \in \mathbb{K}[X] \Longleftrightarrow \exists$ Darstellung $p = s \cdot (X - x_0)$, $s \in \mathbb{K}[X]$.*

Bemerkung 42. Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Satz 43. ***(Fundamentalsatz der Algebra)*** *Jedes $p \in \mathbb{C}[X]$ hat genau n Nullstellen.*

Teiler von Polynomen

Definition 44. *Seien $p, s \in \mathbb{K}[X]$. s heisst **Teiler** von p, wenn ein $r \in \mathbb{K}[X]$ existiert mit $p = s \cdot r$.*

*$p, q \in \mathbb{K}[X]$ heissen **teilerfremd**, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler r mir $\mathrm{Grad}\, r \geqslant 1$ besitzen.*

Satz 45. *Zwei Polynome p, $q \in \mathbb{K}[X]$ sind teilerfremd genau dann, wenn Polynome r, $s \in \mathbb{K}[X]$ existieren mit*

$$r \cdot p + s \cdot q = 1$$

Der Gauss-Algorithmus

Satz 46. *Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ändert sich durch die folgenden elementaren Zeilenumformungen nicht:*

a) *Vertauschen zweier Zeilen*

b) *Multiplikation einer Zeile mit einem Körperelement $c \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$*

c) *Addition des ($d \in \mathbb{K}$)-fachen einer Zeile zu einer anderen.*

Bemerkung 47. Ein LGS über $\mathbb{K}$, $A\,x = b$ heisst **homogen**, falls $b = 0$, ansonsten **inhomogen**.

Satz 48. *Ein homogenes LGS $A\,x = 0$ mit $A \in K^{m \times n}$ und $m < n$ (also mehr Gleichungen als Unbekannte) hat immer eine von $0 \in \mathbb{K}^n$ verschiedene Lösung.*

Bemerkung 49. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist invertierbar genau dann, wenn sich $(A|E_n)$ durch elementare Zeilenumformungen in $(E_n|A')$ umformen lässt. Dann ist $A' = A^{-1}$.

$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \Longrightarrow$ das LGS $A\,x = b$ ist *eindeutig lösbar* mit $x = A^{-1}\,b$.

Ist $\tilde{x}$ Lösung eines inhomogenen LGS $A\,x = b$ und L die Lösungsmenge des dazugehörigen homogenen LGS $A\,x = 0$, so gilt für die Lösungsmenge L_{inh} des inhomogenen LGS: $L_{\mathrm{inh}} = \tilde{x} + L$.

Vektorräume

Definition

Definition 50. *Ein **Vektorraum** über einem Körper $\mathbb{K}$, kurz $\mathbb{K}$-VR, ist eine Menge mit zwei Verknüfungen $+\colon V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, sodass gilt:*

– *$(V, +)$ ist abelsche Gruppe*

– ***Distributivgesetze:*** *$a(x + y) = a\,x + a\,y$, $(a + b)\,x = a\,x + b\,x$ $\forall a, b \in \mathbb{K}, x, y \in V$*

- ***Assoziativität der Multiplikation:*** $a\cdot(b\cdot x)=(a\,b)\cdot x$

- $1\cdot x=x\ \forall x\in V$

Sprechweisen:

Vektoren. *Elemente von* V

Skalare. *Elemente von* $\mathbb{K}$

Vektoraddition. $+$

Nullvektor (O). *Neutrales Element bzgl.* $+$

Skalare Multiplikation. $\cdot$

Reeller (komplexer) Vektorraum. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *(*$\mathbb{K}=\mathbb{C}$*)*

Satz 51. *In jedem* $\mathbb{K}$*-VR* V *gilt:*

a) $0\cdot x=O\ \forall x\in V$

b) $a\cdot O=O\ \forall a\in\mathbb{K}$

c) $a\in\mathbb{K}, x\in V$ *und* $a\cdot x=O\Rightarrow a=0$ *oder* $x=O$

d) $(-1)\cdot x=-x\ \forall x\in V$

Definition 52. *Eine nichtleere Teilmenge* U *eines* $\mathbb{K}$*-VR* V *heißt* ***Untervektorraum*** *(UVR) von* V*, wenn* U *mit den Einschränkungen von* $+$ *und* $\cdot$ *auf* U *selbst ein* $\mathbb{K}$*-VR ist.*

Satz 53. ***(Untervektorraumkriterium)*** *Für einen* $\mathbb{K}$*-VR* V *und* $U\subset V$ *gilt:*

$$U \text{ ist UVR von } V \Longleftrightarrow U\neq\emptyset \text{ und } \forall x,y\in U\,\forall a\in\mathbb{K} \text{ gilt } x+y\in U \text{ und } a\cdot x\in U$$

Definition 54. *Sind* V *und* W $\mathbb{K}$*-VRe, so heißt eine Abbildung* $\Phi\colon V\longrightarrow W$ ***linear*** *oder* ***VR-Homomorphismus****, falls* $\Phi(a\,x+b\,y)=a\cdot\Phi(x)+b\cdot\Phi(y)$ *für alle* $a,b\in\mathbb{K}, x,y\in V$*.*

Ist Φ *bijektiv, so heißt* Φ ***VR-Isomorphismus*** *und* V *und* W *sind dann isomorph (*$V\cong W$*).*

Bemerkung 55. Obige Gleichung ist äquivalent zu

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y) \text{ und } \Phi(\alpha\,x)=\alpha\,\Phi(x) \text{ für alle } x,y\in V, \alpha\in\mathbb{K}$$

Folgerung 56. *Beliebige Durchschnitte von UVR eines gegebenen VR* V *sind UVR.*

Definition 57. *Ist* V $\mathbb{K}$*-VR und* $A\subset V$*, so heißt*

$$[A]:=\bigcap_{U\ UVR\ von\ V\ mit\ A\subset U} U$$

(„der kleinste UVR, der A *vollständig enthält")*

die ***lineare Hülle / Spann*** *von* A *und* A ***Erzeugendensystem*** *des UVR* $[A]$*.*

*Ist $A = \{x_1, ..., x_n\}$ endlich, so schreibt man auch $[A] = [x_1, ..., x_n]$ und die x_i heißen dann auch **erzeugende Vektoren**.*

Beispiel 58. $[V] = V$, $[\emptyset] = \{O\}$

Definition 59. *Ist V $\mathbb{K}$-VR und $x_1, ..., x_k \in V$, so heißt jeder Vektor*

$$v = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \text{ (mit } \alpha_i \in \mathbb{K}\text{)}$$

*eine **Linearkombination** (LK) von $x_1, ..., x_k$.*

Satz 60. *Ist V $\mathbb{K}$-VR, A eine nichtleere Teilmenge von V, dann ist*

$$[A] = \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } A\}$$

Lineare Ab- und Unabhängigkeit

Definition 61. *Sei V $\mathbb{K}$-VR, $k \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_k \in V$. Dann heißen $x_1, ..., x_k$ **linear abhängig**, wenn es $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \neq (0, ..., 0)$ gibt mit $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = O$, ansonsten **linear unabhängig**.*

Beispiel 62.

- $x_1, ..., x_k$ sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = O \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0\right)$
- $x_1, ..., x_k$ sind linear unabhängig, falls
  - einer dieser Vektoren der Nullvektor ist
  - zwei der Vektoren gleich sind
  - ein Vektor eine LK der anderen Vektoren ist

Bemerkung 63. Sind $\hat{y_1}, ..., \hat{y_k}$ die Koordinatendarstellungen der Vektoren $y_1, ..., y_k \in [x_1, ..., x_k]$, so gilt: $\hat{y_1}, ..., \hat{y_k}$ linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $y_1, ..., y_k$ linear unabhängig.

Satz 64. *V $\mathbb{K}$-VR, $y_1, ..., y_m \in [x_1, ..., x_k]$. Falls $m > k$, sind $y_1, ..., y_m$ linear abhängig.*

Definition 65. *Eine Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-VR V heißt **linear abhängig**, falls es paarweise verschiedene Vektoren $x_1, ..., x_k \in A$ gibt, die linear abhängig sind, ansonsten linear unabhängig.*

Bemerkung 66. A linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $A = \emptyset$ *oder* alle paarweise verschiedenen Vektoren aus A sind linear unabhängig.

Ist $A = \{x_1, ..., x_m\}$ endlich, so gilt: A linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $x_1, ..., x_m$ linear unabhängig.

Definition 67. *Sei V $\mathbb{K}$-VR. Dann heißt*

- *ein Erzeugendensystem A von V **minimal** $\Leftrightarrow$ keine echte Teilmenge von A erzeugt V.*
- *eine l.u. Teilmenge A von V **maximal** $\Leftrightarrow$ jede echte Obermenge von A ist l.a. in V.*

- *jedes linear unabhängige Erzeugendensystem von V eine **Basis** von V.*

Satz 68. *Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, B eine nichtleere Teilmenge von V. Dann sind äquivalent:*

a) B ist Basis von V

b) B ist minimales Erzeugendensystem von V

c) B ist maximale linear unabhängige Teilmenge von V

d) $x \in V \Longrightarrow x$ ist eindeutige Linearkombination von Vektoren aus B

Beispiel 69.

- $\emptyset$ ist Basis von $V = \{O\}$.
- Im $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist $\{(1,0,0,\ldots),(0,1,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots)\}$ linear unabhängig, aber *keine* Basis!

Satz 70. *Für zwei Basen B und B' eines VR gilt: $|B| = |B'|$.*

Satz 71. *Gibt es ein* endliches *Erzeugendensystem eines Vektorraums V, so hat jedes Erzeugendensystem A von V eine* endliche *Teilmenge, die Basis von V ist.*

Folgerung 72. *Ist V $\mathbb{K}$-VR, B Basis von V, A Erzeugendensystem mit $|A| = |B| < \infty$, so ist auch A eine Basis von V.*

Definition 73. *Die **Dimension** eines $\mathbb{K}$-VR V ist erklärt als*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim V = \begin{cases} \infty: & V \text{ besitzt keine endliche Basis} \\ n: & V \text{ besitzt eine Basis } B \text{ mit } |B| = n \end{cases}$$

Satz 74. ***(Basisergänzungssatz)** Sei V $\mathbb{K}$-VR und A eine linear unabhängige Teilmenge von V. Dann gibt es eine Basis B von V mit $A \subset B$.*

Folgerung 75. ***Jeder Vektorraum hat eine Basis.***

Folgerung 76. *Ist V $\mathbb{K}$-VR, B Basis von V, A linear unabhängige Teilmenve von V mit $|A| = |B|$, so ist auch A eine Basis von V.*

Satz 77. *Ist V $\mathbb{K}$-VR mit $n := \dim V < \infty$ und U ein Untervektorraum von V, so gilt:*

- $\dim U < \dim V$
- *Ist* $\dim U = \dim V$, *so gilt* $U = V$.

Beispiel 78. Für $W = [z_1, \ldots, z_m]$ mit $z_i \in \mathbb{K}^n$ soll eine möglichst einfache Basis bestimmt werden. Lösungsmethode: Setze $A := \begin{pmatrix} z_1^\top \\ \vdots \\ z_n^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und bringe A durch elementare Zeilenumformungen auf die Gaußsche Normalform $\tilde{A} := \begin{pmatrix} \tilde{z_1}^\top \\ \vdots \\ \tilde{z_n}^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann bilden die von O verschiewdenen Vektoren aus $\{\tilde{z_1}, \ldots, \tilde{z_m}\}$ eine besonders einfache Basis von W.

Definition 79. *Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ sei der **Zeilenrang** $\operatorname{zrang}(A)$ die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren und der **Spaltenrang** $\operatorname{srang}(A)$ die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.*

Satz 80. *Für jede Matrix A gilt $\operatorname{zrang}(A) = \operatorname{srang}(A) := \operatorname{Rg} A$.*

Folgerung 81.

- $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$: $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^\top$
- $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: *$A$ ist regulär* $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = n$
- *Das LGS $A\,x = b$ ist genau dann lösbar, wenn* $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A|b)$.

Folgerung 82. *Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $L := \{x \in \mathbb{K}^n \mid A\,x = O\}$. Dann gilt:*

$$\operatorname{Rang} A = n - \dim L$$

Beispiel 83. Bestimmen des Durchschnitts $U_1 \cap U_2$ zweier Untervektorräume

Beschreibe U_i durch ein homogenes LGS mit Matrix B_i $(i = 1, 2)$. Dann ist

$$U_1 \cap U_2 = \{x \in \mathbb{K}^n \mid B_1\,x = 0 \wedge B_2\,x = 0\}$$

(Direkte) Summen und Quotientenräume

Definition 84. *Sei V $\mathbb{K}$-VR, $A_1, \ldots, A_k \subset V$, $U_1, \ldots, U_k$ UVR von V.*

a) *Die **Summe** der $A_1, \ldots, A_k$ sei $A_1 + \ldots + A_k = \sum_{i=1}^k A_i := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i \,\middle|\, x_i \in A_i \right\}$.*

b) *Schneiden sich die die UVR paarweise nur im Nullvektor, ist also $U_i \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k U_j = \{O\}$ für alle $i = 1, \ldots, k$, so heißt*

$$\bigoplus_{i=1}^k U_i = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k := \sum_{i=1}^k U_i$$

*die **direkte Summe** der UVR $U_1, \ldots, U_k$.*

Bemerkung 85. $[A_1 \cup \ldots \cup A_k] = [A_1] + \ldots + [A_k]$.

Summen, insbesondere direkte Summen, von UVR sind UVR.

Satz 86. *Ist V $\mathbb{K}$-VR, $U_1, \ldots, U_k$ UVRe von V $(k \geqslant 2)$, so gilt: $\sum U_i$ ist genau dann direkte Summe, wenn sich jeder Vektor $x \in \sum U_i$* eindeutig *als $x = \sum u_i$, $u_i \in U_i$, darstellen lässt.*

Satz 87. ***(Dimensionssatz)*** *V $\mathbb{K}$-VR, U, W UVR von V:*

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

Folgerung 88. $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$.

Definition 89. *V $\mathbb{K}$-VR, U UVR von V.*

*Ein Untervektorraum W von V heißt **Komplement** / **Komplementärraum** von U, wenn gilt: $V = U \oplus W$.*

Satz 90. *Zu jedem Untervektorraum U von V existiert ein Komplementärraum.*

Bemerkung 91.

- Komplemente sind *nicht eindeutig.*
- Hat V endliche Dimension, so lässt sich das Komplement über den Gauß-Algorithmus ermitteln: Bestimme eine Basis von U in „Treppenform" und ergänze sie durch weitere „Treppenstufen" zu einer Basis von V. Diese weiteren Vektoren bilden eine Basis des Komplements von U.

Quotientenräume (Faktorräume)

Definition 92. *V $\mathbb{K}$-VR, $U \subset V$ UVR. Setze $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in U$.*

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation und mit Vektoraddition und skalarer Multiplikation verträglich:

- $x_1 \sim y_1, x_2 \sim y_2 \Longrightarrow x_1 + x_2 \sim y_1 + y_2$
- $x_1 \sim y_1 \Longrightarrow \alpha x_1 \sim \alpha y_1$

Definition 93. *$V/_U := V/_\sim$ heißt **Quotientenraum** von V nach U.*

Die Elemente von $V/_U$ sind die Äquivalenzklassen $[x] = \{y \in V \mid y - x \in U\} = x + U$.

Satz 94. *$V/_U$ ist mit $[x] + [y] = [x + y]$ und $\alpha [x] = [\alpha x]$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

Beispiel 95.

- $U = \{O\} \Longrightarrow [x] = \{x\} \Longrightarrow V/_U \cong V$
- $U = V \Longrightarrow V/_U = \{[O]\} \cong \{O\}$

Satz 96. *V $\mathbb{K}$-VR, U UVR. Dann gilt $\dim V/_U + \dim U = \dim V$*

Folgerung 97.

- *Sei V $\mathbb{K}$-VR und B eine Basis des UVR U. Ist $B \cup B'$ Basis von V und $B \cap B' = \emptyset$, dann ist $\{[x] \mid x \in B'\}$ eine Basis von $V/_U$.*
- *Seien V, U wie oben, W sei Komplement von U: $W \cong V/_U$.*

Lineare Abbildungen

Definition 98. *Eine lineare Abbildung (Homomorphismus) $\Phi: V \longrightarrow W$ heißt*

- ***Isomorphismus*** $:\Leftrightarrow$ Φ *bijektiv*
- ***Monomorphismus*** $:\Leftrightarrow$ Φ *injektiv*

- ***Epimorphismus*** $:\Leftrightarrow \Phi$ *surjektiv*

- ***Endomorphismus*** $:\Leftrightarrow V = W$

Zwei Vektorräume V und W heißen isomorph, falls ein Isomorphismus $\Phi: V \longrightarrow W$ existiert.

Bemerkung 99. $\Phi: V \longrightarrow W$ linear $\Rightarrow \operatorname{Kern}\Phi \subset V$ und $\operatorname{Bild}\Phi \subset W$ sind Untervektorräume.

Satz 100. ***(Homomorphiesatz für Vektorräume)****. Sei $\Phi: V \longrightarrow W$ linear. Dann gilt:*

- $\pi: V \longrightarrow V/_{\operatorname{Kern}\Phi}$ *ist linear*

- $\exists$ *Monomorphismus* $\bar{\Phi}: V/_{\operatorname{Kern}\Phi} \longrightarrow W$ *mit* $\Phi = \bar{\Phi} \circ \pi$.

Folgerung 101. *Sei $\Phi: V \longrightarrow W$ linear, dann gilt* $\operatorname{Bild}\Phi \cong V/_{\operatorname{Kern}\Phi}$

Folgerung 102. *Sei V $\mathbb{K}$-VR, U, W UVR mit $V = U \oplus W$. Dann gilt $V/_U \cong W$ und $V/_W \cong U$.*

Definition 103. *Eine lineare Abbildung $\pi: V \longrightarrow V$ heißt **Projektion**, wenn gilt: $\pi \circ \pi = \pi$.*

Bemerkung 104. π Projektion $\Rightarrow V = \operatorname{Kern}\pi \oplus \operatorname{Bild}\pi$

Lineare Abbildungen und Basen

Satz 105. *V, W $\mathbb{K}$-VR, B Basis von V, $\Phi': B \longrightarrow W$* beliebige *Abbildung. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\Phi: V \longrightarrow W$ mit $\Phi|_B = \Phi'$.*

Folgerung 106. *Eine lineare Abbildung $\Phi: V \longrightarrow W$ ist durch die Werte auf einer Basis von V bereits eindeutig bestimmt.*

Satz 107. *V, W $\mathbb{K}$-VRe,* $\dim V = n$, *$B = \{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V, $\Phi: V \longrightarrow W$ linear. Dann gilt:*

a) Φ *Monomorphismus (injektiv)* $\Leftrightarrow \Phi(v_1), ..., \Phi(v_n)$ *linear unabhängig in W*

b) Φ *Epimorphismus (surjektiv)* $\Leftrightarrow [\Phi(v_1), ..., \Phi(v_n)] = W$

c) Φ *Isomorphismus (bijektiv)* $\Leftrightarrow \{\Phi(v_1), ..., \Phi(v_n)\}$ *ist Basis von W*

Folgerung 108. *V, W $\mathbb{K}$-VRe mit* $\dim V = \dim W$, *$\Phi: V \longrightarrow W$ linear. Dann gilt:*

$$\Phi \text{ injektiv} \Leftrightarrow \Phi \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \Phi \text{ bijektiv}$$

Satz 109. *Seien V, W endlichdimensional. Dann gilt: $V \cong W \Leftrightarrow$* $\dim V = \dim W$.

Im unendlichdimensionalen Fall gilt nur „$\Rightarrow$“.

Folgerung 110. *Jeder endlichdimensionale $\mathbb{K}$-VR ist isomorph zu $\mathbb{K}^n$ (für geeignetes n).*

Satz 111. ***(Dimensionssatz)****. Seien V, W $\mathbb{K}$-VR, $\Phi: V \longrightarrow W$ linear. Dann gilt:*

$$\dim \operatorname{Kern}\Phi + \dim \operatorname{Bild}\Phi = \dim V$$

Vektorräume linearer Abbildungen

Bemerkung 112. Für $A \neq \emptyset$ Menge, W $\mathbb{K}$-VR ist $W^A := \{f: A \longrightarrow W \mid f \text{ Abbildung}\}$ ein $\mathbb{K}$-VR.

Jetzt: $A = V$ VR, f linear.

Satz 113. *Seien V, W, X $\mathbb{K}$-VR. Dann gilt:*

a) *Sind $\Phi: V \longrightarrow W, \Psi: W \longrightarrow X$ linear, so auch $\Psi \circ \Phi: V \longrightarrow X$.*

b) *Ist $\Phi: V \longrightarrow W$ Isomorphismus, so auch $\Phi^{-1}: W \longrightarrow V$.*

c) *Sind $\Phi: V \longrightarrow W, \pi: V \longrightarrow W$ linear, so auch $\Phi + \pi$ und $\alpha \Phi$ $(\alpha \in \mathbb{K})$.*

Bemerkung 114.

a) Isomorphie von Vektorräumen ist eine Äquivalenzrelation.

b) Wegen c) ist $\mathrm{Hom}(V, W) := \{\Phi: V \longrightarrow W \mid \Phi \text{ linear}\}$ ein UVR von W^V.

   Weitere Bezeichnung $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$.

c) Wegen a) und b) ist $\mathrm{Aut}(V) = \{\Phi: V \longrightarrow V \mid \Phi \text{ Automorphismus}\}$ [Automorphismus: Isomorphismus $V \longrightarrow V$] eine Gruppe bezüglich der Verkettung von Abbildungen „$\circ$“.

Satz 115. *Seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-VR. Dann ist auch der $\mathbb{K}$-VR $\mathrm{Hom}(V, W)$ endlichdimensional und es gilt:*

$$\dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = \dim V \cdot \dim W$$

Wichtiger Spezialfall

Definition 116. *$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ heißt **Dualraum** von V, die Elemente $\Phi: V \longrightarrow \mathbb{K}$ heißen **lineare Funktionale** oder **Linearformen** auf V.*

Schreibweise: x^* für Φ.

Beispiel 117.

a) V $= \{f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, $I: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \rightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{dt}$ („Integrationsoperator“)

b) $V = \{(a_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_i \text{ konvergent}\}$ VR, $\Phi: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a_i) \rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$

c) $A \neq \emptyset$ Menge, $t_0 \in A$, $V = \mathbb{K}^A$: $\Phi: V \longrightarrow \mathbb{K}$, $f \rightarrow f(t_0)$ ist Linearform („Auswertungsoperator“)

d) Die Abbildung $\Phi: \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$, $A \longrightarrow \mathrm{Spur}\, A$ ist ein lineares Funktional.

Bemerkung 118. Gilt $\dim V = n$, so ist auch $\dim V^* = n$ (da $\dim \mathbb{K} = 1$), also $V \cong V^*$.

Definition 119. *Ist $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V, so ist durch*

$$v_j^*(v_k) = \delta_{jk} \cdot 1$$

*eine Basis $B^*(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ von V^* festgelegt. B^* heißt die **zu B duale Basis** und ist eindeutig bestimmt. Der Basisvektor $v_j^* \in B^*$ heißt auch j-tes **Koordinatenfunktional** bezüglich B, denn für alle $x \in V$ gilt:*

$$x = v_1^*(x) \cdot v_1 + \ldots + v_n^*(x) \cdot v_n$$

und für alle $x^* \in V^*$ gilt

$$x^* = x^*(v_1) \cdot v_1^* + \ldots + x^*(v_n) \cdot v_n^*$$

Definition 120. *$V^{**} := (V^*)^*$ heißt **Bidualraum** von V.*

Satz 121. *V $\mathbb{K}$-VR.*

a) Die Abbildung $\psi: V \longrightarrow V^{**}$, $x \mapsto x^{**}$ mit $x^{**}: V^* \longrightarrow \mathbb{K}$, $y^* \mapsto x^{**}(y^*) := y^*(x)$ ist injektiv (also ein Monomorphismus)

b) Gilt zudem $\dim V < \infty$, so ist ψ Isomorphismus.

Die Adjungierte

Definition 122. *V, W $\mathbb{K}$-VR, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann heißt*

$$\Phi^\top (:= \Phi^*): W^* \longrightarrow V^* \text{ mit } y^* \mapsto y^* \circ \Phi$$

***Transponierte** oder **Adjungierte** oder **Dual** der Abbildung Φ.*

Satz 123. *Seien V, W, X $\mathbb{K}$-VRe. Dann gilt:*

a) $(\mathrm{id}_V)^\top = \mathrm{id}_{V^*}$

b) $(\Phi + \Psi)^\top = \Phi^\top + \Psi^\top, (\alpha\,\Phi)^\top = \alpha\,\Phi^\top$

c) $(\Phi \circ \Psi)^\mathrm{T} = \Psi^T \circ \Phi^T$*, falls* $W \xrightarrow[\Psi]{} V \xrightarrow[\Phi]{} X$.

d) $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *Isomorphismus* $\Leftrightarrow$ $\Phi^\top \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ *Isomorphismus.*

Dann gilt $(\Phi^{-1})^\top = (\Phi^\top)^{-1}$.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Bemerkung 124. V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR $\Rightarrow$ $V \cong \mathbb{K}^n$ via einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Im Folgenden ist die Anordnung der Basisvektoren wichtig. Ein n-Tupel $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren heißt **(an)geordnete Basis**.

Definition 125. *V $\mathbb{K}$-VR, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ angeordnete Basis von V, $x \in V$.*

*Ist $x = \sum_{i=1}^n x_i\, v_i$, $x_i \in \mathbb{K}$ die eindeutige Darstellung von x bezüglich B, so heißen die $x_1, \ldots, x_n$ die **Koordinaten** von x bezüglich B.*

*$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ heißt **Koordinatendarstellung** von x bezüglich B.*

Bemerkung 126. $V \longrightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto \hat{x}$ ist Isomorphismus und bildet v_i auf den i-ten Vektor e_i der Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ ab.

V, W $\mathbb{K}$-VRe, $B = (v_1, ..., v_n)$ Basis von V, $C = (w_1, ..., w_m)$ Basis von W, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W) \Rightarrow$

$$\Phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i$$

mit eindeutig bestimmten $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Definition 127. *Die Matrix* $A_\Phi := ((\alpha_{ij})) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *heißt* ***Abbildungsmatrix*** *von* Φ *bezüglich der angeordneten Basen* B *und* C *von* V *bzw.* W*.*

Satz 128. V, W $\mathbb{K}$-*VRe mit geordneten Basen* B *und* C *wie oben*

$$\Rightarrow \Phi \mapsto A_\Phi \textit{ ist Isomorphismus } \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$$

Bemerkung 129.

1. $\dim \mathrm{Bild}\, \Phi = \mathrm{Rang}\, A_\Phi =: \mathrm{Rang}\, \Phi$

2. Die Koordinaten von $\Phi(v_j)$ sind die j-te Spalte von A_Φ.

Satz 130. $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$*,* $\hat{x}$ *Koordinatenvektor von* $x \in V$*,* $\hat{y}$ *Koordinatenvektor von* $y = \Phi(x) \in W$

$$\Rightarrow \hat{y} = A_\Phi \cdot \hat{x}$$

wobei $A_\Phi = A_\Phi(B, C)$

Satz 131. *Seien* V, W, X $\mathbb{K}$-*VRe mit geordneten Basen* $B = (v_1, ..., v_n)$*,* $C = (w_1, ..., w_m)$ *und* $D = (x_1, ..., x_k)$ *sowie* $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$*,* $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, X)$ *und* $B^* = (v_1^*, ..., v_n^*)$ *und* $C^* = (w_1^*, ..., w_m^*)$ *duale Basen von* B *bzw.* C*. Dann gilt:*

a) $A_{\Phi \circ \Psi}(B, D) = A_\Psi(C, D) \cdot A_\Phi(B, C)$

b) Φ *Isomorphismus* $\Leftrightarrow$ $A_\Phi(B, C)$ *ist regulär (invertierbar) und* $n = m$

c) $A_{\Phi^\top}(C^*, B^*) = (A_\Phi(B, C))^\top$

—

Definition 132. *Zwei Matrizen* $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *heißen* ***äquivalent****, wenn es reguläre Matrizen* $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *und* $T \in \mathbb{K}^{m \times m}$ *gibt mit* $\tilde{A} = T^{-1} A S$

Bemerkung 133.

a) Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{m \times n}$.

b) Durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen geht eine Matrix A in eine äquivalente Matrix A' über.

c) Jede Matrix ist zu ihrer Gaußschen Normalform äquivalent.

d) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ sind genau dann äquivalent, wenn sie denselben Rang haben.

Definition 134. *Zwei Matrizen A, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit $\tilde{A} = S^{-1} A\, S$.*

Bemerkung 135.

a) Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

b) Ähnliche Matrizen sind äquivalent, aber nicht alle äquivalenten Matrizen sind ähnlich.

Determinanten und Eigenwerte

Determinanten

Definition 136. *Sei*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & m \\ \pi(1) & \cdots & \pi(i) & \cdots & \pi(j) & \cdots & \pi(m) \end{pmatrix} \in S_m$$

*eine Permutation. Dann heißt jedes Paar (i,j) mit $i<j$ und $\pi(i)>\pi(j)$ ein **Fehlstand** von π. Die Anzahl der Fehlstände von π **(Fehlstandszahl)** wird mit $F(\pi)$ bezeichnet.*

Lemma 137.

a) Für alle $\pi \in S_m$ gilt

$$(-1)^{F(\pi)} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}$$

b) Für alle $\sigma,\pi \in S_m$ gilt

$$(-1)^{F(\sigma\circ\pi)} = (-1)^{F(\sigma)} \cdot (-1)^{F(\pi)}$$

c) $(-1)^{F(\pi)} = (-1)^{F(\pi^{-1})}$

d) $F\big(\tau^{(i,j)}\big) = 2\cdot(j-i)-1$

Dabei bezeichnet $\tau^{(i,j)}$ eine Transposition, also eine Permutation, die nur i und j vertauscht.

Transpositionen sind selbstinvers, d.h. $\tau^{(i,j)} \circ \tau^{(j,i)} = \mathrm{id}$

Satz 138. *Jede Permutation $\pi \in S_m$ $(m \geqslant 2)$ lässt sich als Verkettung endlich vieler Transpositionen darstellen.*

Definition 139. *Eine Permutation π heißt **gerade**, wenn sie sich mit einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen lässt, ansonsten **ungerade**.*

Satz 140. *Eine Permutation ist genau dann gerade, wenn ihre Fehlstandszahl gerade ist.*

Definition 141. *Sei $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann heißt*

$$\det A = |A| := \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)}\, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

***Determinante** der Matrix A.*

Bemerkung 142.

a) Ist A obere oder untere Dreiecksmatrix, so ist $\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

b) $\det E_n = 1$

Satz 143. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt:* $\det A = \det A^\top$.

Satz 144. *Die Abbildung $\Delta \colon (\mathbb{K}^n)^n \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(x_1 | \cdots | x_n)$ hat folgende Eigenschaften:*

a) *Sie ist n-fach multilinear, d.h. es gilt:*

$$\Delta(\ldots, x_{j-1}, a\, x_j + b\, x_j', \ldots) = a\, \Delta(\ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots) + b\, \Delta(\ldots, x_{j-1}, x_j', x_{j+1}, \ldots)$$

b) *Für alle $\pi \in S_n$ gilt: $\Delta(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = (-1)^{F(\pi)}\, \Delta(x_1, \ldots, x_n)$*
Insbesondere ist Δ alternierend, d.h. für $i \neq j$ gilt

$$\Delta(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = -\Delta(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$$

c) *Δ ist normiert, d.h. $\Delta(e_1, \ldots, e_n) = 1$*

d) *Die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = 0$.*

Satz 145. *Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt:*

a) *Addition des Vielfachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen ändert* $\det A$ *nicht.*

b) *Multiplikation einer Spalte (Zeile) mit $a \in \mathbb{K}$ vervielfacht* $\det A$ *um den Faktor a.*

c) *Vertauschen zweier Spalten (Zeilen) ändert das Vorzeichen von* $\det A$.

d) *A ist genau dann regulär, wenn* $\det A \neq 0$.

Satz 146. *Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt:* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Folgerung 147. ***(Kästchenmultiplikationssatz)*** *Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ von der Form*

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

so gilt: $\det A = \det B \cdot \det D$.

Bemerkung 148.

a) Ist die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

b) Ähnliche Matrizen besitzen dieselbe Determinante.

c) Wegen b) haben alle Abbildungsmatrizen einer linearen Abbildung $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ dieselbe Determinante. Daher wird die **Determinante der linearen Abbildung Φ** definiert als

$$\det \Phi := \det A_\Phi$$

Satz 149. ***(Cramersche Regel)*** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Spalten $a_1, \ldots, a_n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Dann ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ gegeben durch*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i = \frac{\det\,(a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_{i-1} \,|\, b \,|\, a_{i+1} \,|\, \cdots \,|\, a_n)}{\det A}$$

Satz 150. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär mit der Inversen $A^{-1} = ((b_{i,j}))$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j}\,(\det A)^{-1} \cdot \det A_{j,i}$$

wobei $A_{j,i}$ die Streichungsmatrix bezüglich der j-ten Zeile und der i-ten Spalte ist.

Eigenwerte & Diagonalisierbarkeit

Definition 151. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi\colon V \longrightarrow V$ linear. Der Skalar $c \in \mathbb{K}$ heißt* ***Eigenwert*** *von Φ, falls ein Vektor $v \in V$, $v \neq O$ existiert mit*

$$\Phi(v) = c \cdot v$$

Der Vektor v heißt ***Eigenvektor*** *von Φ zum Eigenwert c.*

Bemerkung 152.

a) Die Menge aller Eigenvektoren von Φ zu einem Eigenwert c bildet zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum von V, den **Eigenraum** E_c zum Eigenwert c. Es gilt

$$E_c = \operatorname{Kern}(\Phi - c \cdot \operatorname{id}_V)$$

Die Menge aller Eigenwerte von Φ heißt das **Spektrum** von Φ.

b) Eine Matrix A legt eindeutig eine Funktion $\Phi\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto A \cdot x$ fest. Daher kann man von Eigenwerten, Eigenvektoren und Eigenräumen quadratischer Matrizen reden.

c) Ähnliche Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte.

Satz 153. *Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.*

Folgerung 154. *Jeder Endomorphismus eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums bzw. jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ besitzt höchstens n Eigenwerte.*

Bemerkung 155. Es gilt:

c ist Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \Leftrightarrow$ es existiert $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq O$ mit $A \cdot v = c \cdot v$ bzw. $(A - c \cdot E_n)\,v = O \Leftrightarrow$ $(A - c\,E_n)\,v = O$ ist nichttrivial lösbar $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A - c\,E_n) < n \Leftrightarrow \det\,(A - c\,E_n) = 0$

Definition 156. *Das Polynom*

$$p = \det\,(A - X\,E_n)$$

heißt ***charakteristisches Polynom*** *von A.*

Bemerkung 157. Wenn man p schreibt als $p = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + (-1)^n X^n$, dann gilt

- $a_0 = \det A$
- $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{Spur} A$

Satz 158. *Genau dann ist $c \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, wenn c Nullstelle des charakteristischen Polynoms p von A ist.*

Ist c ein Eigenwert von A, so ist der Eigenraum E_c gleich dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - c E_n)\, x = O$.

Bemerkung 159. Ähnliche Matrizen besitzen dasselbe charakteristische Polynom. Damit ist das charakteristische Polynom einer Abbildung Φ definiert.

Definition 160. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist. Ein Endomorphismus Φ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Abbildungsmatrix von Φ gibt, die Diagonalgestalt hat.*

Satz 161. *Für einen Endomorphismus Φ eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind äquivalent:*

a) *Φ ist diagonalisierbar.*

b) *In V gibt es eine Basis aus Eigenvektoren von Φ.*

c) *V ist die direkte Summe der Eigenräume von Φ.*

d) *Die Summe der Dimensionen der Eigenräume von Φ ist n.*

Analoges gilt für $\Phi \leftrightarrow A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $V \leftrightarrow \mathbb{K}^n$.

Bemerkung 162. Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbar und ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A, wobei v_i Eigenvektor zum Eigenwert c_i ist, so gilt für die reguläre Matrix $S = (v_1 \mid \cdots \mid v_n)$:

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} c_1 & & & & 0 \\ & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & c_{n-1} & \\ 0 & & & & c_n \end{pmatrix}$$

Folgerung 163. *Ein Endomorphismus Φ eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes beziehungsweise eine $(n \times n)$-Matrix A mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.*

Satz 164. *Sei V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$. Dann ist Φ genau dan diagonalisierbar, wqenn sein charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, d.h.*

$$p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} \cdots (X - c_k)^{r_k}$$

mit $r_i \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen $c_i \in \mathbb{K}$ und wenn für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt:

$$\dim \operatorname{Bild}(\Phi - c_i \cdot \mathrm{id}_V) = n - r_i$$

Dann heißt r_i die Vielfachheit der Nullstelle c_i.

Bemerkung 165. Die zweite Forderung besagt, dass die Dimension des Eigenraumes E_{c_i} mit der Vielfachheit r_i übereinstimmen muss.

Der Satz von Cayley-Hamilton

Definition 166. *Für einen $\mathbb{K}$-VR V, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ und $q = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ sei*

$$q(\Phi) = \sum_{i=0}^{m} a_i \Phi^i \in \operatorname{End}(V)$$

mit $\Phi^0 = \mathrm{id}_V$, $\Phi^l = \underbrace{\Phi \circ \Phi \circ \ldots \circ \Phi}_{l\text{-mal}}$

Bemerkung 167. Sei $\Phi \in \operatorname{End}(V)$. Dann ist $f_\Phi: \mathbb{K}[X] \longrightarrow \operatorname{End}(V), q \mapsto q(\Phi)$ ein Homomorphismus **(„Einsetzungshomomorphismus")** bezüglich der VR- wie auch der Ringstrukturen auf $\mathbb{K}[X]$ und $\operatorname{End}(V)$.

Satz 168. ***(Cayley-Hamilton)*** *Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR und $p_\Phi = \det(A - X E_n)$. Dann ist $p_\Phi(\Phi) = 0 \in \operatorname{End}(V)$, also die Nullabbildung.*

Bemerkung 169. Ein *normiertes* Polynom $m \in \mathbb{K}[X]$ von kleinstem Grad mit $m(\Phi) = 0$ bzw. $m(A) = 0_{n \times n}$ heißt **Minimalpolynom** von Φ bzw. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und ist eindeutig bestimmt.

Satz 170. *Das Minimalpolynom $m = m(\Phi)$ von $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ teilt jedes Polynom $q \in \mathbb{K}[X]$ mit $q(\Phi) = 0$.*

Folgerung 171.

- *m teilt p_Φ.*
- *Die Nullstellen von m sind die Nullstellen von p_Φ, also die Eigenwerte von Φ.*

Bemerkung 172.

- $p_\Phi = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{r_k}$ mit paarweise verschiedenen λ_i

  $\Rightarrow m_\Phi = (X - \lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{s_k}$ mit $1 \leqslant s_i \leqslant r_i$ (Achtung: i.A. gilt $s_i \geqslant 1$!)
- Φ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \Rightarrow m = (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)$

Beispiel 173. Finde für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $q \in \mathbb{K}[X]$ den Wert von $q(A)$:

Dividiere q durch p_A: $q = P_1 \cdot p_A + P_2 \Rightarrow q(A) = P_1(A) \cdot \underbrace{p_A(A)}_{=0} + P_2(A) = P_2(A)$

Ist das Minimalpolynom bekannt und von kleinerem Grad als p_A, so teilt man zweckmäßigerweise durch das Minimalpolynom!

Die Jordansche Normalform

Satz 174. *V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$.*

Ist $q \in \mathbb{K}[X]$ mit $q(\Phi) = 0$ und gilt $q = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$ mit paarweise teilerfremden $q_i \in \mathbb{K}[X]$, so sind alle UVR $V_i := \operatorname{Kern} q_i(\Phi)$ Φ-invariant und $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$.

Ferner gilt bezüglich einer geeigneten Basis für die Abbildungsmatrix von Φ:

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

mit A_i Abbildungsmatrix von $\Phi|_{V_i}$.

Darüber hinaus gilt für das Minimalpolynom m_Φ: Ist $m_\Phi = \prod_{i=1}^k m_i$ Zerlegung von m_Φ in teilerfremde normierte Faktoren $m_i \in \mathbb{K}[X]$, so ist m_i das Minimalpolynom von $\Phi|_{\operatorname{Kern} m_i(\Phi)}$.

Satz 175. *V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt:*

Φ ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ $m(\Phi)$ zerfällt in einfache Linearfaktoren $m = (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Entsprechendes gilt für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ statt $\Phi \in \operatorname{End}(V)$.

Haupträume

Definition 176. *Es sei $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ und λ Eigenwert von Φ der Vielfachheit r, also $p_\Phi = (X - \lambda)^r \cdot \bar{p}$ mit $\bar{p}(\lambda) \neq 0$.*

m_Φ teilt $p_\Phi \Rightarrow m_\Phi = (X - \lambda)^s \cdot \bar{m}$ mit $\bar{m}(\lambda) \neq 0$, $1 \leqslant s \leqslant r$, $\bar{m}$ teilt $\bar{p}$.

- *$H_\lambda := \operatorname{Kern}(\Phi - \lambda \operatorname{id}_V)^r$ heißt **Hauptraum** zum Eigenwert λ von Φ.*
- *s, die Vielfachheit der Nullstelle λ von m_Φ, heißt **Index des Hauptraums** H_λ.*

Satz 177. *V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$, λ Eigenwert von Φ. Dann gilt:*

Der Index s von H_λ ist die kleinste Zahl $s \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{Kern}(\Phi - \lambda \operatorname{id}_V)^s = \operatorname{Kern}(\Phi - \lambda \operatorname{id}_V)^{s+1}$.

Bemerkung 178. s ist auch charakterisierbar als die kleinste Zahl mit

- $\dim \operatorname{Kern}(\Phi - \lambda \operatorname{id}_V)^s = \dim \operatorname{Kern}(\Phi - \lambda \operatorname{id}_V)^{s+1}$ bzw.
- $\dim \operatorname{Bild}(\Phi - \lambda \operatorname{id}_V)^s = \dim \operatorname{Bild}(\Phi - \lambda \operatorname{id}_V)^{s+1}$ bzw.
- $\operatorname{Rang}(A_\Phi - \lambda E_n)^s = \operatorname{Rang}(A_\Phi - \lambda E_n)^{s+1}$.

Für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $H_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda E_n)^r v = O\}$.

Speziell: $H_\lambda = V$ bzw. $H_\lambda = \mathbb{K}^n$ ($\Leftrightarrow p = (-1)^n (X - \lambda)^n$) $\Rightarrow$ s ist kleinste Zahl mit $(\Phi - \lambda \operatorname{id}_V)^s = O$.

Kochen mit Jordan: www.danielwinkler.de/la/jnfkochrezept.pdf

Satz 179. ***(Jordansche Normalform)*** *V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ mit*

$p_\Phi = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{r_k}$ und Minimalpolynom $m_\Phi = (X - \lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{s_k}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

(Diese Zerlegung gibt es für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ immer!)

Dann existiert eine geordnete Basis B von V mit

$$A_\Phi(B,B) = \begin{pmatrix} \boxed{A_{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{\lambda_k}} \end{pmatrix}$$

mit Jordan-Blöcken A_{λ_i} zum Eigenwert λ_i

$$A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{matrix}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\lambda_i} & \\ & & & \boxed{\lambda_i} \end{pmatrix}$$

Dabei hat A_{λ_i} die Länge r_i und für gegebenes $l \in \{1, ..., s_i\}$ gibt es in A_{λ_i} insgesamt

$$2 \dim \operatorname{Kern}(\Phi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^l - \dim \operatorname{Kern}(\Phi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{l+1} - \dim \operatorname{Kern}(\Phi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{l-1}$$

Jordan-Kästchen der Länge l.

Insgesamt treten in A_{λ_i} $\dim E_{\lambda_i}$ Jordan-Kästchen auf und es gibt stets mindestens ein Jordan-Kästchen der Länge s_i.

*Notation: A_Φ heißt **Jordansche Normalform** (JNF) von Φ und B eine **Jordan-Basis** von Φ.*

Bemerkung 180. Für Matrizen gilt der Satz über die JNF ebenso und die entsprechende Matrix $\tilde{A}$ heißt dann JNF von A. **$\tilde{A}$ ist ähnlich zu A.**

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ haben genau dann die gleiche JNF (so existent), wenn sie ähnlich sind.

Die reelle Jordan-Form

Lemma 181. *Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ normiert. Dann besitzt p eine Zerlegung*

$$p = (X - c_1)^{r_1} \ldots (X - c_k)^{r_k} (X^2 + \alpha_1 X + \beta_1)^{t_1} \ldots (X^2 + \alpha_m X + \beta_m)^{t_m}$$

wobei die $X^2 + \alpha_j X + \beta_j$ keine reellen Nullstellen haben.

Satz 182. *Besitzt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das charakteristische Polynom p wie oben, in dem c_1, ..., c_k die paarweise verschiedenen reellen Eigenwerte von A sind und die quadratischen Polynome paarweise verschieden* ohne *reelle Nullstellen sind, so existiert eine zu A ähnliche Matrix $\tilde{A}$ mit*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{A_{c_1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{A_{c_k}} & & \\ & & & \boxed{B_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \boxed{B_m} \end{pmatrix}$$

wobei $A_{c_1}, ..., A_{c_k}$ die Jordan-Blöcke zu den Eigenwerten $c_1, ..., c_k$ sind.

Die B_l haben die Form

$$B_l = \begin{pmatrix} \boxed{B_l^1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_l^{n_l}} \end{pmatrix}$$

und für $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$B_l^j = \begin{pmatrix} a_l & b_l & & & & & & \\ -b_l & a_l & & & & & & \\ 1 & 0 & a_l & b_l & & & & \\ 0 & 1 & -b_l & a_l & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 0 & a_l & b_l \\ & & & & 0 & 1 & -b_l & a_l \end{pmatrix}$$

und $a_l \pm \mathrm{i}\, b_l$, $b_l > 0$ die komplexen Nullstellen von $(X^2 + \alpha_l X + \beta_l)$.

Bemerkung 183.

- n_l und die Größe von B_l^j folgen aus der komplexen JNF von A ($A \in \mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$):
  - n_l = Anzahl Jordan-Kästchen zum Eigenwert $\alpha_l + \mathrm{i}\, \beta_l$
  - Für alle Jordan-Kästchen der Länge q zum Eigenwert $\alpha_l + \mathrm{i}\, \beta_l$ existiert ein Jordan-Kästchen B_l^j der Länge $2\, q$.
- Basisbestimmung der JNF $\tilde{A}$ von A erfolgt mit dem obigen Ansatz aus den konjugiert komplexen Basisvektoren zur Jordan-Basis von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Euklidische und unitäre Vektorräume

Definition 184. *V, W $\mathbb{K}$-VRe, $\mathbb{K}$ Körper: Eine Abbildung $B: V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt **Bilinearform**, falls B in beiden Komponenten eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist, also*

- $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$ *und* $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$
- $B(\lambda\, v, w) = \lambda\, B(v, w)$ *und* $B(v, \lambda\, w) = \lambda\, B(v, w)$

Für $V = W$ spricht man von einer Bilinearform auf V.

*Ein solches B heißt **symmetrisch**, falls $B(v, w) = B(w, v)$ für alle $v, w \in V$*

*sowie **positiv definit**, falls $B(v, v) > 0$ für alle $v \in V$, $v \neq O$.*

Definition 185. *Ein **Skalarprodukt** (SKP) auf einem $\mathbb{R}$-VR V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V.*

Bemerkung 186. Ist B SKP auf V, so schreibt man auch $B = \langle\, ,\, \rangle: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ und nennt $V = (V, \langle, \rangle)$ **euklidischen Vektorraum** (EVR).

Definition 187. *$(V, <, >)$ sei euklidischer Vektorraum.*

- $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *heißt **Norm** (oder Länge) von $x \in V$ und $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ heißt Norm. Sie erfüllt:*
  - $\|x\| \geqslant 0$ *für alle $x \in V$ und* $\|O\| = 0$

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für alle* $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(Minkovski-Ungleichung)*

Im Allgemeinen werden Normen nicht *von Skalarprodukten induziert. Von einem solchen stammt eine Norm genau dann, wenn sie die Parallelogrammgleichung (s.u.) erfüllt.*

- *Eine* ***Metrik*** d *auf einer Menge* X *ist eine Abbildung* $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit*
    - $d(x, y) \geqslant 0$ *und* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
    - $d(x, y) = d(y, x)$
    - $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(Dreiecksungleichung)*

  (X, d) *heißt dann* ***metrischer Raum*** *und* $d(x, y)$ *Abstand/Distanz zwischen* x *und* y.

Bemerkung 188.

- $X = V$ $\mathbb{R}$-VR und $\langle\, ,\rangle$ Skalarprodukt auf $V \Rightarrow \langle\, ,\rangle$ induziert Norm $\|\cdot\|$ auf V.

  $\Rightarrow d$ mit $d(x, y) := \|x - y\|$ ist Metrik auf V.
- $x, y \in V$ heißen **orthogonal** $(x \perp y) :\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$
- X Menge $\exists$ Metrik d auf X („diskrete/triviale Metrik“), nämlich $d(x, y) = \begin{cases} 0\colon & x = y \\ 1\colon & x \neq y \end{cases}$
- Für $A, B \subset V$ heißen A und B orthognonal $(A \perp B)$, wenn für alle $x \in A, y \in B$ gilt $x \perp y$.
- Für $A \subset V$ heißt dann $A^\perp := \{x \in V \mid x \perp A\}$ **orthogonales Komplement** von A in V. Dann gilt:
    - $A^\perp$ ist Untervektorraum von V (auch wenn A selbst kein UVR ist!)
    - $A^\perp = [A]^\perp$
    - $A^\perp \cap [A] = \{O\}$
    - $[A] \subset (A^\perp)^\perp$

Satz 189. *Sei V EVR,* $x, y, z \in V$, $\|\cdot\|$ *durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Dann gilt:*

a) $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ *(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)*

   „=“ gilt genau dann, wenn x *und* y *linear abhängig sind.*

b) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(Minkowski-Ungleichung)*

c) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(x, y)$ *(Dreiecksungleichung)*

d) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$ *(Parallelogrammgleichung)*

e) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4\,\langle x, y\rangle$

f) $x \perp y \Longleftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *(Pythagoras)*

Definition 190. *Ist* $(V, \langle\,,\rangle)$ *EVR und* $O \neq x, y \in V$*, so heißt die Zahl* $\varphi \in [0, \pi]$ *mit*

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Winkel zwischen x und y*.*

Satz 191. V *n-dimensionaler* $\mathbb{R}$*-VR mit Basis* $(v_1, \ldots, v_n)$*.*

$\beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist genau dann Skalarprodukt auf V, falls eine symmetrische positiv definite Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *existiert mit* $\beta(x, y) = \hat{x}^\top A\,\hat{y}$*, wobei* $\hat{x}, \hat{y}$ *Koordinatenvektoren von* x, y *sind.*

Satz 192. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch* $\Rightarrow$

- *A diagonalisierbar*
- *Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten sind bezüglich des Standard-SKP im* $\mathbb{R}^n$ *orthogonal.*

Satz 193. *Für eine symmetrische Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gilt:*

$$A \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv}$$

Satz 194. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sei symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

a) *A ist positiv definit*

b) *Es existiert eine invertierbare Matrix* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $A = B^\top B$

   B ist dann obere Dreiecksmatrix

c) *Alle Hauptminoren (Haupt-Unterdeterminanten) von A sind positiv.*

Orthogonalbasen und -projektionen

Definition 195. *V EVR,* $A \subset V$ *nichtleer heißt* ***Orthogonalsystem*** *(OGS), wenn gilt:*

a) $O \notin A$

b) *Paarweise verschiedene Vektoren* $x, y \in A$ *sind orthogonal*

A heißt ***Orthonormalsystem*** *(ONS), wenn A Orthogonalsystem ist und für alle* $x \in A$ *gilt:* $\|x\| = 1$.

Ist A zusätzlich Basis von V, so heißt A ***Orthogonalbasis*** *(OGB) bzw.* ***Orthonormalbasis*** *(ONB)*

Satz 196. *Sei V EVR,* $A \subset V$ *Orthogonalsystem. Dann ist A linear unabhängig.*

Folgerung 197. *Sei A Orthogonalsystem in V. Dann ist A Orthogonalbasis* $\Leftrightarrow$ $[A] = V$*.*

Satz 198. *V EVR mit* $\dim V < \infty$*. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V.*

(gilt auch für VR mit abzählbarer Basis)

Beweis mittels ***Gram-Schmidt-Orthogonalisierung****: Sei* $n = \dim V$*,* $B' := (x_1, \ldots, x_n)$ *Basis von* V

- $\tilde{y_1} := x_1$, $y_1 := \frac{\tilde{y_1}}{\|\tilde{y_1}\|}$
- $\tilde{y_2} := x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle\, y_1$, $y_2 = \frac{\tilde{y_2}}{\|\tilde{y_2}\|}$
- ...
- $\tilde{y_k} := x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k, y_i \rangle\, y_i$, $y_k = \frac{\tilde{y_k}}{\|\tilde{y_k}\|}$

Bemerkung 199.

a) $B = (x_1, \ldots, x_n)$ ONB von $V \Rightarrow$ für alle $x \in V$ gilt $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle\, x_i$

$\Rightarrow$ für alle $x,\, y \in V$ ist $\langle x,\, y \rangle = \hat{x}^\top \hat{y}$ (Standard-Skalarprodukt der Koordinatenvektoren bezüglich B)

Speziell: $\|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2$

b) $A \subset V$ Orthonormalsystem in EVR V, $x \in V$. Dann gilt

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{y \in A} \langle x, y \rangle^2 \qquad \text{„Bessel-Ungleichung“}$$

(wobei höchstens abzählbar viele Summanden >0 sein dürfen)

A heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow$ In der Bessel-Ungleichung gilt „=“. Dann heißt obige Ungleichung **Parseval-Gleichung**.

Definition 200. *V EVR, $\pi \in \mathrm{End}(V)$ heißt* ***Orthogonalprojektion*** *auf $U := \mathrm{Bild}\,\pi$, wenn gilt:*

a) π ist Projektion, d.h. $\pi \circ \pi = \pi$

b) $\pi(x) - x \perp \pi(x)$ für alle $x \in V$

Bemerkung 201.

- π Orthogonalprojektion auf $U \Rightarrow \pi(x) - x \perp U \Rightarrow \mathrm{Kern}\,\pi \perp \mathrm{Bild}\,\pi$
- π Projektion mit $\mathrm{Kern}\,\pi \perp \mathrm{Bild}\,\pi \Rightarrow \pi$ ist Orthogonalprojektion

Satz 202. *V EVR, $U \subset V$ UVR. Es existiert genau dann eine Orthogonalprojektion p auf U, wenn $V = U \oplus U^\perp$. π ist dann eindeutig bestimmt und $U = (U^\perp)^\perp$.*

Folgerung 203. *Ist $\dim U < \infty$, dann existiert immer eine Orthogonalprojektion auf U.*

Satz 204. *V EVR, $U \subset V$ UVR mit $\dim U < \infty$.*

Dann existiert genau eine Orthogonalprojektion $\pi\colon V \longrightarrow U$ und es ist dann $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Satz 205. *V EVR, $U \subset V$ UVR, $\pi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{Bild}\,\pi \subset U$*

$$\pi \text{ ist Orthogonalprojektion auf } U \Leftrightarrow \|x - \pi(x)\| \leqslant \|x - u\| \text{ für alle } x \in V, u \in U$$

In diesem Fall heißt $\|x - \pi(x)\| := d(x, U)$ ***Abstand*** *von x zu U.*

Bemerkung 206. Orthogonalprojektionen „kontrahieren", d.h.

$$\|\pi(x)\| \leqslant \|x\| \tag{1}$$

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leqslant \|x - y\| \tag{2}$$

Für Projektionen sind (1) bzw. (2) charakterisierend dafür, Orthogonalprojektion zu sein!

Adjungierte Abbildungen

Definition 207. *V, W EVR, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.*

*$\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ heißt **Adjungierte / adjungierte Abbildung** von Φ, wenn gilt:*

$$\langle \Phi(v), w \rangle = \langle v, \Psi(w) \rangle \qquad \forall v \in V, w \in W$$

Notation: *Für Ψ schreibt man auch Φ^*.*

Bemerkung 208. Falls ein solches Ψ existiert, ist es eindeutig bestimmt.

Bemerkung 209. Existiert Φ^*, so auch $(\Phi^*)^*$ und es ist $(\Phi^*)^* = \Phi$.

Satz 210. ***(Rieszscher Darstellungssatz)*** *V EVR mit $\dim V < \infty$, $y^* \in V^*$ Linearform auf V. Dann existiert genau ein $v \in V$ mit $y^*(x) = \langle x, v \rangle$.*

Satz 211. *V, W EVR mit $\dim V, \dim W < \infty$.*

Dann existiert zu jedem $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ die adjungierte Abbildung $\Phi^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$.

Bemerkung 212.

a) Wir haben gesehen: Für endlichdimensionale EVR V sind V und V^{**} kanonisch (d.h. basisunabhängig) isomorph, wohingegen, falls V kein Skalarprodukt hat, V und V^* nur nach Wahl einer Basis identifiziert werden können.

   Ist nun V EVR mit $\dim V < \infty$, so ist $\Psi: V \longrightarrow V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ ein Isomorphismus, der nicht von der Wahl einer Basis abhängt. Damit sind V und V^* kanonisch identifizierbar.

b) Identifiziert man V mit V^* wie in a), so ist eine Basis B von V genau dann duale Basis von V^*, wenn B in V Orthonormalbasis ist.

c) Ebenso gilt für V, W wie in Satz 211 und $V = V^*, W = W^*$: Die Adjungierte $\Phi^*: V \longrightarrow W$ stimmt mit der transponierten/dualen Abbildung $\Phi^\top: W^* \longrightarrow V^*$ überein.

d) Folgerung: In diesem Fall gilt für *Orthonormalbasen* von V und W für die entsprechenden Abbildungsmatrizen:

$$A_{\Phi^*} = A_{\Phi^\top} = (A_\Phi)^\top$$

e) Für Φ^* gelten – auch für den Fall $\dim V = \infty$ – dieselben Eigenschaften wie für $\Phi^\top$:

   – $(\Phi^*)^* = \Phi$

   – $\alpha_1 \Phi_1^* + \alpha_2 \Phi_2^* = (\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2)^*$ ($\Rightarrow \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W, V), \Phi \longrightarrow \Phi^*$ linear!)

- $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$

Definition 213. *V EVR, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$.*

*Φ heißt **selbstadjungiert** (s.a.) $:\Leftrightarrow$ $\langle \Phi(x), y\rangle = \langle x, \Phi(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$.*

*Φ heißt **antiselbstadjungiert** (a.s.a) $:\Leftrightarrow$ $\langle \Phi(x), y\rangle = -\langle x, \Phi(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$.*

Bemerkung 214.

- Φ ist s.a. (a.s.a) genau dann, wenn Φ^* existiert und $\Phi^* = \Phi$ bzw. $\Phi^* = -\Phi$.
- Ist V EVR, $\dim V < \infty$, B ONB von V, dann gilt: Φ ist s.a. (a.s.a) genau dann, wenn für die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B gilt: $A_\Phi = A_\Phi^\top$ (A symmetrisch) bzw. $A_\Phi = -A_\Phi^\top$ (A antisymmetrisch).

Satz 215. *V EVR mit $\dim V < \infty$, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:*

$$\Phi \textit{ ist s.a.} \Leftrightarrow \textit{Es existiert eine ONB von V aus Eigenvektoren von } \Phi$$

Bemerkung 216. Die Matrix S mit $S\,A_\Phi\,S^{-1} = $ Diagonalmatrix lässt sich also so wählen, dass ihre Spalten eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bilden, also gilt: $S\,S^{\mathrm{T}} = E_n$.

Definition 217. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **orthogonal**, wenn gilt: $A\,A^{\mathrm{T}} = E_n$.*

Es gilt: A orthogonal $\Leftrightarrow$ $A^\top = A^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $A^\top A = E_n$

Die Menge aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen bildet eine Untergruppe, genannt $O(n)$, von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Beispiel 218. $O(1) = \{\pm 1\}$, $O(2) = \{$Drehungen um O, Spiegelung an Geraden durch $O\}$

Definition 219. *$A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen **orthogonal äquivalent**, wenn gilt: $A' = S\ A\ S^\top$ mit $S \in O(n)$.*

Satz 215 sagt also: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow$ A ist orthogonal äquivalent zu einer Diagonalmatrix.

Beispiel 220.

a) Gegeben eine symmetrische Matrix A.

   Finden einer orthogonalen Matrix S mit $S^\top A\,S = S\,A\,S^\top = $ Diagonalmatrix: Diagonalisieren wie üblich, aber als Basis der Eigenräume je eine ONB bestimmen (Gram-Schmidt). Die Spalten von S sind die Vektoren der ONB.

b) Orthogonalprojektionen $\pi_U\colon V \longrightarrow U$ sind selbstadjungiert (auch wenn $\dim V = \infty$)

Isometrien

Definition 221. *V, W EVR, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt **Isometrie** oder **orthogonale Abbildung**, wenn Φ mit dem Skalarprodukt verträglich ist/das Skalarprodukt erhält, wenn also*

$$\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_W = \langle x, y\rangle_V$$

Bemerkung 222. Φ Isometrie $\Rightarrow$ Φ injektiv.

Definition 223. *V und W heißen* ***isometrisch****, falls es eine* bijektive *Isometrie $V \longrightarrow W$ gibt.*

Satz 224. *V, W EVR, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:*

a) *Φ ist Isometrie*

b) *$\|\Phi(x)\|_W = \|x\|_V$ für alle $x \in V$*

c) *$d_W(\Phi(x), \Phi(y)) = d_V(x, y)$ für alle $x, y \in V$*

Satz 225. *V, W EVR der gleichen Dimension $n < \infty$, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:*

a) *Φ ist Isometrie*

b) *$\forall$ ONB $(x_1, \ldots, x_n)$ von V gilt: $(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n))$ ist ONB von W*

c) *$\exists$ ONB $(x_1, \ldots, x_n)$ von V, sodass gilt: $(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n))$ ist ONB von W*

d) *$\Phi^* \circ \Phi = \mathrm{id}_V$ und $\Phi \circ \Phi^* = \mathrm{id}_W$*

e) *Bezüglich aller ONB B von V und aller ONB C von W ist A_Φ orthogonal.*

f) *Es existieren ONB B von V und C von W, sldass $A_\Phi(B, C)$ orthogonal ist.*

Speziell: *Ist $V = W$, $\dim V = n$, $\Phi: V \longrightarrow V$ Isometrie, dann gilt:*

- $\Phi^* \circ \Phi = \mathrm{id}_V = \Phi \circ \Phi^*$
- $\det \Phi = \det \Phi^*$, *also* $|\det \Phi| = 1$, *somit* $\det \Phi = \pm 1$
- *Jeder Eigenwert λ von Φ hat Betrag 1.*

Definition 226. *Isometrien $\Phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ mit Standard-SKP) heißen*

- ***Drehungen****, falls* $\det \Phi = 1$
- ***(Dreh-)Spiegelungen****, falls* $\det \Phi = -1$

Bemerkung 227. V EVR, $\dim V < \infty$. Dann bilden die Isometrien $\Phi: V \longrightarrow V$ eine Gruppe, die **orthogonale Gruppe** $O(V)$.

Sie ist Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V) = \{\Phi \in \mathrm{End}\, V \mid \Phi \text{ invertierbar}\}$.

Sie enthält als Untergruppe die **spezielle orthogonale Gruppe** $\mathrm{SO}(V) = \{\Phi \in O(V) \mid \det \Phi = +1\}$

Definition 228.

- $O(n) := O(\mathbb{R}^n)$, *$\mathbb{R}^n$ mit Standard-SKP*
- $\mathrm{SO}(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$

$\Rightarrow \mathrm{SO}(n) < O(n) < \mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

Satz 229. *V n-dimensionaler EVR, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$. Dann ist Φ genau dann Isometrie, wenn eine Orthonormalbasis von V existiert, sodass A_Φ bezüglich dieser Basis folgende Form hat:*

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&& \\ &&&&&& \cos\Theta_1 & -\sin\Theta_1 &&& \\ &&&&&& \sin\Theta_1 & \cos\Theta_1 &&& \\ &&&&&&&& \ddots && \\ &&&&&&&&& \cos\Theta_k & -\sin\Theta_k \\ &&&&&&&&& \sin\Theta_k & \cos\Theta_k \end{pmatrix}$$

Interpretation: Φ Isometrie $\Leftrightarrow$ $\exists$ Zerlegung von V in orthogonale Summe

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} W_i,$$

wobei

- $\Phi|_{U_1} = \mathrm{id}$ *(Fix-Unterraum)*
- $\Phi|_{U_2} = \mathrm{id}_{U_2}$ *(Spiegelung an $U_2^\perp = U_1 + \bigoplus W_i$)*
- $\Phi|_{W_i} =$ Drehung im 2-dimensionalen UVR W_i um den Winkel Θ_i

Satz 230. ***(Satz vom Fußball)*** *Wird der Ball nach der 1. Halbzeit zum Anpfiff wieder auf den Mittelpunkt gelegt, so gibt es mindestens zwei Punkte auf dem Ball, die auf denselben Stellen wie zu Beginn der 1. Halbzeit liegen.*

Unitäre Vektorräume

Definition 231. *V $\mathbb{C}$-Vektorraum. $\beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **Hermitesch** oder **hermitesche Form** auf V, falls für alle $a, b \in \mathbb{C}, x, x', y \in V$ gilt:*

(H1). $\beta(a\,x + b\,x', y) = a \cdot \beta(x, y) + b \cdot \beta(x', y)$

(H2). $\beta(x, y) = \overline{\beta(y, x)}$

Bemerkung 232.

- β ist damit im ersten Argument $\mathbb{C}$-linear, im zweiten Argument gilt jedoch:

  $$\beta(x, a\,y + b\,y') = \bar{a} \cdot \beta(x, y) + \bar{b} \cdot \beta(x, y')$$

  Weil β im zweiten Argument nur „halb“ linear ist, nennt man β auch **Sesquilinearform** (von lat. „sesqui“ = „anderthalb)

- Für alle $x \in V$ gilt $\beta(x, x) = \overline{\beta(x, x)} \Longrightarrow \beta(x, x) \in \mathbb{R}$.

  Damit lässt sich die positive Definitheit von β wie im Fall eines SKP auf einem EVR erklären, nämlich durch $\beta(x, x) > 0$ für alle $x \in V$.

Definition 233. *Eine positiv definite hermitesche Form auf einem $\mathbb{C}$-VR V heißt* ***Skalarprodukt*** *auf V. Dann schreibt man auch $\beta = \langle\cdot,\, \cdot\rangle$ und das Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ heißt dann auch* ***unitärer Vektorraum*** *oder* ***komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt****.*

Damit lassen sich in UniVR wie bei EVR Länge, Abstand und Orthogonalität von Vektoren definieren.

Beispiel 234. (Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$)

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \bar{y_i} = x^\top\, \bar{y}$$

Also $\|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2$ bezüglich der Standardbasis

Satz 235. *Satz 189 überträgt sich auf UniVR mit kleinen Modifikationen:*

- *a)–d) bleiben gleich*
- *e) (Parallelogrammgleichung) lautet nun:*

$$4\,\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\,\|x+\mathrm{i}\,y\|^2 - \mathrm{i}\,\|x-\mathrm{i}\,y\|^2$$

- *In f) (Satz des Pythagoras) gilt nur noch die eine Richtung:*

$$x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Definition 236. *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt* ***Hermitesch****, wenn gilt: $A = \overline{A^\top}$.*
Skalarprodukte $\beta = \langle\, ,\rangle$ in UniVR lassen sich durch hermitesche Matrizen beschreiben.

Bemerkung 237. Das Gram-Schmidt-Verfahren gilt in UniVR, ebenso Satz 196.

Bemerkung 238. Ist V UniVR, $B = (x_1, \ldots, x_n)$ ONB von B, dann ist immer noch

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle\, x_i$$

aber für $\|x\|$ gilt nun: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2$ (im EVR fehlt der Betrag)

Bemerkung 239. V UniVR $\Rightarrow$ Orthogonalprojektionen sind wie im EVR definierbar und die Sätze 202–205 gelten entsprechend.

Folgerung 240. *V UniVR, $\dim V < \infty$. Dann hat V eine ONB und es existiert eine Orthogonalprojektion auf jeden UVR von V.*

Bemerkung 241. Der Riezsche Darstellungssatz gilt auch für UniVR.

Achtung: Für UniVR lassen sich V und V^* i.A. nicht mehr kanonisch identifizieren, denn $V \longrightarrow V^*$, $x \mapsto \langle\cdot, x\rangle$ ist nicht $\mathbb{C}$-linear!

Definition 242. *V, W UniVR, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Die* ***Adjungierte / adjungierte Abbildung*** *$\Phi^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$ ist definiert durch*

$$\langle \Phi(v), w \rangle = \langle v, \Phi(w) \rangle \qquad \forall v \in V, w \in W$$

Bemerkung 243. Satz 211 gilt auch für UniVR, ebenso die Rechenregeln für Adjungierte, allerdings mit

$$(\alpha\Phi)^* = \bar{\alpha}\ \Phi^* \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Bemerkung 244. V, W UniVR gleicher Dimension, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$

Für die Abbildungsmatrix von $\Phi^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$ gilt $A_\Phi = (\overline{A_\Phi})^\top$.

Dabei wird jeder Eintrag von A_Φ komplex konjugiert, um $\overline{A_\Phi}$ zu erhalten.

Achtung: Φ^* und die transponierte/duale Abbildung $\Phi^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ sind nun zu unterscheiden, wenn V, W bzw. V^*, W^* sind nicht mehr $\mathbb{C}$-linear isomorph.

Definition 245. *V UniVR, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$.*

Φ heißt ***selbstadjungiert*** *(s.a.) $:\Leftrightarrow \Phi^* = \Phi$*

Φ heißt ***antiselbstadjungiert*** *(a.s.a) $:\Leftrightarrow \Phi^* = -\Phi$*

Bemerkung 246. $\dim V = n < \infty$, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

Φ ist selbstadjungiert $\Rightarrow A_{\Phi^*} = A_\Phi = \overline{A_\Phi}^\top$ (d.h. A ist Hermitesche Matrix)

Φ ist antiselbstadjungiert $\Rightarrow A_{\Phi^*} = -\overline{A_\Phi}^\top$ (d.h. A ist schief-Hermitesche Matrix)

Definition 247. *V, W UniVR, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$*

Φ heißt ***Isometrie / unitär****, falls gilt: $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_W = \langle x, y \rangle_V$ für alle $x, y \in V$.*

Bemerkung 248.

- Φ Isometrie und $W = V \Rightarrow \Phi^* = \Phi^{-1}$

- $\dim V = n < \infty$. Dann gilt für die Abbildungsmatrix einer unitären Abbildung $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ bezüglich einer ONB von V:

  $$A_\Phi \cdot \overline{A_\Phi}^\top = \overline{A_\Phi}^\top \cdot A_\Phi = E_n \Leftrightarrow \overline{A_\Phi}^\top = (A_\Phi)^{-1}$$

  Solche $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen **unitäre Matrizen**.

Definition 249.

- *$U(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A$ unitär$\}$ heißt die* ***unitäre Gruppe*** *(in Dimension n)*

- *$\mathrm{SU}(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ heißt die* ***spezielle unitäre Gruppe*** *(in Dimension n)*

Bemerkung 250. $\mathrm{SU}(n) < U(n) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Im Gegensatz zu $O(n)$ ist $U(n)$ zusammenhängend.

Bemerkung 251. Satz 224 gilt wörtlich auch für unitäre Abbildungen; in Satz 225 e) und f) ist die Orthogonalität der Abbildungsmatrizen durch „Unitarität" zu ersetzen.

Normale Endomorphismen

Definition 252. *V EVR oder UniVR, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$*

*Φ heißt **normal**, wenn die adjungierte Abbildung Φ^* existiert und $\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$*

Definition 253. *$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **normal**, wenn gilt: $A \cdot \bar{A}^\top = \bar{A}^\top \cdot A$*

Beispiel 254.

- Φ selbstadjungiert/antiselbstadjungiert/Isometrie $\Rightarrow$ Φ normal
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch/schiefsymmetrisch/orthogonal $\Rightarrow$ A normal
- $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermitesch/anti-Hermitesch/unitär $\Rightarrow$ B normal

Satz 255. *V EVR oder UniVR, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:*

a) Φ ist normal

b) Φ^* existiert und für alle $x, y \in V$ gilt $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle \Phi^*(x), \Phi^*(y) \rangle$

c) Φ^* existiert und für alle $x \in V$ gilt $\|\Phi(x)\| = \|\Phi^*(x)\|$

Gilt ferner $\dim V = n < \infty$, so sind a), b), c) außerdem äquivalent zu

a) Bezüglich jeder ONB von V ist die Abbildungsmatrix A_Φ von Φ normal

b) Es gibt eine ONB B von V, bezüglich der die Abbildungsmatrix A_Φ von Φ normal ist.

Folgerung 256. *V UniVR, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ normal, so gilt:*

a) $\mathrm{Kern}\,\Phi = \mathrm{Kern}\,\Phi^*$

b) Die Eigenräume von Φ und Φ^* sind gleich, d.h. für $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$\Phi(x) = c \cdot x \Longleftrightarrow \Phi^*(x) = \bar{c} \cdot x$$

c) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stets orthogonal

Satz 257. *V n-dimensionaler UniVR, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:*

a) Φ ist normal

b) Es existiert eine ONB aus Eigenvektoren von Φ in V.

Folgerung 258. *Für Matrizen bedeutet der Satz:*

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ ist normal} \Longleftrightarrow \exists S \in U(n) \colon \bar{S}^\top A\, S \text{ ist diagonal}$$

$\rightsquigarrow$ *spezielle Normalformen für*

1. *Hermitesche Matrizen: Normalform ist Diagonalmatrix mit reellen Eigenwerten*
2. *Anti-Hermitesche Matrizen: Normalform ist Diagonalmatrix mit Eigenwerten mit Realteil* 0
3. *Unitäre Matrizen: Normalform ist Diagonalmatrix mit Eigenwerten vom Betrag* 1.

Satz 259. *V n-dimensionaler EVR. $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann normal, wenn es eine Orthogonalbasis von V gibt, sodass die Abbildungsmatrix von Φ folgende Gestalt hat:*

$$A_\Phi = \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_m & \beta_m \\ & & & & & & -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$. Hier sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die reellen und $\alpha_j \pm \mathrm{i}\,\beta_j$, $\beta_j > 0$, die komplexen Nullstellen von p_Φ.

Satz 260. ***(Für Matrizen)*** *$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann normal, wenn es $S \in O(n)$ gibt, sodass $S^\top A\,S$ von der obigen Form ist mit $\lambda_i, \alpha_j, \beta_j$ wie dort (mit p_A statt p_Φ).*

Bemerkung 261.

- $\tilde{A}$ ist genau die reelle Jordanform der normalen Matrix A.
- Für *schief*symmetrische $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lautet die Normalform

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & \beta_1 & & & \\ & & & -\beta_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & \beta_m \\ & & & & & & -\beta_m & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 262. *$A \in O(n) \Longleftrightarrow \exists S \in O(n)$ mit*

$$\tilde{A} = S^\top A\,S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos\omega_1 & -\sin\omega_1 & & & \\ & & & & & & \sin\omega_1 & \cos\omega_1 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos\omega_k & -\sin\omega_k \\ & & & & & & & & & \sin\omega_k & \cos\omega_k \end{pmatrix}$$

mit $\omega_i \in (0, \pi)$

Affine Geometrie und Quadriken

Definition 263. *Ein Tripel* (A, V, f) *bestehend aus einer nichtleeren Menge* A*, einem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* V *und einer Abbildung* $f: A \times A \longrightarrow V$ *heisst* ***affiner Raum*** *(AR) über* $\mathbb{K}$*, wenn gilt:*

- ***(A1).*** *Für alle* $P \in A$ *und alle* $x \in V$ *existiert genau ein* $Q \in A$ *mit* $f(P, Q) = x$
- ***(A2).*** *Für alle* $P, Q, R \in A$ *ist* $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

Die Elemente von A *heissen auch* ***Punkte*** *und statt* (A, V, f) *schreibt man oft nur* A*.*

$\dim A := \dim V$ *heisst* ***Dimension*** *von* A*.*

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, so heisst* A ***reeller*** *bzw.* ***komplexer*** *AR.*

Ist V *EVR, so heisst* A ***euklidischer affiner Raum*** *(EAR).*

Je zwei Punkten $P, Q \in A$ wird also genau ein Verbindungsvektor $f(P, Q) =: \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \in V$ zugeordnet.

Interpretation:

A1. „Anheften"/„Abtragen" von $x \in V$ in $P \in A$ führt zu genau einem anderen Punkt $Q \in A$ und dafür gilt dann $x = f(P, Q) = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

A2. Abtragen von Vektoren in A ist mit der Vektoraddition in V verträglich.

Folgerung 264.

- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = O \in V \Leftrightarrow P = Q$
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{QP}}$
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}} \Rightarrow Q = R$

  $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}} \Rightarrow Q = P$

Beispiel 265. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum V vermöge

$$\overrightarrow{xy} := y - x$$

Umgekehrt sei A affiner Raum und $O \in A$ *irgendein* Punkt. Dann gibt es für alle $X \in A$ genau einen Verbindungsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$. Es gilt:

$$V = \left\{ \overrightarrow{\mathrm{OX}} \,\middle|\, X \in A \right\} \text{ und } A \longrightarrow V, X \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OX}} \text{ ist bijektiv}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ heißt **Ortsvektor** von $X \in A$ bezüglich O.

Definition 266. A *affiner Raum,* $L \subset A$ *nichtleer heißt* ***affiner Unterraum*** *(AUR) von* $A :\Leftrightarrow$

$$\exists P \in L: \left\{ \overrightarrow{\mathrm{PX}} \,\middle|\, X \in L \right\} \textit{ ist UVR von } V$$

Bemerkung 267.

- L bestimmt eindeutig den UVR $U_L := \{\overrightarrow{\mathrm{XY}} \mid X, Y \in L\}$, den sogenannten **Richtungsraum** oder die **Richtung** von L.
- Affine Unterräume $L \subset A$ sind ebenfalls affine Räume (mit der Einschränkung von f auf L).
- $L \subset A$ AUR $\Rightarrow$ L hat *nach Wahl eines Ursprungs* $O \in A$ eine Darstellung der Form

$$L = \{\overrightarrow{\mathrm{OX}} \mid X \in L\} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + U_L$$

Satz 268. *A affiner Raum, $\emptyset \subset \mathcal{M}$ sei Menge affiner Unterräume von A. Dann gilt:*

$$M := \bigcap_{L \in \mathcal{M}} L \text{ ist (entweder leer oder) ein affiner Unterraum.}$$

Definition 269. *Für eine nichtleere Teilmenge $C \subset A$ heißt der Durchschnitt aller AUR L mit $C \subset L$ die **affine Hülle** von C.*

Definition 270. *Für $C = \{P_1, \ldots, P_k\}$ heißt die affine Hülle von C auch **Verbindungsraum** von $P_1, \ldots, P_k$.*

Notation: $P_1 \vee \ldots \vee P_k$

Definition 271. *Die affine Hülle endlich vieler AUR $L_1, \ldots, L_k$ heißt **Verbindungsraum** von $L_1, \ldots, L_k$, Notation: $L_1 \vee \ldots \vee L_k$.*

Gruppenwirkungen

Definition 272. *Ist X eine Menge und G eine Gruppe, so nennt man einen Homomorphismus $\tau: G \longrightarrow S(X)$ **Wirkung** oder **Aktion** oder **Operation** von G auf X.*

Für alle $g \in G$ ist damit $\tau_g := \tau(g): X \longrightarrow X$ bijektiv, und dass τ Homomorphismus ist, heißt

$$\tau_{g \cdot g'}(x) = \tau(g \cdot g')(x) = \tau_g(\tau_{g'}(x)) \text{ für alle } x \in X, g, g' \in G$$

Beispiel 273. Jede Gruppe wirkt auf sich selbst durch

a) $\ell: G \longrightarrow S(G), g \mapsto \ell_g$ mit $\ell_g(x) = g \circ x$ [*Linkswirkung* von g auf sich selbst]

b) $k: G \longrightarrow S(G), g \mapsto k_g$ mit $k_g: G \longrightarrow G, k_g(x) = g\, x\, g^{-1}$ [*Konjugationswirkung*]

Bemerkung 274. Jede Wirkung $\tau: G \longrightarrow S(X)$ bestimmt eine Abbildung $\Theta = \Theta(\tau): G \times X \longrightarrow X$ durch $\Theta(g, x) = \tau_g(x)$ und es gilt

(W1). Ist $e \in G$ neutrales Element, so ist $\Theta(e, x) = x$ für alle $x \in X$.

(W2). Für alle $g, g' \in G, x \in X$ gilt $\Theta(g, \Theta(g', x)) = \Theta(g \circ g', x)$

Notation: Für $\Theta(g, x)$ schreibt man auch $g \cdot x$.

Umgekehrt definiert jede Abbildung $\Theta: G \times X \longrightarrow X$, die (W1) und (W2) erfüllt, eine Wirkung von G auf X.

Definition 275. *Ist $\tau: G \longrightarrow S(X)$ Gruppenwirkung, so heißt für $x \in X$*

$$G(X) := G \cdot x = \{\tau_g(x) \mid g \in G\}$$

Bahn *oder* ***Orbit*** *von x unter G.*

Definition 276. *Eine Wirkung τ von G auf X heißt* ***einfach transitiv****, falls gilt:*

$$\forall x, y \in X \, \exists! \, g \in G: \tau_g(x) = y$$

«Hier fehlt eventuell noch was!»

Satz 277. *Es seien $L_1, \ldots, L_k \subset \mathbb{A}$ affine Unterräume und $P_i \in L_i$ beliebig gewählt. Dann gilt für den Richtungsraum des Verbindungsraumes $L = L_1 \vee \ldots \vee L_k$:*

$$U_L = U_{L_1} + \ldots + U_{L_k} + [\, \overrightarrow{P_1 P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1 P_k} \,].$$

Ist $L_1 \cap \ldots \cap L_k = \emptyset$, so gilt

$$U_L = U_{L_1} + \ldots + U_{L_k}.$$

Beispiel 278. Der Verbindungsraum von $k+1$ Punkten $P_0, \ldots, P_k$ besitzt den Richtungsraum

$$U = [\, \overrightarrow{P_0 P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0 P_k} \,]$$

und es gilt $\dim U \leqslant k$. Für $k = 1$ und $P_0 \neq P_1$ ist der Richtungsraum eine Gerade, man schreibt dann auch $P_0 P_1$ statt $P_0 \vee P_1$.

Satz 279. *Es sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum und L_1, L_2 affine Unterräume von $\mathbb{A}$ mit zugehörigen Richtungsräumen U_1, U_2. Dann gilt für $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$:*

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 \vee L_2) + \dim (L_1 \cap L_2)$$

und für $L_1 \cap L_2 = \emptyset$:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 \vee L_2) + \dim (U_1 \cap U_2) - 1$$

Definition 280. *Sei L ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$, der nicht gleich $\mathbb{A}$ ist. Gibt es einen Punkt $P \in \mathbb{A}$, so dass der Verbindungsraum von L und P gleich $\mathbb{A}$ ist, so heißt L eine* ***Hyperebene*** *von $\mathbb{A}$.*

Ist $\dim \mathbb{A} = n$, so sind die Hyperebenen genau die affinen Unterräume der Dimension $n-1$.

Definition 281. *Zwei affine Unterräume L_1, L_2 heißen* ***parallel****, geschrieben $L_1 \| L_2$, wenn für die entsprechenden Richtungsräume gilt: $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.*

Zwei Geraden heißen ***windschief****, falls sie weder parallel sind noch einen Punkt gemeinsam haben.*

Definition 282. *Es seien $\mathbb{A}$ ein affiner Raum, $k \in \mathbb{N}_0$ und $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{A}$. Die Punkte $P_0, \ldots, P_k$ heißen* ***affin unabhängig*** *oder* ***in allgemeiner Lage****, wenn $\dim (P_0 \vee \ldots \vee P_k) = k$ ist.*

Sind die Punkte nicht affin unabhängig, so heien sie ***affin abhängig.***

Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{A}$ heißt affin abhängig, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ alle paarweise verschiedenen Punkte $P_0, \ldots, P_k$ aus C affin unabhängig sind, ansonsten affin abhängig.

Satz 283. *Es seien $\mathbb{A}$ ein affiner Raum und $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{A}$. Dann sind äquivalent:*

a) *Die Punkte $P_0, \ldots, P_k$ sind affin unabhängig.*

b) *Die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}$ sind linear unabhängig.*

Bemerkung 284.

- Ist $\mathbb{A} = V$, so gilt außerdem: Die Punkte $x_0, \ldots, x_k$ sind genau dann affin unabhängig, wenn aus $a_0 x_0 + \ldots + a_k x_k = O$ und $a_0 + \ldots + a_k = 0$ stets $a_0 = \ldots = a_k = 0$ folgt.
- Jede Teilmenge einer affin unabhängigen Punktmenge ist affin unabhängig.
- Jede Obermenge einer affin abhängigen Punktmenge ist affin abhängig.
- Sind die Punkte $P_0, \ldots, P_k$ affin abhängig, so gilt $\dim(P_0 \vee \ldots \vee P_k) < k$.
- Jeder k-dimensionale affine Unterraum ist affine Hülle von $k + 1$ affin unabhängigen Punkten.

Definition 285. *Es sei enL ein k-dimensionaler affiner Unterraum von $\mathbb{A}$ und $P_0, \ldots, P_k$ $k+1$ affin unabhängige Punkte in L.*

Dann heißt $\left(P_0;\ \overrightarrow{P_0P_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{P_0P_k}\right)$ ein ***affines Koordinatensystem*** *von L mit dem* ***Koordinatenursprung*** *P_0, den* ***Koordinatenachsen*** *P_0P_i und den* ***Einheitspunkten*** *P_i auf diesen Achsen.*

Für jeden Punkt $P \in L$ heißen die Koordinaten $a_1,\ \ldots,\ a_k$ des Vektors $\overrightarrow{P_0P}$ bezüglich der Basis $\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\right)$ von U_L die ***affinen Koordinaten*** *des Punktes P bezüglich des affinen Koordinatensystems $\left(P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\right)$. Wir schreiben dann auch $P(a_1, \ldots, a_k)$.*

In einem n-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}$ erhalten wir also für jede Wahl eines Ursprungs $O \in \mathbb{A}$ und jede Wahl einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V ein affines Koordinatensystem $(O; v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{A}$.

Ist $\mathbb{A}$ euklidischer Raum und ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V, so sprechen wir von einem ***kartesischen Koordinatensystem*** *$(O; v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{A}$ und die affinen Koordinaten eines Punktes X heißen dann* ***kartesische Koordinaten****.*

Satz 286. *Sei L ein k-dimensionaler affiner Unterraum von $\mathbb{A}$ und $\left(P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\right)$ ein affines Koordinatensystem in L. Dann gilt für die Ortsvektoren der Punkte $P \in L$ bezüglich eines beliebigen Ursprungs $O \in \mathbb{A}$:*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + a_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{P_0P_k}$$

wobei $a_1, \ldots, a_k$ die affinen Koordinaten von P bezüglich des Koordinatensystems sind. Dies heißt eine ***Parameterdarstellung 1. Art*** *von L mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{P_0P_k}$ und den Parametern $a_1, \ldots, a_k$.*

Ebenso gilt mit $a_0 := 1 - a_1 - \ldots - a_k$:

$$\overrightarrow{OP} = a_0 \overrightarrow{OP_0} + a_1 \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{\mathrm{OP}_k}, \quad a_0 + \ldots + a_k = 1$$

Dies heißt eine ***Parameterdarstellung 2. Art*** *von L. Die eindeutig bestimmten Skalare $a_0, \ldots,$ a_k sind unabhängig von der Wahl von O und heißen* ***Schwerpunktskoordinaten*** *oder* ***baryzentrische Koordinaten*** *von P bezüglich $P_0, \ldots, P_k$.*

Ist $\operatorname{char} \mathbb{K}$ kein Teiler von $k + 1$, so heißt der Punkt S mit den Koordinaten $a_0 = \ldots = a_k = \frac{1}{k+1}$ ***Schwerpunkt*** *von $P_0, \ldots, P_k$.*

*Letztere Darstellung bezeichnet man auch als **Affinkombination** der Vektoren $\overrightarrow{OP_0}$, ..., $\overrightarrow{OP_k}$. Entsprechend heißt $P \in \mathbb{A}$ Affinkombination der Punkte $P_0, \ldots, P_k$, wenn eine solche Darstellung existiert. In diesem Fall gilt die Darstellung dann für alle $O \in \mathbb{A}$. Sind $P_0, \ldots, P_k$ affin unabhängig, so sind $a_0, \ldots, a_k$ eindeutig bestimmt (nämlich die Schwerpunktskoordinaten von P).*

Bemerkung 287.

a) P ist genau dann Affinkombination der Punkte $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{A}$, wenn es Zahlen $a_0, \ldots, a_k$ gibt mit $a_0 + \ldots + a_k = 1$ und

$$a_0\, \overrightarrow{PP_0} + \ldots + a_k\, \overrightarrow{PP_k} = O$$

b) P ist genau dann Affinkombination der affin unabhängigen Punkte P_0, ..., $P_k \in \mathbb{A}$, wenn $P_0, \ldots, P_k, P$ affin abhängig sind.

c) Sei $C \in \mathbb{A}$ nichtleer. Dann ist die affine Hülle von C die Menge aller Affinkombinationen von Punkten aus C.

Orthogonale Unterräume

Definition 288. *Seien L_1 und L_2 affine Unterräume, die nicht parallel sind, mit Richtungsräumen U_1 bzw. U_2. Betrachte die orthogonalen Komplemente $W_1 := (U_1 \cap U_2)^\perp \cap U_1$, $W_2 := (U_1 \cap U_2)^\perp \cap U_2$ des Schnittes $U_1 \cap U_2$ in U_1 bzw. U_2. Es gilt $W_i \neq \{O\}$, da L_1 und L_2 nicht parallel sind.*

*Die Unterräume L_1 und L_2 heißen **orthogonal** ($L_1 \perp L_2$), falls $W_1 \perp W_2$ gilt.*

*Ist L_1 eine Gerade und $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, so heißt L_1 auch ein **Lot** auf L_2.*

Bemerkung 289.

- $U_{L_1} \cap U_{L_2} = \{O\} \Rightarrow w_1 = U_{L_1}, w_2 = U_{L_2} \Rightarrow L_1 \perp L_2$, $U_{L_1} \perp U_{L_2}$
- Orthogonale Unterräume sind nie parallel, müssen sich aber auch nicht schneiden.
- ℓ Lot auf AUR $L \Rightarrow \ell \cap L = \{p\}$ [p Lotfußpunkt]

Definition 290. *A EAR, $X, Y \in A$. Der **Abstand** $d(X,Y)$ von X und Y ist definiert als*

$$d(X,Y) := \left\| \overrightarrow{XY} \right\|$$

(A,d) ist also metrischer Raum.

A sei n-dimensional, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ in kartesischen *Koordinaten bezüglich eines KoSys $(O; v_1, \ldots, v_n)$*

$$\Rightarrow d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Definition 291. *$M_1, M_2 \subset A$ beliebige Teilmengen:*

$$d(M_1, M_2) := \inf\{d(X_1, X_2) \mid X_1 \in M_1, X_2 \in M_2\}$$

Im Allgemeinen wird das Infimum nicht angenommen!

Satz 292. *L_1, L_2 EUR mit Richtungsräumen $U_1 = U_{L_1}$, $U_2 = U_{L_2}$, $P_1 \in U_1$, $P_2 \in U_2$:*

$$d(L_1, L_2) = d\big(\overrightarrow{P_1P_2}, U_1 + U_2\big) = \left\|\overrightarrow{P_1P_2} - \pi_{U_1+U_2}\big(\overrightarrow{P_1P_2}\big)\right\|$$

wobei $\pi_{U_1+U_2}$ Orthogonalprojektion ist.

Bemerkung 293.

- Punkte Q_1, Q_2 mit $d(Q_1, Q_2) = d(L_1, L_2)$ erhält man so:

  Gilt $\pi_{U_1+U_2}\big(\overrightarrow{P_1P_2}\big) = x_1 + x_2$, $x_i \in U_i$, so seien Q_1, Q_2 gegeben durch

  $$x_1 = \overrightarrow{P_1Q_1}, \ -x_2 = \overrightarrow{P_2Q_2}$$

- $L_1 \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow Q_1 \neq Q_2$ und die Gerade Q_1Q_2 ist *gemeinsames* Lot von L_1 und L_2.

  Dann gilt ferner Q_1, Q_2 sind eindeutig $\Leftrightarrow U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ (es gibt also keine parallelen Geraden in L_1 und L_2.

- Spezialfall: $X \in A$, L AUR. Dann gilt für beliebige Punkte $P \in L$:

  $$d(X, L) = \left\|\overrightarrow{PX} - \pi_{U_L}\big(\overrightarrow{PX}\big)\right\|$$

Affine Abbildungen

Definition 294. *$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ seien affine Räume mit zugehörigen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V, W.*

*$\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ heißt **affine Abbildung (affine Transformation)**, wenn gilt:*

$$\exists \Phi: V \longrightarrow W \text{ linear mit } \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \Phi\big(\overrightarrow{PQ}\big) \text{ für alle } P, Q \in \mathbb{A}$$

*Ist φ zusätzlich bijektiv, so heißt φ auch **Affinität**.*

Bemerkung 295. Es reicht aus, den Spezialfall $\mathbb{A} = V$ und $\mathbb{B} = W$ mit

$$\varphi: V \longrightarrow W, x \mapsto \Phi(x) + w$$

mit dem **Translationsvektor** w zu betrachten

Satz 296. *$\mathbb{A}, \mathbb{B}$ affine Räume über $\mathbb{K}$, $\dim \mathbb{A} = n$, $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{A}$ affin unabhängig und $Q_0, \ldots, Q_n \in \mathbb{B}$ beliebig. Dann existiert genau eine affine Abbildung $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ mit $\varphi(P_i) = Q_i$ für alle i.*

(Affine Abbildungen sind durch ihre Werte auf affinen KoSys eindeutig festgelegt.)

Folgerung 297. ***(Koordinatenwechsel in affinen Räumen)*** *Koordinatenwechsel in affinen Räumen erfolgen durch Affinitäten und umgekehrt bilden Affinitäten $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ mit assoziierten Vektorraumisomorphismen $\Phi: V \longrightarrow V$ ein Koordinatensystem $(O; v_1, \ldots, v_n)$ auf ein neues Koordinatensystem $(\varphi(O); \Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_n))$ ab, für das die affinen Koordinaten eines Punktes im alten und neuem System übereinstimmen.*

Bemerkung 298.

- Affine Abbildungen bilden AUR in AUR und parallele AUR in parallele AUR ab.

- Affinitäten erhalten die Dimension von AUR, speziell sind sie geraden- und parallelentreu.
- Affine Abbildungen sind außerdem teilverhältnistreu: $\mathrm{TV}(\varphi(P), \varphi(Q); \varphi(R)) = \mathrm{TV}(P, Q; R)$

Satz 299. *Jede bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, die geradentreu, parallelentreu und teilverhältnistreu ist, ist eine Affinität.*

Bemerkung 300. Die Affinitäten $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ bilden eine Gruppe bezüglich $\circ$.

Definition 301. *$M_1, M_2 \subset \mathbb{A}$ heißen **affin äquivalent**, falls eine Affinität $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ existiert mit $\varphi(M_1) = M_2$.*

Affine Abbildungen in euklidischen Räumen

Definition 302. *Seien $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ euklidische affine Räume, $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ affine Abbildung mit zugehöriger linearer Abbildung Φ.*

*φ heißt **Isometrie**, falls Φ Isometrie ist.*

*φ heißt **eigentlich**, wenn $\det \Phi = +1$ ist, **uneigentlich**, wenn $\det \Phi = -1$ ist.*

Bemerkung 303. Isometrien lassen Abstände fest: Für $X, Y \in \mathbb{A}$ gilt

$$d(\varphi(X), \varphi(Y)) = d(X, Y)$$

Diese Eigenschaft charakterisiert Isometrien:

Satz 304. *$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ euklidische affine Räume, $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ beliebig (nicht unbedingt affin). Dann gilt:*

$$\varphi \text{ Isometrie} \Leftrightarrow \text{Für alle } X, Y \in \mathbb{A} \text{ gilt } d(X, Y) = d(\varphi(X), \varphi(Y))$$

Bemerkung 305.

- Isometrien $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ eines euklidischen Raumes $\mathbb{A}$ bilden eine Untergruppe der Gruppe aller Affinitäten von $\mathbb{A}$.
- $M_1, M_2 \in \mathbb{A}$ heißen **kongruent**, wenn eine **Bewegung** von $\mathbb{A}$ (Isometrie $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$) existiert mit $\varphi(M_1) = M_2$.
- Kongruenz gibt eine feinere Klasseneinteilung als affine Äquivalenz.

Quadriken in affinen Räumen

Definition 306. *Sei $\mathbb{A}$ reeller affiner Raum, $\dim \mathbb{A} = n$, mit Richtungsvektorraum V und Ursprung O. Sei außerdem $\beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $\beta \neq 0$, $\Phi: V \longrightarrow \mathbb{R}$ Linearform, $c \in \mathbb{R}$.*

Ist die Punktmenge

$$Q = \left\{ X \in \mathbb{A} \,|\, \overrightarrow{OX} = x, \beta(x, x) + 2\,\Phi(x) + c = O \right\}$$

*nicht leer, so heißt Q **Quadrik**. Für $n = 2$ heißt Q dann auch **Kegelschnitt**.*

*Ist die affine Hülle von Q $\operatorname{aff} Q = \mathbb{A}$, so heißt Q **eigentlich**.*

Bemerkung 307. Die Koordinaten $\hat{x}$ bezüglich eines affinen KoSys $(O; v_1, ..., v_n)$ erfüllen eine Gleichung der Form

$$\hat{x}^\top A\,\hat{x} + 2\,b^\top \hat{x} + c = O$$

mit $A = (\beta(v_i, v_j))$ symmetrisch, $b^\top = (\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_n))$.

Quadriken sind Nullstellenmengen von Polynomen in n Variablen vom Grad 2.

Satz 308. *Sei $Q \subset \mathbb{A}$ eine Quadrik und $\varphi: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ Affinität. Dann ist auch $\varphi(Q)$ eine Quadrik und $\varphi(Q)$ ist eigentlich genau dann, wenn Q eigentlich ist.*

Satz 309. ***(Affine Hauptachsentransformation von Quadriken)*** *Es sei $\mathbb{A}$ ein n-dimensionaler affiner Raum. Dann lässt sich jede Quadrik $Q \subset \mathbb{A}$ bezüglich eines geeigneten affinen KoSys durch eine der folgenden Gleichungen* ***(affinen Normalformen)*** *beschreiben:*

I. $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 0$ *mit* $0 < p \leqslant r \leqslant n,\ r - p \leqslant p$

II. $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 1$ *mit* $0 < p \leqslant r \leqslant n$

III. $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 2\,x_n$ *mit* $0 < p \leqslant r < n,\ r - p \leqslant p$

Satz 310. *Zwei Quadriken Q und Q' sind genau dann affin äquivalent, wenn die affinen Normalformen von Q und Q' vom gleichen Typ sind und $r = r'$, $p = p'$ gilt.*