I. ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Menge:

"Ansammlung von Objekten"
Wichtige Mengen: $\varnothing, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathcal{P}(M)$ (Potenzmenge)
Operationen: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, A^n, $|A|$

Abbildung:

"Vorschrift, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zuordnet"
$f : M \ni m \mapsto n \in N$
$\mathrm{Abb}(M, N) = \{f : M \to N\}$
Identität: $Id_m : M \ni m \mapsto m \in M$
Komposition: $f : M \to N, g : N \to O; g \circ f : M \to O \ (= g(f(m)))$
Einschränkung: $f : M \to N, T \subset M; f\mid_T : T \to N$
Bild: $f(U) = \{y \in N \mid \exists m \in U : f(m) = y\}$
Urbild: $f^{-1}(V) = \{m \in M \mid f(m) \in V\}$
Injektivität: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (kein $n \in N$ wird mehrfach getroffen, z.B. $f(x) = x^3$)
Surjektivität: $\forall n \in N\ \exists m \in M : f(m) = n$ (f trifft jedes $n \in N$, z.B. $f(x) = x^3$)
Bijektivität: Injektiv und Surjektiv ($\exists g : N \to M : g \circ f = Id_M \wedge f \circ g = Id_N \rightsquigarrow g =: f^{-1}$ Umkehrabbildung)

Relation:

$R \subseteq M \times M$
xRy statt $(x, y) \in R$
Reflexivität: $\forall x \in M : xRx$
Symmetrie: $\forall x, y \in M : xRy \Leftrightarrow yRx$
Transitivität: $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
Äquivalenzrelation: reflexiv, transitiv, symmetrisch (z.B. $=$)
Antisymmetrisch: $\forall x, y \in M : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
Halbordnung: reflexiv, transitiv, antisymmetrisch (z.B. $\leq$ auf $\mathbb{R}$)
Ordnung: totale Halbordnung ($\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$)

II. GRUPPEN

Fundamentales:

Verknüpfung: $\star : M \times M \to M$
Gruppe: $(M, \star)$ mit:

1. $\star$ assoziativ
2. neutrales Element e ($\forall m \in M : m \star e = e \star m = m$)
3. inverse Elemente m^{-1} ($\forall m \in M : m \star m^{-1} = m^{-1} \star m = e$)

abelsche Gruppe: $\star$ kommutativ (auch kommutative Gruppe)

Untergruppe:

$(H \subseteq G, \circ)$ Untergruppe von $(G, \star)$, wenn

1. $(H, \circ)$ Gruppe
2. $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \circ h_2 = h_1 \star h_2$

Untergruppenkriterium: $H \neq \varnothing \wedge \forall h_1, h_2 \in H : h_1 \star h_2^{-1} \in H$
Gruppendurchschnitt: G Gruppe, $I \neq \varnothing, \forall i \in I : U_i$ Untergruppe von $G \rightsquigarrow \bigcap_{i \in I} U_i$ Untergruppe von G
Gruppenerzeugnis: $M \subseteq G, I = \{X : X$ Untergruppe von $G \wedge X$ enthält $M\}$, $\langle M \rangle = \bigcap_{X \in I} X$ Gruppenerzeugnis von M
zyklische Gruppe: $\exists a \in G : G = \langle a \rangle$
Ordnung:

1. Gruppe: Kardinalität von G
2. $g \in G$: $|\langle g \rangle|$

H Untergruppe von $G \Rightarrow |H|$ teilt $|G|$

Gruppenhomomorphismus:

$= f : G \to H\ \forall x, y \in G : f(x \star y) = f(x) \circ f(y)$
Eigenschaften:

1. $f(e_G) = e_H$
2. $\forall g \in G : f(g)^{-1} = f(g^{-1})$
3. $f^{-1}(\{e_H\})$ Untergruppe von G
4. f injektiv $\Leftrightarrow f^{-1}(\{e_H\}) = \{e_g\}$

$\mathrm{Hom}(G, H)$: Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach H
Kern: $= f^{-1}(\{e_H\})$
Endomorphismus: $f \in \mathrm{Hom}(G, G) \Leftrightarrow f \in \mathrm{End}(G)$
Isomorphismus: $f \in \mathrm{Hom}(G, H) \wedge f$ bijektiv $\rightsquigarrow f \in \mathrm{Iso}(G, H)$ ($\mathrm{Iso}(G, H) \neq \varnothing \Rightarrow G, H$ isomorph)
Automorphismus: $f \in \mathrm{End}(G) \wedge f$ bijektiv $\rightsquigarrow f \in \mathrm{Aut}(G)$

Symmetrische Gruppe:

D Menge, $M := \{f \in \mathrm{Abb}(D, D) : f$ bijektiv$\}$ Gruppe mit Komposition $\rightsquigarrow$ symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}_D = (M, \circ)$
$D = \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \mathrm{Sym}_D =: S_n$ Permutationen der ersten n Zahlen aus $\mathbb{N}$, $|S_n| = n!$
d-Zykel: $d \leq n$ Elemente aus S_n werden im Kreis getauscht
Transposition: Zwei Elemente werden vertauscht (2-Zykel)
Zerlegung: Permutation zerlegbar in Transpositionen (durch Komposition): $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$
Signum:

1. Transposition: $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$
2. Permutation: $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k \rightsquigarrow \mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$

III. RINGE UND KÖRPER

Ring:

$(R, +, \cdot)$ mit

1. $(R, +)$ abelsche Gruppe
2. $\cdot$ assoziativ
3. neutrales Element 1_R von $\cdot$
4. $\cdot$ distributiv

kommutativer Ring: $\cdot$ kommutativ
Teilring: $T \subseteq R$ mit

1. $1_R \in T$
2. $\forall t_1, t_2 \in T : t_1 + t_2, t_1 t_2 \in T$
3. $(T, +, \cdot)$ Ring

Ringhomomorphismus: $\varphi : R \Rightarrow S$ mit

1. $\varphi(x +_R y) = \varphi(x) +_S \varphi(y)$
2. $\varphi(x \cdot_R y) = \varphi(x) \cdot_S \varphi(y)$
3. $\varphi(1_R) = 1_S$

Einheit: $= x \in R\ \exists y \in R : xy = yx = 1_R\ (y = x^{-1})$
$\rightsquigarrow R^\times$ Menge aller R-Einheiten

kleiner Fermat: p prim $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} : p$ teilt $a^p - a$

$\varphi : R \to S$ Ringhom. $\Rightarrow \Psi : R^\times \to S^\times$ Gruppenhom.

Körper:

$=$ kommutativer Ring, $0_K \neq 1_K$, $K^\times = K \setminus \{0_K\}$
K Körper, R Ring mit $0_R \neq 1_R \Rightarrow$ jeder Ringhom. $K \to R$ ist injektiv

komplexe Zahlen:

$= \mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R}\}$
Eigenschaften:

1. $(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$
2. $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) = (ac-bd)+(ad+cb)\mathrm{i}$ (3. binomische Formel)
3. $\overline{a + b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}$ (komplex konjugiertes)

Polarkoordinaten:

1. $z = r(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)), r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
2. $u = c + d\mathrm{i} = s(\cos(\beta) + \mathrm{i}\sin(\beta))$
   $\rightsquigarrow z \cdot u = rs(\cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha + \beta))$

Polynomring:

$= \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, a_i \in R$ mit $N \in \mathbb{N}_0\ \forall j \geq N : a_j = 0\} = R[X]$
(Veränderliche X, Abbruchsbedingung N)
Eigenschaften:

1. $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$
2. $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = (\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i})_{k\in\mathbb{N}_0}$
3. Einselement $(1, 0, \dots)$

$\rightsquigarrow R[X] = \{\sum_{i=0}^d r_i X^i : d \in \mathbb{N}_0, r_0, \dots, r_d \in R\}$
$R \subset R[X]$ mittels $R \ni r \mapsto rX^0 \in R[X]$

Grad: $\mathrm{Grad}(\sum_{i=0}^d r_i X^i) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } \sum_{i=0}^d r_i X^i = 0 \\ \max(\{i \in \mathbb{N}_0 : r_i \neq 0\}) & \text{sonst} \end{cases}$

Eigenschaften Grad:

1. $\mathrm{Grad}(f + g) \leq \max(\{\mathrm{Grad}(f), \mathrm{Grad}(g)\})$
2. $\mathrm{Grad}(f \cdot g) \leq \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g)$
   $=$, falls $\forall a, b \in R \setminus \{0\} : ab \neq 0$

Leitkoeffizient: $= r_{\mathrm{Grad}(f)}\ (f = \sum_{i=0}^d r_i X^i \neq 0)$
Potenzen: A Ring, $a \in A$; $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$

Zentrum: $Z(A) = \{a \in A : \forall x \in A : ax = xa\}$
(kommutativer A-Teilring)
Einsetzabbildung: R Teilring von $Z(A)$,
$E_a : R[X] \to A, f \mapsto E_a(f) = f(a)$
$\rightsquigarrow E_a(f + g) = E_a(f) + E_a(g), E_a(f \cdot g) = E_a(f)E_a(g)$
Teiler: $f, g \in R[X]$. g Teiler von $f \Leftrightarrow \exists h \in R[X] : f = gh$

IV. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME UND MATRIZEN

Grundlegendes – LGS:

p Gleichungen mit q Unbekannten über kommutativem Ring R
Kurzschreibweise $\sum_{j=1}^q a_{ij} x_j = b_i\ (1 \leq i \leq p)$ $(\star)$
Lösungsmenge: $\mathcal{L}(\star)$
homogenes LGS: $\sum_{j=1}^q a_{ij} x_j = 0\ (1 \leq i \leq p)$

Grundlegendes – Matrix:

$= A : \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\} \to R$
(R kommutativer Ring, $p, q \in \mathbb{N}$, $p = $ #Zeilen, $q = $ #Spalten)

$$a_{ij} = A(i, j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$R^{p\times q} =$ Menge der $p \times q$-Matrizen über R
Produkt: $A \in R^{p\times q}, B \in R^{q\times r}$. $A \cdot B =: C \in R^{p\times r}$:
c_{ij} $i$te Zeile von A * $j$te Spalte von B
$D(A+B) = DA+DB, (A+B)D' = AD'+BD'$ (Distributivität)
i.A.: $AB \neq BA$ (keine Kommutativität)
Summe: $A \in R^{p\times q}, B \in R^{p\times q}$. $A + B =: C \in R^{p\times q}$:
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
Nullmatrix: $\forall i, j : a_{ij} = 0 (=: 0)$
Einheitsmatrix: $\forall i, j : a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} =: I_p \in R^{p\times p}$
Skalare: $= r \in R : A \cdot r = r \cdot A = (r \cdot a_{ij})_{i,j}$
Transponierte Matrix: $A^T(j, i) = A(i, j)$ (gedreht um Diagonale)
$\rightsquigarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
$\rightsquigarrow (R^{p\times p}, +, \cdot)$ ist Ring (Einselement I_p, Nullelement 0)
Symmetrische Matrix: $= A \in K^{n\times n} : A^\top = A$

Invertierbare Matrix:

$GL_p(R) = \{A \in R^{p\times p} \mid \exists B \in R^{p\times p} : AB = BA = I_p\}$
$(= (R^{p\times p})^\times, B =: A^{-1}$, Menge der invertierbaren Matrizen)
Elementarmatrix: $E_{i_j}(k, l) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \wedge j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Umformungsmatrizen:

1. Addition: $A_{i,j}(\alpha) = I_p + \alpha E_{i,j} \in GL_p(R)$
   $\rightsquigarrow \alpha$-mal $j$te Zeile zur $i$ten Zeile addieren
2. Vertauschung: $V_{i,j} = I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \in GL_p(R)$
   $\rightsquigarrow$ tauschen der $i$ten und $j$ten Zeile
3. Diagonal: $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^p \alpha_i E_{i,i} \in GL_p(R)$
   $\rightsquigarrow$ $i$te Zeile mit α_i multiplizieren

Gauss-Normalform: $=$ LGS in Treppenform
$\rightsquigarrow$ Lösen durch Anwenden von Umformungsmatrizen
Rang: $= \#$ nichtleerer Zeilen in Gauß-Normalform
Spur: $=$ Summe der Diagonaleinträge
Gauß-Algorithmus: A^{-1} für $A \in K^{p\times p}$ bestimmen:

1. $(A \mid Id_p)$ aufschreiben
2. A zu Id_p umformen, Umformungen auch auf Id_p anwenden
3. Man erhält $(Id_p \mid A^{-1})$. Klappt nicht $\Rightarrow A \notin GL_p(K)$

Reguläre Matrix: $A \in K^{p\times p}$ regulär $\Leftrightarrow A$ invertierbar $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$
$\Leftrightarrow \mathrm{Rang}(A) = p$
Rechenregeln:

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$

Äquivalente Matrizen: $A, B \in K^{p\times q}$ äquivalent
$\Leftrightarrow \exists S \in \mathrm{GL}_q(K), T \in \mathrm{GL}_p(K) : B = T \cdot A \cdot S$
Ähnliche Matrizen: $A, \tilde{A} \in K^{d\times d}$ ähnlich
$\Leftrightarrow \exists S \in \mathrm{GL}_d(K) : \tilde{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S$
$\rightsquigarrow \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(\tilde{A}),\ \mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(\tilde{A})$

V. VEKTORRÄUME

Grundlagen:

Vektorraum (über Körper K):
$= (V, \oplus, \odot), \oplus : V \times V \to V, \odot : K \times V \to V$ mit

1. $(V, \oplus)$ kommutative Gruppe
2. $\forall v \in V : 1_K \cdot v = v$
3. $\oplus$ assoziativ
4. Distributivität

Untervektorraum: $= (U, \oplus, \odot) \leq (V, \oplus, \odot)$ mit

1. $(U, \oplus)$ Untergruppe von $(V, \oplus)$
2. $\forall a \in K, u \in U : a \cdot u \in U$

UVR-Kriterium: $U \leq V$
$\Leftrightarrow U \neq \varnothing \wedge \forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U \wedge \forall a \in K, u \in U : a \cdot u \in U$

UVR-Durchschnitt: V K-VR, $\forall i \in I : U_i \leq V \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \leq V$

Linearkombination: $= \sum_{m \in M} \alpha(m) \cdot m \in V$
($M \subseteq$ K-VR $V, \alpha : M \to K = 0$ ffa $m \in M$)

Aufspann: $= \langle M \rangle$, Menge aller Linearkombinationen in M
$=$ Hülle von M

Erzeugendensystem: M ist Erzeugendensystem von $\langle M \rangle$

Träger: Träger$(\alpha \in \mathrm{Abb}(M, K)) = \{m \in M \mid \alpha(m) \neq 0\}$
$\rightsquigarrow \mathrm{Abb}(M, K)_0 = \{f \in \mathrm{Abb}(M, k) \mid \text{Träger}(f) < \infty\}$

UVR-Summe: $\forall i \in I : U_i \leq V$. $\sum_{i \in I} U_i = \langle \bigcup_{i \in I} U_i \rangle$

direkte UVR-Summe: $\Leftrightarrow \forall u_i \in U_i$:
$(u_1 + \cdots + u_n = 0 \Leftrightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0)$
$\rightsquigarrow U_i \cap U_j = \{0\}$ $(i \neq j)$
$\rightsquigarrow \bigoplus_{i=1}^n U_i$ statt $\sum_{i=1}^n U_i$

VR-Homomorphismus:

$= \varphi : V \to W$ mit

1. $\forall u, v \in V : \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2. $\forall \alpha \in K, v \in V : \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \varphi(v)$

lineare Abbildung: $=$ VR-Hom.

Aut, End, Iso: Wie Gruppenhom.

Kern: $\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$

φ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$

$\mathrm{Hom}(V, W) \leq \mathrm{Abb}(V, W)$

$K^{p \times q} \ni A \mapsto \varphi_A \in \mathrm{Hom}(K^q, K^p)$ ist K-VR-Iso.
$(A \in K^{p \times q}, \varphi_A : K^q \to K^p, v \mapsto \varphi_A(v) = A \cdot v)$

Basis:

$= B \subseteq V$ $\forall v \in V : \exists! \lambda \in \mathrm{Abb}(B, K)_0 : v = \sum_{b \in B} \lambda(b) \cdot b$
(jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von B-Vektoren schreiben, B ist *minimales Erzeugendensystem*)

$|$ Basis von K^p $|= p$

Koordinatenabbildung: $D_B(v) : V \to \mathrm{Abb}(M, K)_0$
Koordinatenvektor von v bzgl. B

Lineare Unabhängigkeit: $M \subset V$ lin. unabh.
$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Abb}(M, K)_0 : (\sum_{m \in M} \lambda(m) \cdot m = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0)$
($\Leftrightarrow$ 0 kann nicht linearkombiniert werden, sonst lin. abh.)

B Basis
$\Leftrightarrow B$ maximal linear unabhängig
$\Leftrightarrow B$ minimales Erzeugendensystem
$\Leftrightarrow B$ linear unabhängiges Erzeugendensystem

Existenz: V K-VR mit endlichem Erzeugendensystem
$\Leftrightarrow V$ hat Basis
$\Leftrightarrow$ Basis in jedem endl. V-Erzeugendensystem enthalten
$\Leftrightarrow$ jedes lin. unabh. $M \subset V$ lässt sich zu Basis *ergänzen*
$\Leftrightarrow$ alle V-Basen haben gleich viele Elemente

Dimension:

$= \dim_K(V) = |B|$ (B Basis von V)

Dimension UVR: $U \leq V \Rightarrow \dim_K(U) \leq \dim_K(V)$
$\rightsquigarrow \dim_K(U) = \dim_K(V) \Leftrightarrow U = V$
direkte Summe: $\dim_K(\bigoplus_{i=1}^n U_i) = \sum_{i=1}^n \dim_K(U_i)$

$U, W \leq V \Rightarrow \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

komplementärer UVR: W komplementär zu $U \Leftrightarrow V = U \oplus W$
$\rightsquigarrow \dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$

Faktorraum:

$\sim$: $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$ $(U \leq V)$
$\rightsquigarrow v_1$ und v_2 unterscheiden sich um $u \in U$

$[v]$: $= v + U = \{v + u \mid u \in U\}$

V/U: $= \{[v] \mid v \in V\}$ ist VR:

1. $[v_1 + v_2] = [v_1] + [v_2]$
2. $\lambda[v] = [\lambda v]$

Faktorraum: $= V/U$

kanonische Projektion: $\Pi_{V/U} : V \to V/U, v \mapsto [v]$
$\rightsquigarrow \mathrm{Kern}(\Pi_{V/U}) = U$

Homomorphiesatz: V, W K-VRe, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W), U \leq \mathrm{Kern}(\varphi)$

1. $\exists! \tilde{\varphi} : V/U \to \varphi(V) \leq W$ $\forall v \in V : \varphi(v) = \tilde{\varphi}([v])$
2. $U = \mathrm{Kern}(\varphi) \Rightarrow \tilde{\varphi} \in \mathrm{Iso}(V/U, \varphi(V))$

Basis: $U \leq V, \langle B \rangle = V, \langle B_U \rangle = U, B_U \subset B$.
$\rightsquigarrow C = \{b + U \mid b \in B \setminus B_U\}$ Basis von V/U
$\rightsquigarrow \dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$
$\rightsquigarrow \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$

Rang: $\mathrm{Rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$

VI. BASEN UND LINEARE ABBILDUNGEN

Lineare Fortsetzung:

V, W K-VRe, $\langle B \rangle = V, \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$\rightsquigarrow \varphi$ durch $\varphi|_B : V \to W$ eindeutig festgelegt
$(\varphi(v) = \sum_{b \in B} \lambda(b) \cdot \varphi|_B(b))$

V, W, B s.o., $f \in \mathrm{Abb}(B, W) \Rightarrow \exists! \varphi : V \to W : \varphi|_B = f$
$\rightsquigarrow (\mathrm{Hom}(V, W) \ni \varphi \mapsto \varphi|_B \in \mathrm{Abb}(B, W))$
$\in \mathrm{Iso}(\mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Abb}(B, W))$

Dualraum:

Linearform (auf V): $= \chi \in \mathrm{Hom}(V, K)$

Dualraum: $= V^{\cdot} = \mathrm{Hom}(V, K)$

$V^{\cdot} \cong \mathrm{Abb}(B, K) \Rightarrow \dim(V^{\cdot}) = \dim(V)$

$\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(V^{\cdot}) = \dim(V)$

duale Basis: $\langle \{b_1, \ldots, b_n\} \rangle = V \Rightarrow \langle \{b_1^{\cdot}, \ldots, b_n^{\cdot}\} \rangle = V^{\cdot}$ mit

$b_i^{\cdot}(b_j) = \begin{cases} 1, \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

duale Abbildung: V, W K-VRe, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
$\forall \kappa \in W^{\cdot} : (\kappa \circ \varphi : V \to K) \in \mathrm{Hom}(V, K)$
$\rightsquigarrow \varphi^{\cdot} : W^{\cdot} \to V^{\cdot}, \varphi^{\cdot}(\kappa) = \kappa \circ \varphi$ linear. Es gilt:

1. $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ surjektiv $\Rightarrow \varphi^{\cdot} \in \mathrm{Hom}(V, K)$ injektiv
2. $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ injektiv $\Rightarrow \varphi^{\cdot} \in \mathrm{Hom}(V, K)$ surjektiv

Bidualraum: $\dim(V) < \infty \Rightarrow V \cong V^{\cdot\cdot}$

Abbildungsmatrix:

V, W endl.-dim. K-VRe, $B = \{b_1, \ldots, b_q\}, C = \{c_1, \ldots, c_p\}$,
$\langle B \rangle = V, \langle C \rangle = W, \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$\rightsquigarrow \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} c_i$ $(1 \leq j \leq q)$
$\rightsquigarrow K^{p \times q} \ni A =: D_{CB}(\varphi)$ ($\varphi(b_j)$ berechnen $\rightsquigarrow a_{1j}, \ldots, a_{pj}$)
C Standardbasis $\Rightarrow$ "Die Spalten von $D_{CB}(\varphi)$ sind die Bilder der Basisvektoren in B"

Abbildungsmatrix (von φ bzgl. B und C): $= D_{CB}(\varphi)$
$\rightsquigarrow \varphi(v) = D_{CB}(\varphi) \cdot v$

Koordinatenabbildung: $D_B : V \to K^q, D_C : V \to K^p$:
$D_C(\varphi(v)) = D_{CB}(\varphi) \cdot D_B(v)$

duale Basis: $D_{B^{\cdot} C^{\cdot}}(\varphi^{\cdot}) = D_{CB}(\varphi)^T$

Basiswechsel:

$D_{\tilde{C}\tilde{B}}(\varphi) = D_{\tilde{C}C}(\varphi) \cdot D_{CB}(\varphi) \cdot D_{B\tilde{B}}(\varphi)$

U, V, W K-VRe, $\langle A \rangle = U, \langle B \rangle = V, \langle C \rangle = W$,
$\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V), \Psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$\rightsquigarrow D_{CA}(\Psi \circ \varphi) = D_{CB}(\Psi) \cdot D_{BA}(\varphi)$

VII. ENDOMORPHISMEN

$=\varphi : V \to V. \quad A := D_{BB}(\varphi)$

Basiswechsel:

$S = D_{B\tilde{B}}(Id_V),\ T := S^{-1} = D_{\tilde{B}B}(Id_V)$
$\rightsquigarrow D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\varphi) = \tilde{A} = T \cdot A \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S$

Invariante UVR:

V K-VR, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.
$U \leq V$ ist φ-invarianter UVR $\Leftrightarrow \varphi(U) \subseteq U$
$\Rightarrow \varphi|_U \in \mathrm{End}(U)$

zyklischer UVR: V K-VR, $\varphi \in \mathrm{End}(V), U \leq V$ φ-invariant
U zyklisch $\Leftrightarrow \exists u \in U : \langle \{u, \varphi(u), \dots, \varphi^{\dim_K(U)-1}(u)\} \rangle = U$
$\rightsquigarrow U$ kleinster UVR, der u enthält

Eigenraum:

Eigenvektor (von φ): $= v \in V : \langle v \rangle = K \cdot v$ 1-dim. φ-inv. UVR
$\rightsquigarrow v \neq 0 \wedge \exists \lambda \in K : \varphi(v) = \lambda v$

Eigenwert (von φ): $= \lambda \in K$ von oben

Spektrum: $= \mathrm{spec}(\varphi) = \{\lambda \in K \mid \lambda$ EW von $\varphi\}$

Eigenraum: $= \mathrm{Eig}(\varphi, \alpha) = \mathrm{Kern}(\varphi - \alpha \cdot \mathrm{Id}_V)$
$(v \in \mathrm{Kern}(\varphi - \alpha \cdot \mathrm{Id}_V) \Leftrightarrow \varphi(v) = \alpha \cdot v)$
$\rightsquigarrow \alpha \in \mathrm{spec}(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Eig}(\varphi, \alpha) \neq \{0\}$

$D_{BB}(\varphi)$ Diagonalmatrix $\Rightarrow \mathrm{spec}(\varphi) = \mathrm{diag}(\varphi)$

Eigenräume sind invariante UVR

$|\mathrm{spec}(\varphi)| \leq \dim(V)$

Eigenwerte und Polynome:

V K-VR, $\varphi \in \mathrm{End}(V), f \in K[X]$
$\rightsquigarrow \lambda \in \mathrm{spec}(\varphi) \Rightarrow f(\lambda) \in \mathrm{spec}(f(\varphi))$

annulierendes Polynom: $= f \in K[X] : f(\varphi) = 0$

Verschwindungsideal: $= K[X] \supseteq I(\varphi) = \{f \in K[X] \mid f(\varphi) = 0\}$

V endl.-dim. K-VR. Dann:

1. $I(\varphi) \neq \{0\}$
2. $\exists M \in I(\varphi) : \mathrm{grad}(M) \geq 0$ minimal, Leitkoeff. 1
3. $\forall f \in I(\varphi)\ \exists g \in K[X] : f = M \cdot g$

Minimalpolynom: $= \mathrm{MP}_\varphi(X) = M$

$\mathrm{MP}_\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{spec}(\varphi)$
$\rightsquigarrow \mathrm{spec}(\varphi) = \{\lambda \in K \mid \mathrm{MP}_\varphi(\lambda) = 0\}$

Diagonalisierbarkeit: φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow V$ hat Basis aus φ-EW
$\Leftrightarrow \mathrm{MP}_\varphi(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k)$

VIII. DETERMINANTEN

Determinantenform:

$= D : (K^n)^n \to K$ mit:

1. $D(e_1, \dots, e_n) = 1$
2. $D(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + w, v_{i+1}, \dots, v_n)$
$= D(v_1, \dots, v_n) + D(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)$
3. $D(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \alpha D(v_1, \dots, v_n)$
4. $v_i = v_j\ (i \neq j) \Rightarrow D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$

Eigenschaften:

1. D ist n-fache Multilinearform (siehe LAII)
2. $D(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n) = D(v_1, \dots, v_n)$
3. $i < j : D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$
$= -D(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$
4. $D(\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n) = \alpha_1 \dots \alpha_n D(v_1, \dots, v_n)$

Determinante einer Matrix:

$v_1, \dots, v_n \rightsquigarrow M \in K^{n \times n}, D \rightsquigarrow K^{n \times n} \to K$
Einheitsmatrix: $D(I_n) = 1$
Additionsmatrix: $D(A_{ij}(\alpha)) = 1$
Vertauschungsmatrix: $D(V_{ij}) = -1$
Diagonalmatrix: $D(M) = \mathrm{spur}(M)$ (M Diagonalmatrix)
spezielle Matrix: Menge der obigen vier Matrizentypen
Eigenschaften der Determinantenform:

1. $D(M \cdot A_{ij}(\alpha)) = D(M)$ (entspricht 2.)
2. $D(M \cdot V_{ij}) = -D(M)$ (entspricht 3.)
3. $D(M \cdot \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \alpha_1 \dots \alpha_n D(M)$ (entspricht 4.)

Gauss: $\exists$ spezielle Matrizen $X_1, \dots, X_d$:
$M \cdot X_1 \cdot \dots \cdot X_d$ in Treppenform
$\rightsquigarrow D(M) = \begin{cases} \prod_{i=1}^d D(X_i)^{-1}, & \text{falls } M \text{ regulär} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

Wichtige Eigenschaften der Determinante einer Matrix:

1. $D(M) \neq 0 \Leftrightarrow M \in \mathrm{GL}_n(K)$
2. $D(M \cdot N) = D(M) \cdot D(N)$
3. $D(M) = D(M^T)$
4. M obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow D(M) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
5. M, N ähnlich $\Rightarrow D(M) = D(N)$
6. $D\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\right) = D(A) \cdot D(C)$

Leibniz-Formel:

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$ unpraktisch!
$\rightsquigarrow \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$

Laplace-Entwicklung:

M_{ij}: $= M$ ohne $i$te Zeile und $j$te Spalte

$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj})$
(Entwicklung nach $k$ter Zeile)

$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik})$
(Entwicklung nach $k$ter Spalte)

Praktische Berechnung:

1. Im Kopf "$1, (-1)$-Schachbrett" über Matrix legen (l.o. 1)
2. Nach Zeile/Spalte mit meisten Nullen entwickeln

adjunkte Matrix (von A): $= A^\#$ mit $a_{ij}^\# = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$
$\rightsquigarrow A^{-1} = (\det(A))^{-1} A^\#$

Determinante eines Endomorphismus:

$\det(\varphi) = \det(D_{BB}(\varphi))$ (unabhängig von B)

$\lambda \in \mathrm{spec}(\varphi) \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V) = 0$

charakteristisches Polynom: $\mathrm{CP}_\varphi(X) = \det(X I_n - D_{BB}(\varphi))$
$\rightsquigarrow \lambda \in \mathrm{spec}(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{CP}_\varphi(\lambda) = 0$

geometrische Vielfachheit: $\mu_g(\varphi, \lambda) = \dim(\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda))$

algebraische Vielfachheit: $\mu_a(\varphi, \lambda) = e \mid (X - \lambda)^e$ teilt $\mathrm{CP}_\varphi(X)$

Eigenschaften:

1. $\mathrm{CP}_\varphi(X)$ ist Ähnlichkeitsinvariante
2. $\mathrm{CP}_\varphi(\varphi) = 0$
3. $\mathrm{MP}_\varphi(X)$ teilt $\mathrm{CP}_\varphi(X)$
4. $\lambda \in \mathrm{spec}(\varphi) \Rightarrow 1 \leq \mu_g(\varphi, \lambda) \leq \mu_a(\varphi, \lambda)$
5. φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{CP}_\varphi(X)$ zerfällt in Linearfaktoren und $\forall \lambda \in \mathrm{spec}(\varphi) : \mu_g(\varphi, \lambda) = \mu_a(\varphi, \lambda)$
6. $\mathrm{CP}(\varphi)$ zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow \sum_{\lambda \in \mathrm{spec}(\varphi)} \mu_a(\varphi, \lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{spec}(\varphi)} \mu_g(\varphi, \lambda) = \dim(V)$