Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Jörn Müller-Quade
Björn Kaidel, Sebastian Schlag, Sascha Witt

10. Übungsblatt zu Algorithmen I im SoSe 2017

http://crypto.iti.kit.edu/index.php?id=799
{bjoern.kaidel,sascha.witt}@kit.edu

Musterlösungen

Aufgabe 1 (*Jarník-Prims und Kruskals Algorithmus,* $2 + 2 + 1 = 5$ *Punkte*)

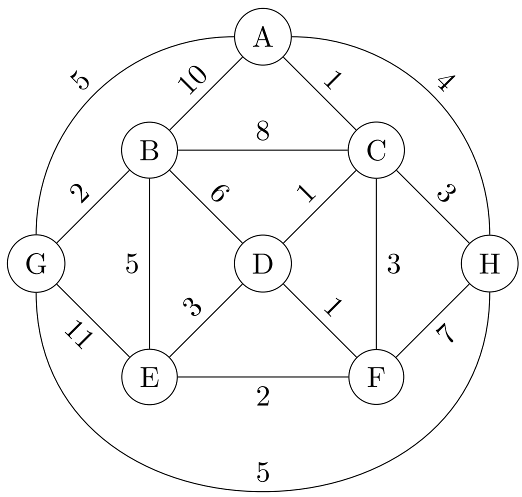
Berechnen Sie je einen Minimum Spanning Tree (MST) des angegebenen Graphen mit dem Algorithmus von...

a) ... Jarník-Prim...

b) ... und dem Algorithmus von Kruskal.

c) Zeichnen Sie einen der beiden berechneten minimalen Spannbäume.

Geben Sie jeweils die Kanten des MST in der Reihenfolge an, in der sie der Algorithmus auswählt. Verwenden Sie den Knoten A als Startknoten von Jarník-Prim und wählen Sie in beiden Algorithmen bei gleichen Kantengewichten die Kanten mit alphabetisch kleinsten Endknoten aus. D.h. stehen zwei Kanten zu Wahl, die in einem Knoten übereinstimmen, wählen Sie die Kante aus, die den alphabetisch kleinsten Knoten neben dem gemeinsamen enthält (beispielsweise würde aus $\{A, B\}$ und $\{A, C\}$ die Kante $\{A, B\}$ ausgewählt). Haben die Kanten keinen gemeinsamen Knoten, so wählen Sie die Kante aus, die den alphabetisch kleinsten Knoten enthält (beispielsweise würde aus $\{A, F\}$ und $\{B, C\}$ die Kante $\{A, F\}$ ausgewählt).

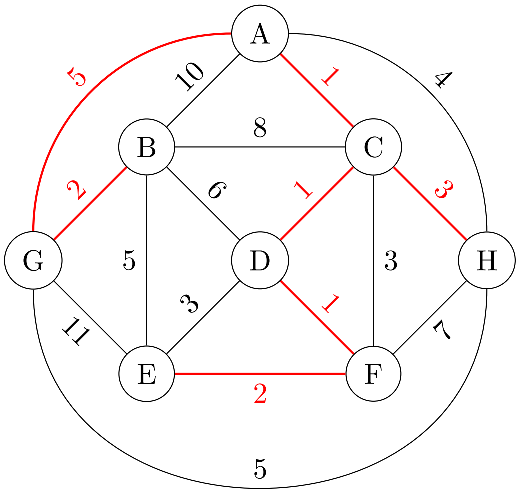


Musterlösung:

a) Der Algorithmus wählt die folgenden Kanten in der angegebenen Reihenfolge aus:
$\{A, C\}, \{C, D\}, \{D, F\}, \{E, F\}, \{C, H\}, \{A, G\}, \{B, G\}$

b) Der Algorithmus wählt die folgenden Kanten in der angegebenen Reihenfolge aus:
$\{A, C\}, \{C, D\}, \{D, F\}, \{B, G\}, \{E, F\}, \{C, H\}, \{A, G\}$

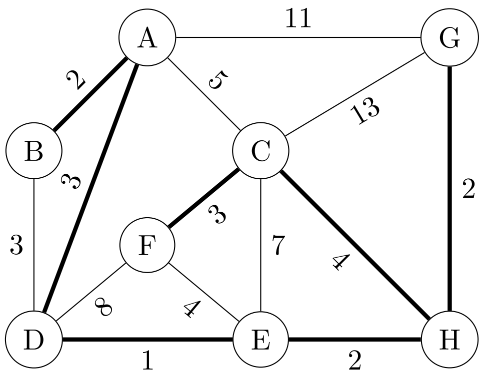
c) Der von Kruskal berechnete minimale Spannbaum ist im Folgenden durch die roten Kanten dargestellt (dieser Spannbaum stimmt auch mit dem von Jarník-Prim berechnten Baum überein):



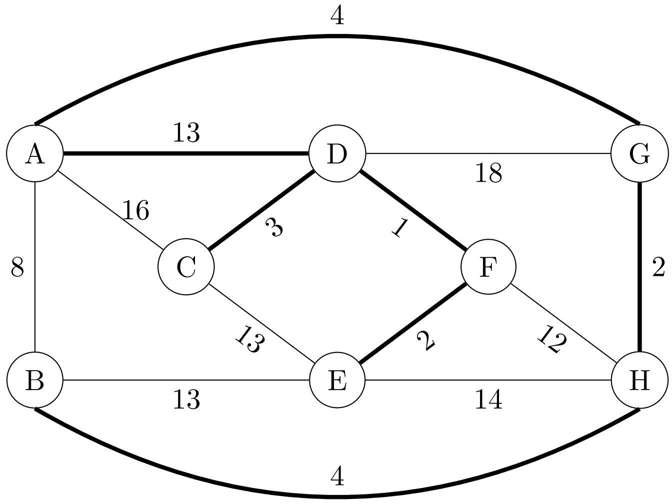
Aufgabe 2 (*Minimale Spannbäume,* $2+2+2=6$ *Punkte*)

a) Geben Sie einen zusammenhängenden und ungerichteten Graphen mit 5 Knoten und Kantengewichten in $\mathbb{N}$ an, sodass der Graph *genau zwei* minimale Spannbäume enthält.

b) Betrachten Sie den folgenden Graph mit dick eingezeichnetem Spannbaum. Verletzt der eingezeichnete Spannbaum die Kreiseigenschaft minimaler Spannbäume? Beweisen Sie dies, indem Sie entweder einen Kreis angeben, sodass die Eigenschaft verletzt ist (erklären Sie dabei auch, warum der Kreis die Eigenschaft verletzt), oder indem Sie beweisen, dass so ein Kreis nicht existiert (geben Sie in letzterem Fall nicht alle möglichen Kreise an, sondern überlegen Sie sich eine geeignete Vorgehensweise!).

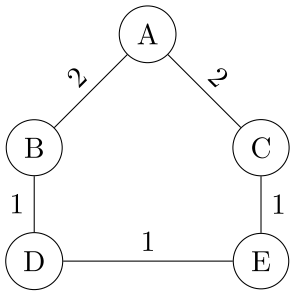


c) Geben Sie für den folgenden Graphen einen Schnitt an, mit dem das Gewicht des dick eingezeichneten Spannbaums reduziert werden kann (erklären Sie dabei auch, wie das Gewicht durch den Schnitt reduziert werden kann) oder zeigen Sie, dass ein solcher Schnitt nicht existiert (Geben Sie in letzterem Fall nicht einfach alle möglichen Schnitte an, sondern überlegen Sie sich eine geeignete Vorgehensweise).



Musterlösung:

a) Der folgende Graph hat genau zwei minimale Spannbäume:



b) Der eingezeichnete Spannbaum entspricht dem Spannbaum, der von Kruskals Algorithmus berechnet werden würde (wenn man bei mehreren möglichen Kanten diese alphabetischer Reihenfolge auswählt, wie in Aufgabe 1). Da Kruskals Algorithmus nach Vorlesung einen minimalen Spannbaum berechnet, ist dieser Spannbaum also minimal. Somit ist die Kreiseigenschaft nicht verletzt (denn ansonsten wäre der Spannbaum nicht minimal).

c) Auf dem Schnitt, der die Knoten C, D, E und F von A, B, G und H trennt liegt die Kante $\{F, H\}$ mit Gewicht 12. Diese hat ein geringeres Gewicht als die Kante $\{A, D\}$ mit Gewicht 13. Ersetzt man im Spannbaum also die Kante $\{A, D\}$ mit $\{F, H\}$, so reduziert sich das Gewicht des Spannbaums um 1.

Aufgabe 3 (*Graphenbeweise,* $2 + 2 + 2 + 1 = 7$ *Punkte*)

Gegeben sei ein ungerichteter zusammenhängender zyklenfreier Graph $G = (V, E)$ mit positiven Kantengewichten und endlich vielen Knoten. Beweisen Sie, dass G genau $|V| - 1$ Kanten besitzt, indem Sie die folgenden Teilaussagen in a) bis c) beweisen. Teilaufgabe d) beschäftigt sich dann mit der Anzahl an Spannbäumen in solchen Graphen.

a) Beweisen Sie: G hat höchstens $|V| - 1$ Kanten.

b) Beweisen Sie: Hat G mehr als einen Knoten, so enthält G mindestens einen Knoten mit Grad 1.

c) Beweisen Sie: G hat mindestens $|V| - 1$ Kanten.

d) Wieviele verschiedene Spannbäume gibt es für G? Beweisen Sie ihre Aussage!

Musterlösung:

a) Würde G mehr als $|V| - 1$ Kanten enthalten, so müsste G einen Zyklus enthalten, was ein Widerspruch dazu wäre, dass G zyklenfrei ist. Es existieren zusammenhängende ungerichtete zyklenfreie Graphen mit $|V| - 1$ Kanten (beispielsweise ein Graph, der nur ein Pfad ist, oder „sternförmige" Graphen, in denen alle Kanten einen gemeinsamen Knoten haben). Sei nun $G' = (V', E')$ ein beliebiger ungerichteter zusammenhängender zyklenfreier Graph mit $|V'| - 1$ Kanten. Seien u, v zwei beliebige Knoten in V'. Wir fügen nun eine neue Kante $\{u, v\}$ in den Graphen ein. Ist $u = v$, dann fügen wir trivialerweise einen Zyklus ein. Sei also $u \neq v$. Da G' zusammenhängend und ungerichtet ist, muss es einen Pfad p von u nach v geben. Dann bildet diese Kante aber zusammen mit dem Pfad p einen Zyklus. Da u, v beliebig waren, gilt dies für jede Kante, die wir in G' hinzufügen könnten. Hätte G also mehr als $|V| - 1$ Kanten, so müsste G einen Zyklus enthalten.

b) Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Wir konstruieren ausgehend von v einen beliebigen Pfad, indem wir iterativ immer neue Kanten ergänzen, ohne dabei Kanten mehrmals zu benutzen. Da der Graph zusammenhängend ist und mehr als einen Knoten enthält, existiert auch so ein Pfad ausgehend von v. Da G zyklenfrei ist, besuchen wir auf diesem Pfad keinen Knoten zweimal. Da nur endlich viele Knoten existieren, kann dieser Pfad nicht unendlich lang werden. Die einzige Möglichkeit, dass der Pfad irgendwann nicht fortgesetzt werden kann, ist aber, dass wir einen Knoten mit Grad 1 erreichen. Damit ist die Existenz eines solchen Knotens bewiesen.

c) Wir beweisen die Aussage induktiv.

Induktionsanfang $n = |V| = 1$: Da der Graph nur einen Knoten enthält, darf er keine Kanten enthalten, da er ansonsten einen Zyklus enthält. Somit enthält dieser Graph mindestens $|V| - 1 = 0$ Kanten.

Induktionsvoraussetzung: Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass alle zusammenhängenden ungerichteten zyklenfreien Graphen mit $|V| \leq n$ mindestens $|V| - 1$ Kanten enthalten.

Induktionsschritt $n \to n + 1$: Nach b) enthält G mindestens einen Knoten u mit Grad 1 (da nun $n \geq 2$). Wir entfernen diesen Knoten und seine eingehende Kante aus G und erhalten einen Graphen $G' = (V', E')$. Da u Grad 1 hatte, ist G' weiterhin zusammenhängend und zyklenfrei. Nach Induktionsvoraussetzungen hat G' mindestens $|V'| - 1 = |V| - 2$ Kanten. Da G aus G' entsteht, indem wir u und die gelöschte Kante wieder hinzunehmen, folgt daraus, dass G mindestens $(|V'| - 1) + 1 = |V| - 1$ Kanten enthält.

d) Da G ungerichtet, zusammenhängend und zyklenfrei ist, muss G bereits ein Baum sein. Damit gibt es in G auch nur einen Spannbaum.