UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2015 - 1er Cuatrimestre

ÁLGEBRA II A (61.08)

Resumen de Álgebra II

INTEGRANTE:

Maria Inés Parnisari - 92235
⟨maineparnisari@gmail.com⟩

Menéndez, Martín Nicolás - 92830
⟨menendez91@live.com.ar⟩

Índice

1. Matrices

1.1. Propiedades generales

Propiedades de matrices

Dadas las matrices A, B, C se tiene que:

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $A + 0_n = A$
- $A + (-A) = 0_n$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(BC) = (AB)C$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- $A0_n = 0_n$

ℵ

1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta

Propiedades de matrices

Dadas las matrices A, B, C se tiene que:

Propiedades de la inversa:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{A^{-1}}{\alpha}, \alpha \neq 0$
- $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$
- $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{|A|}$

Propiedades de la traza:

- $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A)+\text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha\text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

ℵ

1.3. Propiedades de los determinantes

Propiedades de determinantes

Sean $A, B \in R^{n\times m}$

$$|A^T| = |A| \tag{1.1}$$
$$|AB| = |A||B| \tag{1.2}$$

Si B la obtengo de sumar k veces una fila de A sobre otra:

$$|B| = |A| \tag{1.3}$$

Si B la obtengo de intercambiar k veces las fila de A:

$$|B| = (-1)^k|A| \tag{1.4}$$

Si B la obtengo de multiplicar por k, n veces las filas de A:

$$|B| = k^n|A| \tag{1.5}$$

Si A es una matriz triangular:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} aii \tag{1.6}$$

ℵ

1.4. Subespacios fila, columna y null

Espacio fila,columna y nulo de matrices

Sean $A \in R^{n\times m}$, $B \in R^{r\times n}$, se define:

- **Espacio Fila:** Fif$(A) = \{x \in R^m | x$ es combinación lineal de las filas de $A\}$
- **Espacio Columna:** Col$(A) = \{b \in R^n | Ax = b$ para alguna x$\}$
- **Espacio nulo:** Nul$(A) = \{x \in R^m | Ax = 0\}$

ℵ

Propiedades de los espacios definidos

Propiedades:

$$\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A) = \text{Fil}(A)^{\perp} \tag{1.7}$$
$$\text{Nul}(A^T) = \text{Nul}(AA^T) = \text{Col}(A)^{\perp} \tag{1.8}$$
$$\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,(A^T A) \Rightarrow A^T A \tag{1.9}$$
$$\text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Fil}(A)) \tag{1.10}$$
$$\text{Col}(A) \bigotimes \text{Col}(A)^{\perp} = R^n \tag{1.11}$$
$$\text{Fil}(A) \bigotimes \text{Fil}(A)^{\perp} = R^m \tag{1.12}$$
$$\text{rango}\,(A) + \dim \text{Nul}(A) = m \tag{1.13}$$
$$\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B), \text{Iguales si rango}\,(A) = n \tag{1.14}$$
$$\text{Nul}(A) \subseteq \text{Nul}(BA), \text{Iguales si rango}\,(B) = n \tag{1.15}$$
$$\text{Si rango}\,(A) = n \Rightarrow \text{rango}\,(BA) = \text{rango}\,(B) \tag{1.16}$$
$$\text{Si rango}\,(B) = n \Rightarrow \text{rango}\,(BA) = \text{rango}\,(A) \tag{1.17}$$
$$\text{Col}(A) \perp \text{Col}(B) \Leftrightarrow A^T B = 0 \tag{1.18}$$

De **(1.15)** se ve que $A^T A$ invertible $\longleftrightarrow$ A invertible

$\aleph$

Matrices equivalentes

Dos matrices A y B son equivalentes si existen otras dos matrices E y F regulares tal que:

$$A = EBF \tag{1.19}$$

Dos matrices equivalentes pueden pensarse como dos descripciones de una misma Transformación Lineal, pero con respecto a bases distintas.

$\aleph$

Matrices semejantes

Dos matrices cuadradas A y B son semejantes (notamos $A \sim B$) si y solo si existe una matriz P inversible tal que:

$$B = P^{-1}AP \text{ ,ó} \tag{1.20}$$
$$A = PBP^{-1} \tag{1.21}$$

$\aleph$

Propiedades de matrices semejantes

Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de un mismo operador lineal, pero con respecto a bases distintas. Estas dos matrices cumplen que:

$$|A| = |B| \tag{1.22}$$
$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \tag{1.23}$$
$$\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,(B) \tag{1.24}$$
$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B) \tag{1.25}$$

$\aleph$

2. Espacios vectoriales

2.1. Propiedades de los subespacios

Propiedades de los subespacios

S es un subespacio vectorial del espacio V_K si y solo si:

$$0_V \in S \tag{2.1}$$

$$(\alpha X + Y) \in S, \forall X, Y \in V \text{ y } \forall \alpha \in K \tag{2.2}$$

2.2. Independencia lineal

Combinación lineal

El vector $\overline{\mathbf{x}}$ es una combinación lineal de $\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n$ si:

$$\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{2.3}$$

Y si $a_1, \ldots, a_n$ no son todos nulos.

Independencia lineal

$\overline{\mathbf{x}}$ es **linealmente independiente** si:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \text{ , y} \tag{2.4}$$

$$a_i = 0 \forall i \tag{2.5}$$

Dos vectores son **linealmente dependientes** si son proporcionales. Un subconjunto de un conjunto linealmente dependiente sigue siendo linealmente dependiente

2.3. Operaciones con subespacios

Operaciones con subespacios

- **Intersección:** $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i = \{\overline{\mathbf{x}} \in V | \overline{\mathbf{x}} \in S_i \text{ , } \forall i = 1, \ldots, n\}$
- **Suma:** $S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \text{gen}\left\{\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right\}$, donde B_i es una base de S_i
- **Unión:** $S = S_1 \cup S_2$ es un subespacio cuando $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$
- **Suma directa:** $S_1, \ldots, S_k$ están en suma directa $\iff$ la unión de sus bases es base de V

Dos subespacios son **suplementarios** cuando están en suma directa y su suma es todo el espacio.

2.4. Bases

Bases

Si $\text{Dim}(V) = n$, $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de V si y solo si:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ genera } V \tag{2.6}$$
$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ son linealmente independientes} \tag{2.7}$$

2.5. Coordenadas de un vector en una base

Coordenadas de un vector en una base

Si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de un espacio vectorial B y $\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\mathbf{v}}_i$, entonces $C_B(\overline{\mathbf{x}}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Dado un vector y una base, las coordenadas de ese vector en esa base son únicas.

$\forall \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} \in V$ y $\forall k \in K$:

$$C_B(v + w) = C_B(v) + C_B(w) \tag{2.8}$$
$$C_B(k \times v) = k \times C_B(v) \tag{2.9}$$

Finalmente $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ son linealmente independientes $\iff \{C_B(\overline{\mathbf{v}}_1), \dots, C_B(\overline{\mathbf{v}}_n)\}$ lo son para cualquier base de B.

2.6. Matriz de cambio de base

Matriz de cambio de base

Sean $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ y $C = \{\overline{\mathbf{w}}_1, \dots, \overline{\mathbf{w}}_n\}$ bases del espacio V. Las matrices de cambio de base son:

$$C_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(\overline{\mathbf{v}}_1) & C_C(\overline{\mathbf{v}}_2) & \dots & C_C(\overline{\mathbf{v}}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{2.10}$$
$$C_{CB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_B(\overline{\mathbf{w}}_1) & C_B(\overline{\mathbf{w}}_2) & \dots & C_B(\overline{\mathbf{w}}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C_{BC}^{-1} \tag{2.11}$$

Si B y C son bases ortonormales, entonces C_{BC} es una matriz ortogonal.

2.7. Teorema de la dimensión

Teorema de la dimensión

Dados los subespacios S, H y T:

$$\text{Dim}(S + H) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) - \text{Dim}(S \cap H) \tag{2.12}$$
$$\text{Dim}(S + H + T) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(S \cap (H + T)) - \text{Dim}(H \cap T) \tag{2.13}$$

3. Producto interno

3.1. Axiomas

Axiomas del producto interno

Sea $<,>$: $V_K \times V_K \to R$ un producto interno:

1. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \in K$ y $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$
2. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})}$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$
3. $(\lambda \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\lambda}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
4. $(\overline{\mathbf{x}}, \lambda \overline{\mathbf{y}}) = \lambda(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
5. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in V$
6. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \geq 0, (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \longleftrightarrow \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$

3.2. Producto interno canónico

Producto interno canónico

Se definen los siguientes productos internos para los siguientes espacios vectoriales:

- **Vectores reales:** $R^n : (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^T \overline{\mathbf{y}}$
- **Vectores complejos:** $C^n : (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^H \overline{\mathbf{y}}$
- **Matrices reales:** $R^{n \times m} : (A, B) = \text{tr}(A^T B)$
- **Matrices complejas:** $C^{n \times m} : (A, B) = \text{tr}(A^H B)$
- **Funciones reales:** $P_R[a, b] : (p, q) = \displaystyle\int_a^b p(t)q(t)dt$
- **Funciones complejas:** $P_C[a, b] : (p, q) = \displaystyle\int_a^b \overline{p(t)}q(t)dt$

3.3. Definiciones

Ortogonalidad

Dados $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \iff \overline{\mathbf{x}} \perp \overline{\mathbf{y}} \tag{3.1}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

norma de un vector

Se define la norma de un vector como:

$$|\bar{\mathbf{x}}|^2 = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \tag{3.2}$$

La **norma de un vector** depende del producto interno, pero cumple las siguientes propiedades:

- $|\bar{\mathbf{x}}| \in R \forall \bar{\mathbf{x}} \in V$
- $|\bar{\mathbf{x}}| \geq 0 \ (|\bar{\mathbf{x}}| = 0 \iff \bar{\mathbf{x}} = 0)$
- $|k \cdot \bar{\mathbf{x}}| = |k| \cdot |\bar{\mathbf{x}}|$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**

$$|(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})| \leq |\bar{\mathbf{x}}| \cdot |\bar{\mathbf{y}}| \ , x, y \in V_K \tag{3.3}$$

  La igualdad se cumple si $\bar{\mathbf{x}} \parallel \bar{\mathbf{y}}$

- **Desigualdad triangular:**

$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}| \leq |\bar{\mathbf{x}}| + |\bar{\mathbf{y}}| \tag{3.4}$$

- **Teorema de pitágoras:** Si $\bar{\mathbf{x}} \perp \bar{\mathbf{y}}$ entonces:

$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}|^2 = |\bar{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{y}}|^2 \tag{3.5}$$

  La recíproca solo vale para R

- **Identidad del paralelogramo:**

$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}|^2 + |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}|^2 = 2\left(|\bar{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{y}}|^2\right), \forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in V \tag{3.6}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Ángulo entre dos vectores

Dado $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$:

$$\cos(\theta) = \frac{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})}{|\bar{\mathbf{x}}| \cdot |\bar{\mathbf{y}}|} \tag{3.7}$$

Con $\theta \in [0, \pi], \forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \neq 0$ para espacios vectoriales reales con producto interno.

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Complemento ortogonal

Sea $A \subset V_K \cdot A^{\perp} = \{\bar{\mathbf{x}} \in V_K | (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0, \forall \bar{\mathbf{y}} \in A\}$

Para el cálculo del complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita, alcanza con exigir la ortogonalidad a un sistema de generadores

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Distancia entre vectores

Dados $\bar{\mathbf{x}}$,$\bar{\mathbf{y}}$, se define la función distancia como:

$$d : V_R \times V_R \to R^+ : d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}| = |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}| \tag{3.8}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

3.4. Matriz asociada al producto interno

Matriz de producto interno

Sea $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{v}}_k\}$ base de V_K. Entonces $G \in K^{k\times k}$, $g_{ij} = (\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_j)$ es la matriz de producto interno:

$$G = \begin{bmatrix} |\bar{\mathbf{v}}_1|^2 & \ldots & (\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{\mathbf{v}}_k, \bar{\mathbf{v}}_1) & \ldots & |\bar{\mathbf{v}}_k|^2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Si B es base de V_K y G es la matriz del producto interno en esa base, entonces $\forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in V$:

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = C_B^H(\bar{\mathbf{x}}) \cdot G \cdot C_B(\bar{\mathbf{y}}) \tag{3.10}$$

ℵ

Propiedades de la matriz de producto interno

Dada la matriz G de producto interno se tiene que:

$$g_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \ldots, k \tag{3.11}$$

$$G^H = H \tag{3.12}$$

$$G \text{ es definida positiva} \tag{3.13}$$

$$\exists G^{-1} \tag{3.14}$$

$$G \text{ de una Base Ortogonal (BOG) es una matriz diagonal} \tag{3.15}$$

$$G \text{ de una Base Ortonornal (BON) es una matriz identidad} \tag{3.16}$$

ℵ

4. Proyecciones y matrices de proyección

4.1. Propiedades de la proyección

Propiedades de la proyección

Sea $S \subset V y S^{\perp}$ su complemento ortogonal, entonces $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\mathbf{u}}}_{\in S} + \underbrace{\overline{\mathbf{v}}}_{\in S^{\perp}} = P_S(\overline{\mathbf{x}}) + P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) \tag{4.1}$$

Se definen las siguientes propiedades:

- $P_S(\overline{\mathbf{x}})$ es el vector de S mas próximo a $\overline{\mathbf{x}}$
- $P_S(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{v}} \iff \overline{\mathbf{v}} \in S$ y además $P_S(\overline{\mathbf{w}}) = 0 \iff \overline{\mathbf{w}} \in S^{\perp}$
- Por pitágoras: $|\overline{\mathbf{x}}|^2 = |P_S(\overline{\mathbf{x}})|^2 + |P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})|^2, \forall x \in V$
- $|P_S(\overline{\mathbf{x}})| \leq |\overline{\mathbf{x}}|$. Si $|P_S(\overline{\mathbf{x}})| = |\overline{\mathbf{x}}|$ entonces $\overline{\mathbf{x}} \in S$
- $d(\overline{\mathbf{x}}, S) = |P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})|$
- $d(\overline{\mathbf{x}}, S^{\perp}) = |P_S(\overline{\mathbf{x}})|$

ℵ

4.2. Proyección y reflexión

Proyección y reflexión

Sea S un subespacio de V, y $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_k\}$ una base ortogonal (BOG) de S. Entonces $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V$:

$$P_S(\overline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{x}})}{(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i)} \overline{\mathbf{v}}_i \tag{4.2}$$

$$R_S(\overline{\mathbf{x}}) = 2P_S(\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{x}} = 2P_S(\overline{\mathbf{x}}) - \left(P_S(\overline{\mathbf{x}}) + P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})\right) = P_S(\overline{\mathbf{x}}) - P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} - 2P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) \tag{4.3}$$

ℵ

4.2.1. Proyección y transformaciones lineales

Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea $T : V_K \to V_K$ una transformación lineal tal que:

$$Im(P_S) = S \tag{4.4}$$

$$\text{Nul}(P_S) = S^{\perp} \tag{4.5}$$

Y sea $B = \{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_{q+1}, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n}_{\in S^{\perp}}\}$ una base de V, entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[P_S]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos 0 como la dimensión del complemento ortogonal.

Nota: La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales

Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea $T : V_K \to V_K$ una transformación lineal tal que:

$$T(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{v}}, \forall \overline{\mathbf{v}} \in S \tag{4.7}$$

$$T(\overline{\mathbf{v}}) = -\overline{\mathbf{v}}, \forall \overline{\mathbf{v}} \in S^{\perp} \tag{4.8}$$

Y sea $B = \{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_{q+1}, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n}_{\in S^{\perp}}\}$ una base de V, entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & -1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos -1 como la dimensión del complemento ortogonal.

Nota: La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

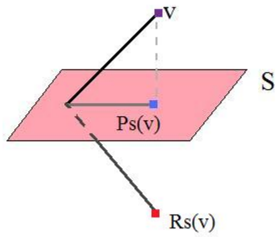

Figura 4.1: Proyección y reflexión

4.3. Matriz de Householder

Propiedades de la proyección

La matriz de reflexión sobre un subespacio de dimensión $n-1$ que es ortogonal a un vector $\overline{\mathbf{w}}$ en un espacio de dimensión n se puede obtener mediante la expresión:

$$H = I_d - 2\frac{\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{w}}^T}{\overline{\mathbf{w}}^T \cdot \overline{\mathbf{w}}} \tag{4.10}$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- Es involutiva: $H \circ H = I_d$
- Es simétrica: $H^T = H$
- Es inversible: $\exists H^{-1}$ y $\exists H^{-1} = H$
- Es ortogonal: $H^T H = H H^T = I_d$

4.4. Rotaciones en R^3

Rotaciones en R^3

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3\}$ una Base Ortonormal (BON) de R^3 y sea T la rotación θ grados alrededor del eje v_i:

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_1 : [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_2 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_3 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$\tag{4.14}$$

4.5. Proceso de Gram-Schmidt

Proceso de Gram-Schmidt

Dada una base $\{\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_p\}$ para un subespacio $W \in R^n$ defina:

1. $\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{x}}_1$
2. $\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{x}}_2 - \frac{\overline{\mathbf{x}}_2 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1}{\overline{\mathbf{v}}_1 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1}\overline{\mathbf{v}}_1$
3. $\overline{\mathbf{v}}_p = \overline{\mathbf{x}}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\overline{\mathbf{x}}_p \cdot \overline{\mathbf{v}}_i}{\overline{\mathbf{v}}_i \cdot \overline{\mathbf{v}}_i}\overline{\mathbf{v}}_i$

Entonces $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_p\}$ es una Base Ortogonal (BOG) de W.

Si luego se divde a cada componente por la norma de la base se obtiene una Base Ortogonal (BON) de W.

4.6. Matrices de proyección

Matriz de proyección

Utilizando el producto interno canónico de sobre K^n, con $K = R$ o $K = C$.

$P \in K^{n\times n}$ es una matriz de proyección si y solo si:

$$P^2 = P \tag{4.15}$$
$$P^H = P \tag{4.16}$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- $\text{Col}(P) = \text{Nul}(P)^{\perp}$
- $P \cdot y = y \Longleftrightarrow y \in \text{Col}(P)$
- Si P_S es matriz de proyección sobre S y $P_S^{\perp}$ es matriz de proyección sobre $S^{\perp}$ entonces $P_S + P_S^{\perp} = I_d$
- Las columnas de P son una base del espacio sobre el cual proyectan
- $\text{rango}\,(P) = \text{tr}(P)$
- $\det P \neq 0$ si $P \neq I_d$
- Si P_1 y P_2 son matrices de proyección y $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$, entonces $P_1 + P_2$ es matriz de proyección y $\text{rango}\,(P_1 + P_2) = \text{rango}\,(P_1) + \text{rango}\,(P_2)$

Obtención de la matriz de proyección:

1. Sea Q una matriz cuyas columnas son una Base Ortonormal (BON) de $S \subset V$. Entonces la única matriz de proyección sobre S es $[P_S] = Q \cdot Q^T$. La matriz de proyección sobre $S^{\perp}$ es $[P_S^{\perp}] = I_d - [P_S]$
2. Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q\}$ una base de S, y A la matriz que tiene por columnas a $\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q$. Entonces la única matriz de proyección sobre S se obtiene mediante $[P_S] = A\left(A^H A\right)^{-1} A^H = AA^{\#}$

ℵ

4.7. Inversas y pseudoinversas

Propiedades de la pseudoinversa

Sea $A \in K^{n\times q} | \text{rango}\,(A) = q$. La matriz pseudoinversa de A es $A^{\#} = \left(A^H A\right)^{-1} A^H$:

- Si A es cuadrada invertible, $A^{-1} = A^{\#}$
- $A^{\#} \in R^{q\times n}$
- $A^{\#} A = I_{d_{(q)}}$
- $AA^{\#} = [P]_{\text{Col}(A)}$
- $\text{Nul}(AA^{\#}) = [\text{Col}(A)]^{\perp}$

ℵ

4.8. Cuadrados mínimos

Cuadrados mínimos

Sea $A \in K^{n\times q}, \overline{\mathbf{x}} \in K^q, \overline{\mathbf{b}} \in R^n$. Si $Ax = b$ tiene una solución extra, entonces $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$. Si $b \notin \text{Col}(A)$, intentamos hallar una solución $\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in K^q$ (la solución por **cuadrados mínimos**) tal que:

- $|A\hat{\overline{\mathbf{x}}} - \overline{\mathbf{b}}| < |A\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{b}}|, \forall \overline{\mathbf{u}} \in K^q$
- $d(A\hat{\overline{\mathbf{x}}}, \overline{\mathbf{b}}) \leq d(A\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{b}}), \forall \overline{\mathbf{u}} \in K^q$
- $|A\hat{\overline{\mathbf{x}}}| \leq |\overline{\mathbf{b}}|$ (Son iguales si $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$)
- Ecuaciones normales de cuadrados mínimos: $A^T A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = A^T\overline{\mathbf{b}} = \hat{\overline{\mathbf{b}}}$
- $A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = \hat{\overline{\mathbf{b}}} = P_{\text{Col}(A)}(\overline{\mathbf{b}})$ si y solo si:

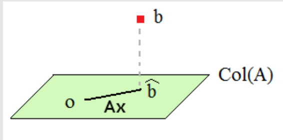

Figura 4.2: Cuadrados mínimos

$$A\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in \text{Col}(A) \tag{4.17}$$

$$\overline{\mathbf{b}} - A\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in \text{Col}(A)^{\perp} \tag{4.18}$$

Propiedades de Cuadrados mínimos

1. Si $\hat{\overline{\mathbf{x}}} = 0$ entonces $\overline{\mathbf{b}} \in [\text{Col}(A)]^{\perp}$. La recíproca solo es cierta si A es invertible.
2. Si las columnas de A son linealmente independientes, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante:

$$\hat{\overline{\mathbf{x}}} = (A^T A)^{-1} A^T\overline{\mathbf{b}} = A^{\#}\overline{\mathbf{b}} \tag{4.19}$$

   Si las columnas de A son linealmente dependientes, el sistema $A^T A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = A^T b$ tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma $\hat{\overline{\mathbf{x}}} = \hat{\overline{\mathbf{x}}}_p + \underbrace{\hat{\overline{\mathbf{x}}}_n}_{\in \text{Nul}(A)}$

3. Si $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$, entonces toda solución de $A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ es una solución exacta y por cuadrados mínimos
4. El error de aproximación ϵ es igual a $|\overline{\mathbf{b}} - \hat{\overline{\mathbf{b}}}|$

4.8.1. Norma mínima

Pseudoinversa de Moore-Pensore

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima pertenece al espacio Fil(A)y se obtiene como:

$$\tilde{\overline{\mathbf{x}}} = A^{+}\overline{\mathbf{b}} \tag{4.20}$$

Siendo A^{+} la **pseudoinversa de Moore-Penrose** de A.

4.9. Regresión lineal

Regresión lineal

Sean los puntos $\overline{\mathbf{P}}_i = (x_i, y_i)$ con $i = 1, 2, \ldots, n$. La recta que mejor aproxima a los puntos es:

$$\overline{\mathbf{y}} = \alpha_0 \overline{\mathbf{1}} + \alpha_1 \overline{\mathbf{x}} \tag{4.21}$$

Y los coeficientes α_i se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Si se aproxima por una parábola se agrega otro nivel de complejidad, con $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$, lo que implica una columna adicional a la matriz para los términos cuadráticos, una fila adicional para la constante α_2 en la variable.

Se siguen agregando columnas a la matriz y filas al vector tantas veces como grados de complejidad se necesiten.

5. Transformaciones lineales

Sea $T \in \ell(V_K, W_K)$ y $A = [T]_{BC}$ con B base de V y C base de W la matriz de T.

5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales

Condiciones para ser Transformación lineal

Para que una transformación se considere lineal debe cumplir:

1. $T(\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}}) = T(\overline{\mathbf{u}}) + T(\overline{\mathbf{v}})$, con $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}} \in V$
2. $T(\alpha \overline{\mathbf{u}} + \beta \overline{\mathbf{v}}) = \alpha \cdot T(\overline{\mathbf{u}}) + \beta \cdot T(\overline{\mathbf{v}})$, con $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}} \in V_K$ y $\alpha, \beta \in K$
3. $T(0_{V_K}) = 0_{V_K}$

5.2. Núcleo e Imágen

Núcleo e Imágen

Núcleo: $\text{Nul}(T) = \{\overline{\mathbf{v}} \in V_K \mid T(\overline{\mathbf{v}}) = 0_W\} = C_B^{-1}(\text{Nul}(A))$.
Imágen: $\text{Im}(T) = \{\overline{\mathbf{w}} \in W_K \mid T(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{w}}$ con $\overline{\mathbf{v}} \in V_K\} = C_C^{-1}(\text{Col}(A))$.

Ambos son subespacios vectoriales.

La imágen de una Transformación Lineal puede obtenerse como lo que generan los transformados de una base del espacio de partida.

Teorema de la dimensión

Sea $T \in \ell(V, W)$ y sea Dim$(V) = n$ (finita). Entonces:

$$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(\text{Nul}(T)) + \text{Dim}(\text{Im}(T)) \tag{5.1}$$

ℵ

5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales

5.3.1. Monomorfismo(Inyectividad)

Monomorfismo

Una Transformación lineal es inyectiva si verifica:

$$\overline{\mathbf{v}}_1 \neq \overline{\mathbf{v}}_2 \Rightarrow T(\overline{\mathbf{v}}_1) \neq T(\overline{\mathbf{v}}_2)\ ,\ \forall \overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2 \in V \tag{5.2}$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \iff \text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{Dim}(V) \tag{5.3}$$

Una Transformación Lineal Inyectiva transforma conjuntos Linealmente Independientes a conjuntos Linealmente Independientes.

La recíproca también es cierta: si A es un conjunto Linealmente Independiente y es transformado en otro conjunto Linealmente Independiente, la Transformación Lineal es inyectiva. Es decir: Si T es inyectiva y A es Linealmente Independiente, $T(A)$ es Linealmente Independiente.

Las matrices asociadas a Transformaciones Lineales inyectivas tienen sus columnas Linealmente Independientes.

Si Dim$(V) >$ Dim(W), T no puede ser inyectiva.

ℵ

5.3.2. Epimorfismo(Sobreyectividad)

Epimorfismo

Una Transformación lineal es sobreyectiva si y solo si:

$$\text{Im}(T) = W \tag{5.4}$$

Las matrices asociadas a Transformaciones lineales sobreyectivas tienen sus filas Linealmente Independientes.

Si Dim$(W) >$ Dim(V), T no puede ser sobreyectiva.

ℵ

5.3.3. Isomorfismo(Biyectividad)

Biyectividad

Una Transformación lineal es biyectiva si y solo si:

$$\text{Dim}(W) = \text{Dim}(V) \tag{5.5}$$
$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \tag{5.6}$$

Es decir, si es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez.

T es biyectiva $\iff$ si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de $V \Rightarrow \{T(\overline{\mathbf{v}}_1), \ldots, T(\overline{\mathbf{v}}_n)\}$ es base de W
La matriz asociada a una Transformación lineal biyectiva tiene sus filas y columnas Linealmente Independientes, o sea que es una matriz inversible, es decir, existe una transformación lineal inversa $T^{-1} = [T]^{-1}$

Si $\text{Dim}(V) = \text{Dim}(W)$, entonces o bien T es inyectiva y sobreyectiva, o no es ninguna de las dos.

ℵ

5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal

Matriz de la Transformación lineal

Sea $T \in \ell(V_K, W_K)$, sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q\}$ base de V y $C = \{\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_m\}$ base de W. Entonces T se puede escribir como $T(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}}$, con $A \in K^{m \times q}$ tal que:

$$A = [T]_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_1)) & C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_2)) & \ldots & C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_q)) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Dicha matriz posee las siguientes propiedades:

- $[T]_{BC} \cdot C_B(\overline{\mathbf{v}}) = C_C(T(\overline{\mathbf{v}}))$, $\forall \overline{\mathbf{v}} \in V$
- $\overline{\mathbf{v}} \in \text{Nul}(T) \iff C_B(\overline{\mathbf{v}}) \in \text{Nul}(A)$
- $\overline{\mathbf{w}} \in \text{Im}(T) \iff C_C(\overline{\mathbf{w}}) \in \text{Col}(A)$
- $\text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{rango}\,(A)$

ℵ

Teorema para matrices de Transformación lineal

Sean V y W K-espacios vectoriales ($K = R$ o C). Sea $T : V \to W$.

Si B_1 y B_2 son bases ordenadas de V, y C_1 y C_2 son bases ordenadas de W, entonces:

$$\text{rango}\left([T]_{B_1C_1}\right) = \text{rango}\left([T]_{B_2C_2}\right) \tag{5.8}$$

ℵ

5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ base de V y $\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_n$ vectores de W. Entonces existe y es única la Transformación lineal que verifica:

$$T(\overline{\mathbf{v}}_i) = \overline{\mathbf{w}}_i \ , \forall i = 1, \ldots, n \tag{5.9}$$

Además, dada una Transformación lineal y un par de bases, existe una única matriz asociada.

La recíproca tambíen es verdadera: dada una matriz y un par de bases, existe una única Transformación lineal asociada.

ℵ

5.6. Composición de Transformaciones lineales

Composición de Transformaciones lineales

Sea $f \in \ell(V, W)$ y $g \in \ell(W, H) \Rightarrow g \circ f \in (V, H)$. Podemos encontrar la siguientes propiedades:

$$\text{Nul}(f) \subseteq \text{Nul}(g \circ f) \tag{5.10}$$

$$\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g) \tag{5.11}$$

ℵ

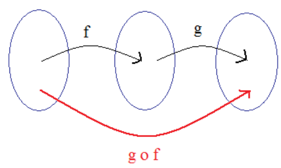

Figura 5.1: Composición

5.7. Operadores lineales

Operadores lineales

Un operador lineal es una Transformación lineal que va de un espacio en si mismo, se escríbe como $T \in \ell(V)$ y cuenta con las siguientes propiedades:

- Si $T_1 \in \ell(V)$ y $T_2 \in \ell(V)$, entonces $T_1 \circ T_2 \in \ell(V)$
- Si $T \in \ell(V)$, $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{\text{n veces}}$

ℵ

6. Autovalores y Autovectores

6.1. Definiciones básicas

Definiciones básicas

Autovector: Un vector $\overline{\mathbf{v}} \neq 0$ es autovector de $A \in K^{n\times n} \iff \exists \lambda \in K \mid A\overline{\mathbf{v}} = \lambda\overline{\mathbf{v}}$

Autoespacio: El autoespacio de A asociado a un autovalor λ es $S_\lambda(A) = \text{Nul}(A - \lambda I)$

Polinomio característico: El polinomio característico de una matriz $A \in K^{n\times n}$ es $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$, y tiene grado n. Si $K = R$ el polinomio tiene a lo sumo n raíces. Si $K = C$ tiene exactamente n raíces.

Autovalor: Los autovalores λ de una matriz son las raíces de su polinomio característico.

Espectro de una matriz: $\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ es autovalor de } A\}$.

ℵ

6.2. Autovalores complejos de matriz real

Autovalores complejos

Supongamos que $\overline{\mathbf{v}}$ es un autovector de $A \in R^{n\times n}$ asociado a $\lambda = a + \jmath b$ con $a, b \in R, b \neq 0$.
Entonces $\overline{\mathbf{v}}^*$ es también un autovector de $A \in R^{n\times n}$ asociado a $\lambda^* = a - \jmath b$.

En particular si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es una base de S_λ, entonces $\{\overline{\mathbf{v}}_1^*, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n^*\}$ es una base de S_{λ^*}

ℵ

6.3. Multiplicidad geométrica y algebráica de un Autovalor

Multiplicidad de Autovalores

Se define:

- $m_g(\lambda) = \text{Dim}(S_\lambda(A))$
- $m_a(\lambda) \doteq$ número de veces que aparece λ como raíz del polinomio característico.

Siempre se verifica que:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \tag{6.1}$$

ℵ

6.4. Propiedades

Propiedades de Autovalores y Autovectores

ℵ

6.5. Autovalores y Autovectores de operadores lineales

Autovalores y Autovectores de Operadores lineales

6.6. Diagonalización

Diagonalización

6.6.1. Matrices trivialmente diagonalizables

Diagonalizaciones triviales

6.6.2. Propiedades

Propiedades de la diagonalización

6.6.3. Diagonalización de transformaciones lineales

Diagonalización de Transformaciones Lineales

7. Matrices hermíticas y simétricas

7.1. Diagonalización

7.2. Descomposición espectral

7.3. Subespacios invariantes por una transformación lineal

8. Formas cuadráticas

8.1. Clasificación

8.2. Optimización restringida

9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)

9.1. Definición

9.2. Aplicación de las DVS

9.3. Propiedades de las DVS

9.4. DVS reducida y Pseudoinversa

10. Ecuaciones diferenciales

10.1. Wronskiano

10.2. Identidad de Abel

10.3. Existencia y unicidad de Problemas de Valores Iniciales (PVI)

10.4. Variables separables

10.5. Homogéneas

10.6. Lineales de 1er orden

10.7. Diferencial exacta

10.8. Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

10.9. Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales

11.1. Sistemas homogéneos con A diagonalizable

11.2. Sistemas no homogéneos con A diagonalizable

11.3. Sistemas homogéneos con A no diagonalizable

11.3.1. Caso A 2x2

11.3.2. Caso A 3x3