UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2015 - 1er Cuatrimestre

ÁLGEBRA II A (61.08)

Resumen de Álgebra II

INTEGRANTE:

Maria Inés Parnisari - 92235
⟨maineparnisari@gmail.com⟩

Menéndez, Martín Nicolás - 92830
⟨menendez91@live.com.ar⟩

Índice

1. Matrices

1.1. Propiedades generales

Propiedades de matrices

Dadas las matrices A, B, C se tiene que:

- $A+B=B+A$
- $A+(B+C)=(A+B)+C$
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
- $\alpha\,(\beta A)=(\alpha\beta)A$
- $A+0_n=A$
- $A+(-A)=0_n$
- $A(B+C)=AB+AC$
- $(A+B)C=AC+BC$
- $A(BC)=(AB)C$
- $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
- $A0_n=0_n$

ℵ

1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta

Propiedades de matrices

Dadas las matrices A, B, C se tiene que:

Propiedades de la inversa:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1}$
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1}=\dfrac{A^{-1}}{\alpha}, \alpha\neq 0$
- $(A^n)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^n$
- $A^{-1}=\dfrac{\text{adj}(A)}{|A|}$

Propiedades de la traza:

- $\text{tr}(A+B)=\text{tr}(A)+\text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(\alpha A)=\alpha\text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A^T)=\text{tr}(A)$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- $\left(A^T\right)^T=A$
- $(\alpha A)^T=\alpha A^T$
- $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$

ℵ

1.3. Propiedades de los determinantes

Propiedades de determinantes

Sean $A, B \in R^{n\times m}$

$$|A^T| = |A| \tag{1.1}$$

$$|AB| = |A||B| \tag{1.2}$$

Si B la obtengo de sumar k veces una fila de A sobre otra:

$$|B| = |A| \tag{1.3}$$

Si B la obtengo de intercambiar k veces las fila de A:

$$|B| = (-1)^k|A| \tag{1.4}$$

Si B la obtengo de multiplicar por k, n veces las filas de A:

$$|B| = k^n|A| \tag{1.5}$$

Si A es una matriz triangular:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} aii \tag{1.6}$$

ℵ

1.4. Subespacios fila, columna y null

Espacio fila,columna y nulo de matrices

Sean $A \in R^{n\times m}$, $B \in R^{r\times n}$, se define:

- **Espacio Fila:** Fif$(A) = \{x \in R^m | x$ es combinación lineal de las filas de $A\}$
- **Espacio Columna:** Col$(A) = \{b \in R^n | Ax = b$ para alguna x$\}$
- **Espacio nulo:** Nul$(A) = \{x \in R^m | Ax = 0\}$

ℵ

Propiedades de los espacios definidos

Propiedades:

$$\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A) = \text{Fil}(A)^{\perp} \tag{1.7}$$
$$\text{Nul}(A^T) = \text{Nul}(AA^T) = \text{Col}(A)^{\perp} \tag{1.8}$$
$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T A) \Rightarrow A^T A \tag{1.9}$$
$$\text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Fil}(A)) \tag{1.10}$$
$$\text{Col}(A) \bigotimes \text{Col}(A)^{\perp} = R^n \tag{1.11}$$
$$\text{Fil}(A) \bigotimes \text{Fil}(A)^{\perp} = R^m \tag{1.12}$$
$$\text{rango}(A) + \dim \text{Nul}(A) = m \tag{1.13}$$
$$\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B), \text{Iguales si rango}(A) = n \tag{1.14}$$
$$\text{Nul}(A) \subseteq \text{Nul}(BA), \text{Iguales si rango}(B) = n \tag{1.15}$$
$$\text{Si rango}(A) = n \Rightarrow \text{rango}(BA) = \text{rango}(B) \tag{1.16}$$
$$\text{Si rango}(B) = n \Rightarrow \text{rango}(BA) = \text{rango}(A) \tag{1.17}$$
$$\text{Col}(A) \perp \text{Col}(B) \Leftrightarrow A^T B = 0 \tag{1.18}$$

De **(1.15)** se ve que $A^T A$ invertible $\longleftrightarrow A$ invertible

ℵ

Matrices equivalentes

Dos matrices A y B son equivalentes si existen otras dos matrices E y F regulares tal que:

$$A = EBF \tag{1.19}$$

Dos matrices equivalentes pueden pensarse como dos descripciones de una misma Transformación Lineal, pero con respecto a bases distintas.

ℵ

Matrices semejantes

Dos matrices cuadradas A y B son semejantes (notamos $A \sim B$) si y solo si existe una matriz P inversible tal que:

$$B = P^{-1}AP \text{ ,ó} \tag{1.20}$$
$$A = PBP^{-1} \tag{1.21}$$

ℵ

Propiedades de matrices semejantes

Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de un mismo operador lineal, pero con respecto a bases distintas. Estas dos matrices cumplen que:

$$|A| = |B| \tag{1.22}$$
$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \tag{1.23}$$
$$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) \tag{1.24}$$
$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B) \tag{1.25}$$

ℵ

2. Espacios vectoriales

2.1. Propiedades de los subespacios

Propiedades de los subespacios

S es un subespacio vectorial del espacio V_K si y solo si:

$$0_V \in S \tag{2.1}$$
$$(\alpha X + Y) \in S, \forall X, Y \in V \text{ y } \forall \alpha \in K \tag{2.2}$$

ℵ

2.2. Independencia lineal

Combinación lineal

El vector $\overline{\mathbf{x}}$ es una combinación lineal de $\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n$ si:

$$\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{2.3}$$

Y si $a_1, \ldots, a_n$ no son todos nulos.

ℵ

Independencia lineal

$\overline{\mathbf{x}}$ es **linealmente independiente** si:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \text{ , y} \tag{2.4}$$
$$a_i = 0 \forall i \tag{2.5}$$

Dos vectores son **linealmente dependientes** si son proporcionales. Un subconjunto de un conjunto linealmente dependiente sigue siendo linealmente dependiente

ℵ

2.3. Operaciones con subespacios

Operaciones con subespacios

- **Intersección:** $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i = \{\overline{\mathbf{x}} \in V | \overline{\mathbf{x}} \in S_i \text{ , } \forall i = 1, \ldots, n\}$
- **Suma:** $S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \text{gen}\left\{\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right\}$, donde B_i es una base de S_i
- **Unión:** $S = S_1 \cup S_2$ es un subespacio cuando $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$
- **Suma directa:** $S_1, \ldots, S_k$ están en suma directa $\iff$ la unión de sus bases es base de V

Dos subespacios son **suplementarios** cuando están en suma directa y su suma es todo el espacio.

ℵ

2.4. Bases

Bases

Si $\text{Dim}(V) = n$, $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de V si y solo si:

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ genera } V \tag{2.6}$$
$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ son linealmente independientes} \tag{2.7}$$

ℵ

2.5. Coordenadas de un vector en una base

Coordenadas de un vector en una base

Si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de un espacio vectorial B y $\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\mathbf{v}}_i$, entonces $C_B(\overline{\mathbf{x}}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Dado un vector y una base, las coordenadas de ese vector en esa base son únicas.

$\forall \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} \in V$ y $\forall k \in K$:

$$C_B(v + w) = C_B(v) + C_B(w) \tag{2.8}$$
$$C_B(k \times v) = k \times C_B(v) \tag{2.9}$$

Finalmente $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ son linealmente independientes $\iff \{C_B(\overline{\mathbf{v}}_1), \ldots, C_B(\overline{\mathbf{v}}_n)\}$ lo son para cualquier base de B.

ℵ

2.6. Matriz de cambio de variable

Matriz de cambio de variable

Sean $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ y $C = \{\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_n\}$ bases del espacio V. Las matrices de cambio de base son:

$$C_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(v_1) & C_C(v_2) & \ldots & C_C(v_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{2.10}$$
$$C_{CB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_B(w_1) & C_B(w_2) & \ldots & C_B(w_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C_{BC}^{-1} \tag{2.11}$$

Si B y C son bases ortonormales, entonces C_{BC} es una matriz ortogonal.

ℵ

2.7. Teorema de la dimensión

Teorema de la dimensión

Dados los subespacios S, H y T:

$$\text{Dim}(S + H) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) - \text{Dim}(S \cap H) \tag{2.12}$$
$$\text{Dim}(S + H + T) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(S \cap (H + T)) - \text{Dim}(H \cap T) \tag{2.13}$$

ℵ

3. Producto interno

3.1. Axiomas

Axiomas del producto interno

Sea $<,>: V_K \times V_K \to R$ un producto interno:

1. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \in K$ y $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$
2. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})}$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$
3. $(\lambda \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\lambda} (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
4. $(\overline{\mathbf{x}}, \lambda \overline{\mathbf{y}}) = \lambda (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
5. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in V$
6. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \geq 0, (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \longleftrightarrow \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$

3.2. Producto interno canónico

Producto interno canónico

Se definen los siguientes productos internos para los siguientes espacios vectoriales:

- **Vectores reales:** $R^n : (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^T \overline{\mathbf{y}}$
- **Vectores complejos:** $C^n : (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^H \overline{\mathbf{y}}$
- **Matrices reales:** $R^{n\times m} : (A, B) = \text{tr}(A^T B)$
- **Matrices complejas:** $C^{n\times m} : (A, B) = \text{tr}(A^H B)$
- **Funciones reales:** $P_R[a, b] : (p, q) = \displaystyle\int_a^b p(t)q(t)dt$
- **Funciones complejas:** $P_C[a, b] : (p, q) = \displaystyle\int_a^b \overline{p(t)}q(t)dt$

3.3. Definiciones

Ortogonalidad

Dados $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \iff \overline{\mathbf{x}} \perp \overline{\mathbf{y}} \tag{3.1}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

norma de un vector

Se define la norma de un vector como:

$$|\overline{\mathbf{x}}|^2 = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \tag{3.2}$$

La **norma de un vector** depende del producto interno, pero cumple las siguientes propiedades:

- $|\overline{\mathbf{x}}| \in R \forall \overline{\mathbf{x}} \in V$
- $|\overline{\mathbf{x}}| \geq 0 \; (|\overline{\mathbf{x}}| = 0 \iff \overline{\mathbf{x}} = 0)$
- $|k \cdot \overline{\mathbf{x}}| = |k| \cdot |\overline{\mathbf{x}}|$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**

$$|(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})| \leq |\overline{\mathbf{x}}| \cdot |\overline{\mathbf{y}}| \,, x, y \in V_K \tag{3.3}$$

  La igualdad se cumple si $\overline{\mathbf{x}} \parallel \overline{\mathbf{y}}$

- **Desigualdad triangular:**

$$|\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}| \leq |\overline{\mathbf{x}}| + |\overline{\mathbf{y}}| \tag{3.4}$$

- **Teorema de pitágoras:** Si $\overline{\mathbf{x}} \perp \overline{\mathbf{y}}$ entonces:

$$|\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}|^2 = |\overline{\mathbf{x}}|^2 + |\overline{\mathbf{y}}|^2 \tag{3.5}$$

  La recíproca solo vale para R

- **Identidad del paralelogramo:**

$$|\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}|^2 + |\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}|^2 = 2\left(|\overline{\mathbf{x}}|^2 + |\overline{\mathbf{y}}|^2\right), \forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V \tag{3.6}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Ángulo entre dos vectores

Dado $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$:

$$\cos(\theta) = \frac{(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})}{|\overline{\mathbf{x}}| \cdot |\overline{\mathbf{y}}|} \tag{3.7}$$

Con $\theta \in [0, \pi], \forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \neq 0$ para espacios vectoriales reales con producto interno.

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Complemento ortogonal

Sea $A \subset V_K \cdot A^\perp = \{\overline{\mathbf{x}} \in V_K | (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0, \forall \overline{\mathbf{y}} \in A\}$

Para el cálculo del complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita, alcanza con exigir la ortogonalidad a un sistema de generadores

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Distancia entre vectores

Dados $\overline{\mathbf{x}}$,$\overline{\mathbf{y}}$, se define la función distancia como:

$$d : V_R \times V_R \to R^+ : d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = |\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}| = |\overline{\mathbf{y}} - \overline{\mathbf{x}}| \tag{3.8}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

3.4. Matriz asociada al producto interno

Matriz de producto interno

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_k\}$ base de V_K. Entonces $G \in K^{k \times k}$, $g_{ij} = (\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{v}}_j)$ es la matriz de producto interno:

$$G = \begin{bmatrix} |\overline{\mathbf{v}}_1|^2 & \ldots & (\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{\mathbf{v}}_k, \overline{\mathbf{v}}_1) & \ldots & |\overline{\mathbf{v}}_k|^2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Si B es base de V_K y G es la matriz del producto interno en esa base, entonces $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = C_B^H(\overline{\mathbf{x}}) \cdot G \cdot C_B(\overline{\mathbf{y}}) \tag{3.10}$$

ℵ

Propiedades de la matriz de producto interno

Dada la matriz G de producto interno se tiene que:

$$g_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \ldots, k \tag{3.11}$$

$$G^H = H \tag{3.12}$$

$$G \text{ es definida positiva} \tag{3.13}$$

$$\exists G^{-1} \tag{3.14}$$

$$G \text{ de una Base Ortogonal (BOG) es una matriz diagonal} \tag{3.15}$$

$$G \text{ de una Base Ortonornal (BON) es una matriz identidad} \tag{3.16}$$

ℵ

4. Proyecciones y matrices de proyección

4.1. Propiedades de la proyección

Propiedades de la proyección

Sea $S \subset V y S^{\perp}$ su complemento ortogonal, entonces $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\mathbf{u}}}_{\in S} + \underbrace{\overline{\mathbf{v}}}_{\in S^{\perp}} = P_S(\overline{\mathbf{x}}) + P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) \tag{4.1}$$

Se definen las siguientes propiedades:

- $P_S(\overline{\mathbf{x}})$ es el vector de S mas próximo a $\overline{\mathbf{x}}$
- $P_S(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{v}} \iff \overline{\mathbf{v}} \in S$ y además $P_S(\overline{\mathbf{w}}) = 0 \iff \overline{\mathbf{w}} \in S^{\perp}$
- Por pitágoras: $|\overline{\mathbf{x}}|^2 = |P_S(\overline{\mathbf{x}})|^2 + |P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})|^2, \forall x \in V$
- $|P_S(\overline{\mathbf{x}})| \leq |\overline{\mathbf{x}}|$. Si $|P_S(\overline{\mathbf{x}})| = |\overline{\mathbf{x}}|$ entonces $\overline{\mathbf{x}} \in S$
- $d(\overline{\mathbf{x}}, S) = |P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})|$
- $d(\overline{\mathbf{x}}, S^{\perp}) = |P_S(\overline{\mathbf{x}})|$

ℵ

4.2. Proyección y reflexión

Proyección y reflexión

Sea S un subespacio de V, y $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_k\}$ una base ortogonal (BOG) de S. Entonces $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V$:

$$P_S(\overline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{x}})}{(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i)} \overline{\mathbf{v}}_i \tag{4.2}$$

$$R_S(\overline{\mathbf{x}}) = 2P_S(\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{x}} = 2P_S(\overline{\mathbf{x}}) - \left(P_S(\overline{\mathbf{x}}) + P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})\right) = P_S(\overline{\mathbf{x}}) - P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} - 2P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) \tag{4.3}$$

ℵ

4.2.1. Proyección y transformaciones lineales

Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea $T : V_K \to V_K$ una transformación lineal tal que:

$$Im(P_S) = S \tag{4.4}$$

$$\text{Nul}(P_S) = S^{\perp} \tag{4.5}$$

Y sea $B = \{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_{q+1}, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n}_{\in S^{\perp}}\}$ una base de V, entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[P_S]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos 0 como la dimensión del complemento ortogonal.

Nota: La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales

Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea $T : V_K \to V_K$ una transformación lineal tal que:

$$T(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{v}}, \forall \overline{\mathbf{v}} \in S \tag{4.7}$$

$$T(\overline{\mathbf{v}}) = -\overline{\mathbf{v}}, \forall \overline{\mathbf{v}} \in S^{\perp} \tag{4.8}$$

Y sea $B = \{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_{q+1}, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n}_{\in S^{\perp}}\}$ una base de V, entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & -1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos -1 como la dimensión del complemento ortogonal.

Nota: La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

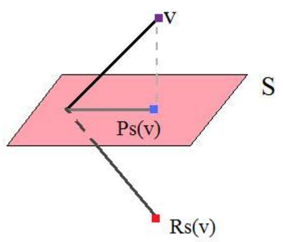

Figura 4.1: Proyección y reflexión

4.3. Matriz de Householder

Propiedades de la proyección

La matriz de reflexión sobre un subespacio de dimensión $n-1$ que es ortogonal a un vector $\overline{\mathbf{w}}$ en un espacio de dimensión n se puede obtener mediante la expresión:

$$H = I_d - 2\frac{\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{w}}^T}{\overline{\mathbf{w}}^T \cdot \overline{\mathbf{w}}} \tag{4.10}$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- Es involutiva: $H \circ H = I_d$
- Es simétrica: $H^T = H$
- Es inversible: $\exists H^{-1}$ y $\exists H^{-1} = H$
- Es ortogonal: $H^T H = H H^T = I_d$

ℵ

4.4. Rotaciones en R^3

Rotaciones en R^3

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3\}$ una Base Ortonormal (BON) de R^3 y sea T la rotación θ grados alrededor del eje v_i:

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_1 : [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_2 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_3 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$\tag{4.14}$$

ℵ

4.5. Proceso de Gram-Schmidt

Proceso de Gram-Schmidt

Dada una base $\{\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_p\}$ para un subespacio $W \in R^n$ defina:

1. $\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{x}}_1$
2. $\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{x}}_2 - \frac{\overline{\mathbf{x}}_2 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1}{\overline{\mathbf{v}}_1 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1}\overline{\mathbf{v}}_1$
3. $\overline{\mathbf{v}}_p = \overline{\mathbf{x}}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\overline{\mathbf{x}}_p \cdot \overline{\mathbf{v}}_i}{\overline{\mathbf{v}}_i \cdot \overline{\mathbf{v}}_i}\overline{\mathbf{v}}_i$

Entonces $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_p\}$ es una Base Ortogonal (BOG) de W.

Si luego se divde a cada componente por la norma de la base se obtiene una Base Ortogonal (BON) de W.

ℵ

4.6. Matrices de proyección

Matriz de proyección

Utilizando el producto interno canónico de sobre K^n, con $K = R$ o $K = C$.

$P \in K^{n\times n}$ es una matriz de proyección si y solo si:

$$P^2 = P \tag{4.15}$$
$$P^H = P \tag{4.16}$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- $\text{Col}(P) = \text{Nul}(P)^\perp$
- $P \cdot y = y \iff y \in \text{Col}(P)$
- Si P_S es matriz de proyección sobre S y $P_S^\perp$ es matriz de proyección sobre $S^\perp$ entonces $P_S + P_S^\perp = I_d$
- Las columnas de P son una base del espacio sobre el cual proyectan
- $\text{rango}(P) = \text{tr}(P)$
- $\det P \neq 0$ si $P \neq I_d$
- Si P_1 y P_2 son matrices de proyección y $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$, entonces $P_1 + P_2$ es matriz de proyección y $\text{rango}(P_1 + P_2) = \text{rango}(P_1) + \text{rango}(P_2)$

Obtención de la matriz de proyección:

1. Sea Q una matriz cuyas columnas son una Base Ortonormal (BON) de $S \subset V$. Entonces la única matriz de proyección sobre S es $[P_S] = Q \cdot Q^T$. La matriz de proyección sobre $S^\perp$ es $[P_S^\perp] = I_d - [P_S]$
2. Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q\}$ una base de S, y A la matriz que tiene por columnas a $\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q$. Entonces la única matriz de proyección sobre S se obtiene mediante $[P_S] = A\left(A^H A\right)^{-1} A^H = AA^\#$

4.7. Inversas y pseudoinversas

Propiedades de la pseudoinversa

Sea $A \in K^{n\times q} | \text{rango}(A) = q$. La matriz pseudoinversa de A es $A^\# = \left(A^H A\right)^{-1} A^H$:

- Si A es cuadrada invertible, $A^{-1} = A^\#$
- $A^\# \in R^{q\times n}$
- $A^\# A = I_{d_{(q)}}$
- $AA^\# = [P]_{\text{Col}(A)}$
- $\text{Nul}(AA^\#) = [\text{Col}(A)]^\perp$

4.8. Cuadrados mínimos

Cuadrados mínimos

Sea $A \in K^{n\times q}, \overline{\mathbf{x}} \in K^q, \overline{\mathbf{b}} \in R^n$. Si $Ax = b$ tiene una solución extra, entonces $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$. Si $b \notin \text{Col}(A)$, intentamos hallar una solución $\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in K^q$ (la solución por **cuadrados mínimos**) tal que:

- $|A\hat{\overline{\mathbf{x}}} - \overline{\mathbf{b}}| < |A\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{b}}|, \forall \overline{\mathbf{u}} \in K^q$
- $d(A\hat{\overline{\mathbf{x}}}, \overline{\mathbf{b}}) \leq d(A\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{b}}), \forall \overline{\mathbf{u}} \in K^q$
- $|A\hat{\overline{\mathbf{x}}}| \leq |\overline{\mathbf{b}}|$ (Son iguales si $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$)
- Ecuaciones normales de cuadrados mínimos: $A^T A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = A^T\overline{\mathbf{b}} = \hat{\overline{\mathbf{b}}}$
- $A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = \hat{\overline{\mathbf{b}}} = P_{\text{Col}(A)}(\overline{\mathbf{b}})$ si y solo si:

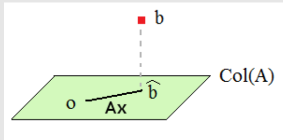

Figura 4.2: Cuadrados mínimos

$$A\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in \text{Col}(A) \tag{4.17}$$

$$\overline{\mathbf{b}} - A\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in \text{Col}(A)^{\perp} \tag{4.18}$$

Propiedades de Cuadrados mínimos

1. Si $\hat{\overline{\mathbf{x}}} = 0$ entonces $\overline{\mathbf{b}} \in [\text{Col}(A)]^{\perp}$. La recíproca solo es cierta si A es invertible.
2. Si las columnas de A son linealmente independientes, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante:

$$\hat{\overline{\mathbf{x}}} = (A^T A)^{-1} A^T\overline{\mathbf{b}} = A^{\#}\overline{\mathbf{b}} \tag{4.19}$$

   Si las columnas de A son linealmente dependientes, el sistema $A^T A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = A^T b$ tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma $\hat{\overline{\mathbf{x}}} = \hat{\overline{\mathbf{x}}}_p + \underbrace{\hat{\overline{\mathbf{x}}}_n}_{\in \text{Nul}(A)}$

3. Si $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$, entonces toda solución de $A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ es una solución exacta y por cuadrados mínimos
4. El error de aproximación ϵ es igual a $|\overline{\mathbf{b}} - \hat{\overline{\mathbf{b}}}|$

4.8.1. Norma mínima

Pseudoinversa de Moore-Pensore

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima pertenece al espacio Fil(A)y se obtiene como:

$$\tilde{\hat{\overline{\mathbf{x}}}} = A^{+}\overline{\mathbf{b}} \tag{4.20}$$

Siendo A^+ la **pseudoinversa de Moore-Penrose** de A.

4.9. Regresión lineal

Propiedades de la proyección

5. Transformaciones lineales

6. Autovalores y Autovectores

7. Matrices hermíticas y simétricas

8. Formas cuadráticas

9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)

10. Ecuaciones diferenciales

11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales