

---

# Álgebra II (61.08 - 81.02)

## Resumen

---



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons  
Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional.

 [fiuba-apuntes.github.io](https://github.com/fiuba-apuntes)

*Última actualización: 25/02/2015*

# LICENCIA

Este es un resumen (y no un sustituto) de la [licencia](#). Este resumen destaca sólo algunas de las características clave y los términos de la licencia real. No es una licencia y no tiene valor legal. Usted debe revisar cuidadosamente todos los términos y condiciones de la licencia actual antes de usar el material licenciado.

## Usted es libre para:

**Compartir** — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

**Adaptar** — remezclar, transformar y crear a partir del material

Para cualquier propósito, incluso comercialmente

El licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

## Bajo los siguientes términos:



**Atribución** — Debe reconocer adecuadamente la autoría, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo de cualquier manera razonable, pero no de una manera que sugiera que tiene el apoyo del licenciador o lo recibe por el uso que hace.



**CompartirIgual** — Si usted mezcla, transforma o crea nuevo material a partir de esta obra, usted podrá distribuir su contribución siempre que utilice la misma licencia que la obra original.

**No hay restricciones adicionales** — Usted no puede aplicar términos legales ni medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros hacer cualquier uso permitido por la licencia.

## Aviso:

Usted no tiene que cumplir con la licencia para los materiales en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una excepción o limitación aplicable.

No se entregan garantías. La licencia podría no entregarle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como relativos a publicidad, privacidad, o derechos morales pueden limitar la forma en que utilice el material.

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Sobre el proyecto</b>   | <b>3</b>  |
| <b>1. Matrices</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1. Propiedades generales . . . . .                                 | 4         |
| 1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta . . . . .   | 4         |
| 1.3. Propiedades de los determinantes . . . . .                      | 5         |
| 1.4. Subespacios fila, columna y null . . . . .                      | 5         |
| <b>2. Espacios vectoriales</b>                                       | <b>8</b>  |
| 2.1. Propiedades de los subespacios . . . . .                        | 8         |
| 2.2. Independencia lineal . . . . .                                  | 8         |
| 2.3. Operaciones con subespacios . . . . .                           | 9         |
| 2.4. Bases . . . . .   | 9         |
| 2.5. Coordenadas de un vector en una base . . . . .                  | 9         |
| 2.6. Matriz de cambio de base . . . . .                              | 10        |
| 2.7. Teorema de la dimensión . . . . .                               | 10        |
| <b>3. Producto interno</b>   | <b>11</b> |
| 3.1. Axiomas . . . . .   | 11        |
| 3.2. Producto interno canónico . . . . .                             | 11        |
| 3.3. Definiciones . . . . .  | 11        |
| 3.4. Matriz asociada al producto interno . . . . .                   | 13        |
| <b>4. Proyecciones y matrices de proyección</b>                      | <b>14</b> |
| 4.1. Propiedades de la proyección . . . . .                          | 14        |
| 4.2. Proyección y reflexión . . . . .                                | 14        |
| 4.2.1. Proyección y transformaciones lineales . . . . .              | 15        |
| 4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales . . . . .               | 16        |
| 4.3. Matriz de Householder . . . . .                                 | 16        |
| 4.4. Rotaciones en $R^3$ . . . . .                                   | 17        |
| 4.5. Proceso de Gram-Schmidt . . . . .                               | 17        |
| 4.6. Matrices de proyección . . . . .                                | 18        |
| 4.7. Inversas y pseudoinversas . . . . .                             | 18        |
| 4.8. Cuadrados mínimos . . . . .                                     | 19        |
| 4.8.1. Norma mínima . . . . .  | 19        |
| 4.9. Regresión lineal . . . . .                                      | 20        |
| <b>5. Transformaciones lineales</b>                                  | <b>21</b> |
| 5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales . . . . .        | 21        |
| 5.2. Núcleo e Imagen . . . . .                                       | 21        |
| 5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales . . . . .        | 22        |
| 5.3.1. Monomorfismo (Inyectividad) . . . . .                         | 22        |
| 5.3.2. Epimorfismo (Sobreyectividad) . . . . .                       | 22        |
| 5.3.3. Isomorfismo (Biyectividad) . . . . .                          | 23        |
| 5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal . . . . .           | 23        |
| 5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales . . . . .  | 24        |
| 5.6. Composición de Transformaciones lineales . . . . .              | 24        |
| 5.7. Operadores lineales . . . . .                                   | 24        |
| <b>6. Autovalores y Autovectores</b>                                 | <b>25</b> |
| 6.1. Definiciones básicas . . . . .                                  | 25        |
| 6.2. Autovalores complejos de matriz real . . . . .                  | 25        |
| 6.3. Multiplicidad geométrica y algebraica de un Autovalor . . . . . | 25        |
| 6.4. Propiedades . . . . .   | 26        |
| 6.5. Autovalores y Autovectores de operadores lineales . . . . .     | 26        |
| 6.6. Diagonalización . . . . .                                       | 27        |

|  |           |
|--|-----------|
| 6.6.1. Matrices trivialmente diagonalizables . . . . .                               | 27        |
| 6.6.2. Propiedades . . . . .   | 28        |
| 6.6.3. Diagonalización de transformaciones lineales . . . . .                        | 28        |
| <b>7. Matrices hermíticas y simétricas</b>   | <b>29</b> |
| 7.1. Diagonalización . . . . .   | 29        |
| 7.2. Descomposición espectral . . . . .  | 30        |
| 7.3. Subespacios invariantes por una transformación lineal . . . . .                 | 31        |
| <b>8. Formas cuadráticas</b>   | <b>32</b> |
| 8.1. Clasificación . . . . .   | 33        |
| 8.2. Optimización restringida . . . . .  | 33        |
| <b>9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)</b>                                 | <b>34</b> |
| 9.1. Definición . . . . .  | 34        |
| 9.2. Subespacios de las DVS . . . . .  | 34        |
| 9.3. Propiedades de las DVS . . . . .  | 35        |
| 9.4. DVS reducida y Pseudoinversa . . . . .  | 35        |
| <b>10. Ecuaciones diferenciales</b>  | <b>37</b> |
| 10.1. Wronskiano . . . . .   | 37        |
| 10.2. Identidad de Abel . . . . .  | 37        |
| 10.3. Existencia y unicidad de Problemas de Valores Iniciales (PVI) . . . . .        | 38        |
| 10.4. Variables separables . . . . .   | 38        |
| 10.5. Lineales de 1 <sup>er</sup> orden . . . . .                                    | 38        |
| 10.6. Diferencial exacta . . . . .   | 39        |
| 10.7. Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes . . . . .    | 39        |
| 10.8. Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes . . . . . | 40        |
| <b>11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales</b>                             | <b>41</b> |
| 11.1. Sistemas homogéneos con $A$ diagonalizable . . . . .                           | 41        |
| 11.2. Sistemas no homogéneos con $A$ diagonalizable . . . . .                        | 41        |
| 11.3. Sistemas homogéneos con $A$ no diagonalizable . . . . .                        | 42        |
| <b>Colaboradores</b>   | <b>44</b> |
| <b>Historial de cambios</b>  | <b>45</b> |

## Sobre el proyecto

FIUBA Apuntes nació con el objetivo de digitalizar los apuntes de las materias que andan rondando por los pasillos de FIUBA.

Además, queremos que cualquier persona sea libre de usarlos, corregirlos y mejorarlos.

Encontrarás más información sobre el proyecto o más apuntes en [fiuba-apuntes.github.io](https://fiuba-apuntes.github.io).

## ¿Por qué usamos LaTeX?

LaTeX es un sistema de composición de textos que genera documentos con alta calidad tipográfica, posibilidad de representación de ecuaciones y fórmulas matemáticas. Su enfoque es centrarse exclusivamente en el contenido sin tener que preocuparse demasiado en el formato.

LaTeX es libre, por lo que existen multitud de utilidades y herramientas para su uso, se dispone de mucha documentación que ayuda al enriquecimiento del estilo final del documento sin demasiado esfuerzo.

Esta herramienta es muy utilizada en el ámbito científico, para la publicación de papers, tesis u otros documentos. Incluso, en FIUBA, es utilizado para crear los enunciados de exámenes y apuntes oficiales de algunos cursos.

## ¿Por qué usamos Git?

Git es un software de control de versiones de archivos de código fuente desde el cual cualquiera puede obtener una copia de un repositorio, poder realizar aportes tanto realizando *commits* o como realizando *forks* para ser unidos al repositorio principal.

Su uso es relativamente sencillo y su filosofía colaborativa permite que se sumen colaboradores a un proyecto fácilmente.

GitHub es una plataforma que, además de ofrecer los repositorios git, ofrece funcionalidades adicionales muy interesantes como gestor de reporte de errores.

# 1. Matrices

## 1.1. Propiedades generales

### Propiedades de matrices

Dadas las matrices  $A, B, C$  se tiene que:

- $A + B = B + A$
- $A + (-A) = 0_n$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $A(BC) = (AB)C$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- $A + 0_n = A$
- $A0_n = 0_n$



## 1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta

### Propiedades de matrices

Dadas las matrices  $A, B, C$  se tiene que:

Propiedades de la inversa:

- $(A^{-1})^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{A^{-1}}{\alpha}, \alpha \neq 0$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$

Propiedades de la traza:

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$



### 1.3. Propiedades de los determinantes

#### Propiedades de determinantes

Sean  $A, B \in R^{n \times m}$

$$|A^T| = |A| \quad (1.1)$$

$$|AB| = |A| |B| \quad (1.2)$$

Si  $B$  la obtengo de sumar  $k$  veces una fila de  $A$  sobre otra:

$$|B| = |A| \quad (1.3)$$

Si  $B$  la obtengo de intercambiar  $k$  veces las fila de  $A$ :

$$|B| = (-1)^k |A| \quad (1.4)$$

Si  $B$  la obtengo de multiplicar por  $k$ ,  $n$  veces las filas de  $A$ :

$$|B| = k^n |A| \quad (1.5)$$

Si  $A$  es una matriz triangular:

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} \quad (1.6)$$



### 1.4. Subespacios fila, columna y null

#### Espacio fila, columna y nulo de matrices

Sean  $A \in R^{n \times m}$ ,  $B \in R^{r \times n}$ , se define:

- **Espacio Fila:**  $\text{Fif}(A) = \{x \in R^m | x \text{ es combinación lineal de las filas de } A\}$
- **Espacio Columna:**  $\text{Col}(A) = \{b \in R^n | Ax = b \text{ para alguna } x\}$
- **Espacio nulo:**  $\text{Nul}(A) = \{x \in R^m | Ax = 0\}$



**Propiedades de los espacios definidos**

Propiedades:

$$\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A) = \text{Fil}(A)^\perp \quad (1.7)$$

$$\text{Nul}(A^T) = \text{Nul}(A A^T) = \text{Col}(A)^\perp \quad (1.8)$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T A) \Rightarrow A^T A \quad (1.9)$$

$$\text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Fil}(A)) \quad (1.10)$$

$$\text{Col}(A) \otimes \text{Col}(A)^\perp = R^n \quad (1.11)$$

$$\text{Fil}(A) \otimes \text{Fil}(A)^\perp = R^m \quad (1.12)$$

$$\text{rango}(A) + \dim \text{Nul}(A) = m \quad (1.13)$$

$$\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B), \text{ Iguales si } \text{rango}(A) = n \quad (1.14)$$

$$\text{Nul}(A) \subseteq \text{Nul}(BA), \text{ Iguales si } \text{rango}(B) = n \quad (1.15)$$

$$\text{Si } \text{rango}(A) = n \Rightarrow \text{rango}(BA) = \text{rango}(B) \quad (1.16)$$

$$\text{Si } \text{rango}(B) = n \Rightarrow \text{rango}(BA) = \text{rango}(A) \quad (1.17)$$

$$\text{Col}(A) \perp \text{Col}(B) \Leftrightarrow A^T B = 0 \quad (1.18)$$

De (1.15) se ve que  $A^T A$  invertible  $\longleftrightarrow A$  invertible

⌘

**Matrices equivalentes**

Dos matrices  $A$  y  $B$  son equivalentes si existen otras dos matrices  $E$  y  $F$  regulares tal que:

$$A = EBF \quad (1.19)$$

Dos matrices equivalentes pueden pensarse como dos descripciones de una misma Transformación Lineal, pero con respecto a bases distintas.

⌘

**Matrices Semejantes**

Dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  son semejantes (notamos  $A \sim B$ ) si y solo si existe una matriz  $P$  inversible tal que:

$$B = P^{-1}AP, \text{ ó } \quad (1.20)$$

$$A = PBP^{-1} \quad (1.21)$$

⌘



**Propiedades de matrices semejantes**

Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de un mismo operador lineal, pero con respecto a bases distintas. Estas dos matrices cumplen que:

$$|A| = |B| \quad (1.22)$$

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) \quad (1.23)$$

$$\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(B) \quad (1.24)$$

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B) \quad (1.25)$$

**N**

## 2. Espacios vectoriales

### 2.1. Propiedades de los subespacios

#### Propiedades de los subespacios

$S$  es un subespacio vectorial del espacio  $V_K$  si y solo si:

$$0_V \in S \quad (2.1)$$

$$(\alpha X + Y) \in S, \forall X, Y \in V \text{ y } \forall \alpha \in K \quad (2.2)$$



### 2.2. Independencia lineal

#### Combinación lineal

El vector  $\bar{x}$  es una combinación lineal de  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  si:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (2.3)$$

Y si  $a_1, \dots, a_n$  no son todos nulos.



#### Independencia lineal

$\bar{x}$  es **linealmente independiente** si:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0, \text{ y} \quad (2.4)$$

$$a_i = 0 \forall i \quad (2.5)$$

Dos vectores son **linealmente dependientes** si son proporcionales. Un subconjunto de un conjunto linealmente dependiente sigue siendo linealmente dependiente



## 2.3. Operaciones con subespacios

## Operaciones con subespacios

- **Intersección:**  $S = \bigcap_{i=1}^n S_i = \{\bar{x} \in V \mid \bar{x} \in S_i, \forall i = 1, \dots, n\}$
- **Suma:**  $S = \sum_{i=1}^n S_i = \text{gen} \left\{ \bigcup_{i=1}^m B_i \right\}$ , donde  $B_i$  es una base de  $S_i$
- **Unión:**  $S = S_1 \cup S_2$  es un subespacio cuando  $S_1 \subseteq S_2$  ó  $S_2 \subseteq S_1$
- **Suma directa:**  $S_1, \dots, S_k$  están en suma directa  $\iff$  la unión de sus bases es base de  $V$

Dos subespacios son **suplementarios** cuando están en suma directa y su suma es todo el espacio.

N

## 2.4. Bases

## Bases

Si  $\dim(V) = n$ ,  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es base de  $V$  si y solo si:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ genera } V \quad (2.6)$$

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ son linealmente independientes} \quad (2.7)$$

N

## 2.5. Coordenadas de un vector en una base

## Coordenadas de un vector en una base

Si  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es base de un espacio vectorial  $B$  y  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i$ , entonces  $C_B(\bar{x}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Dado un vector y una base, las coordenadas de ese vector en esa base son únicas.

$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V$  y  $\forall k \in K$ :

$$C_B(v + w) = C_B(v) + C_B(w) \quad (2.8)$$

$$C_B(k \times v) = k \times C_B(v) \quad (2.9)$$

Finalmente  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  son linealmente independientes  $\iff \{C_B(\bar{v}_1), \dots, C_B(\bar{v}_n)\}$  lo son para cualquier base de  $B$ .

N

## 2.6. Matriz de cambio de base

### Matriz de cambio de base

Sean  $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n\}$  y  $C = \{\bar{\mathbf{w}}_1, \dots, \bar{\mathbf{w}}_n\}$  bases del espacio  $V$ . Las matrices de cambio de base son:

$$C_{BC} = \begin{bmatrix} C_C(\bar{\mathbf{v}}_1) & C_C(\bar{\mathbf{v}}_2) & \dots & C_C(\bar{\mathbf{v}}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$C_{CB} = \begin{bmatrix} C_B(\bar{\mathbf{w}}_1) & C_B(\bar{\mathbf{w}}_2) & \dots & C_B(\bar{\mathbf{w}}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = C_{BC}^{-1} \quad (2.11)$$

Si  $B$  y  $C$  son bases ortonormales, entonces  $C_{BC}$  es una matriz ortogonal.



## 2.7. Teorema de la dimensión

### Teorema de la dimensión

Dados los subespacios  $S, H$  y  $T$ :

$$\text{Dim}(S + H) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) - \text{Dim}(S \cap H) \quad (2.12)$$

$$\text{Dim}(S + H + T) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(S \cap (H + T)) - \text{Dim}(H \cap T) \quad (2.13)$$



### 3. Producto interno

#### 3.1. Axiomas

##### Axiomas del producto interno

Sea  $\langle, \rangle: V_K \times V_K \rightarrow R$  un producto interno:

1.  $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$  y  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$
2.  $(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{(\bar{y}, \bar{x})}$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$
3.  $(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$  y  $\forall \lambda \in K$
4.  $(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$  y  $\forall \lambda \in K$
5.  $(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{z})$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$
6.  $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ ,  $(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$



#### 3.2. Producto interno canónico

##### Producto interno canónico

Se definen los siguientes productos internos para los siguientes espacios vectoriales:

- **Vectores reales:**  $R^n : (\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T \bar{y}$
- **Vectores complejos:**  $C^n : (\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^H \bar{y}$
- **Matrices reales:**  $R^{n \times m} : (A, B) = \text{tr}(A^T B)$
- **Matrices complejas:**  $C^{n \times m} : (A, B) = \text{tr}(A^H B)$
- **Funciones reales:**  $P_R[a, b] : (p, q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$
- **Funciones complejas:**  $P_C[a, b] : (p, q) = \int_a^b \overline{p(t)}q(t)dt$



#### 3.3. Definiciones

##### Ortogonalidad

Dados  $\bar{x}, \bar{y}$ :

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} \perp \bar{y} \quad (3.1)$$

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*



**Norma de un vector**

Se define la norma de un vector como:

$$|\bar{x}|^2 = (\bar{x}, \bar{x}) \quad (3.2)$$

La **norma de un vector** depende del producto interno, pero cumple las siguientes propiedades:

- $|\bar{x}| \in \mathbb{R} \forall \bar{x} \in V$
- $|\bar{x}| \geq 0$  ( $|\bar{x}| = 0 \iff \bar{x} = 0$ )
- $|k \cdot \bar{x}| = |k| \cdot |\bar{x}|$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**

$$|(\bar{x}, \bar{y})| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|, \quad x, y \in V_K \quad (3.3)$$

La igualdad se cumple si  $\bar{x} \parallel \bar{y}$

- **Desigualdad triangular:**

$$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}| \quad (3.4)$$

- **Teorema de pitágoras:** Si  $\bar{x} \perp \bar{y}$  entonces:

$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 \quad (3.5)$$

La recíproca solo vale para  $\mathbb{R}$

- **Identidad del paralelogramo:**

$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 + |\bar{x} - \bar{y}|^2 = 2(|\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2), \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad (3.6)$$

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

**Ángulo entre dos vectores**

Dado  $\bar{x}, \bar{y}$ :

$$\cos(\theta) = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|} \quad (3.7)$$

Con  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y} \neq 0$  para espacios vectoriales reales con producto interno.

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*



**Complemento ortogonal**

Sea  $A \subset V_K \cdot A^\perp = \{\bar{x} \in V_K | (\bar{x}, \bar{y}) = 0, \forall \bar{y} \in A\}$

Para el cálculo del complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita, alcanza con exigir la ortogonalidad a un sistema de generadores

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

**Distancia entre vectores**

Dados  $\bar{x}, \bar{y}$ , se define la función distancia como:

$$d : V_R \times V_R \rightarrow R^+ : d(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{y} - \bar{x}| \quad (3.8)$$

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

**3.4. Matriz asociada al producto interno****Matriz de producto interno**

Sea  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$  base de  $V_K$ . Entonces  $G \in K^{k \times k}$ ,  $g_{ij} = (\bar{v}_i, \bar{v}_j)$  es la matriz de producto interno:

$$G = \begin{bmatrix} |\bar{v}_1|^2 & \dots & (\bar{v}_1, \bar{v}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{v}_k, \bar{v}_1) & \dots & |\bar{v}_k|^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Si  $B$  es base de  $V_K$  y  $G$  es la matriz del producto interno en esa base, entonces  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ :

$$(\bar{x}, \bar{y}) = C_B^H(\bar{x}) \cdot G \cdot C_B(\bar{y}) \quad (3.10)$$

**Propiedades de la matriz de producto interno**

Dada la matriz  $G$  de producto interno se tiene que:

$$g_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, k \quad (3.11)$$

$$G^H = G \quad (3.12)$$

$$G \text{ es definida positiva} \quad (3.13)$$

$$\exists G^{-1} \quad (3.14)$$

$$G \text{ de una Base Ortogonal (BOG) es una matriz diagonal} \quad (3.15)$$

$$G \text{ de una Base Ortonormal (BON) es una matriz identidad} \quad (3.16)$$



## 4. Proyecciones y matrices de proyección

### 4.1. Propiedades de la proyección

#### Propiedades de la proyección

Sea  $S \subset V$  y  $S^\perp$  su complemento ortogonal, entonces  $\forall \bar{x} \in V$ :

$$\bar{x} = \underbrace{\bar{u}}_{\in S} + \underbrace{\bar{v}}_{\in S^\perp} = P_S(\bar{x}) + P_S^\perp(\bar{x}) \quad (4.1)$$

Se definen las siguientes propiedades:

- $P_S(\bar{x})$  es el vector de  $S$  mas próximo a  $\bar{x}$
- $P_S(\bar{v}) = \bar{v} \iff \bar{v} \in S$  y además  $P_S(\bar{w}) = 0 \iff \bar{w} \in S^\perp$
- Por pitágoras:  $|\bar{x}|^2 = |P_S(\bar{x})|^2 + |P_S^\perp(\bar{x})|^2, \forall x \in V$
- $|P_S(\bar{x})| \leq |\bar{x}|$ . Si  $|P_S(\bar{x})| = |\bar{x}|$  entonces  $\bar{x} \in S$
- $d(\bar{x}, S) = |P_S^\perp(\bar{x})|$
- $d(\bar{x}, S^\perp) = |P_S(\bar{x})|$

⌘

### 4.2. Proyección y reflexión

#### Proyección y reflexión

Sea  $S$  un subespacio de  $V$ , y  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$  una base ortogonal (BOG) de  $S$ . Entonces  $\forall \bar{x} \in V$ :

$$P_S(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k \frac{(\bar{v}_i, \bar{x})}{(\bar{v}_i, \bar{v}_i)} \bar{v}_i \quad (4.2)$$

$$R_S(\bar{x}) = 2P_S(\bar{x}) - \bar{x} = 2P_S(\bar{x}) - (P_S(\bar{x}) + P_S^\perp(\bar{x})) = P_S(\bar{x}) - P_S^\perp(\bar{x}) = \bar{x} - 2P_S^\perp(\bar{x}) \quad (4.3)$$

⌘



## 4.2.1. Proyección y transformaciones lineales

## Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea  $T : V_K \rightarrow V_K$  una transformación lineal tal que:

$$\text{Im}(P_S) = S \quad (4.4)$$

$$\text{Nul}(P_S) = S^\perp \quad (4.5)$$

Y sea  $B = \{\underbrace{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\bar{\mathbf{v}}_{q+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n}_{\in S^\perp}\}$  una base de  $V$ , entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[P_S]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecta, y tantos 0 como la dimensión del complemento ortogonal.

*Nota:* La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

## 4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales

## Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea  $T : V_K \rightarrow V_K$  una transformación lineal tal que:

$$T(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{v}}, \forall \bar{\mathbf{v}} \in S \quad (4.7)$$

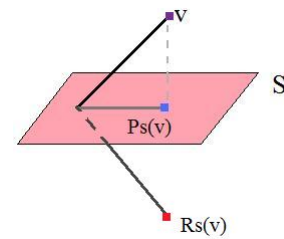
$$T(\bar{\mathbf{v}}) = -\bar{\mathbf{v}}, \forall \bar{\mathbf{v}} \in S^\perp \quad (4.8)$$

Y sea  $B = \{\underbrace{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\bar{\mathbf{v}}_{q+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n}_{\in S^\perp}\}$  una base de  $V$ , entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & -1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecta, y tantos -1 como la dimensión del complemento ortogonal.

*Nota:* La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.



**Figura 4.1:** Proyección y reflexión

## 4.3. Matriz de Householder

## Propiedades de la proyección

La matriz de reflexión sobre un subespacio de dimensión  $n - 1$  que es ortogonal a un vector  $\bar{\mathbf{w}}$  en un espacio de dimensión  $n$  se puede obtener mediante la expresión:

$$H = I_d - 2 \frac{\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}^T}{\bar{\mathbf{w}}^T \cdot \bar{\mathbf{w}}} \quad (4.10)$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- Es involutiva:  $H \circ H = I_d$
- Es simétrica:  $H^T = H$
- Es inversible:  $\exists H^{-1}$  y  $\exists H^{-1} = H$
- Es ortogonal:  $H^T H = H H^T = I_d$

4.4. Rotaciones en  $R^3$ **Rotaciones en  $R^3$** 

Sea  $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3\}$  una Base Ortonormal (BON) de  $R^3$  y sea  $T$  la rotación  $\theta$  grados alrededor del eje  $v_i$ :

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_1 : [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_2 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_3 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$



## 4.5. Proceso de Gram-Schmidt

**Proceso de Gram-Schmidt**

Dada una base  $\{\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_p\}$  para un subespacio  $W \in R^n$  defina:

1.  $\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1$
2.  $\bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{x}}_2 - \frac{\bar{\mathbf{x}}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1}{\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1} \bar{\mathbf{v}}_1$
3.  $\bar{\mathbf{v}}_p = \bar{\mathbf{x}}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\bar{\mathbf{x}}_p \cdot \bar{\mathbf{v}}_i}{\bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{v}}_i} \bar{\mathbf{v}}_i$

Entonces  $\{\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p\}$  es una Base Ortogonal (BOG) de  $W$ .

Si luego se divide a cada componente por la norma de la base se obtiene una Base Ortonormal (BON) de  $W$ .



## 4.6. Matrices de proyección

### Matriz de proyección

Utilizando el producto interno canónico de sobre  $K^n$ , con  $K = R$  o  $K = C$ .

$P \in K^{n \times n}$  es una matriz de proyección si y solo si:

$$P^2 = P \quad (4.14)$$

$$P^H = P \quad (4.15)$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- $\text{Col}(P) = \text{Nul}(P)^\perp$
- $P \cdot y = y \iff y \in \text{Col}(P)$
- Si  $P_S$  es matriz de proyección sobre  $S$  y  $P_S^\perp$  es matriz de proyección sobre  $S^\perp$  entonces  $P_S + P_S^\perp = I_d$
- Las columnas de  $P$  son una base del espacio sobre el cual proyectan
- $\text{rango}(P) = \text{tr}(P)$
- $\det P \neq 0$  si  $P \neq I_d$
- Si  $P_1$  y  $P_2$  son matrices de proyección y  $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$ , entonces  $P_1 + P_2$  es matriz de proyección y  $\text{rango}(P_1 + P_2) = \text{rango}(P_1) + \text{rango}(P_2)$

Obtención de la matriz de proyección:

1. Sea  $Q$  una matriz cuyas columnas son una Base Ortonormal (BON) de  $S \subset V$ . Entonces la única matriz de proyección sobre  $S$  es  $[P_S] = Q \cdot Q^T$ . La matriz de proyección sobre  $S^\perp$  es  $[P_S^\perp] = I_d - [P_S]$
2. Sea  $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_q\}$  una base de  $S$ , y  $A$  la matriz que tiene por columnas a  $\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_q$ . Entonces la única matriz de proyección sobre  $S$  se obtiene mediante  $[P_S] = A(A^H A)^{-1} A^H = AA^\#$



## 4.7. Inversas y pseudoinversas

### Propiedades de la pseudoinversa

Sea  $A \in K^{n \times q} | \text{rango}(A) = q$ . La matriz pseudoinversa de  $A$  es  $A^\# = (A^H A)^{-1} A^H$ :

- Si  $A$  es cuadrada invertible,  $A^{-1} = A^\#$
- $A^\# \in R^{q \times n}$
- $A^\# A = I_{d(q)}$
- $AA^\# = [P]_{\text{Col}(A)}$
- $\text{Nul}(AA^\#) = [\text{Col}(A)]^\perp$



## 4.8. Cuadrados mínimos

## Cuadrados mínimos

Sea  $A \in K^{n \times q}$ ,  $\bar{x} \in K^q$ ,  $\bar{b} \in R^n$ . Si  $Ax = b$  tiene una solución extra, entonces  $\bar{b} \in \text{Col}(A)$ . Si  $b \notin \text{Col}(A)$ , intentamos hallar una solución  $\hat{x} \in K^q$  (la solución por **cuadrados mínimos**) tal que:

- $|A\hat{x} - \bar{b}| < |A\bar{u} - \bar{b}|, \forall \bar{u} \in K^q$
- $d(A\hat{x}, \bar{b}) \leq d(A\bar{u}, \bar{b}), \forall \bar{u} \in K^q$
- $|A\hat{x}| \leq |\bar{b}|$  (Son iguales si  $\bar{b} \in \text{Col}(A)$ )
- Ecuaciones normales de cuadrados mínimos:  
 $A^T A\hat{x} = A^T \bar{b} = \hat{b}$
- $A\hat{x} = \hat{b} = P_{\text{Col}(A)}(\bar{b})$  si y solo si:

$$A\hat{x} \in \text{Col}(A) \quad (4.16)$$

$$\bar{b} - A\hat{x} \in \text{Col}(A)^\perp \quad (4.17)$$

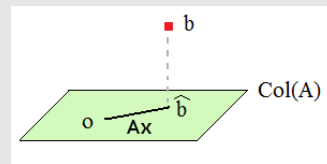


Figura 4.2: Cuadrados mínimos

⌘

## Propiedades de Cuadrados mínimos

1. Si  $\hat{x} = 0$  entonces  $\bar{b} \in [\text{Col}(A)]^\perp$ . La recíproca solo es cierta si  $A$  es invertible.
2. Si las columnas de  $A$  son linealmente independientes, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{b} = A^\# \bar{b} \quad (4.18)$$

Si las columnas de  $A$  son linealmente dependientes, el sistema  $A^T A\hat{x} = A^T \bar{b}$  tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma  $\hat{x} = \hat{x}_p + \underbrace{\hat{x}_n}_{\in \text{Nul}(A)}$ .

3. Si  $\bar{b} \in \text{Col}(A)$ , entonces toda solución de  $A\bar{x} = \bar{b}$  es una solución exacta y por cuadrados mínimos.
4. El error de aproximación  $\epsilon$  es igual a  $|\bar{b} - \hat{b}|$ .

⌘

## 4.8.1. Norma mínima

## Pseudoinversa de Moore-Pensore

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima pertenece al espacio  $\text{Fil}(A)$  y se obtiene como:

$$\tilde{x} = A^+ \bar{b} \quad (4.19)$$

Siendo  $A^+$  la **pseudoinversa de Moore-Penrose** de  $A$ .

⌘

## 4.9. Regresión lineal

### Regresión lineal

Sean los puntos  $\overline{\mathbf{P}}_i = (x_i, y_i)$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ . La recta que mejor aproxima a los puntos es:

$$\overline{y} = \alpha_0 \overline{1} + \alpha_1 \overline{x} \quad (4.20)$$

Y los coeficientes  $\alpha_i$  se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Si se aproxima por una parábola se agrega otro nivel de complejidad, con  $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ , lo que implica una columna adicional a la matriz para los términos cuadráticos, una fila adicional para la constante  $\alpha_2$  en la variable.

Se siguen agregando columnas a la matriz y filas al vector tantas veces como grados de complejidad se necesiten.



## 5. Transformaciones lineales

Sea  $T \in \ell(V_K, W_K)$  y  $A = [T]_{BC}$  con  $B$  base de  $V$  y  $C$  base de  $W$  la matriz de  $T$ .

### 5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales

#### Condiciones para ser Transformación lineal

Para que una transformación se considere lineal debe cumplir:

1.  $T(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) = T(\bar{\mathbf{u}}) + T(\bar{\mathbf{v}})$ , con  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in V$
2.  $T(\alpha \bar{\mathbf{u}} + \beta \bar{\mathbf{v}}) = \alpha \cdot T(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \cdot T(\bar{\mathbf{v}})$ , con  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in V_K$  y  $\alpha, \beta \in K$
3.  $T(0_{V_K}) = 0_{V_K}$

N

### 5.2. Núcleo e Imagen

#### Núcleo e Imagen

**Núcleo:**  $\text{Nul}(T) = \{\bar{\mathbf{v}} \in V_K \mid T(\bar{\mathbf{v}}) = 0_W\} = C_B^{-1}(\text{Nul}(A))$ .

**Imagen:**  $\text{Im}(T) = \{\bar{\mathbf{w}} \in W_K \mid T(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{w}} \text{ con } \bar{\mathbf{v}} \in V_K\} = C_C^{-1}(\text{Col}(A))$ .

Ambos son subespacios vectoriales.

La imagen de una Transformación Lineal puede obtenerse como lo que generan los transformados de una base del espacio de partida.

N

#### Teorema de la dimensión

Sea  $T \in \ell(V, W)$  y sea  $\text{Dim}(V) = n$  (finita). Entonces:

$$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(\text{Nul}(T)) + \text{Dim}(\text{Im}(T)) \quad (5.1)$$

N

### 5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales

#### 5.3.1. Monomorfismo (Inyectividad)

##### Monomorfismo

Una Transformación lineal es inyectiva si verifica:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 \neq \bar{\mathbf{v}}_2 \Rightarrow T(\bar{\mathbf{v}}_1) \neq T(\bar{\mathbf{v}}_2), \forall \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2 \in V \quad (5.2)$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \iff \text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{Dim}(V) \quad (5.3)$$

Una Transformación Lineal Inyectiva transforma conjuntos Linealmente Independientes a conjuntos Linealmente Independientes.

La recíproca también es cierta: si  $A$  es un conjunto Linealmente Independiente y es transformado en otro conjunto Linealmente Independiente, la Transformación Lineal es inyectiva. Es decir: Si  $T$  es inyectiva y  $A$  es Linealmente Independiente,  $T(A)$  es Linealmente Independiente.

Las matrices asociadas a Transformaciones Lineales inyectivas tienen sus columnas Linealmente Independientes.

Si  $\text{Dim}(V) > \text{Dim}(W)$ ,  $T$  no puede ser inyectiva.



#### 5.3.2. Epimorfismo (Sobreyectividad)

##### Epimorfismo

Una Transformación lineal es sobreyectiva si y solo si:

$$\text{Im}(T) = W \quad (5.4)$$

Las matrices asociadas a Transformaciones lineales sobreyectivas tienen sus filas Linealmente Independientes.

Si  $\text{Dim}(W) > \text{Dim}(V)$ ,  $T$  no puede ser sobreyectiva.





## 5.3.3. Isomorfismo(Biyectividad)

**Biyectividad**

Una Transformación lineal es biyectiva si y solo si:

$$\dim(W) = \dim(V) \quad (5.5)$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \quad (5.6)$$

Es decir, si es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez.

$T$  es biyectiva  $\iff$  si  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es base de  $V \Rightarrow \{T(\bar{v}_1), \dots, T(\bar{v}_n)\}$  es base de  $W$

La matriz asociada a una Transformación lineal biyectiva tiene sus filas y columnas Linealmente Independientes, o sea que es una matriz inversible, es decir, existe una transformación lineal inversa  $T^{-1} = [T]^{-1}$

Si  $\dim(V) = \dim(W)$ , entonces o bien  $T$  es inyectiva y sobreyectiva, o no es ninguna de las dos.



## 5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal

**Matriz de la Transformación lineal**

Sea  $T \in \ell(V_K, W_K)$ , sea  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q\}$  base de  $V$  y  $C = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$  base de  $W$ . Entonces  $T$  se puede escribir como  $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ , con  $A \in K^{m \times q}$  tal que:

$$A = [T]_{BC} = \begin{bmatrix} C_C(T(\bar{v}_1)) & C_C(T(\bar{v}_2)) & \dots & C_C(T(\bar{v}_q)) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Dicha matriz posee las siguientes propiedades:

- $[T]_{BC} \cdot C_B(\bar{v}) = C_C(T(\bar{v})), \forall \bar{v} \in V$
- $\bar{v} \in \text{Nul}(T) \iff C_B(\bar{v}) \in \text{Nul}(A)$
- $\bar{w} \in \text{Im}(T) \iff C_C(\bar{w}) \in \text{Col}(A)$
- $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rango}(A)$

**Teorema para matrices de Transformación lineal**

Sean  $V$  y  $W$   $K$ -espacios vectoriales ( $K = R$  o  $C$ ). Sea  $T : V \rightarrow W$ .

Si  $B_1$  y  $B_2$  son bases ordenadas de  $V$ , y  $C_1$  y  $C_2$  son bases ordenadas de  $W$ , entonces:

$$\text{rango}([T]_{B_1 C_1}) = \text{rango}([T]_{B_2 C_2}) \quad (5.8)$$



## 5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

### Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

Sea  $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n\}$  base de  $V$  y  $\bar{\mathbf{w}}_1, \dots, \bar{\mathbf{w}}_n$  vectores de  $W$ . Entonces existe y es única la Transformación lineal que verifica:

$$T(\bar{\mathbf{v}}_i) = \bar{\mathbf{w}}_i, \forall i = 1, \dots, n \quad (5.9)$$

Además, dada una Transformación lineal y un par de bases, existe una única matriz asociada.

La recíproca también es verdadera: dada una matriz y un par de bases, existe una única Transformación lineal asociada.

⌘

## 5.6. Composición de Transformaciones lineales

### Composición de Transformaciones lineales

Sea  $f \in \ell(V, W)$  y  $g \in \ell(W, H) \Rightarrow g \circ f \in \ell(V, H)$ . Podemos encontrar la siguientes propiedades:

$$\text{Nul}(f) \subseteq \text{Nul}(g \circ f) \quad (5.10)$$

$$\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g) \quad (5.11)$$

⌘

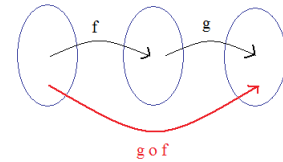


Figura 5.1: Composición

## 5.7. Operadores lineales

### Operadores lineales

Un operador lineal es una Transformación lineal que va de un espacio en si mismo, se escribe como  $T \in \ell(V)$  y cuenta con las siguientes propiedades:

- Si  $T_1 \in \ell(V)$  y  $T_2 \in \ell(V)$ , entonces  $T_1 \circ T_2 \in \ell(V)$
- Si  $T \in \ell(V)$ ,  $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ veces}}$

⌘

## 6. Autovalores y Autovectores

### 6.1. Definiciones básicas

#### Definiciones básicas

**Autovector:** Un vector  $\bar{v} \neq 0$  es autovector de  $A \in K^{n \times n} \iff \exists \lambda \in K \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}$

**Autoespacio:** El autoespacio de  $A$  asociado a un autovalor  $\lambda$  es  $S_\lambda(A) = \text{Nul}(A - \lambda I)$

**Polinomio característico:** El polinomio característico de una matriz  $A \in K^{n \times n}$  es  $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ , y tiene grado  $n$ . Si  $K = R$  el polinomio tiene a lo sumo  $n$  raíces. Si  $K = C$  tiene exactamente  $n$  raíces.

**Autovalor:** Los autovalores  $\lambda$  de una matriz son las raíces de su polinomio característico.

**Espectro de una matriz:**  $\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ es autovalor de } A\}$ .



### 6.2. Autovalores complejos de matriz real

#### Autovalores complejos

Supongamos que  $\bar{v}$  es un autovector de  $A \in R^{n \times n}$  asociado a  $\lambda = a + jb$  con  $a, b \in R, b \neq 0$ . Entonces  $\bar{v}^*$  es también un autovector de  $A \in R^{n \times n}$  asociado a  $\lambda^* = a - jb$ .

En particular si  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es una base de  $S_\lambda$ , entonces  $\{\bar{v}_1^*, \dots, \bar{v}_n^*\}$  es una base de  $S_{\lambda^*}$ .



### 6.3. Multiplicidad geométrica y algebraica de un Autovalor

#### Multiplicidad de Autovalores

Se define:

- $m_g(\lambda) = \text{Dim}(S_\lambda(A))$
- $m_a(\lambda) \doteq$  número de veces que aparece  $\lambda$  como raíz del polinomio característico.

Siempre se verifica que:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad (6.1)$$



## 6.4. Propiedades

### Propiedades de Autovalores y Autovectores

Sea  $A \in K^{n \times n}$ :

- $A$  es singular  $\iff 0$  es un autovalor de  $A \iff m_g(0) = n - k \iff \text{rango}(A) = k < n$
- Dos autovectores asociados a autovalores distintos son Linealmente Independientes
- Si  $A \in K^{2 \times 2}$ , entonces  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A|$
- Si todas las filas o columnas de  $A$  sumas  $s$ , entonces  $s$  es autovalor de  $A$ .
- Sea  $p(t)$  un polinomio de grado  $k$ . Si  $\lambda$  es autovalor de  $A$ , entonces se cumple que  $p(\lambda)$  es autovalor de  $p(A)$ , y para cada autovalor  $\mu$  de  $p(A)$  existe un autovalor  $\lambda$  de  $A$  tal que  $p(\lambda) = \mu$ .
- Si  $\lambda$  es autovalor de  $A$ :
  - $\lambda$  es autovalor de  $A^T$
  - $\lambda^{-1}$  es autovalor de  $A^{-1}$  y  $S_{\lambda^{-1}}(A^{-1}) = S_\lambda(A)$
  - $r \cdot \lambda$  es autovalor de  $r \cdot A$
  - $\lambda^k$  es autovalor de  $A^k$ , con  $k \in \mathbb{N}$
  - $\lambda + r$  es autovalor de  $A + r \cdot I$



## 6.5. Autovalores y Autovectores de operadores lineales

### Autovalores y Autovectores de Operadores lineales

$T : V_K \rightarrow V_K$ . Un vector  $\bar{v} \neq \bar{0}$  es autovector de  $T \iff T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ , con  $\lambda$  autovalor de  $T$ .

$S_\lambda(T) = \{\bar{x} \in V \mid T(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \text{ y } \lambda \text{ autovalor de } T\} = \text{Nul}(T - \lambda I)$ . Si  $B$  es base de  $V$  y  $A$  es la matriz de  $T$  en esa base, entonces:

$$\sigma(A) = \sigma(T) \forall B \text{ base de } V \quad (6.2)$$

$$\bar{x} \text{ es autovector de } T \iff C_B(\bar{x}) \text{ es autovector de } [T]_B = A \quad (6.3)$$

Se deducen las siguientes propiedades:

- $T(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Rightarrow T^n(\bar{x}) = \lambda^n \bar{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$
- Si  $\lambda$  es autovalor de  $T$ ,  $\lambda^{-1}$  es autovalor de  $T^{-1}$
- Si  $h$  es un polinomio en  $K$  y  $T(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ , entonces:

$$\sigma[h(A)] = h[\sigma(A)] \quad (6.4)$$

$$S_{h(\lambda)}h(A) = S_\lambda(A) \quad (6.5)$$

- $T : V_K \rightarrow V_K$  es regular  $\iff 0 \notin \sigma(T)$



## 6.6. Diagonalización

### Diagonalización

Los siguientes enunciados son equivalentes para definir si  $A \in K^{n \times n}$  es diagonalizable:

- $A \sim D$
- $\exists$  una base de  $K^n$  compuesta por autovectores de  $A$
- $A$  tiene  $n$  autovalores Linealmente Independientes
- $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$
- $\exists P$  invertible y  $D$  diagonal tal que:

$$A = PDP^{-1} \quad (6.6)$$

Siendo  $P$  la matriz de autovectores y  $D$  la matriz diagonal de autovalores.



### 6.6.1. Matrices trivialmente diagonalizables

#### Diagonalizaciones triviales

- **Matriz nula:**
  - **Autovalores:** 0
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz identidad:**
  - **Autovalores:** 1
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz diagonal:**
  - **Autovalores:**  $a_{ii}$ , los elementos de la diagonal
  - **Autovectores:** Los que tienen sus componentes nulas, excepto la  $n$ -ésima.
- **Matriz escalar:**
  - **Autovalores:**  $k \in R$
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz de proyección:**
  - **Autovalores:** 1 con  $m_a(1) = m_g(1) = \text{Dim}(S)$  y 0 con  $m_a(0) = m_g(0) = \text{Dim}(S^\perp)$
  - **Autovectores:** Los vectores de  $S$  asociados a 1 y los asociados a  $S^\perp$  a 0
- **Matriz de reflexión:**
  - **Autovalores:** 1 con  $m_a(1) = m_g(1) = \text{Dim}(S)$  y -1 con  $m_a(-1) = m_g(-1) = \text{Dim}(S^\perp)$
  - **Autovectores:** Los vectores de  $S$  asociados a 1 y los asociados a  $S^\perp$  a -1



## 6.6.2. Propiedades

## Propiedades de la diagonalización

- Si  $A$  es diagonalizable entonces  $A^n$  es diagonalizable ( $D_A^n = D_{A^n}$  y  $\sigma(A^n) = \sigma^n(A)$ ). La recíproca es falsa
- Si  $A \in C^{n \times n}$  tiene  $n$  autovalores distintos entonces  $A$  es diagonalizable. La recíproca es falsa
- $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i = p_A(0)$
- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$



## 6.6.3. Diagonalización de transformaciones lineales

## Diagonalización de Transformaciones Lineales

Los siguientes enunciados son equivalentes para decir que  $T \in \ell(V_K)$  con  $\text{Dim}(V_K) = n$ , es diagonalizable:

- $\exists B$  base de  $V_K$  tal que  $[T]_B$  es diagonal
- $\exists B$  base de  $V_K$  formada por autovectores de  $T$
- $T$  tiene  $n$  autovectores Linealmente Independientes

Esa base  $B$  y  $[T]_B = \text{diag}(\sigma(T))$ .

Si  $A = [T]_H$ ,  $H$  cualquiera base, entonces  $T$  es diagonalizable si y solo si  $A$  es diagonalizable.



## 7. Matrices hermíticas y simétricas

### 7.1. Diagonalización

#### Matriz antisimétrica

**Matriz antisimétrica:** Si  $A \in R^{n \times n}$  es antisimétrica ( $A^T = -A$ ) entonces:

- Los autovalores de  $A$  son imaginarios puros o nulos
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- $A$  es diagonalizable unitariamente.



#### Matriz simétrica(hermítica)

**Matriz simétrica(hermítica):** Si  $A \in R^{n \times n}$  es simétrica ( $B \in C^{n \times n}$  es hermítica) si y solo si:

$A$  es diagonalizable ortogonalmente:

$$A = PDP^T \quad (7.1)$$

$B$  es diagonalizable unitariamente:

$$B = PDP^H \quad (7.2)$$

Con  $D$  real.

Se deducen las siguientes propiedades:

- $A$  y  $B$  tienen  $n$  autovalores reales
- Los elementos de la diagonal de  $A$  y  $B$  son reales
- $|A| \in R$
- $\dim(S_\lambda(A)) = m_a(\lambda) \forall \lambda \in \sigma(A)$
- $\dim(S_\lambda(B)) = m_a(\lambda) \forall \lambda \in \sigma(B)$
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales



**Matriz ortogonal(unitaria)**

**Matriz ortogonal(unitaria):** Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es ortogonal ( $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es unitaria) si y solo si:

$$AA^T = A^T A = I_d \quad (7.3) \quad \text{ó} \quad BB^H = B^H B = I_d \quad (7.5) \quad \text{Las}$$

$$A^T = A^{-1} \quad (7.4) \quad B^H = B^{-1} \quad (7.6)$$

columnas de  $A$  y  $B$  son Base Ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  respectivamente.

Se deducen las siguientes propiedades:

- $|A| = \pm 1$ . Si  $|A| = 1$ ,  $A$  es la matriz de rotación
- Los autovalores tienen módulo 1 y pueden ser reales o complejos
- Son matrices unitariamente diagonalizables
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- Preservan los productos internos:  $(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$
- Preservan las normas asociadas al producto interno:  $|A\bar{x}| = |\bar{x}|$
- Si  $C$  es unitaria,  $BC$  y  $CB$  son unitarias también.



## 7.2. Descomposición espectral

**Descomposición espectral de matrices simétricas**

Si  $A = PDP^{-1} = PDP^T$ , las columnas de  $P$  son autovectores ortonormales  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$  de  $A$  y los autovalores correspondientes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  están en la matriz diagonal  $D$ . Entonces:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i \bar{u}_i^T \quad (7.7)$$





### 7.3. Subespacios invariantes por una transformación lineal

#### Subespacios invariantes por una transformación lineal

- $S \subseteq K^n$  es invariante por  $A \in K^{n \times n} \iff \forall \bar{x} \in S \mid A\bar{x} \in S$
- $S \subset V$  es invariante por  $T \in \ell(V) \iff \forall \bar{x} \in S \mid T(\bar{x}) \in S$

Se deducen las siguientes propiedades:

- Si  $\lambda$  es autovalor de  $T$ , entonces  $S_\lambda(T)$  es un subespacio invariante por  $T$ , puesto que:

$$\forall \bar{x} \in S_\lambda(T) \Rightarrow T(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \in S_\lambda(T) \quad (7.8)$$

- No todo subespacio invariante es un autoespacio de  $T$ , pero sí los de dimensión 1



## 8. Formas cuadráticas

### Formas cuadráticas

Una forma cuadrática en  $R^n$  es una función  $Q : R^n \rightarrow R$  tal que:

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} \quad (8.1)$$

Donde  $A$  es una matriz simétrica  $\in R^{n \times n}$ .



### Teorema de los ejes principales

Sea  $A$  una matriz simétrica  $\in R^{n \times n}$ . Entonces existe un cambio ortogonal de variable,  $\bar{x} = P\bar{y}$ , donde  $P$  es una matriz ortogonal tal que  $|P| = +1$  e  $\bar{y}$  es el nuevo vector, que transforma la forma cuadrática  $\bar{x}^T A \bar{x}$  a una forma cuadrática  $\bar{y}^T D \bar{y}$  sin términos cruzados:

$$\bar{x}^T A \bar{x} = (P\bar{y})^T A (P\bar{y}) = \bar{y}^T \underbrace{P^T A P}_D \bar{y} = \bar{y}^T D \bar{y} = g(\bar{y}) \quad (8.2)$$



### Perspectiva geométrica de los ejes principales

Sea la forma cuadrática  $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$ , con  $A = PDP^T$ .

El conjunto de todas las  $\bar{x} \in R^n \mid \bar{x}^T A \bar{x} = c$  es una elipse, una hipérbola, dos rectas, un punto o ninguno.

Si  $A$  es diagonal, la gráfica está en posición estándar. Si  $A$  no es diagonal, la gráfica está girada hasta salirse de la posición estándar. Los **ejes principales** son los autovectores de  $A$  y son el nuevo sistema de coordenadas para los cuales la gráfica está en posición estándar.



## 8.1. Clasificación

## Clasificación de las formas cuadráticas

Una forma cuadrática  $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$  es:

|                              | Definición                                    | Criterio I                           | Criterio II                                |
|------------------------------|---|--------------------------------------|--|
| <b>Definida positiva</b>     | $Q(\bar{x}) > 0,$<br>$\forall \bar{x} \neq 0$ | $a_{11} > 0,$<br>$ A  > 0$           | Autovalores de $A$ positivos               |
| <b>Semidefinida positiva</b> | $Q(\bar{x}) \geq 0,$<br>$\forall \bar{x}$     | $ A_k  \geq 0,$<br>$k = 1, \dots, n$ | Autovalores de $A$ positivos o nulos       |
| <b>Definida negativa</b>     | $Q(\bar{x}) < 0,$<br>$\forall \bar{x} \neq 0$ | $a_{11} < 0,$<br>$ A  > 0$           | Autovalores de $A$ negativos               |
| <b>Semidefinida negativa</b> | $Q(\bar{x}) \leq 0,$<br>$\forall \bar{x}$     | $ A_k  \leq 0,$<br>$k = 1, \dots, n$ | Autovalores de $A$ negativos o nulos       |
| <b>Indefinida</b>            | $Q(\bar{x}) \asymp 0$                         |                                      | Autovalores de $A$ negativos y/o positivos |

N

## 8.2. Optimización restringida

## Teorema de Rayleigh

Sea la forma cuadrática  $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$ , con  $A$  simétrica. Se verifica:

$$\lambda_{\min}(A) \leq \frac{Q(\bar{x})}{\|\bar{x}\|^2} \leq \lambda_{\max}(A) \quad (8.3)$$

Sea extremar una forma cuadrática  $f : R^n \rightarrow R$ ,  $f(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$ , ( $A$  simétrica), sujeto a la restricción  $|\bar{x}| = \alpha$ .

El máximo de  $f$  es  $\lambda_{\max}(A)\alpha^2$  y se alcanza en  $M = \{\bar{x} \in S_{\lambda_{\max}}(A) \mid |\bar{x}| = \alpha\}$

El mínimo de  $f$  es  $\lambda_{\min}(A)\alpha^2$  y se alcanza en  $m = \{\bar{x} \in S_{\lambda_{\min}}(A) \mid |\bar{x}| = \alpha\}$

Sea extremar una forma cuadrática  $f : R^n \rightarrow R$ ,  $f(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$ , ( $A$  simétrica), sujeto a la restricción  $\bar{x}^T B \bar{x} = \alpha^2$ , y sea  $B$  definida positiva tal que  $B = P_B D_B P_B^T$ . Mediante el cambio de variable  $\bar{y} = \sqrt{D_B} P_B^T \bar{x} \rightarrow \bar{x} = \sqrt{D_B^{-1}} P_B \bar{y}$ , esto es equivalente a extremar  $g(\bar{y}) = \bar{y}^T \left( \sqrt{D_B^{-1}}^T P_B^T A P_B \sqrt{D_B^{-1}} \right)$  y sujeto a la restricción  $|\bar{y}| = \alpha$ . Entonces:

$$\text{Máx } g(\bar{y}) = \text{Máx } f(\bar{x}) \quad (8.4)$$

$$\text{mín } g(\bar{y}) = \text{mín } f(\bar{x}) \quad (8.5)$$

Los  $\bar{x}$  en donde se alcanza ese extremo se hallan realizando  $\bar{x} = P_B \bar{y}$

N

## 9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)

### 9.1. Definición

#### Descomposición en Valores Singulares (DVS)

**Valores singulares:** Se define como:

$$VS(A) = \sqrt{\lambda_i}, \forall \lambda_i \in \sigma(A^T A) \quad (9.1)$$

Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  con rango  $r$ . Entonces existe una matriz  $\Sigma$ , y existen una matriz  $U$  ortogonal de  $m \times m$  y una matriz  $V$  ortogonal de  $n \times n$  tales que  $A = U\Sigma V^T$  donde:

- $\Sigma \in R^{m \times n}$  es tal que  $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , y la matriz diagonal  $D$  tiene como elementos a los primeros  $r$  valores singulares de  $A^T A$ , ordenados en forma descendente  $\sigma_i \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ .
- $V \in R^{n \times n}$  es una matriz cuyas columnas son una Base Ortonormal (BON) de autovectores  $\{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n\}$  asociados a los autovalores de  $A^T A$ .
- $U \in R^{m \times m}$  es una matriz cuyas primeras  $r$  columnas son los vectores  $\frac{A\bar{\mathbf{v}}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{A\bar{\mathbf{v}}_r}{\sigma_r}$ . Las otras columnas se obtienen completando la Base Ortonormal (BON) de  $R^m$ . Las columnas de  $U$  son autovectores de  $AA^T$ .



### 9.2. Subespacios de las DVS

#### Subespacios de la DVS

Sea  $A \in K^{m \times n}$ :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{\mathbf{u}}_1 & \dots & \bar{\mathbf{u}}_m \\ | & & | \end{bmatrix}}_{m \times m} \underbrace{\begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{\mathbf{v}}_1 & \dots & \bar{\mathbf{v}}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{n \times n}^T \quad (9.2)$$

Si  $\text{rango}(A) = r$  entonces:

$$\underbrace{\{\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_r\}}_{\text{BON de Col}(A)}, \underbrace{\{\bar{\mathbf{u}}_{r+1}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_m\}}_{\text{BON de Col}(A)^\perp} \quad (9.3)$$

$$\underbrace{\{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_r\}}_{\text{BON de Fil}(A)}, \underbrace{\{\bar{\mathbf{v}}_{r+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n\}}_{\text{BON de Fil}(A)^\perp} \quad (9.4)$$



## 9.3. Propiedades de las DVS

## Propiedades de la DVS

- $\text{rango}(A) = \text{rango}(\Sigma) = \text{rango}(\Sigma^T) = \#VS(A)_{>0}$
- $A \in R^{n \times n}$  es inversible  $\iff A$  tiene  $n$  VS positivos
- $VS(A)_{>0} = VS(A^T)_{>0}$
- Si  $A \in R^{n \times n} \Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^n VS_i(A)$
- Si  $A$  es cuadrada y definida positiva  $\Rightarrow \sigma(A) = VS(A)$
- Si  $A \sim B \Rightarrow VS(A) = VS(B)$
- Si  $B$  es ortogonal  $\Rightarrow A, AB$  y  $BA$  tienen los mismos valores singulares
- Si  $A$  es cuadrada y simétrica  $\Rightarrow VS_i(A) = |\lambda_i(A)|$
- Si las filas de  $A$  son una Base Ortonormal (BON), los valores singulares no nulos de  $A$  son 1
- Si las columnas de  $A$  son una Base Ortonormal (BON), los valores singulares de  $A$  son 1
- La matriz  $A^T A$  (*Matriz de Gram* de  $A$ ) es siempre simétrica y semidefinida positiva, con lo cual nunca tendrá valores singulares negativos. Será definida positiva cuando  $A$  tenga columnas Linealmente Independientes.
- Sea  $T : R^m \rightarrow R^n$  una transformación lineal tal que  $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ . Sea la forma cuadrática  $f(\bar{x}) = |T(\bar{x})|^2 = \bar{x}^T (A^T A) \bar{x}$ . Entonces:
  - El máximo de  $f(\bar{x})$  sujeto a  $|\bar{x}| = 1$  es  $\lambda_{max}(A^T A)$ . Entonces el máximo de  $|T(\bar{x})|$  es  $VS_{max}(A)$  y se alcanza en  $M = \{\bar{x} \in R^m \mid \bar{x} \in S_{\lambda_{max}}(A^T A), |\bar{x}| = 1\}$
  - El mínimo de  $f(\bar{x})$  sujeto a  $|\bar{x}| = 1$  es  $\lambda_{min}(A^T A)$ . Entonces el mínimo de  $|T(\bar{x})|$  es  $VS_{min}(A)$  y se alcanza en  $m = \{\bar{x} \in R^m \mid \bar{x} \in S_{\lambda_{min}}(A^T A), |\bar{x}| = 1\}$

N

## 9.4. DVS reducida y Pseudoinversa

## DVS reducida

Sea  $A \in R^{n \times m}$ . Si  $A = U\Sigma V^T$  y  $\text{rango}(A) = r$ . Entonces una Descomposición en Valores Singulares reducida (DVSr) de  $A$  es:

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T \quad (9.5)$$

Siendo  $U_r \in R^{n \times r}, \Sigma_r \in R^{r \times r}, V_r^T \in R^{r \times m}$

N

**Pseudoinversa de Moore-Penrose**

Se define la **pseudoinversa de Moore-Pensore** como:

$$A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T \quad (9.6)$$

Sea  $A \in R^{n \times m}$ , se deducen las siguientes propiedades:

- $A^+ = A^\#$  cuando  $\text{rango}(A) = m$
- $A^+ A = V_r V_r^T = P_{\text{Fil}(A)}$
- $AA^+ = U_r U_r^T = P_{\text{Col}(A)}$



## 10. Ecuaciones diferenciales

### 10.1. Wronskiano

#### Matriz de Wronski

Sea  $A = \{f_1, \dots, f_q\}$  funciones definidas en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , a valores en  $\mathbb{C}$ , con derivada hasta el orden  $q - 1$  continua en  $I$ . La **matriz de Wronski** de  $A$  es, para cada  $\bar{x} \in I$

$$M_{w_A}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) & \dots & f_q(\bar{x}) \\ f_1'(\bar{x}) & \dots & f_q'(\bar{x}) \\ f_1''(\bar{x}) & \dots & f_q''(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(q-1)}(\bar{x}) & \dots & f_q^{(q-1)}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Se define al **Wronskiano** como:

$$w_A(\bar{x}) = |M_{w_A}| = \begin{vmatrix} f_1(\bar{x}) & \dots & f_q(\bar{x}) \\ f_1'(\bar{x}) & \dots & f_q'(\bar{x}) \\ f_1''(\bar{x}) & \dots & f_q''(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(q-1)}(\bar{x}) & \dots & f_q^{(q-1)}(\bar{x}) \end{vmatrix} \quad (10.2)$$

Se deducen las siguientes propiedades:

- Si existe un  $\bar{x}_0 \in I$  tal que  $w_A(\bar{x}_0) \neq 0$ , entonces las funciones  $f_1, \dots, f_q$  son Linealmente Independientes
- Si un conjunto es Linealmente Dependiente en  $I$ , su wronskiano es la función nula. La recíproca es falsa; es verdadera solo si las funciones que componen el wronskiano son soluciones de una Ecuación Diferencial lineal de orden superior
- La derivada del wronskiano es el determinante obtenido derivando la última fila.
- La derivada del wronskiano es la suma de  $q$  determinantes.



### 10.2. Identidad de Abel

#### Identidad de Abel

Sea la ecuación diferencial  $y(\bar{x})^{(n)} + a_{n-1} \cdot y(\bar{x})^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y'(\bar{x}) + a_0 \cdot y(\bar{x}) = 0$  en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , sea  $S = \{y_1, \dots, y_n\}$  el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial, y sea  $W_s$  el Wronskiano de este conjunto. Entonces se verifica que:

$$W_s'(\bar{x}) = -a_{n-1} \cdot W_s(\bar{x}) \quad (10.3)$$



### 10.3. Existencia y unicidad de Problemas de Valores Iniciales (PVI)

#### Problemas de Valores Iniciales

Sea el problema  $a_n y(\bar{x})^{(n)} + a_{n-1} \cdot y(\bar{x})^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y'(\bar{x}) + a_0 \cdot y(\bar{x}) = f(\bar{x})$  sujeto a la condición inicial  $y(\bar{x}_0) = y_0$ . La condición de existencia y unicidad de la solución del problema de valores iniciales es:

$$\text{Ecuación diferencial normal en } I : a_n \neq 0, \forall \bar{x} \in I \quad (10.4)$$

$$\bar{x}_0 \in I \quad (10.5)$$



### 10.4. Variables separables

#### Variables separables

$$y'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})}{g(y)}$$

Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{d\bar{x}} = \frac{f(\bar{x})}{g(y)}$$

Derivada con diferenciales

$$g(y)dy = f(\bar{x})d\bar{x}$$

Separo las variables

$$G(y) = F(\bar{x}) + c$$

Integro



### 10.5. Lineales de 1<sup>er</sup> orden

#### Lineales de 1<sup>er</sup> orden

Obtenemos primero la solución general de la homogénea  $y_H$  y luego una particular de la no homogénea  $y_P$ . La solución buscada será  $y_G = y_H + y_P$

- La solución de la ecuación homogénea asociada a  $y' = p(x)y = 0$  es de variables separables, una solución es  $y_H(x) = e^{-\int p(x)dx}$
- La solución no homogénea se obtiene multiplicando toda la ecuación por el factor integrante de Lagrange:

$$u(v) = e^{\int p(x)dx} \quad (10.6)$$

Y la ecuación a resolver será  $[u(v) \cdot y(x)]' = u(v) \cdot q(x)$





## 10.6. Diferencial exacta

## Diferencial exacta

Son del tipo  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ .

Es diferencial exacta si existe  $f(x, y)$  tal que  $df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , es decir si:

$$\frac{df}{dx} = P(x, y) \quad (10.7)$$

$$\frac{df}{dy} = Q(x, y) \quad (10.8)$$

En ese caso, la solución general es  $f(x, y) = C$ . Se cumple que la ecuación anterior es diferencial exacta si y solo si  $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$

Se dice además que  $\mu(x, y)$  es un factor integrante de la ecuación  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  si al multiplicar la ecuación por  $\mu(x, y)$  la ecuación resulta diferencial exacta.



## 10.7. Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

## Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Son del tipo  $\sum_{i=0}^n a_i \cdot y^{(i)}(t) = 0, \forall t \in I$ .

Polinomio característico:  $p(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda_i^n$

Espectro de la ecuación diferencial:  $\sigma(p) = \{\lambda \in C \mid p(\lambda) = 0\}$

$y_H(t) = t^k e^{\lambda t}$  es una solución de la Ecuación diferencial si  $\lambda \in \sigma(p)$ , con multiplicidad  $m$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$

Si la ecuación diferencial es de coeficientes reales, las raíces del polinomio característico aparecerán conjugadas. Es decir:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ . Luego:

$$y_1(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + j \sin(\beta t))$$

$$y_2(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - j \sin(\beta t))$$

Entonces,  $\text{gen}\{y_1, y_2\} = \text{gen}\{e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)\}$



## 10.8. Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

## Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Son del tipo  $\sum_{i=0}^n a_i \cdot y^{(i)}(t) = f(x)$ .

La solución es de la forma  $y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)$ , donde  $y_H(x)$  se obtiene del caso anterior, e  $y_P(x)$  se obtiene mediante algunos de estos métodos:

- **Método de variación de parámetros:** Aplicable en cualquier caso.

$y_P(t) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \cdot y_i(x)$ , siendo  $y_i(x)$  las soluciones de  $y_H(x)$ , y  $u_i(x)$  las funciones que satisfacen:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

- **Método de coeficientes indeterminados:** Aplicable cuando  $f(x)$  es exponencial, polinómica o trigonométrica.

Siendo  $a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(x)$ , con  $f(x) = \sum_{i=1}^k p_i(x) \cdot e^{m_i x}$ ,  $y_P(t) =$

$$\sum_{i=1}^k q_i(x) \cdot e^{m_i x}$$

- Si  $e^{m_k x}$  no es solución de la Ecuación diferencial ordinaria homogénea asociada (i.e.  $m_k$  no es solución de  $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ),  $q_k$  es un polinomio de grado  $p_k$  con coeficientes a determinar
- Si  $e^{m_k x}$  si es solución de la Ecuación diferencial ordinaria homogénea asociada (i.e.  $m_k$  es solución de  $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ),  $q_k$  es un polinomio de un grado mayor que  $p_k$  con coeficientes a determinar
- Una vez armada la  $y_P(t)$  se reemplaza en la ecuación diferencial original, e igualando los términos semejantes se hallan los coeficientes indeterminados.

## 11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X' = AX + B$$

### 11.1. Sistemas homogéneos con $A$ diagonalizable

#### Sistemas homogéneos con $A$ diagonalizable

La solución de  $X' = AX + B$ , ( $A \in K^{n \times n}$ , con  $\lambda_i$  autovalor de  $A$  y  $\bar{\mathbf{v}}_i$  autovector de  $A$  asociado a  $\lambda_i$ ), es:

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \bar{\mathbf{v}}_i e^{\lambda_i t} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{\mathbf{v}}_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \bar{\mathbf{v}}_n e^{\lambda_n t} \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\varphi(t) \in K^{n \times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_C \quad (11.1)$$

### 11.2. Sistemas no homogéneos con $A$ diagonalizable

#### Sistemas no homogéneos con $A$ no diagonalizable

Sea el sistema  $X' = AX + B$ . La solución es  $X_G = X_H + X_P$  con:

- $X_H = \sum_{i=1}^n c_i \bar{\mathbf{v}}_i e^{\lambda_i t} = \varphi(t)C$
- $X_P = \varphi(t) \cdot u(t)$ , siendo  $u(t)$  tal que  $\varphi(t) \cdot u'(t) = B$

11.3. Sistemas homogéneos con  $A$  no diagonalizableSistemas no homogéneos con  $A$  diagonalizable

Sea el sistema  $X' = AX$ . Con  $A$  no diagonalizable, proponemos una factorización de la forma  $A = PJP^{-1}$ , donde  $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es la **matriz de Jordan** de  $A$  que tiene la siguiente estructura en bloques:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

Donde cada bloque  $J_i$  es una matriz de  $k_i \times k_i$  de la forma:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Para algún autovalor  $\lambda_i$  de  $A$ .

Dado un autovalor  $\lambda_i$ , su multiplicidad geométrica es el número de bloques de Jordan correspondientes a  $\lambda_i$ , y su multiplicidad algebraica es la suma de los tamaños de los bloques correspondientes a ese autovalor.

Luego:  $X' = AX \xrightarrow{X=PY} PY' = PJP^{-1}PY \rightarrow Y' = JY$ . Resolvemos este sistema y la solución general del problema se expresará como  $X(t) = PY(t)$

N

Sistemas no homogéneos con  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  no diagonalizable

$A$  necesariamente posee un autovalor doble  $\lambda \in \mathbb{R}$  de multiplicidad geométrica 1, con lo cual la matriz  $J$  posee un solo bloque correspondiente a  $\lambda$ :

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

Respecto de la matriz  $P = [\bar{v}_1, \bar{v}_2]$  debe ser inversible y  $AP = PJ$ . La matriz  $P$  se obtiene hallando un par de vectores  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$  Linealmente Independientes que satisfagan las condiciones  $(A - \lambda I) \bar{v}_1 = 0$  y  $(A - \lambda I) \bar{v}_2 = \bar{v}_1$ . Observamos que  $\bar{v}_1$  es autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$

N

**Sistemas no homogéneos con  $A \in R^{3 \times 3}$  no diagonalizable**

1.  $A$  tiene un autovalor triple  $\lambda \in R$  de multiplicidad geométrica 1. En este caso:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Respecto de  $P = [\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3]$ , estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_1 = 0 \quad (11.6)$$

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{v}}_1 \quad (11.7)$$

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_3 = \bar{\mathbf{v}}_2 \quad (11.8)$$

Observemos que  $\bar{\mathbf{v}}_1$  es autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$

2.  $A$  tiene un autovalor triple  $\lambda \in R$  de multiplicidad geométrica 2. En este caso:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

Respecto de  $P = [\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3]$ , estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_1 = 0 \quad (11.10)$$

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{v}}_1 \quad (11.11)$$

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_3 = 0 \quad (11.12)$$

Observemos que  $\bar{\mathbf{v}}_1$  y  $\bar{\mathbf{v}}_3$  son autovectores de  $A$  asociados a  $\lambda$

3.  $A$  tiene un autovalor doble  $\lambda \in R$  de multiplicidad geométrica 1 y un autovalor  $\mu \in R$  simple. En este caso  $J$  debe tener dos bloques de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

Respecto de  $P = [\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3]$ , estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_1 = 0 \quad (11.14)$$

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{v}}_1 \quad (11.15)$$

$$(A - \lambda I) \bar{\mathbf{v}}_3 = 0 \quad (11.16)$$

Observemos que  $\bar{\mathbf{v}}_1$  y  $\bar{\mathbf{v}}_3$  son autovectores de  $A$  asociados a  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente.

## Colaboradores

Quienes se mencionan a continuación han colaborado y aportado tanto al proyecto FIUBA Apuntes como en este apunte, redactándolo, corrigiéndolo, agregando gráficos, etc.

- María Inés Parnisari (maineparnisari@gmail.com)
- Martín Menendez (menendez91@live.com.ar)
- Emiliano Gasparovic

¿Querés colaborar en el proyecto? Conocé más sobre el proyecto en [fiuba-apuntes.github.io](https://fiuba-apuntes.github.io).

## Historial de cambios

*29/12/2014* Versión inicial.

*02/02/2015* Corrección de error en la sección de *Matrices trivialmente diagonalizables*.