



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Año 2015 - 1<sup>er</sup> Cuatrimestre

ÁLGEBRA II A (61.08)

## **Resumen de Álgebra II**

INTEGRANTE:

Maria Inés Parnisari - 92235  
<maineparnisari@gmail.com>

Menéndez, Martín Nicolás - 92830  
<menendez91@live.com.ar>

# Índice

<b>1. Matrices</b>	<b>3</b>
1.1. Propiedades generales . . . . .	3
1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta . . . . .	3
1.3. Propiedades de los determinantes . . . . .	4
1.4. Subespacios fila, columna y null . . . . .	4
<b>2. Espacios vectoriales</b>	<b>6</b>
2.1. Propiedades de los subespacios . . . . .	6
2.2. Independencia lineal . . . . .	6
2.3. Operaciones con subespacios . . . . .	6
2.4. Bases . . . . .	7
2.5. Coordenadas de un vector en una base . . . . .	7
2.6. Matriz de cambio de base . . . . .	7
2.7. Teorema de la dimensión . . . . .	7
<b>3. Producto interno</b>	<b>8</b>
3.1. Axiomas . . . . .	8
3.2. Producto interno canónico . . . . .	8
3.3. Definiciones . . . . .	8
3.4. Matriz asociada al producto interno . . . . .	10
<b>4. Proyecciones y matrices de proyección</b>	<b>11</b>
4.1. Propiedades de la proyección . . . . .	11
4.2. Proyección y reflexión . . . . .	11
4.2.1. Proyección y transformaciones lineales . . . . .	12
4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales . . . . .	12
4.3. Matriz de Householder . . . . .	13
4.4. Rotaciones en $R^3$ . . . . .	13
4.5. Proceso de Gram-Schmidt . . . . .	13
4.6. Matrices de proyección . . . . .	14
4.7. Inversas y pseudoinversas . . . . .	14
4.8. Cuadrados mínimos . . . . .	15
4.8.1. Norma mínima . . . . .	15
4.9. Regresión lineal . . . . .	16
<b>5. Transformaciones lineales</b>	<b>16</b>
5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales . . . . .	16
5.2. Núcleo e Imágen . . . . .	16
5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales . . . . .	17
5.3.1. Monomorfismo(Inyectividad) . . . . .	17
5.3.2. Epimorfismo(Sobreyectividad) . . . . .	17
5.3.3. Isomorfismo(Biyectividad) . . . . .	18
5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal . . . . .	18
5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales . . . . .	19
5.6. Composición de Transformaciones lineales . . . . .	19
5.7. Operadores lineales . . . . .	19
<b>6. Autovalores y Autovectores</b>	<b>19</b>
<b>7. Matrices hermíticas y simétricas</b>	<b>19</b>
<b>8. Formas cuadráticas</b>	<b>19</b>
<b>9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)</b>	<b>19</b>

<b>10. Ecuaciones diferenciales</b>	<b>19</b>
<b>11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales</b>	<b>19</b>

# 1. Matrices

## 1.1. Propiedades generales

### Propiedades de matrices

Dadas las matrices  $A, B, C$  se tiene que:

- $A + B = B + A$
- $A + (-A) = 0_n$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $A(BC) = (AB)C$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- $A + 0_n = A$
- $A0_n = 0_n$

N

## 1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta

### Propiedades de matrices

Dadas las matrices  $A, B, C$  se tiene que:

Propiedades de la inversa:

- $(A^{-1})^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{A^{-1}}{\alpha}, \alpha \neq 0$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$

Propiedades de la traza:

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

N

### 1.3. Propiedades de los determinantes

#### Propiedades de determinantes

Sean  $A, B \in R^{n \times m}$

$$|A^T| = |A| \quad (1.1)$$

$$|AB| = |A||B| \quad (1.2)$$

Si  $B$  la obtengo de sumar  $k$  veces una fila de  $A$  sobre otra:

$$|B| = |A| \quad (1.3)$$

Si  $B$  la obtengo de intercambiar  $k$  veces las fila de  $A$ :

$$|B| = (-1)^k |A| \quad (1.4)$$

Si  $B$  la obtengo de multiplicar por  $k$ ,  $n$  veces las filas de  $A$ :

$$|B| = k^n |A| \quad (1.5)$$

Si  $A$  es una matriz triangular:

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} \quad (1.6)$$

⌘

### 1.4. Subespacios fila, columna y null

#### Espacio fila, columna y nulo de matrices

Sean  $A \in R^{n \times m}$ ,  $B \in R^{r \times n}$ , se define:

- **Espacio Fila:**  $\text{Fif}(A) = \{x \in R^m | x \text{ es combinación lineal de las filas de } A\}$
- **Espacio Columna:**  $\text{Col}(A) = \{b \in R^n | Ax = b \text{ para alguna } x\}$
- **Espacio nulo:**  $\text{Nul}(A) = \{x \in R^m | Ax = 0\}$

⌘

## Propiedades de los espacios definidos

Propiedades:

$$\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A) = \text{Fil}(A)^\perp \quad (1.7)$$

$$\text{Nul}(A^T) = \text{Nul}(A A^T) = \text{Col}(A)^\perp \quad (1.8)$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T A) \Rightarrow A^T A \quad (1.9)$$

$$\text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Fil}(A)) \quad (1.10)$$

$$\text{Col}(A) \otimes \text{Col}(A)^\perp = R^n \quad (1.11)$$

$$\text{Fil}(A) \otimes \text{Fil}(A)^\perp = R^m \quad (1.12)$$

$$\text{rango}(A) + \dim \text{Nul}(A) = m \quad (1.13)$$

$$\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B), \text{ Iguales si } \text{rango}(A) = n \quad (1.14)$$

$$\text{Nul}(A) \subseteq \text{Nul}(BA), \text{ Iguales si } \text{rango}(B) = n \quad (1.15)$$

$$\text{Si } \text{rango}(A) = n \Rightarrow \text{rango}(BA) = \text{rango}(B) \quad (1.16)$$

$$\text{Si } \text{rango}(B) = n \Rightarrow \text{rango}(BA) = \text{rango}(A) \quad (1.17)$$

$$\text{Col}(A)^\perp \text{Col}(B) \Leftrightarrow A^T B = 0 \quad (1.18)$$

De (1.15) se ve que  $A^T A$  invertible  $\longleftrightarrow A$  invertible



## Matrices equivalentes

Dos matrices  $A$  y  $B$  son equivalentes si existen otras dos matrices  $E$  y  $F$  regulares tal que:

$$A = EBF \quad (1.19)$$

Dos matrices equivalentes pueden pensarse como dos descripciones de una misma Transformación Lineal, pero con respecto a bases distintas.



## Matrices semejantes

Dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  son semejantes (notamos  $A \sim B$ ) si y solo si existe una matriz  $P$  invertible tal que:

$$B = P^{-1}AP, \text{ y } \quad (1.20)$$

$$A = PBP^{-1} \quad (1.21)$$



## Propiedades de matrices semejantes

Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de un mismo operador lineal, pero con respecto a bases distintas. Estas dos matrices cumplen que:

$$|A| = |B| \quad (1.22)$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \quad (1.23)$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) \quad (1.24)$$

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B) \quad (1.25)$$



## 2. Espacios vectoriales

### 2.1. Propiedades de los subespacios

#### Propiedades de los subespacios

$S$  es un subespacio vectorial del espacio  $V_K$  si y solo si:

$$0_V \in S \quad (2.1)$$

$$(\alpha X + Y) \in S, \forall X, Y \in V \text{ y } \forall \alpha \in K \quad (2.2)$$

⌘

### 2.2. Independencia lineal

#### Combinación lineal

El vector  $\bar{x}$  es una combinación lineal de  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  si:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (2.3)$$

Y si  $a_1, \dots, a_n$  no son todos nulos.

⌘

#### Independencia lineal

$\bar{x}$  es **linealmente independiente** si:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0, \text{ y} \quad (2.4)$$

$$a_i = 0 \forall i \quad (2.5)$$

Dos vectores son **linealmente dependientes** si son proporcionales. Un subconjunto de un conjunto linealmente dependiente sigue siendo linealmente dependiente

⌘

### 2.3. Operaciones con subespacios

#### Operaciones con subespacios

- **Intersección:**  $S = \bigcap_{i=1}^n S_i = \{\bar{x} \in V | \bar{x} \in S_i, \forall i = 1, \dots, n\}$

- **Suma:**  $S = \sum_{i=1}^n S_i = \text{gen} \left\{ \bigcup_{i=1}^m B_i \right\}$ , donde  $B_i$  es una base de  $S_i$

- **Unión:**  $S = S_1 \cup S_2$  es un subespacio cuando  $S_1 \subseteq S_2$  ó  $S_2 \subseteq S_1$

- **Suma directa:**  $S_1, \dots, S_k$  están en suma directa  $\iff$  la unión de sus bases es base de  $V$

Dos subespacios son **suplementarios** cuando están en suma directa y su suma es todo el espacio.

⌘

## 2.4. Bases

### Bases

Si  $\text{Dim}(V) = n$ ,  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es base de  $V$  si y solo si:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ genera } V \quad (2.6)$$

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ son linealmente independientes} \quad (2.7)$$



## 2.5. Coordenadas de un vector en una base

### Coordenadas de un vector en una base

Si  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es base de un espacio vectorial  $B$  y  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i$ , entonces  $C_B(\bar{x}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Dado un vector y una base, las coordenadas de ese vector en esa base son únicas.

$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V$  y  $\forall k \in K$ :

$$C_B(v + w) = C_B(v) + C_B(w) \quad (2.8)$$

$$C_B(k \times v) = k \times C_B(v) \quad (2.9)$$

Finalmente  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  son linealmente independientes  $\iff \{C_B(\bar{v}_1), \dots, C_B(\bar{v}_n)\}$  lo son para cualquier base de  $B$ .



## 2.6. Matriz de cambio de base

### Matriz de cambio de base

Sean  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  y  $C = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$  bases del espacio  $V$ . Las matrices de cambio de base son:

$$C_{BC} = \begin{bmatrix} C_C(\bar{v}_1) & C_C(\bar{v}_2) & \dots & C_C(\bar{v}_n) \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$C_{CB} = \begin{bmatrix} C_B(\bar{w}_1) & C_B(\bar{w}_2) & \dots & C_B(\bar{w}_n) \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C_{BC}^{-1} \quad (2.11)$$

Si  $B$  y  $C$  son bases ortonormales, entonces  $C_{BC}$  es una matriz ortogonal.



## 2.7. Teorema de la dimensión

### Teorema de la dimensión

Dados los subespacios  $S, H$  y  $T$ :

$$\text{Dim}(S + H) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) - \text{Dim}(S \cap H) \quad (2.12)$$

$$\text{Dim}(S + H + T) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(S \cap (H + T)) - \text{Dim}(H \cap T) \quad (2.13)$$





### 3. Producto interno

#### 3.1. Axiomas

##### Axiomas del producto interno

Sea  $\langle, \rangle: V_K \times V_K \rightarrow R$  un producto interno:

1.  $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$  y  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$
2.  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\overline{\bar{y}}, \bar{x})$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$
3.  $(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \overline{\lambda}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$  y  $\forall \lambda \in K$
4.  $(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$  y  $\forall \lambda \in K$
5.  $(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{z})$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$
6.  $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ ,  $(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$

N

#### 3.2. Producto interno canónico

##### Producto interno canónico

Se definen los siguientes productos internos para los siguientes espacios vectoriales:

- **Vectores reales:**  $R^n : (\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T \bar{y}$
- **Vectores complejos:**  $C^n : (\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^H \bar{y}$
- **Matrices reales:**  $R^{n \times m} : (A, B) = \text{tr}(A^T B)$
- **Matrices complejas:**  $C^{n \times m} : (A, B) = \text{tr}(A^H B)$
- **Funciones reales:**  $P_R[a, b] : (p, q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$
- **Funciones complejas:**  $P_C[a, b] : (p, q) = \int_a^b \overline{p(t)}q(t)dt$

N

#### 3.3. Definiciones

##### Ortogonalidad

Dados  $\bar{x}, \bar{y}$ :

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} \perp \bar{y} \quad (3.1)$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

N

**norma de un vector**

Se define la norma de un vector como:

$$|\bar{x}|^2 = (\bar{x}, \bar{x}) \quad (3.2)$$

La **norma de un vector** depende del producto interno, pero cumple las siguientes propiedades:

- $|\bar{x}| \in \mathbb{R} \forall \bar{x} \in V$
- $|\bar{x}| \geq 0$  ( $|\bar{x}| = 0 \iff \bar{x} = 0$ )
- $|k \cdot \bar{x}| = |k| \cdot |\bar{x}|$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**

$$|(\bar{x}, \bar{y})| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|, x, y \in V_K \quad (3.3)$$

La igualdad se cumple si  $\bar{x} \parallel \bar{y}$

- **Desigualdad triangular:**

$$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}| \quad (3.4)$$

- **Teorema de pitágoras:** Si  $\bar{x} \perp \bar{y}$  entonces:

$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 \quad (3.5)$$

La recíproca solo vale para  $\mathbb{R}$

- **Identidad del paralelogramo:**

$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 + |\bar{x} - \bar{y}|^2 = 2(|\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2), \forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad (3.6)$$

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

**Ángulo entre dos vectores**

Dado  $\bar{x}, \bar{y}$ :

$$\cos(\theta) = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|} \quad (3.7)$$

Con  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\forall \bar{x}, \bar{y} \neq 0$  para espacios vectoriales reales con producto interno.

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

**Complemento ortogonal**

Sea  $A \subset V_K \cdot A^\perp = \{\bar{x} \in V_K | (\bar{x}, \bar{y}) = 0, \forall \bar{y} \in A\}$

Para el cálculo del complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita, alcanza con exigir la ortogonalidad a un sistema de generadores

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*



**Distancia entre vectores**

Dados  $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$ , se define la función distancia como:

$$d : V_R \times V_R \rightarrow R^+ : d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}| = |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}| \quad (3.8)$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

N

**3.4. Matriz asociada al producto interno****Matriz de producto interno**

Sea  $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_k\}$  base de  $V_K$ . Entonces  $G \in K^{k \times k}$ ,  $g_{ij} = (\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_j)$  es la matriz de producto interno:

$$G = \begin{bmatrix} |\bar{\mathbf{v}}_1|^2 & \dots & (\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{\mathbf{v}}_k, \bar{\mathbf{v}}_1) & \dots & |\bar{\mathbf{v}}_k|^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Si  $B$  es base de  $V_K$  y  $G$  es la matriz del producto interno en esa base, entonces  $\forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in V$ :

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = C_B^H(\bar{\mathbf{x}}) \cdot G \cdot C_B(\bar{\mathbf{y}}) \quad (3.10)$$

N

**Propiedades de la matriz de producto interno**

Dada la matriz  $G$  de producto interno se tiene que:

$$g_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, k \quad (3.11)$$

$$G^H = G \quad (3.12)$$

$$G \text{ es definida positiva} \quad (3.13)$$

$$\exists G^{-1} \quad (3.14)$$

$$G \text{ de una Base Ortogonal (BOG) es una matriz diagonal} \quad (3.15)$$

$$G \text{ de una Base Ortonormal (BON) es una matriz identidad} \quad (3.16)$$

N

## 4. Proyecciones y matrices de proyección

### 4.1. Propiedades de la proyección

#### Propiedades de la proyección

Sea  $S \subset V$  su complemento ortogonal, entonces  $\forall \bar{x} \in V$ :

$$\bar{x} = \underbrace{\bar{u}}_{\in S} + \underbrace{\bar{v}}_{\in S^\perp} = P_S(\bar{x}) + P_{S^\perp}(\bar{x}) \quad (4.1)$$

Se definen las siguientes propiedades:

- $P_S(\bar{x})$  es el vector de  $S$  mas próximo a  $\bar{x}$
- $P_S(\bar{v}) = \bar{v} \iff \bar{v} \in S$  y además  $P_S(\bar{w}) = 0 \iff \bar{w} \in S^\perp$
- Por pitágoras:  $|\bar{x}|^2 = |P_S(\bar{x})|^2 + |P_{S^\perp}(\bar{x})|^2, \forall x \in V$
- $|P_S(\bar{x})| \leq |\bar{x}|$ . Si  $|P_S(\bar{x})| = |\bar{x}|$  entonces  $\bar{x} \in S$
- $d(\bar{x}, S) = |P_{S^\perp}(\bar{x})|$
- $d(\bar{x}, S^\perp) = |P_S(\bar{x})|$

⌘

### 4.2. Proyección y reflexión

#### Proyección y reflexión

Sea  $S$  un subespacio de  $V$ , y  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$  una base ortogonal (BOG) de  $S$ . Entonces  $\forall \bar{x} \in V$ :

$$P_S(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k \frac{(\bar{v}_i, \bar{x})}{(\bar{v}_i, \bar{v}_i)} \bar{v}_i \quad (4.2)$$

$$R_S(\bar{x}) = 2P_S(\bar{x}) - \bar{x} = 2P_S(\bar{x}) - (P_S(\bar{x}) + P_{S^\perp}(\bar{x})) = P_S(\bar{x}) - P_{S^\perp}(\bar{x}) = \bar{x} - 2P_{S^\perp}(\bar{x}) \quad (4.3)$$

⌘

## 4.2.1. Proyección y transformaciones lineales

## Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea  $T : V_K \rightarrow V_K$  una transformación lineal tal que:

$$\text{Im}(P_S) = S \quad (4.4)$$

$$\text{Nul}(P_S) = S^\perp \quad (4.5)$$

Y sea  $B = \{\underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q}_{\in S}, \underbrace{\bar{v}_{q+1}, \dots, \bar{v}_n}_{\in S^\perp}\}$  una base de  $V$ , entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[P_S]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecta, y tantos 0 como la dimensión del complemento ortogonal.

*Nota:* La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

N

## 4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales

## Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea  $T : V_K \rightarrow V_K$  una transformación lineal tal que:

$$T(\bar{v}) = \bar{v}, \forall \bar{v} \in S \quad (4.7)$$

$$T(\bar{v}) = -\bar{v}, \forall \bar{v} \in S^\perp \quad (4.8)$$

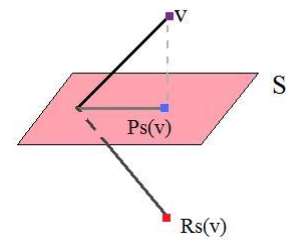
Y sea  $B = \{\underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q}_{\in S}, \underbrace{\bar{v}_{q+1}, \dots, \bar{v}_n}_{\in S^\perp}\}$  una base de  $V$ , entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & & -1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecta, y tantos -1 como la dimensión del complemento ortogonal.

*Nota:* La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

N



**Figura 4.1:** Proyección y reflexión

### 4.3. Matriz de Householder

#### Propiedades de la proyección

La matriz de reflexión sobre un subespacio de dimensión  $n - 1$  que es ortogonal a un vector  $\bar{\mathbf{w}}$  en un espacio de dimensión  $n$  se puede obtener mediante la expresión:

$$H = I_d - 2 \frac{\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}^T}{\bar{\mathbf{w}}^T \cdot \bar{\mathbf{w}}} \quad (4.10)$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- Es involutiva:  $H \circ H = I_d$
- Es simétrica:  $H^T = H$
- Es inversible:  $\exists H^{-1}$  y  $\exists H^{-1} = H$
- Es ortogonal:  $H^T H = H H^T = I_d$

N

### 4.4. Rotaciones en $R^3$

#### Rotaciones en $R^3$

Sea  $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3\}$  una Base Ortonormal (BON) de  $R^3$  y sea  $T$  la rotación  $\theta$  grados alrededor del eje  $v_i$ :

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_1 : [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_2 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_3 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

N

### 4.5. Proceso de Gram-Schmidt

#### Proceso de Gram-Schmidt

Dada una base  $\{\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_p\}$  para un subespacio  $W \in R^n$  defina:

1.  $\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1$
2.  $\bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{x}}_2 - \frac{\bar{\mathbf{x}}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1}{\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1} \bar{\mathbf{v}}_1$
3.  $\bar{\mathbf{v}}_p = \bar{\mathbf{x}}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\bar{\mathbf{x}}_p \cdot \bar{\mathbf{v}}_i}{\bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{v}}_i} \bar{\mathbf{v}}_i$

Entonces  $\{\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p\}$  es una Base Ortogonal (BOG) de  $W$ .

Si luego se divide a cada componente por la norma de la base se obtiene una Base Ortogonal (BON) de  $W$ .

N

## 4.6. Matrices de proyección

### Matriz de proyección

Utilizando el producto interno canónico de sobre  $K^n$ , con  $K = R$  o  $K = C$ .

$P \in K^{n \times n}$  es una matriz de proyección si y solo si:

$$P^2 = P \quad (4.15)$$

$$P^H = P \quad (4.16)$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- $\text{Col}(P) = \text{Nul}(P)^\perp$
- $P \cdot y = y \iff y \in \text{Col}(P)$
- Si  $P_S$  es matriz de proyección sobre  $S$  y  $P_S^\perp$  es matriz de proyección sobre  $S^\perp$  entonces  $P_S + P_S^\perp = I_d$
- Las columnas de  $P$  son una base del espacio sobre el cual proyectan
- $\text{rango}(P) = \text{tr}(P)$
- $\det P \neq 0$  si  $P \neq I_d$
- Si  $P_1$  y  $P_2$  son matrices de proyección y  $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$ , entonces  $P_1 + P_2$  es matriz de proyección y  $\text{rango}(P_1 + P_2) = \text{rango}(P_1) + \text{rango}(P_2)$

Obtención de la matriz de proyección:

1. Sea  $Q$  una matriz cuyas columnas son una Base Ortonormal (BON) de  $S \subset V$ . Entonces la única matriz de proyección sobre  $S$  es  $[P_S] = Q \cdot Q^T$ . La matriz de proyección sobre  $S^\perp$  es  $[P_S^\perp] = I_d - [P_S]$
2. Sea  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q\}$  una base de  $S$ , y  $A$  la matriz que tiene por columnas a  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q$ . Entonces la única matriz de proyección sobre  $S$  se obtiene mediante  $[P_S] = A (A^H A)^{-1} A^H = AA^\#$

N

## 4.7. Inversas y pseudoinversas

### Propiedades de la pseudoinversa

Sea  $A \in K^{n \times q} | \text{rango}(A) = q$ . La matriz pseudoinversa de  $A$  es  $A^\# = (A^H A)^{-1} A^H$ :

- Si  $A$  es cuadrada invertible,  $A^{-1} = A^\#$
- $A^\# \in R^{q \times n}$
- $A^\# A = I_{d(q)}$
- $AA^\# = [P]_{\text{Col}(A)}$
- $\text{Nul}(AA^\#) = [\text{Col}(A)]^\perp$

N

## 4.8. Cuadrados mínimos

### Cuadrados mínimos

Sea  $A \in K^{n \times q}$ ,  $\bar{\mathbf{x}} \in K^q$ ,  $\bar{\mathbf{b}} \in R^n$ . Si  $Ax = b$  tiene una solución exacta, entonces  $\bar{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$ . Si  $b \notin \text{Col}(A)$ , intentamos hallar una solución  $\hat{\mathbf{x}} \in K^q$  (la solución por **cuadrados mínimos**) tal que:

- $|\hat{A}\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{b}}| < |A\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{b}}|, \forall \bar{\mathbf{u}} \in K^q$
- $d(A\hat{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{b}}) \leq d(A\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{b}}), \forall \bar{\mathbf{u}} \in K^q$
- $|\hat{A}\hat{\mathbf{x}}| \leq |\bar{\mathbf{b}}|$  (Son iguales si  $\bar{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$ )
- Ecuaciones normales de cuadrados mínimos:  $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \bar{\mathbf{b}} = \hat{\bar{\mathbf{b}}}$
- $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\bar{\mathbf{b}}} = P_{\text{Col}(A)}(\bar{\mathbf{b}})$  si y solo si:

$$A\hat{\mathbf{x}} \in \text{Col}(A) \quad (4.17)$$

$$\bar{\mathbf{b}} - A\hat{\mathbf{x}} \in \text{Col}(A)^\perp \quad (4.18)$$

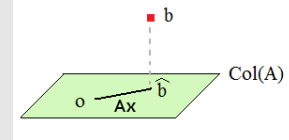


Figura 4.2: Cuadrados mínimos

### Propiedades de Cuadrados mínimos

1. Si  $\hat{\mathbf{x}} = 0$  entonces  $\bar{\mathbf{b}} \in [\text{Col}(A)]^\perp$ . La recíproca solo es cierta si  $A$  es invertible.
2. Si las columnas de  $A$  son linealmente independientes, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{\mathbf{b}} = A^\# \bar{\mathbf{b}} \quad (4.19)$$

Si las columnas de  $A$  son linealmente dependientes, el sistema  $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \bar{\mathbf{b}}$  tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_p + \underbrace{\hat{\mathbf{x}}_n}_{\in \text{Nul}(A)}$

3. Si  $\bar{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$ , entonces toda solución de  $A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$  es una solución exacta y por cuadrados mínimos
4. El error de aproximación  $\epsilon$  es igual a  $|\bar{\mathbf{b}} - \hat{\bar{\mathbf{b}}}|$

### 4.8.1. Norma mínima

#### Pseudoinversa de Moore-Pensore

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima pertenece al espacio  $\text{Fil}(A)$  y se obtiene como:

$$\hat{\hat{\mathbf{x}}} = A^+ \bar{\mathbf{b}} \quad (4.20)$$

Siendo  $A^+$  la **pseudoinversa de Moore-Penrose** de  $A$ .



## 4.9. Regresión lineal

### Regresión lineal

Sean los puntos  $\bar{\mathbf{P}}_i = (x_i, y_i)$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ . La recta que mejor aproxima a los puntos es:

$$\bar{y} = \alpha_0 \bar{\mathbf{1}} + \alpha_1 \bar{\mathbf{x}} \quad (4.21)$$

Y los coeficientes  $\alpha_i$  se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Si se aproxima por una parábola se agrega otro nivel de complejidad, con  $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ , lo que implica una columna adicional a la matriz para los términos cuadráticos, una fila adicional para la constante  $\alpha_2$  en la variable.

Se siguen agregando columnas a la matriz y filas al vector tantas veces como grados de complejidad se necesiten.

⌘

## 5. Transformaciones lineales

Sea  $T \in \ell(V_K, W_K)$  y  $A = [T]_{BC}$  con  $B$  base de  $V$  y  $C$  base de  $W$  la matriz de  $T$ .

### 5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales

#### Condiciones para ser Transformación lineal

Para que una transformación se considere lineal debe cumplir:

1.  $T(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) = T(\bar{\mathbf{u}}) + T(\bar{\mathbf{v}})$ , con  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in V$
2.  $T(\alpha \bar{\mathbf{u}} + \beta \bar{\mathbf{v}}) = \alpha \cdot T(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \cdot T(\bar{\mathbf{v}})$ , con  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in V_K$  y  $\alpha, \beta \in K$
3.  $T(0_{V_K}) = 0_{W_K}$

⌘

### 5.2. Núcleo e Imágen

#### Núcleo e Imágen

**Núcleo:**  $\text{Nul}(T) = \{\bar{\mathbf{v}} \in V_K \mid T(\bar{\mathbf{v}}) = 0_W\} = C_B^{-1}(\text{Nul}(A)).$

**Imágen:**  $\text{Im}(T) = \{\bar{\mathbf{w}} \in W_K \mid T(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{w}} \text{ con } \bar{\mathbf{v}} \in V_K\} = C_C^{-1}(\text{Col}(A)).$

Ambos son subespacios vectoriales.

La imágen de una Transformación Lineal puede obtenerse como lo que generan los transformados de una base del espacio de partida.

⌘

**Teorema de la dimensión**

Sea  $T \in \ell(V, W)$  y sea  $\text{Dim}(V) = n$  (finita). Entonces:

$$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(\text{Nul}(T)) + \text{Dim}(\text{Im}(T)) \quad (5.1)$$

**5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales****5.3.1. Monomorfismo(Inyectividad)****Monomorfismo**

Una Transformación lineal es inyectiva si verifica:

$$\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2 \Rightarrow T(\bar{v}_1) \neq T(\bar{v}_2), \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \quad (5.2)$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \iff \text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{Dim}(V) \quad (5.3)$$

Una Transformación Lineal Inyectiva transforma conjuntos Linealmente Independientes a conjuntos Linealmente Independientes.

La recíproca también es cierta: si  $A$  es un conjunto Linealmente Independiente y es transformado en otro conjunto Linealmente Independiente, la Transformación Lineal es inyectiva. Es decir: Si  $T$  es inyectiva y  $A$  es Linealmente Independiente,  $T(A)$  es Linealmente Independiente.

Las matrices asociadas a Transformaciones Lineales inyectivas tienen sus columnas Linealmente Independientes.

Si  $\text{Dim}(V) > \text{Dim}(W)$ ,  $T$  no puede ser inyectiva.

**5.3.2. Epimorfismo(Sobreyectividad)****Epimorfismo**

Una Transformación lineal es sobreyectiva si y solo si:

$$\text{Im}(T) = W \quad (5.4)$$

Las matrices asociadas a Transformaciones lineales sobreyectivas tienen sus filas Linealmente Independientes.

Si  $\text{Dim}(W) > \text{Dim}(V)$ ,  $T$  no puede ser sobreyectiva.



## 5.3.3. Isomorfismo(Biyectividad)

**Biyectividad**

Una Transformación lineal es biyectiva si y solo si:

$$\text{Dim}(W) = \text{Dim}(V) \quad (5.5)$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \quad (5.6)$$

Es decir, si es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez.

$T$  es biyectiva  $\iff$  si  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es base de  $V \Rightarrow \{T(\bar{v}_1), \dots, T(\bar{v}_n)\}$  es base de  $W$

La matriz asociada a una Transformación lineal biyectiva tiene sus filas y columnas Linealmente Independientes, o sea que es una matriz inversible, es decir, existe una transformación lineal inversa  $T^{-1} = [T]^{-1}$

Si  $\text{Dim}(V) = \text{Dim}(W)$ , entonces o bien  $T$  es inyectiva y sobreyectiva, o no es ninguna de las dos.

N

## 5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal

**Matriz de la Transformación lineal**

Sea  $T \in \ell(V_K, W_K)$ , sea  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q\}$  base de  $V$  y  $C = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$  base de  $W$ . Entonces  $T$  se puede escribir como  $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ , con  $A \in K^{m \times q}$  tal que:

$$A = [T]_{BC} = \begin{bmatrix} C_C(T(\bar{v}_1)) & C_C(T(\bar{v}_2)) & \dots & C_C(T(\bar{v}_q)) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Dicha matriz posee las siguientes propiedades:

- $[T]_{BC} \cdot C_B(\bar{v}) = C_C(T(\bar{v})), \forall \bar{v} \in V$
- $\bar{v} \in \text{Nul}(T) \iff C_B(\bar{v}) \in \text{Nul}(A)$
- $\bar{w} \in \text{Im}(T) \iff C_C(\bar{w}) \in \text{Col}(A)$
- $\text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{rango}(A)$

N

**Teorema para matrices de Transformación lineal**

Sean  $V$  y  $W$   $K$ -espacios vectoriales ( $K = R$  o  $C$ ). Sea  $T : V \rightarrow W$ .

Si  $B_1$  y  $B_2$  son bases ordenadas de  $V$ , y  $C_1$  y  $C_2$  son bases ordenadas de  $W$ , entonces:

$$\text{rango}([T]_{B_1 C_1}) = \text{rango}([T]_{B_2 C_2}) \quad (5.8)$$

N

## 5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

### Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

Sea  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  base de  $V$  y  $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$  vectores de  $W$ . Entonces existe y es única la Transformación lineal que verifica:

$$T(\bar{v}_i) = \bar{w}_i, \forall i = 1, \dots, n \quad (5.9)$$

Además, dada una Transformación lineal y un par de bases, existe una única matriz asociada.

La recíproca también es verdadera: dada una matriz y un par de bases, existe una única Transformación lineal asociada.



## 5.6. Composición de Transformaciones lineales

### Composición de Transformaciones lineales

Sea  $f \in \ell(V, W)$  y  $g \in \ell(W, H) \Rightarrow g \circ f \in \ell(V, H)$ . Podemos encontrar la siguientes propiedades:

$$\text{Nul}(f) \subseteq \text{Nul}(g \circ f) \quad (5.10)$$

$$\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g) \quad (5.11)$$

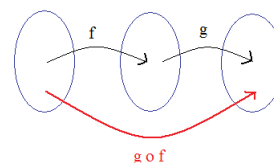


Figura 5.1: Composición

## 5.7. Operadores lineales

### Operadores lineales

Un operador lineal es una Transformación lineal que va de un espacio en si mismo, se escribe como  $T \in \ell(V)$  y cuenta con las siguientes propiedades:

- Si  $T_1 \in \ell(V)$  y  $T_2 \in \ell(V)$ , entonces  $T_1 \circ T_2 \in \ell(V)$
- Si  $T \in \ell(V)$ ,  $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ veces}}$



## **6. Autovalores y Autovectores**

### **6.1. Definiciones básicas**

### **6.2. Autovalores complejos de matriz real**

### **6.3. Multiplicidad geométrica y algebraica de un Autovalor**

### **6.4. Propiedades**

### **6.5. Autovalores y Autovectores de operadores lineales**

### **6.6. Diagonalización**

#### **6.6.1. Matrices trivialmente diagonalizables**

#### **6.6.2. Propiedades**

#### **6.6.3. Diagonalización de transformaciones lineales**

## **7. Matrices hermíticas y simétricas**

### **7.1. Diagonalización**

### **7.2. Descomposición espectral**

### **7.3. Subespacios invariantes por una transformación lineal**

## **8. Formas cuadráticas**

### **8.1. Clasificación**

### **8.2. Optimización restringida**

## **9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)**

### **9.1. Definición**

### **9.2. Aplicación de las DVS**

### **9.3. Propiedades de las DVS**

### **9.4. DVS reducida y Pseudoinversa**

## **10. Ecuaciones diferenciales**

### **10.1. Wronskiano**

### **10.2. Identidad de Abel**

### **10.3. Existencia y unicidad de Problemas de Valores Iniciales (PVI)**

### **10.4. Variables separables**

### **10.5. Homogéneas**

### **10.6. Lineales de 1er orden**

### **10.7. Diferencial exacta**

### **10.8. Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes**

### **10.9. Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes**

## **11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales**

### **11.1. Sistemas homogéneos con A diagonalizable**

### **11.2. Sistemas no homogéneos con A diagonalizable**

### **11.3. Sistemas homogéneos con A no diagonalizable**