UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2015 - 1er Cuatrimestre

ÁLGEBRA II A (61.08)

# Resumen de Álgebra II

INTEGRANTE:
Maria Inés Parnisari - 92235
⟨maineparnisari@gmail.com⟩

Menéndez, Martín Nicolás - 92830
⟨menendez91@live.com.ar⟩

# Índice

# 1. Matrices

## 1.1. Propiedades generales

Propiedades de matrices

Dadas las matrices $A, B, C$ se tiene que:

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $A + 0_n = A$
- $A + (-A) = 0_n$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(BC) = (AB)C$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- $A0_n = 0_n$

ℵ

## 1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta

Propiedades de matrices

Dadas las matrices $A, B, C$ se tiene que:

Propiedades de la inversa:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{A^{-1}}{\alpha}, \alpha \neq 0$
- $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$
- $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{|A|}$

Propiedades de la traza:

- $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A)+\text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha\text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

ℵ

## 1.3. Propiedades de los determinantes

Propiedades de determinantes

Sean $A, B \in R^{n\times m}$

$$\left|A^T\right| = |A| \tag{1.1}$$

$$|AB| = |A|\,|B| \tag{1.2}$$

Si $B$ la obtengo de sumar k veces una fila de $A$ sobre otra:

$$|B| = |A| \tag{1.3}$$

Si $B$ la obtengo de intercambiar $k$ veces las fila de $A$:

$$|B| = (-1)^k\,|A| \tag{1.4}$$

Si $B$ la obtengo de multiplicar por $k$, $n$ veces las filas de A:

$$|B| = k^n\,|A| \tag{1.5}$$

Si $A$ es una matriz triangular:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} aii \tag{1.6}$$

ℵ

## 1.4. Subespacios fila, columna y null

Espacio fila,columna y nulo de matrices

Sean $A \in R^{n\times m}$ , $B \in R^{r\times n}$, se define:

- **Espacio Fila:** Fif$(A) = \{x \in R^m | x$ es combinación lineal de las filas de $A\}$
- **Espacio Columna:** Col$(A) = \{b \in R^n | Ax = b$ para alguna x$\}$
- **Espacio nulo:** Nul$(A) = \{x \in R^m | Ax = 0\}$

ℵ

## Propiedades de los espacios definidos

Propiedades:

$$\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A) = \text{Fil}(A)^{\perp} \tag{1.7}$$
$$\text{Nul}(A^T) = \text{Nul}(AA^T) = \text{Col}(A)^{\perp} \tag{1.8}$$
$$\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,\left(A^T A\right) \Rightarrow A^T A \tag{1.9}$$
$$\text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Fil}(A)) \tag{1.10}$$
$$\text{Col}(A) \bigotimes \text{Col}(A)^{\perp} = R^n \tag{1.11}$$
$$\text{Fil}(A) \bigotimes \text{Fil}(A)^{\perp} = R^m \tag{1.12}$$
$$\text{rango}\,(A) + \dim \text{Nul}(A) = m \tag{1.13}$$
$$\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B), \text{Iguales si rango}\,(A) = n \tag{1.14}$$
$$\text{Nul}(A) \subseteq \text{Nul}(BA), \text{Iguales si rango}\,(B) = n \tag{1.15}$$
$$\text{Si rango}\,(A) = n \Rightarrow \text{rango}\,(BA) = \text{rango}\,(B) \tag{1.16}$$
$$\text{Si rango}\,(B) = n \Rightarrow \text{rango}\,(BA) = \text{rango}\,(A) \tag{1.17}$$
$$\text{Col}(A) \perp \text{Col}(B) \Leftrightarrow A^T B = 0 \tag{1.18}$$

De **(1.15)** se ve que $A^T A$ invertible $\longleftrightarrow$ $A$ invertible

## Matrices equivalentes

Dos matrices $A$ y $B$ son equivalentes si existen otras dos matrices $E$ y $F$ regulares tal que:

$$A = EBF \tag{1.19}$$

Dos matrices equivalentes pueden pensarse como dos descripciones de una misma Transformación Lineal, pero con respecto a bases distintas.

## Matrices semejantes

Dos matrices cuadradas $A$ y $B$ son semejantes (notamos $A \sim B$) si y solo si existe una matriz $P$ inversible tal que:

$$B = P^{-1}AP\;, \text{ó} \tag{1.20}$$
$$A = PBP^{-1} \tag{1.21}$$

## Propiedades de matrices semejantes

Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de un mismo operador lineal, pero con respecto a bases distintas. Estas dos matrices cumplen que:

$$|A| = |B| \tag{1.22}$$
$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \tag{1.23}$$
$$\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,(B) \tag{1.24}$$
$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B) \tag{1.25}$$

# 2. Espacios vectoriales

## 2.1. Propiedades de los subespacios

**Propiedades de los subespacios**

$S$ es un subespacio vectorial del espacio $V_K$ si y solo si:

$$0_V \in S \tag{2.1}$$

$$(\alpha X + Y) \in S, \forall X, Y \in V \text{ y } \forall \alpha \in K \tag{2.2}$$

## 2.2. Independencia lineal

**Combinación lineal**

El vector $\overline{\mathbf{x}}$ es una combinación lineal de $\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n$ si:

$$\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{2.3}$$

Y si $a_1, \ldots, a_n$ no son todos nulos.

**Independencia lineal**

$\overline{\mathbf{x}}$ es **linealmente independiente** si:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \text{ , y} \tag{2.4}$$

$$a_i = 0 \forall i \tag{2.5}$$

Dos vectores son **linealmente dependientes** si son proporcionales. Un subconjunto de un conjunto linealmente dependiente sigue siendo linealmente dependiente

## 2.3. Operaciones con subespacios

**Operaciones con subespacios**

- **Intersección:** $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i = \{\overline{\mathbf{x}} \in V | \overline{\mathbf{x}} \in S_i \text{ , } \forall i = 1, \ldots, n\}$
- **Suma:** $S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \text{gen}\left\{\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right\}$, donde $B_i$ es una base de $S_i$
- **Unión:** $S = S_1 \cup S_2$ es un subespacio cuando $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$
- **Suma directa:** $S_1, \ldots, S_k$ están en suma directa $\iff$ la unión de sus bases es base de $V$

Dos subespacios son **suplementarios** cuando están en suma directa y su suma es todo el espacio.

## 2.4. Bases

**Bases**

Si $\text{Dim}(V) = n$, $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de $V$ si y solo si:

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ genera } V \tag{2.6}$$
$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ son linealmente independientes} \tag{2.7}$$

## 2.5. Coordenadas de un vector en una base

**Coordenadas de un vector en una base**

Si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de un espacio vectorial $B$ y $\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\mathbf{v}}_i$, entonces $C_B(\overline{\mathbf{x}}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Dado un vector y una base, las coordenadas de ese vector en esa base son únicas.

$\forall \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} \in V$ y $\forall k \in K$:

$$C_B(v + w) = C_B(v) + C_B(w) \tag{2.8}$$
$$C_B(k \times v) = k \times C_B(v) \tag{2.9}$$

Finalmente $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ son linealmente independientes $\iff \{C_B(\overline{\mathbf{v}}_1), \ldots, C_B(\overline{\mathbf{v}}_n)\}$ lo son para cualquier base de $B$.

## 2.6. Matriz de cambio de base

**Matriz de cambio de base**

Sean $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ y $C = \{\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_n\}$ bases del espacio $V$. Las matrices de cambio de base son:

$$C_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(\overline{\mathbf{v}}_1) & C_C(\overline{\mathbf{v}}_2) & \ldots & C_C(\overline{\mathbf{v}}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$C_{CB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_B(\overline{\mathbf{w}}_1) & C_B(\overline{\mathbf{w}}_2) & \ldots & C_B(\overline{\mathbf{w}}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C_{BC}^{-1} \tag{2.11}$$

Si $B$ y $C$ son bases ortonormales, entonces $C_{BC}$ es una matriz ortogonal.

## 2.7. Teorema de la dimensión

**Teorema de la dimensión**

Dados los subespacios $S, H$ y $T$:

$$\text{Dim}(S + H) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) - \text{Dim}(S \cap H) \tag{2.12}$$
$$\text{Dim}(S + H + T) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(S \cap (H + T)) - \text{Dim}(H \cap T) \tag{2.13}$$

# 3. Producto interno

## 3.1. Axiomas

**Axiomas del producto interno**

Sea $<,>: V_K \times V_K \rightarrow R$ un producto interno:

1. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \in K$ y $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$
2. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})}$ , $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$
3. $(\lambda\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\lambda}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ , $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
4. $(\overline{\mathbf{x}}, \lambda\overline{\mathbf{y}}) = \lambda(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ , $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
5. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}})$ , $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in V$
6. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \geq 0, (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \longleftrightarrow \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$

ℵ

## 3.2. Producto interno canónico

**Producto interno canónico**

Se definen los siguientes productos internos para los siguientes espacios vectoriales:

- **Vectores reales:** $R^n : (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^T\overline{\mathbf{y}}$
- **Vectores complejos:** $C^n : (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^H\overline{\mathbf{y}}$
- **Matrices reales:** $R^{n\times m} : (A, B) = \text{tr}(A^T B)$
- **Matrices complejas:** $C^{n\times m} : (A, B) = \text{tr}(A^H B)$
- **Funciones reales:** $P_R[a, b] : (p, q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$
- **Funciones complejas:** $P_C[a, b] : (p, q) = \int_a^b \overline{p(t)}q(t)dt$

ℵ

## 3.3. Definiciones

**Ortogonalidad**

Dados $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \Longleftrightarrow \overline{\mathbf{x}} \perp \overline{\mathbf{y}} \tag{3.1}$$

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

ℵ

norma de un vector

Se define la norma de un vector como:

$$|\bar{\mathbf{x}}|^2 = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \tag{3.2}$$

La **norma de un vector** depende del producto interno, pero cumple las siguientes propiedades:

- $|\bar{\mathbf{x}}| \in R \forall \bar{\mathbf{x}} \in V$
- $|\bar{\mathbf{x}}| \geq 0$ $(|\bar{\mathbf{x}}| = 0 \iff \bar{\mathbf{x}} = 0)$
- $|k \cdot \bar{\mathbf{x}}| = |k| \cdot |\bar{\mathbf{x}}|$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**
$$|(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})| \leq |\bar{\mathbf{x}}| \cdot |\bar{\mathbf{y}}| \;, x, y \in V_K \tag{3.3}$$
La igualdad se cumple si $\bar{\mathbf{x}} \parallel \bar{\mathbf{y}}$
- **Desigualdad triangular:**
$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}| \leq |\bar{\mathbf{x}}| + |\bar{\mathbf{y}}| \tag{3.4}$$
- **Teorema de pitágoras:** Si $\bar{\mathbf{x}} \perp \bar{\mathbf{y}}$ entonces:
$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}|^2 = |\bar{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{y}}|^2 \tag{3.5}$$
La recíproca solo vale para $R$
- **Identidad del paralelogramo:**
$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}|^2 + |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}|^2 = 2\left(|\bar{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{y}}|^2\right), \forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in V \tag{3.6}$$

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

ℵ

Ángulo entre dos vectores

Dado $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$:

$$\cos(\theta) = \frac{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})}{|\bar{\mathbf{x}}| \cdot |\bar{\mathbf{y}}|} \tag{3.7}$$

Con $\theta \in [0, \pi], \forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \neq 0$ para espacios vectoriales reales con producto interno.

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

ℵ

Complemento ortogonal

Sea $A \subset V_K \cdot A^{\perp} = \{\bar{\mathbf{x}} \in V_K | (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0, \forall \bar{\mathbf{y}} \in A\}$

Para el cálculo del complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita, alcanza con exigir la ortogonalidad a un sistema de generadores

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

ℵ

**Distancia entre vectores**

Dados $\overline{\mathbf{x}}$,$\overline{\mathbf{y}}$, se define la función distancia como:

$$d : V_R \times V_R \to R^+ : d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = |\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}| = |\overline{\mathbf{y}} - \overline{\mathbf{x}}| \tag{3.8}$$

*Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.*

## 3.4. Matriz asociada al producto interno

**Matriz de producto interno**

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_k\}$ base de $V_K$. Entonces $G \in K^{k\times k}$, $g_{ij} = (\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{v}}_j)$ es la matriz de producto interno:

$$G = \begin{bmatrix} |\overline{\mathbf{v}}_1|^2 & \ldots & (\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{\mathbf{v}}_k, \overline{\mathbf{v}}_1) & \ldots & |\overline{\mathbf{v}}_k|^2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Si $B$ es base de $V_K$ y $G$ es la matriz del producto interno en esa base, entonces $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = C_B^H(\overline{\mathbf{x}}) \cdot G \cdot C_B(\overline{\mathbf{y}}) \tag{3.10}$$

**Propiedades de la matriz de producto interno**

Dada la matriz $G$ de producto interno se tiene que:

$$g_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \ldots, k \tag{3.11}$$

$$G^H = H \tag{3.12}$$

$$G \text{ es definida positiva} \tag{3.13}$$

$$\exists G^{-1} \tag{3.14}$$

$$G \text{ de una Base Ortogonal (BOG) es una matriz diagonal} \tag{3.15}$$

$$G \text{ de una Base Ortonornal (BON) es una matriz identidad} \tag{3.16}$$

# 4. Proyecciones y matrices de proyección

## 4.1. Propiedades de la proyección

Propiedades de la proyección

Sea $S \subset V y S^{\perp}$ su complemento ortogonal, entonces $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\mathbf{u}}}_{\in S} + \underbrace{\overline{\mathbf{v}}}_{\in S^{\perp}} = P_S(\overline{\mathbf{x}}) + P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) \tag{4.1}$$

Se definen las siguientes propiedades:

- $P_S(\overline{\mathbf{x}})$ es el vector de $S$ mas próximo a $\overline{\mathbf{x}}$
- $P_S(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{v}} \Longleftrightarrow \overline{\mathbf{v}} \in S$ y además $P_S(\overline{\mathbf{w}}) = 0 \Longleftrightarrow \overline{\mathbf{w}} \in S^{\perp}$
- Por pitágoras: $|\overline{\mathbf{x}}|^2 = |P_S(\overline{\mathbf{x}})|^2 + \left|P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})\right|^2, \forall x \in V$
- $|P_S(\overline{\mathbf{x}})| \leq |\overline{\mathbf{x}}|$. Si $|P_S(\overline{\mathbf{x}})| = |\overline{\mathbf{x}}|$ entonces $\overline{\mathbf{x}} \in S$
- $d(\overline{\mathbf{x}}, S) = \left|P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})\right|$
- $d(\overline{\mathbf{x}}, S^{\perp}) = |P_S(\overline{\mathbf{x}})|$

ℵ

## 4.2. Proyección y reflexión

Proyección y reflexión

Sea $S$ un subespacio de $V$, y $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_k\}$ una base ortogonal (BOG) de $S$. Entonces $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V$:

$$P_S(\overline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{x}})}{(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i)} \overline{\mathbf{v}}_i \tag{4.2}$$

$$R_S(\overline{\mathbf{x}}) = 2P_S(\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{x}} = 2P_S(\overline{\mathbf{x}}) - \left(P_S(\overline{\mathbf{x}}) + P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})\right) = P_S(\overline{\mathbf{x}}) - P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} - 2P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) \tag{4.3}$$

ℵ

### 4.2.1. Proyección y transformaciones lineales

**Proyecciones y Transformaciones lineales**

Sea $T : V_K \to V_K$ una transformación lineal tal que:

$$Im(P_S) = S \tag{4.4}$$
$$\text{Nul}(P_S) = S^{\perp} \tag{4.5}$$

Y sea $B = \{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_{q+1}, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n}_{\in S^{\perp}}\}$ una base de V, entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[P_S]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos 0 como la dimensión del complemento ortogonal.

*Nota:* La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

### 4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales

**Proyecciones y Transformaciones lineales**

Sea $T : V_K \to V_K$ una transformación lineal tal que:

$$T(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{v}}, \forall \overline{\mathbf{v}} \in S \tag{4.7}$$
$$T(\overline{\mathbf{v}}) = -\overline{\mathbf{v}}, \forall \overline{\mathbf{v}} \in S^{\perp} \tag{4.8}$$

Y sea $B = \{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_{q+1}, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n}_{\in S^{\perp}}\}$ una base de V, entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & -1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos -1 como la dimensión del complemento ortogonal.

*Nota:* La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

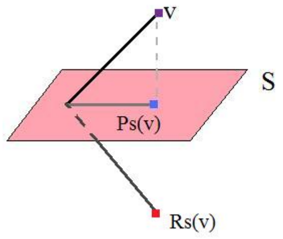


**Figura 4.1:** Proyección y reflexión

## 4.3. Matriz de Householder

Propiedades de la proyección

La matriz de reflexión sobre un subespacio de dimensión $n-1$ que es ortogonal a un vector $\overline{\mathbf{w}}$ en un espacio de dimensión $n$ se puede obtener mediante la expresión:

$$H = I_d - 2\frac{\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{w}}^T}{\overline{\mathbf{w}}^T \cdot \overline{\mathbf{w}}} \tag{4.10}$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- Es involutiva: $H \circ H = I_d$
- Es simétrica: $H^T = H$
- Es inversible: $\exists H^{-1}$ y $\exists H^{-1} = H$
- Es ortogonal: $H^T H = H H^T = I_d$

## 4.4. Rotaciones en $R^3$

Rotaciones en $R^3$

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3\}$ una Base Ortonormal (BON) de $R^3$ y sea $T$ la rotación $\theta$ grados alrededor del eje $v_i$:

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_1 : [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_2 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_3 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

(4.14)

## 4.5. Proceso de Gram-Schmidt

Proceso de Gram-Schmidt

Dada una base $\{\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \dots, \overline{\mathbf{x}}_p\}$ para un subespacio $W \in R^n$ defina:

1. $\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{x}}_1$
2. $\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{x}}_2 - \frac{\overline{\mathbf{x}}_2 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1}{\overline{\mathbf{v}}_1 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1}\overline{\mathbf{v}}_1$
3. $\overline{\mathbf{v}}_p = \overline{\mathbf{x}}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\overline{\mathbf{x}}_p \cdot \overline{\mathbf{v}}_i}{\overline{\mathbf{v}}_i \cdot \overline{\mathbf{v}}_i}\overline{\mathbf{v}}_i$

Entonces $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \dots, \overline{\mathbf{v}}_p\}$ es una Base Ortogonal (BOG) de $W$.

Si luego se divde a cada componente por la norma de la base se obtiene una Base Ortogonal (BON) de $W$.

## 4.6. Matrices de proyección

**Matriz de proyección**

Utilizando el producto interno canónico de sobre $K^n$, con $K = R$ o $K = C$.

$P \in K^{n\times n}$ es una matriz de proyección si y solo si:

$$P^2 = P \tag{4.15}$$

$$P^H = P \tag{4.16}$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- $\text{Col}(P) = \text{Nul}(P)^{\perp}$
- $P \cdot y = y \iff y \in \text{Col}(P)$
- Si $P_S$ es matriz de proyección sobre $S$ y $P_S^{\perp}$ es matriz de proyección sobre $S^{\perp}$ entonces $P_S + P_S^{\perp} = I_d$
- Las columnas de $P$ son una base del espacio sobre el cual proyectan
- $\text{rango}\,(P) = \text{tr}(P)$
- $\det P \neq 0$ si $P \neq I_d$
- Si $P_1$ y $P_2$ son matrices de proyección y $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$, entonces $P_1 + P_2$ es matriz de proyección y $\text{rango}\,(P_1 + P_2) = \text{rango}\,(P_1) + \text{rango}\,(P_2)$

Obtención de la matriz de proyección:

1. Sea $Q$ una matriz cuyas columnas son una Base Ortonormal (BON) de $S \subset V$. Entonces la única matriz de proyección sobre $S$ es $[P_S] = Q \cdot Q^T$. La matriz de proyección sobre $S^{\perp}$ es $[P_S^{\perp}] = I_d - [P_S]$
2. Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q\}$ una base de $S$, y $A$ la matriz que tiene por columnas a $\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q$. Entonces la única matriz de proyección sobre $S$ se obtiene mediante $[P_S] = A\left(A^H A\right)^{-1} A^H = AA^{\#}$

## 4.7. Inversas y pseudoinversas

**Propiedades de la pseudoinversa**

Sea $A \in K^{n\times q} | \text{rango}\,(A) = q$. La matriz pseudoinversa de $A$ es $A^{\#} = \left(A^H A\right)^{-1} A^H$:

- Si $A$ es cuadrada invertible, $A^{-1} = A^{\#}$
- $A^{\#} \in R^{q\times n}$
- $A^{\#} A = I_{d_{(q)}}$
- $AA^{\#} = [P]_{\text{Col}(A)}$
- $\text{Nul}(AA^{\#}) = [\text{Col}(A)]^{\perp}$

## 4.8. Cuadrados mínimos

**Cuadrados mínimos**

Sea $A \in K^{n\times q}, \bar{\mathbf{x}} \in K^q, \bar{\mathbf{b}} \in R^n$. Si $Ax = b$ tiene una solución extra, entonces $\bar{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$. Si $b \notin \text{Col}(A)$, intentamos hallar una solución $\hat{\bar{\mathbf{x}}} \in K^q$ (la solución por **cuadrados mínimos**) tal que:

- $\left|A\hat{\bar{\mathbf{x}}} - \bar{\mathbf{b}}\right| < \left|A\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{b}}\right|, \forall \bar{\mathbf{u}} \in K^q$
- $d(A\hat{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\mathbf{b}}) \leq d(A\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{b}}), \forall \bar{\mathbf{u}} \in K^q$
- $\left|A\hat{\bar{\mathbf{x}}}\right| \leq \left|\bar{\mathbf{b}}\right|$ (Son iguales si $\bar{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$)
- Ecuaciones normales de cuadrados mínimos: $A^T A\hat{\bar{\mathbf{x}}} = A^T\bar{\mathbf{b}} = \hat{\bar{\mathbf{b}}}$
- $A\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \hat{\bar{\mathbf{b}}} = P_{\text{Col}(A)}(\bar{\mathbf{b}})$ si y solo si:

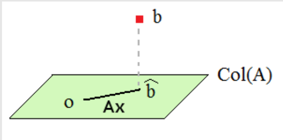


**Figura 4.2:** Cuadrados mínimos

$$A\hat{\bar{\mathbf{x}}} \in \text{Col}(A) \tag{4.17}$$

$$\bar{\mathbf{b}} - A\hat{\bar{\mathbf{x}}} \in \text{Col}(A)^{\perp} \tag{4.18}$$

**Propiedades de Cuadrados mínimos**

1. Si $\hat{\bar{\mathbf{x}}} = 0$ entonces $\bar{\mathbf{b}} \in [\text{Col}(A)]^{\perp}$. La recíproca solo es cierta si $A$ es invertible.
2. Si las columnas de $A$ son linealmente independientes, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante:

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{\mathbf{b}} = A^{\#}\bar{\mathbf{b}} \tag{4.19}$$

   Si las columnas de $A$ son linealmente dependientes, el sistema $A^T A\hat{\bar{\mathbf{x}}} = A^T b$ tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma $\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \hat{\bar{\mathbf{x}}}_p + \underbrace{\hat{\bar{\mathbf{x}}}_n}_{\in \text{Nul}(A)}$

3. Si $\bar{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$, entonces toda solución de $A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ es una solución exacta y por cuadrados mínimos
4. El error de aproximación $\epsilon$ es igual a $\left|\bar{\mathbf{b}} - \hat{\bar{\mathbf{b}}}\right|$

### 4.8.1. Norma mínima

**Pseudoinversa de Moore-Pensore**

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima pertenece al espacio $\text{Fil}(A)$y se obtiene como:

$$\tilde{\bar{\mathbf{x}}} = A^{+}\bar{\mathbf{b}} \tag{4.20}$$

Siendo $A^{+}$ la **pseudoinversa de Moore-Penrose** de $A$.

## 4.9. Regresión lineal

**Regresión lineal**

Sean los puntos $\overline{\mathbf{P}}_i = (x_i, y_i)$ con $i = 1, 2, \ldots, n$. La recta que mejor aproxima a los puntos es:

$$\overline{\mathbf{y}} = \alpha_0 \overline{\mathbf{1}} + \alpha_1 \overline{\mathbf{x}} \tag{4.21}$$

Y los coeficientes $\alpha_i$ se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Si se aproxima por una parábola se agrega otro nivel de complejidad, con $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$, lo que implica una columna adicional a la matriz para los términos cuadráticos, una fila adicional para la constante $\alpha_2$ en la variable.

Se siguen agregando columnas a la matriz y filas al vector tantas veces como grados de complejidad se necesiten.

$\aleph$

# 5. Transformaciones lineales

Sea $T \in \ell(V_K, W_K)$ y $A = [T]_{BC}$ con $B$ base de $V$ y $C$ base de $W$ la matriz de $T$.

## 5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales

**Condiciones para ser Transformación lineal**

Para que una transformación se considere lineal debe cumplir:

1. $T(\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}}) = T(\overline{\mathbf{u}}) + T(\overline{\mathbf{v}})$, con $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}} \in V$
2. $T(\alpha\overline{\mathbf{u}} + \beta\overline{\mathbf{v}}) = \alpha \cdot T(\overline{\mathbf{u}}) + \beta \cdot T(\overline{\mathbf{v}})$, con $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}} \in V_K$ y $\alpha, \beta \in K$
3. $T(0_{V_K}) = 0_{V_K}$

$\aleph$

## 5.2. Núcleo e Imágen

**Núcleo e Imágen**

**Núcleo:** $\text{Nul}(T) = \{\overline{\mathbf{v}} \in V_K \mid T(\overline{\mathbf{v}}) = 0_W\} = C_B^{-1}(\text{Nul}(A))$.
**Imágen:** $\text{Im}(T) = \{\overline{\mathbf{w}} \in W_K \mid T(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{w}} \text{ con } \overline{\mathbf{v}} \in V_K\} = C_C^{-1}(\text{Col}(A))$.

Ambos son subespacios vectoriales.

La imágen de una Transformación Lineal puede obtenerse como lo que generan los transformados de una base del espacio de partida.

$\aleph$

**Teorema de la dimensión**

Sea $T \in \ell(V, W)$ y sea Dim$(V) = n$ (finita). Entonces:

$$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(\text{Nul}(T)) + \text{Dim}(\text{Im}(T)) \tag{5.1}$$

## 5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales

### 5.3.1. Monomorfismo(Inyectividad)

**Monomorfismo**

Una Transformación lineal es inyectiva si verifica:

$$\overline{\mathbf{v}}_1 \neq \overline{\mathbf{v}}_2 \Rightarrow T(\overline{\mathbf{v}}_1) \neq T(\overline{\mathbf{v}}_2)\ ,\forall \overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2 \in V \tag{5.2}$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \iff \text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{Dim}(V) \tag{5.3}$$

Una Transformación Lineal Inyectiva transforma conjuntos Linealmente Independientes a conjuntos Linealmente Independientes.

La recíproca también es cierta: si $A$ es un conjunto Linealmente Independiente y es transformado en otro conjunto Linealmente Independiente, la Transformación Lineal es inyectiva. Es decir: Si $T$ es inyectiva y $A$ es Linealmente Independiente, $T(A)$ es Linealmente Independiente.

Las matrices asociadas a Transformaciones Lineales inyectivas tienen sus columnas Linealmente Independientes.

Si Dim$(V) >$ Dim$(W)$, $T$ no puede ser inyectiva.

### 5.3.2. Epimorfismo(Sobreyectividad)

**Epimorfismo**

Una Transformación lineal es sobreyectiva si y solo si:

$$\text{Im}(T) = W \tag{5.4}$$

Las matrices asociadas a Transformaciones lineales sobreyectivas tienen sus filas Linealmente Independientes.

Si Dim$(W) >$ Dim$(V)$, $T$ no puede ser sobreyectiva.

### 5.3.3. Isomorfismo(Biyectividad)

Biyectividad

Una Transformación lineal es biyectiva si y solo si:

$$\text{Dim}(W) = \text{Dim}(V) \tag{5.5}$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \tag{5.6}$$

Es decir, si es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez.

$T$ es biyectiva $\iff$ si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de $V \Rightarrow \{T(\overline{\mathbf{v}}_1), \ldots, T(\overline{\mathbf{v}}_n)\}$ es base de $W$
La matriz asociada a una Transformación lineal biyectiva tiene sus filas y columnas Linealmente Independientes, o sea que es una matriz inversible, es decir, existe una transformación lineal inversa $T^{-1} = [T]^{-1}$

Si $\text{Dim}(V) = \text{Dim}(W)$, entonces o bien $T$ es inyectiva y sobreyectiva, o no es ninguna de las dos.

ℵ

## 5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal

Matriz de la Transformación lineal

Sea $T \in \ell(V_K, W_K)$, sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q\}$ base de $V$ y $C = \{\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_m\}$ base de $W$. Entonces $T$ se puede escribir como $T(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}}$, con $A \in K^{m\times q}$ tal que:

$$A = [T]_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_1)) & C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_2)) & \ldots & C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_q)) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Dicha matriz posee las siguientes propiedades:

- $[T]_{BC} \cdot C_B(\overline{\mathbf{v}}) = C_C(T(\overline{\mathbf{v}}))\ , \forall \overline{\mathbf{v}} \in V$
- $\overline{\mathbf{v}} \in \text{Nul}(T) \iff C_B(\overline{\mathbf{v}}) \in \text{Nul}(A)$
- $\overline{\mathbf{w}} \in \text{Im}(T) \iff C_C(\overline{\mathbf{w}}) \in \text{Col}(A)$
- $\text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{rango}\,(A)$

ℵ

Teorema para matrices de Transformación lineal

Sean $V$ y $W$ $K$-espacios vectoriales ($K = R$ o $C$). Sea $T : V \to W$.

Si $B_1$ y $B_2$ son bases ordenadas de $V$, y $C_1$ y $C_2$ son bases ordenadas de $W$, entonces:

$$\text{rango}\,([T]_{B_1C_1}) = \text{rango}\,([T]_{B_2C_2}) \tag{5.8}$$

ℵ

## 5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

**Teorema fundamental de las Transformaciones lineales**

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ base de $V$ y $\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_n$ vectores de $W$. Entonces existe y es única la Transformación lineal que verifica:

$$T(\overline{\mathbf{v}}_i) = \overline{\mathbf{w}}_i \ , \forall i = 1, \ldots, n \tag{5.9}$$

Además, dada una Transformación lineal y un par de bases, existe una única matriz asociada.

La recíproca tambíen es verdadera: dada una matriz y un par de bases, existe una única Transformación lineal asociada.

## 5.6. Composición de Transformaciones lineales

**Composición de Transformaciones lineales**

Sea $f \in \ell(V, W)$ y $g \in \ell(W, H) \Rightarrow g \circ f \in (V, H)$. Podemos encontrar la siguientes propiedades:

$$\text{Nul}(f) \subseteq \text{Nul}(g \circ f) \tag{5.10}$$

$$\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g) \tag{5.11}$$

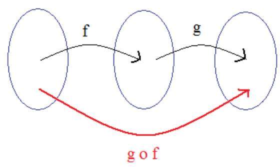


**Figura 5.1:** Composición

## 5.7. Operadores lineales

**Operadores lineales**

Un operador lineal es una Transformación lineal que va de un espacio en si mismo, se escríbe como $T \in \ell(V)$ y cuenta con las siguientes propiedades:

- Si $T_1 \in \ell(V)$ y $T_2 \in \ell(V)$, entonces $T_1 \circ T_2 \in \ell(V)$
- Si $T \in \ell(V)$, $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{\text{n veces}}$

# 6. Autovalores y Autovectores

## 6.1. Definiciones básicas

Definiciones básicas

**Autovector:** Un vector $\overline{\mathbf{v}} \neq 0$ es autovector de $A \in K^{n \times n} \iff \exists \lambda \in K \mid A\overline{\mathbf{v}} = \lambda \overline{\mathbf{v}}$

**Autoespacio:** El autoespacio de $A$ asociado a un autovalor $\lambda$ es $S_\lambda(A) = \text{Nul}(A - \lambda I)$

**Polinomio característico:** El polinomio característico de una matriz $A \in K^{n \times n}$ es $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$, y tiene grado $n$. Si $K = R$ el polinomio tiene a lo sumo $n$ raíces. Si $K = C$ tiene exactamente $n$ raíces.

**Autovalor:** Los autovalores $\lambda$ de una matriz son las raíces de su polinomio característico.

**Espectro de una matriz:** $\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ es autovalor de } A\}$.

ℵ

## 6.2. Autovalores complejos de matriz real

Autovalores complejos

Supongamos que $\overline{\mathbf{v}}$ es un autovector de $A \in R^{n \times n}$ asociado a $\lambda = a + \jmath b$ con $a, b \in R, b \neq 0$.
Entonces $\overline{\mathbf{v}}^*$ es también un autovector de $A \in R^{n \times n}$ asociado a $\lambda^* = a - \jmath b$.

En particular si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es una base de $S_\lambda$, entonces $\{\overline{\mathbf{v}}_1^*, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n^*\}$ es una base de $S_{\lambda^*}$

ℵ

## 6.3. Multiplicidad geométrica y algebráica de un Autovalor

Multiplicidad de Autovalores

Se define:

- $m_g(\lambda) = \text{Dim}(S_\lambda(A))$
- $m_a(\lambda) \doteq$ número de veces que aparece $\lambda$ como raíz del polinomio característico.

Siempre se verifica que:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \tag{6.1}$$

ℵ

## 6.4. Propiedades

Propiedades de Autovalores y Autovectores

Sea $A \in K^{n \times n}$:

- $A$ es singular $\iff$ 0 es un autovalor de $A \iff m_g(0) = n - k \iff$ rango $(A) = k < n$
- Dos autovectores asociados a autovalores distintos son Linealmente Independientes
- Si $A \in K^{2x2}$, entonces $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A|$
- Si todas las filas o columnas de $A$ sumas $s$, entonces $s$ es autovalor de $A$.
- Sea $p(t)$ un polinomio de grado $k$. Si $\lambda$ es autovalor de $A$, entonces se cumple que $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$, y para cada autovalor $\mu$ de $p(A)$ existe un autovalor $\lambda$ de $A$ tal que $p(\lambda) = \mu$.
- Si $\lambda$ es autovalor de $A$:
  - $\lambda$ es autovalor de $A^T$
  - $\lambda^{-1}$ es autovalor de $A^{-1}$ y $S_{\lambda^{-1}}\left(A^{-1}\right) = S_\lambda(A)$
  - $r \cdot \lambda$ es autovalor de $r \cdot A$
  - $\lambda^k$ es autovalor de $A^k$, con $k \in N$
  - $\lambda + r$ es autovalor de $A + r \cdot I$

ℵ

## 6.5. Autovalores y Autovectores de operadores lineales

Autovalores y Autovectores de Operadores lineales

$T : V_K \to V_K$. Un vector $\overline{\mathbf{v}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ es autovector de $T \iff T(\overline{\mathbf{v}}) = \lambda \overline{\mathbf{v}}$, con $\lambda$ autovalor de $T$.
$S_\lambda(T) = \{\overline{\mathbf{x}} \in V \mid T(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda \overline{\mathbf{x}}$ y $\lambda$ autovalor de $T\} = \text{Nul}(T - \lambda I)$. Si $B$ es base de $V$ y $A$ es la matriz de $T$ en esa base, entonces:

$$\sigma(A) = \sigma(T) \forall B \text{ base de } V \tag{6.2}$$
$$\overline{\mathbf{x}} \text{ es autovector de } T \iff C_B(\overline{\mathbf{x}}) \text{ es autovector de } [T]_B = A \tag{6.3}$$

Se deducen las siguientes propiedades:

- $T(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda \overline{\mathbf{x}} \Rightarrow T^n(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda^n \overline{\mathbf{x}}$, $n \in N$
- Si $\lambda$ es autovalor de $T$, $\lambda^{-1}$ es autovalor de $T^{-1}$
- Si $h$ es un polinomio en $K$ y $T(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}}$, entonces:

$$\sigma[h(A)] = h[\sigma(A)] \tag{6.4}$$
$$S_{h(\lambda)} h(A) = S_\lambda(A) \tag{6.5}$$

- $T : V_K \to V_K$ es regular $\iff 0 \notin \sigma(T)$

ℵ

## 6.6. Diagonalización

Diagonalización

Los siguientes enunciados son equivalentes para definir si $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable:

- $A \sim D$
- $\exists$ una base de $K^n$ compuesta por autovectores de $A$
- $A$ tiene $n$ autovalores Linealmente Independientes
- $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) \; \forall \lambda \in \sigma(A)$
- $\exists P$ invertible y $D$ diagonal tal que:

$$A = PDP^{-1} \tag{6.6}$$

Siendo $P$ la matriz de autovectores y $D$ la matriz diagonal de autovalores.

ℵ

### 6.6.1. Matrices trivialmente diagonalizables

Diagonalizaciones triviales

- **Matriz nula:**
  - **Autovalores:** $0$
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz identidad:**
  - **Autovalores:** $1$
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz diagonal:**
  - **Autovalores:** $a_{ii}$, los elementos de la diagonal
  - **Autovectores:** Los que tienen sus componentes nulas, excepto la $n$-ésima.
- **Matriz escalar:**
  - **Autovalores:** $k \in R$
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz de proyección:**
  - **Autovalores:** 1 con $m_a(1) = m_g(1) = \text{Dim}(S)$ y 0 con $m_a(0) = m_g(0) = \text{Dim}(S^\perp)$
  - **Autovectores:** Los vectores de $S$ asociados a 1 y los asociados a $S^\perp$ a 0
- **Matriz de reflexión:**
  - **Autovalores:** 1 con $m_a(1) = m_g(1) = \text{Dim}(S)$ y -1 con $m_a(0) = m_g(0) = \text{Dim}(S^\perp)$
  - **Autovectores:** Los vectores de $S$ asociados a 1 y los asociados a $S^\perp$ a -1

ℵ

#### 6.6.2. Propiedades

**Propiedades de la diagonalización**

- Si $A$ es diagonalizable entonces $A^n$ es diagonalizable ($D_A^n = D_{A^n}$ y $\sigma(A^n) = \sigma^n(A)$). La recíproca es falsa
- Si $A \in C^{n\times n}$ tiene $n$ autovalores distintos entonces $A$ es diagonalizable. La recíproca es falsa
- $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = p_A(0)$
- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

ℵ

#### 6.6.3. Diagonalización de transformaciones lineales

**Diagonalización de Transformaciones Lineales**

Los siguientes enunciados son equivalentes para decir que $T \in \ell(V_K)$ con $\text{Dim}(V_K) = n$, es diagonalizable:

- $\exists B$ base de $V_K$ tal que $[T]_B$ es diagonal
- $\exists B$ base de $V_K$ formada por autovectores de $T$
- $T$ tiene $n$ autovectores Linealmente Independientes

Esa base $B$ y $[T]_B = \text{diag}(\sigma(T))$.

Si $A = [T]_H$, $H$ cualquiera base, entonces $T$ es diagonalizable si y solo si $A$ es diagonalizable.

ℵ

# 7. Matrices hermíticas y simétricas

## 7.1. Diagonalización

**Matriz antisimétrica**

**Matriz antisimétrica:** Si $A \in R^{n\times n}$ es antisimétrica ($A^T = A$) entonces:

- Los autovalores de $A$ son imaginarios puros o nulos
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- $A$ es diagonalizable unitariamente.

ℵ

Matriz simétrica(hermítica)

**Matriz simétrica(hermítica):** Si $A \in R^{n\times n}$ es simétrica ($B \in C^{n\times n}$ es hermítica) si y solo si:
$A$ es diagonalizable ortogonalmente:

$$A = PDP^T \tag{7.1}$$

$B$ es diagonalizable unitariamente:

$$B = PDP^H \tag{7.2}$$

Con $D$ real.

Se deducen las siguientes propiedades:

- $A$ y $B$ tienen $n$ autovalores reales
- Los elementos de la diagonal de $A$ y $B$ son reales
- $|A| \in R$
- Dim$(S_\lambda(A)) = m_a(\lambda)\forall\lambda \in \sigma(A)$
- Dim$(S_\lambda(B)) = m_a(\lambda)\forall\lambda \in \sigma(B)$
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales

ℵ

Matriz ortogonal(unitaria)

**Matriz ortogonal(unitaria):** Si $A \in R^{n\times n}$ es ortogonal ($B \in C^{n\times n}$ es unitaria) si y solo si:

$$AA^T = A^TA = I_d \tag{7.3}$$
$$A^T = A^{-1} \tag{7.4}$$

ó

$$BB^H = B^HB = I_d \tag{7.5}$$
$$B^H = B^{-1} \tag{7.6}$$

Las columnas de $A$ y $B$ son Base Ortonormal de $R^n$ y $C^n$ respectivamente.

Se deducen las siguientes propiedades:

- $|A| = \pm 1$. Si $|A| = 1$, $A$ es la matriz de rotación
- Los autovalores tienen módulo 1 y pueden ser reales o complejos
- Son matrices unitariamente diagonalizables
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- Preservan los productos internos: $(A\bar{\mathbf{x}}, A\bar{\mathbf{y}}) = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$
- Preservan las normas asociadas al producto interno: $|A\bar{\mathbf{x}}| = |\bar{\mathbf{x}}|$
- Si $C$ es unitaria, $BC$ y $CB$ son unitarias también.

ℵ

## 7.2. Descomposición espectral

**Descomposición espectral de matrices simétricas**

Si $A = PDP^{-1} = PDP^T$, las columnas de $P$ son autovectores ortonormales $\overline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{u}}_n$ de $A$ y los autovalores correspondientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ están en la matriz diagonal $D$. Entonces:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{u}}_i^T \tag{7.7}$$

ℵ

## 7.3. Subespacios invariantes por una transformación lineal

**Subespacios invariantes por una transformación lineal**

- $S \in K^n$ es invariante por $A \in K^{n\times n} \iff \forall \overline{\mathbf{x}} \in S \mid A\overline{\mathbf{x}} \in S$
- $S \subset V$ es invariante por $T \in \ell(V) \iff \forall \overline{\mathbf{x}} \in S \mid T(\overline{\mathbf{x}}) \in S$

Se deducen las siguientes propiedades:

- Si $\lambda$ es autovalor de $T$, entonces $S_\lambda(T)$ es un subespacio invariante por $T$, puesto que:

$$\forall \overline{\mathbf{x}} \in S_\lambda(T) \Rightarrow T(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda \overline{\mathbf{x}} \in S_\lambda(T) \tag{7.8}$$

- No todo subespacio invariante es un autoespacio de $T$, pero sí los de dimensión 1

ℵ

# 8. Formas cuadráticas

**Formas cuadráticas**

Una forma cuadrática en $R^n$ es una función $Q : R^n \to R$ tal que:

$$Q(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A \overline{\mathbf{x}} \tag{8.1}$$

Donde $A$ es una matriz simétrica $\in R^{n\times n}$.

ℵ

**Teorema de los ejes principales**

Sea $A$ una matriz simétrica $\in R^{n\times n}$. Entonces existe un cambio ortogonal de variable, $\overline{\mathbf{x}} = P\overline{\mathbf{y}}$, donde $P$ es una matriz ortogonal tal que $|P| = +1$ e $\overline{\mathbf{y}}$ es el nuevo vector, que transforma la forma cuadrática $\overline{\mathbf{x}}^T A \overline{\mathbf{x}}$ a una forma cuadrática $\overline{\mathbf{y}}^T D \overline{\mathbf{y}}$ sin términos cruzados:

$$\overline{\mathbf{x}}^T A \overline{\mathbf{x}} = (P\overline{\mathbf{y}})^T A (P\overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{y}}^T \underbrace{P^T A P}_{D} \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}}^T D \overline{\mathbf{y}} = g(\overline{\mathbf{y}}) \tag{8.2}$$

ℵ

**Perspectiva geométrica de los ejes principales**

Sea la forma cuadrática $Q(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}}$, con $A = PDP^T$.

El conjunto de todas las $\overline{\mathbf{x}} \in R^n \mid \overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}} = c$ es una elipse, una hipérbola, dos rectas, un punto o ninguno.

Si $A$ es diagonal, la gráfica está en posición estándar. Si $A$ no es diagonal, la gráfica está girada hasta salirse de la posición estándar. Los **ejes principales** son los autovectores de $A$ y son el nuevo sistema de coordenadas para los cuales la gráfica está en posición estándar.

## 8.1. Clasificación

**Clasificación de las formas cuadráticas**

Una forma cuadrática $Q(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}}$ es:

| | **Definición** | **Criterio I** | **Criterio II** |
|---|---|---|---|
| **Definida positiva** | $Q(\overline{\mathbf{x}}) > 0$, $\forall \overline{\mathbf{x}} \neq 0$ | $a_{11} > 0$, $\lvert A\rvert > 0$ | Autovalores de $A$ positivos |
| **Semidefinida positiva** | $Q(\overline{\mathbf{x}}) \geq 0$, $\forall \overline{\mathbf{x}}$ | $\lvert A_k\rvert \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$ | Autovalores de $A$ positivos o nulos |
| **Definida negativa** | $Q(\overline{\mathbf{x}}) < 0$, $\forall \overline{\mathbf{x}} \neq 0$ | $a_{11} < 0$, $\lvert A\rvert > 0$ | Autovalores de $A$ negativos |
| **Semidefinida negativa** | $Q(\overline{\mathbf{x}}) \leq 0$, $\forall \overline{\mathbf{x}}$ | $\lvert A_k\rvert \leq 0$, $k = 1, \ldots, n$ | Autovalores de $A$ negativos o nulos |
| **Indefinida** | $Q(\overline{\mathbf{x}}) \asymp 0$ | | Autovalores de $A$ negativos y/o positivos |

## 8.2. Optimización restringida

**Teorema de Rayleigh**

Sea la forma cuadrática $Q(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}}$, con $A$ simétrica. Se verifica:

$$\lambda_{min}(A) \leq \frac{Q(\overline{\mathbf{x}})}{\| \overline{\mathbf{x}} \|^2} \leq \lambda_{max}(A) \tag{8.3}$$

Sea extremar una forma cuadrática $f : R^n \to R$, $f(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}}$, ($A$ simétrica), sujeto a la restricción $|\overline{\mathbf{x}}| = \alpha$.

El máximo de $f$ es $\lambda_{max}(A)\alpha^2$ y se alcanza en $M = \{\overline{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{max}}(A) \mid |\overline{\mathbf{x}}| = \alpha\}$

El mínimo de $f$ es $\lambda_{min}(A)\alpha^2$ y se alcanza en $m = \{\overline{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{min}}(A) \mid |\overline{\mathbf{x}}| = \alpha\}$

Sea extremar una forma cuadrática $f : R^n \to R$, $f(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}}$,($A$ simétrica), sujeto a la restricción $\overline{\mathbf{x}}^T B\overline{\mathbf{x}} = \alpha^2$, y sea $B$ definida positiva tal que $B = P_B D_B P_B^T$. Mediante el cambio de variable $\overline{\mathbf{y}} = \sqrt{D_B} P_B^T \overline{\mathbf{x}} \to \overline{\mathbf{x}} = \sqrt{D_B^{-1}} P_B \overline{\mathbf{y}}$, esto es equivalente a extremar $g(\overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{y}}^T \left(\sqrt{D_B^{-1}}^T P_B^T A P_B \sqrt{D_B^{-1}}\right)$ y sujeto a la restricción $|\overline{\mathbf{y}}| = \alpha$. Entonces:

$$\text{Máx } g(\overline{\mathbf{y}}) = \text{Máx } f(\overline{\mathbf{x}}) \tag{8.4}$$

$$\text{mín } g(\overline{\mathbf{y}}) = \text{mín } f(\overline{\mathbf{x}}) \tag{8.5}$$

Los $\overline{\mathbf{x}}$ en donde se alcanza ese extremo se hallan realizando $\overline{\mathbf{x}} = P_B\overline{\mathbf{y}}$

ℵ

# 9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)

## 9.1. Definición

**Descomposición en Valores Singulares (DVS)**

**Valores singulares:** Se define como:

$$VS(A) = \sqrt{\lambda_i}\ , \forall \lambda_i \in \sigma(A^T A) \tag{9.1}$$

Sea $A$ una matriz de $m \times n$ con rango $r$. Entonces existe una matriz $\Sigma$, y existen una matriz $U$ ortogonal de $m \times m$ y una matriz $V$ ortogonal de $n \times n$ tales que $A = U\Sigma V^T$ donde:

- $\Sigma \in R^{m \times n}$ es tal que $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, y la matriz diagonal $D$ tiene como elementos a los primeros $r$ valores singulares de $A^T A$, ordenados en forma descendente $\sigma_i \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.
- $V \in R^{n \times n}$ es una matriz cuyas columnas son unas Base Ortonormal (BON) de autovectores $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ asociados a los autovalores de $A^T A$.
- $U \in R^{m \times m}$ es una matriz cuyas primeras $r$ columnas son los vectores $\dfrac{A\overline{\mathbf{v}}_1}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{A\overline{\mathbf{v}}_r}{\sigma_r}$. Las otras columnas se obtienen completando la Base Ortonormal (BON) de $R^m$. Las columnas de $U$ son autovectores de $AA^T$

ℵ

## 9.2. Subespacios de las DVS

**Subespacios de la DVS**

Sea $A \in K^{m\times n}$:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \overline{\mathbf{u}}_1 & \dots & \overline{\mathbf{u}}_m \\ | & & | \end{bmatrix}}_{m\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \overline{\mathbf{v}}_1 & \dots & \overline{\mathbf{v}}_n \\ | & & | \end{bmatrix}^T}_{n\times n} \tag{9.2}$$

Si rango $(A) = r$ entonces:

$$\{\underbrace{\overline{\mathbf{u}}_1, \dots, \overline{\mathbf{u}}_r}_{\text{BON de Col}(A)}, \overbrace{\overline{\mathbf{u}}_{r+1}, \dots, \overline{\mathbf{u}}_m}^{\text{BON de Col}(A)^\perp}\} \tag{9.3}$$

$$\{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_r}_{\text{BON de Fil}(A)}, \overbrace{\overline{\mathbf{v}}_{r+1}, \dots, \overline{\mathbf{v}}_m}^{\text{BON de Fil}(A)^\perp}\} \tag{9.4}$$

ℵ

## 9.3. Propiedades de las DVS

Propiedades de la DVS

- rango $(A)$ = rango $(\Sigma)$ = rango $\left(\Sigma^T\right) = \#VS(A)_{>0}$
- $A \in R^{n\times n}$ es inversible $\iff A$ tiene $n$ $VS$ positivos
- $VS(A)_{>0} = VS(A^T)_{>0}$
- Si $A \in R^{n\times n} \Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^{n} VS_i(A)$
- Si $A$ es cuadrada y definida positiva $\Rightarrow \sigma(A) = VS(A)$
- Si $A \sim B \Rightarrow VS(A) = VS(B)$
- Si $B$ es ortogonal $\Rightarrow A$, $AB$ y $BA$ tienen los mismos valores singulares
- Si $A$ es cuadrada y simétrica $\Rightarrow VS_i(a) = |\lambda_i(A)|$
- Si las filas de $A$ son una Base Ortonormal (BON), los valores singulares no nulos de $A$ son $1$
- Si las columnas de $A$ son una Base Ortonormal (BON), los valores singulares de $A$ son $1$
- La matriz $A^TA$ (*Matriz de Gram* de $A$) es siempre simétrica y semidefinida positiva, con lo cual nunca tendrá valores singulares negativos. Será definida positiva cuando $A$ tenga columnas Linealmente Independientes.
- Sea $T : R^m \to R^n$ una transformación lineal tal que $T(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}}$. Sea la forma cuadrática $f(\overline{\mathbf{x}}) = |T(\overline{\mathbf{x}})|^2 = \overline{\mathbf{x}}^T(A^TA)\overline{\mathbf{x}}$. Entonces:
  - El máximo de $f(\overline{\mathbf{x}})$ sujeto a $|\overline{\mathbf{x}}| = 1$ es $\lambda_{max}\left(A^TA\right)$. Entonces el máximo de $|T(\overline{\mathbf{x}})|$ es $VS_{max}(A)$ y se alcanza en $M = \{\overline{\mathbf{x}} \in R^m \mid \overline{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{max}}\left(A^TA\right), |\overline{\mathbf{x}}| = 1\}$
  - El mínimo de $f(\overline{\mathbf{x}})$ sujeto a $|\overline{\mathbf{x}}| = 1$ es $\lambda_{min}\left(A^TA\right)$. Entonces el mínimo de $|T(\overline{\mathbf{x}})|$ es $VS_{min}(A)$ y se alcanza en $m = \{\overline{\mathbf{x}} \in R^m \mid \overline{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{min}}\left(A^TA\right), |\overline{\mathbf{x}}| = 1\}$

ℵ

## 9.4. DVS reducida y Pseudoinversa

DVS reducida

Sea $A \in R^{n\times m}$. Si $A = U\Sigma V^T$ y rango $(A) = r$. Entonces una Descomposición en Valores Singulares reducida (DVSr) de $A$ es:

$$A = U_r\Sigma_rV_r^T \tag{9.5}$$

Siendo $U_r \in R^{n\times r}$,$\Sigma_r \in R^{r\times r}$,$V_r^T \in R^{r\times m}$

ℵ

Pseudoinversa de Moore-Penrose

Se define la **pseudoinversa de Moore-Pensore** como:

$$A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T \tag{9.6}$$

Sea $A \in R^{n \times m}$, se deducen las siguientes propiedades:

- $A^+ = A^\#$ cuando rango $(A) = m$
- $A^+ A = V_r V_r^T = P_{\text{Fil}(A)}$
- $AA^+ = U_r U_r^T = P_{\text{Col}(A)}$

ℵ

# 10. Ecuaciones diferenciales

## 10.1. Wronskiano

Matriz de Wronski

Sea $A = \{f_1, \dots, f_q\}$ funciones definidas en un invervalo $I \subset R$, a valores en $C$, con derivada hasta el orden $q-1$ continua en $I$. La **matriz de Wronski** de $A$ es,para cada $\overline{\mathbf{x}} \in I$

$$M_{w_A}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q(\overline{\mathbf{x}}) \\ f_1'(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q'(\overline{\mathbf{x}}) \\ f_1''(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q''(\overline{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(q-1)}(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q^{(q-1)}(\overline{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \tag{10.1}$$

Se define al **Wronskiano** como:

$$w_A(\overline{\mathbf{x}}) = |M_{w_A}| = \begin{vmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q(\overline{\mathbf{x}}) \\ f_1'(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q'(\overline{\mathbf{x}}) \\ f_1''(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q''(\overline{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(q-1)}(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q^{(q-1)}(\overline{\mathbf{x}}) \end{vmatrix} \tag{10.2}$$

Se deducen las siguientes propiedades:

- Si existe un $\overline{\mathbf{x}}_0 \in I$ tal que $w_A(\overline{\mathbf{x}}_0) \neq 0$, entonces las funciones $f_1, \dots, f_q$ son Linealmente Independientes
- Si un conjunto es Linealmente Dependiente en $I$, su wronskiano es la función nula. La recíproca es falsa; es verdadera solo si las funciones que componen el wronskiano son soluciones de una Ecuación Diferencial lineal de orden superior
- La derivada del wronskiano es el determinante obtenido derivando la última fila.
- La derivada del wronskiano es la suma de $q$ determinantes.

ℵ

## 10.2. Identidad de Abel

**Identidad de Abel**

Sea la ecuación diferencial $y(\overline{\mathbf{x}})^{(n)} + a_{n-1} \cdot y(\overline{\mathbf{x}})^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y'(\overline{\mathbf{x}}) + a_0 \cdot y(\overline{\mathbf{x}}) = 0$ en un intervalo $I \subset R$, sea $S = \{y_1, \ldots, y_n\}$ el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial, y sea $W_s$ el Wronskiano de este conjunto. Entonces se verifica que:

$$W_s'(\overline{\mathbf{x}}) = -a_{n-1} \cdot W_s(\overline{\mathbf{x}}) \tag{10.3}$$

ℵ

## 10.3. Existencia y unicidad de Problemas de Valores Iniciales (PVI)

**Problemas de Valores Iniciales**

Sea el problema $a_n y(\overline{\mathbf{x}})^{(n)} + a_{n-1} \cdot y(\overline{\mathbf{x}})^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y'(\overline{\mathbf{x}}) + a_0 \cdot y(\overline{\mathbf{x}}) = f(\overline{\mathbf{x}})$ sujeto a la condición inigial $y(\overline{\mathbf{x}}_0) = y_0$. La condición de existencia y unicidad de la solución del problema de valores iniciales es:

$$\text{Ecuación diferencial normal en } I : a_n \neq 0, \forall \overline{\mathbf{x}} \in I \tag{10.4}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_0 \in I \tag{10.5}$$

ℵ

## 10.4. Variables separables

**Variables separables**

$$y'(\overline{\mathbf{x}}) = \frac{f(\overline{\mathbf{x}})}{g(y)} \qquad \text{Ecuación diferencial}$$

$$\frac{dy}{d\overline{\mathbf{x}}} = \frac{f(\overline{\mathbf{x}})}{g(y)} \qquad \text{Derivada con diferenciales}$$

$$g(y)dy = f(\overline{\mathbf{x}})d\overline{\mathbf{x}} \qquad \text{Separo las variables}$$

$$G(y) = F(\overline{\mathbf{x}}) + c \qquad \text{Integro}$$

ℵ

## 10.5. Lineales de $1^{er}$ orden

**Lineales de $1^{er}$ orden**

Obtenemos primero la solución general de la homogénea $y_H$ y luego una particular de la no homogénea $y_P$. La solución buscada será $y_G = y_H + y_P$

- La solución de la ecuación homogénea asociada a $y' = p(x)y = 0$ es de variables separables, una solución es $y_H(x) = e^{-\int p(x)dx}$
- La solución no homogénea se obtiene multiplicando toda la ecuación por el factor integrante de Lagrange:

$$u(v) = e^{\int p(x)dx} \tag{10.6}$$

Y la ecuación a resolver será $[u(v) \cdot y(x)]' = u(v) \cdot q(x)$

ℵ

## 10.6. Diferencial exacta

**Diferencial exacta**

Son del tipo $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Es diferencial exacta si existe $f(x,y)$ tal que $df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, es decir si:

$$\frac{df}{dx} = P(x,y) \tag{10.7}$$

$$\frac{df}{dy} = Q(x,y) \tag{10.8}$$

En ese caso, la solución general es $f(x,y) = C$. Se cumple que la ecuación anterior es diferencial exacta si y solo si $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$

Se dice además que $\mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$ si al multiplicar la ecuación por $\mu(x,y)$ la ecuación resulta diferencial exacta.

ℵ

## 10.7. Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

**Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes**

Son del tipo $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)}(t) = 0, \forall t \in I$.

Polinomio característico: $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i^n$

Espectro de la ecuación diferencial: $\sigma(p) = \{\lambda \in C \mid p(\lambda) = 0\}$

$y_H(t) = t^k e^{\lambda t}$ es una solución de la Ecuación diferencial si $\lambda \in \sigma(p)$, con multiplicidad $m$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$

Si la ecuación diferencial es de coeficientes reales, las raíces del polinomio característico aparecerán conjugadas. Es decir: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \jmath\beta$.Luego:

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + \jmath \sin(\beta t)\right)$$
$$y_2(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) - \jmath \sin(\beta t)\right)$$

Entonces, gen$\{y_1, y_2\}$ = gen$\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$

ℵ

## 10.8. Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

**Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes**

Son del tipo $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)}(t) = f(x)$.

La solución es de la forma $y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)$, donde $y_H(x)$ se obtiene del caso anterior, e $y_P(x)$ se obtiene mediante algunos de estos métodos:

- **Método de variación de parámetros:** Aplicable en cualquier caso.

  $y_P(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \cdot y_i(x)$, siendo $y_i(x)$ las soluciones de $y_H(x)$, y $u_i(x)$ las funciones que satisfacen:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{f(x)}{a_n} \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

- **Método de coeficientes indeterminados:** Aplicable cuando $f(x)$ es exponencial, polinómica o trigonométrica.

  Siendo $a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(x)$, con $f(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x) \cdot e^{m_i x}$, $y_P(t) = \sum_{i=1}^{k} q_i(x) \cdot e^{m_i x}$

  - Si $e^{m_k x}$ no es solución de la Ecuación diferencial ordinaria homogénea asociada (i.e. $m_k$ no es solución de $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 =$), $q_k$ es un polinomio de grado $p_k$ con coeficientes a determinar
  - Si $e^{m_k x}$ si es solución de la Ecuación diferencial ordinaria homogénea asociada (i.e. $m_k$ no es solución de $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 =$), $q_k$ es un polinomio de un grado mayor que $p_k$ con coeficientes a determinar
  - Una vez armada la $y_P(t)$ se reemplaza en la ecuación diferencial original, e igualando los términos semejantes se hallan los coeficientes indeterminados.

# 11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X' = AX + B$$

## 11.1. Sistemas homogéneos con $A$ diagonalizable

**Sistemas homogéneos con $A$ diagonalizable**

La solución de $X' = AX + B$, ($A \in K^{n\times n}$, con $\lambda_i$ autovalor de $A$ y $\overline{\mathbf{v}}_i$ autovector de $A$ asociado a $\lambda_i$,es:

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\mathbf{v}}_i e^{\lambda_i t} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \overline{\mathbf{v}}_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \overline{\mathbf{v}}_n e^{\lambda_n t} \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\varphi(t)\in K^{n\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{C} \tag{11.1}$$

## 11.2. Sistemas no homogéneos con $A$ diagonalizable

**Sistemas no homogéneos con $A$ no diagonalizable**

Sea el sistema $X' = AX + B$. La solución es $X_G = X_H + X_P$ con:

- $X_H = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\mathbf{v}}_i e^{\lambda_i t} = \varphi(t)C$
- $X_P = \varphi(t) \cdot u(t)$, siendo $u(t)$ tal que $\varphi(t) \cdot u'(t) = B$

ℵ

## 11.3. Sistemas homogéneos con $A$ no diagonalizable

**Sistemas no homogéneos con $A$ diagonalizable**

Sea el sistema $X' = AX$. Con $A$ no diagonalizable, proponemos una factorización de la forma $A = PJP^{-1}$, donde $J \in C^{n\times n}$ es la **matriz de Jordan** de $A$ que tiene la siguiente estructura en bloques:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

Donde cada bloque $J_i$ es una matriz de $k_i \times k_i$ de la forma:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Para algún autovalor $\lambda_i$ de $A$.

Dado un autovalor $\lambda_i$, su multiplicidad geométrica es el número de bloques de Jordan correspondientes a $\lambda_i$, y su multiplicidad algebraica es la suma de los tamaños de los bloques correspondientes a ese autovalor.

Luego: $X' = AX \underset{\text{X=PY}}{\longrightarrow} PY' = PJP^{-1}PY \longrightarrow Y' = JY$. Resolvemos este sistema y la solución general del problema se expresará como $X(t) = PY(t)$

ℵ

**Sistemas no homogéneos con $A \in R^{2\times 2}$ no diagonalizable**

$A$ necesariamente posee un autovalor doble $\lambda \in R$ de multiplicidad geométrica 1, con lo cual la matriz $J$ posee un solo bloque correspondiente a $\lambda$:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Respecto de la matriz $P = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2]$ debe ser inversible y $AP = PJ$. La matriz $P$ se obtiene hallando un par de vectores $\overline{\mathbf{v}}_1$ y $\overline{\mathbf{v}}_2$ Linealmente Independientes que satisfagan las condiciones $(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_1 = 0$ y $(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1$. Observamos que $\overline{\mathbf{v}}_1$ es autovector de $A$ asociado a $\lambda$

ℵ

**Sistemas no homogéneos con $A \in R^{3\times 3}$ no diagonalizable**

1. $A$ tiene un autovalor triple $\lambda \in R$ de multiplicidad geométrica 1. En este caso:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

   Respecto de $P = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3]$, estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_1 = 0 \tag{11.6}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1 \tag{11.7}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_3 = \overline{\mathbf{v}}_2 \tag{11.8}$$

   Observemos que $\overline{\mathbf{v}}_1$ es autovector de $A$ asociado a $\lambda$

2. $A$ tiene un autovalor triple $\lambda \in R$ de multiplicidad geométrica 2. En este caso:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

   Respecto de $P = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3]$, estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_1 = 0 \tag{11.10}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1 \tag{11.11}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_3 = 0 \tag{11.12}$$

   Observemos que $\overline{\mathbf{v}}_1$ y $\overline{\mathbf{v}}_3$ son autovectores de $A$ asociados a $\lambda$

3. $A$ tiene un autovalor doble $\lambda \in R$ de multiplicidad geométrica 1 y un autovalor $\mu \in R$ simple. En este caso $J$ debe tener dos bloques de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{11.13}$$

   Respecto de $P = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3]$, estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_1 = 0 \tag{11.14}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1 \tag{11.15}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_3 = 0 \tag{11.16}$$

   Observemos que $\overline{\mathbf{v}}_1$ y $\overline{\mathbf{v}}_3$ son autovectores de $A$ asociados a $\lambda$ y $\mu$ respectivamente.

ℵ