



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2015 - 1^{er} Cuatrimestre

ÁLGEBRA II A (61.08)

Resumen de Álgebra II

INTEGRANTE:

Maria Inés Parnisari - 92235
<maineparnisari@gmail.com>

Menéndez, Martín Nicolás - 92830
<menendez91@live.com.ar>

Índice

1. Matrices	3
1.1. Propiedades generales	3
1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta	3
1.3. Propiedades de los determinantes	4
1.4. Subespacios fila, columna y null	4
2. Espacios vectoriales	6
2.1. Propiedades de los subespacios	6
2.2. Independencia lineal	6
2.3. Operaciones con subespacios	6
2.4. Bases	7
2.5. Coordenadas de un vector en una base	7
2.6. Matriz de cambio de base	7
2.7. Teorema de la dimensión	7
3. Producto interno	8
3.1. Axiomas	8
3.2. Producto interno canónico	8
3.3. Definiciones	8
3.4. Matriz asociada al producto interno	10
4. Proyecciones y matrices de proyección	11
4.1. Propiedades de la proyección	11
4.2. Proyección y reflexión	11
4.2.1. Proyección y transformaciones lineales	12
4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales	12
4.3. Matriz de Householder	13
4.4. Rotaciones en R^3	13
4.5. Proceso de Gram-Schmidt	13
4.6. Matrices de proyección	14
4.7. Inversas y pseudoinversas	14
4.8. Cuadrados mínimos	15
4.8.1. Norma mínima	15
4.9. Regresión lineal	16
5. Transformaciones lineales	16
5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales	16
5.2. Núcleo e Imágen	16
5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales	17
5.3.1. Monomorfismo(Inyectividad)	17
5.3.2. Epimorfismo(Sobreyectividad)	17
5.3.3. Isomorfismo(Biyectividad)	18
5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal	18
5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales	19
5.6. Composición de Transformaciones lineales	19
5.7. Operadores lineales	19
6. Autovalores y Autovectores	20
6.1. Definiciones básicas	20
6.2. Autovalores complejos de matriz real	20
6.3. Multiplicidad geométrica y algebraica de un Autovalor	20
6.4. Propiedades	21
6.5. Autovalores y Autovectores de operadores lineales	21

6.6.	Diagonalización	22
6.6.1.	Matrices trivialmente diagonalizables	22
6.6.2.	Propiedades	23
6.6.3.	Diagonalización de transformaciones lineales	23
7.	Matrices hermíticas y simétricas	23
7.1.	Diagonalización	23
7.2.	Descomposición espectral	25
7.3.	Subespacios invariantes por una transformación lineal	25
8.	Formas cuadráticas	25
8.1.	Clasificación	26
8.2.	Optimización restringida	27
9.	Descomposición en Valores Singulares (DVS)	27
9.1.	Definición	27
9.2.	Subespacios de las DVS	28
9.3.	Propiedades de las DVS	29
9.4.	DVS reducida y Pseudoinversa	29
10.	Ecuaciones diferenciales	30
10.1.	Wronskiano	30
10.2.	Identidad de Abel	31
10.3.	Existencia y unicidad de Problemas de Valores Iniciales (PVI)	31
10.4.	Variables separables	31
10.5.	Homogéneas	31
10.6.	Lineales de 1 ^{er} orden	31
10.7.	Diferencial exacta	31
10.8.	Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes	31
10.9.	Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes	32
11.	Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales	32
11.1.	Sistemas homogéneos con A diagonalizable	32
11.2.	Sistemas no homogéneos con A diagonalizable	32
11.3.	Sistemas homogéneos con A no diagonalizable	32
11.3.1.	Caso A 2x2	32
11.3.2.	Caso A 3x3	32

1. Matrices

1.1. Propiedades generales

Propiedades de matrices

Dadas las matrices A, B, C se tiene que:

- $A + B = B + A$
- $A + (-A) = 0_n$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $A(BC) = (AB)C$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- $A + 0_n = A$
- $A0_n = 0_n$

N

1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta

Propiedades de matrices

Dadas las matrices A, B, C se tiene que:

Propiedades de la inversa:

- $(A^{-1})^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{A^{-1}}{\alpha}, \alpha \neq 0$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$

Propiedades de la traza:

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

N

1.3. Propiedades de los determinantes

Propiedades de determinantes

Sean $A, B \in R^{n \times m}$

$$|A^T| = |A| \quad (1.1)$$

$$|AB| = |A| |B| \quad (1.2)$$

Si B la obtengo de sumar k veces una fila de A sobre otra:

$$|B| = |A| \quad (1.3)$$

Si B la obtengo de intercambiar k veces las fila de A :

$$|B| = (-1)^k |A| \quad (1.4)$$

Si B la obtengo de multiplicar por k , n veces las filas de A :

$$|B| = k^n |A| \quad (1.5)$$

Si A es una matriz triangular:

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} \quad (1.6)$$

⌘

1.4. Subespacios fila, columna y null

Espacio fila, columna y nulo de matrices

Sean $A \in R^{n \times m}$, $B \in R^{r \times n}$, se define:

- **Espacio Fila:** $\text{Fif}(A) = \{x \in R^m | x \text{ es combinación lineal de las filas de } A\}$
- **Espacio Columna:** $\text{Col}(A) = \{b \in R^n | Ax = b \text{ para alguna } x\}$
- **Espacio nulo:** $\text{Nul}(A) = \{x \in R^m | Ax = 0\}$

⌘

Propiedades de los espacios definidos

Propiedades:

$$\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A) = \text{Fil}(A)^\perp \quad (1.7)$$

$$\text{Nul}(A^T) = \text{Nul}(A A^T) = \text{Col}(A)^\perp \quad (1.8)$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T A) \Rightarrow A^T A \quad (1.9)$$

$$\text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Fil}(A)) \quad (1.10)$$

$$\text{Col}(A) \otimes \text{Col}(A)^\perp = R^n \quad (1.11)$$

$$\text{Fil}(A) \otimes \text{Fil}(A)^\perp = R^m \quad (1.12)$$

$$\text{rango}(A) + \dim \text{Nul}(A) = m \quad (1.13)$$

$$\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B), \text{ Iguales si } \text{rango}(A) = n \quad (1.14)$$

$$\text{Nul}(A) \subseteq \text{Nul}(BA), \text{ Iguales si } \text{rango}(B) = n \quad (1.15)$$

$$\text{Si } \text{rango}(A) = n \Rightarrow \text{rango}(BA) = \text{rango}(B) \quad (1.16)$$

$$\text{Si } \text{rango}(B) = n \Rightarrow \text{rango}(BA) = \text{rango}(A) \quad (1.17)$$

$$\text{Col}(A)^\perp \text{Col}(B) \Leftrightarrow A^T B = 0 \quad (1.18)$$

De (1.15) se ve que $A^T A$ invertible $\longleftrightarrow A$ invertible



Matrices equivalentes

Dos matrices A y B son equivalentes si existen otras dos matrices E y F regulares tal que:

$$A = EBF \quad (1.19)$$

Dos matrices equivalentes pueden pensarse como dos descripciones de una misma Transformación Lineal, pero con respecto a bases distintas.



Matrices semejantes

Dos matrices cuadradas A y B son semejantes (notamos $A \sim B$) si y solo si existe una matriz P invertible tal que:

$$B = P^{-1}AP, \text{ y } \quad (1.20)$$

$$A = PBP^{-1} \quad (1.21)$$



Propiedades de matrices semejantes

Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de un mismo operador lineal, pero con respecto a bases distintas. Estas dos matrices cumplen que:

$$|A| = |B| \quad (1.22)$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \quad (1.23)$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) \quad (1.24)$$

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B) \quad (1.25)$$



2. Espacios vectoriales

2.1. Propiedades de los subespacios

Propiedades de los subespacios

S es un subespacio vectorial del espacio V_K si y solo si:

$$0_V \in S \quad (2.1)$$

$$(\alpha X + Y) \in S, \forall X, Y \in V \text{ y } \forall \alpha \in K \quad (2.2)$$

⌘

2.2. Independencia lineal

Combinación lineal

El vector \bar{x} es una combinación lineal de $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ si:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (2.3)$$

Y si a_1, \dots, a_n no son todos nulos.

⌘

Independencia lineal

\bar{x} es **linealmente independiente** si:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0, \text{ y} \quad (2.4)$$

$$a_i = 0 \forall i \quad (2.5)$$

Dos vectores son **linealmente dependientes** si son proporcionales. Un subconjunto de un conjunto linealmente dependiente sigue siendo linealmente dependiente

⌘

2.3. Operaciones con subespacios

Operaciones con subespacios

- **Intersección:** $S = \bigcap_{i=1}^n S_i = \{\bar{x} \in V | \bar{x} \in S_i, \forall i = 1, \dots, n\}$

- **Suma:** $S = \sum_{i=1}^n S_i = \text{gen} \left\{ \bigcup_{i=1}^m B_i \right\}$, donde B_i es una base de S_i

- **Unión:** $S = S_1 \cup S_2$ es un subespacio cuando $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$

- **Suma directa:** S_1, \dots, S_k están en suma directa \iff la unión de sus bases es base de V

Dos subespacios son **suplementarios** cuando están en suma directa y su suma es todo el espacio.

⌘

2.4. Bases

Bases

Si $\text{Dim}(V) = n$, $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ es base de V si y solo si:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ genera } V \quad (2.6)$$

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ son linealmente independientes} \quad (2.7)$$



2.5. Coordenadas de un vector en una base

Coordenadas de un vector en una base

Si $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ es base de un espacio vectorial B y $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i$, entonces $C_B(\bar{x}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Dado un vector y una base, las coordenadas de ese vector en esa base son únicas.

$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V$ y $\forall k \in K$:

$$C_B(v + w) = C_B(v) + C_B(w) \quad (2.8)$$

$$C_B(k \times v) = k \times C_B(v) \quad (2.9)$$

Finalmente $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ son linealmente independientes $\iff \{C_B(\bar{v}_1), \dots, C_B(\bar{v}_n)\}$ lo son para cualquier base de B .



2.6. Matriz de cambio de base

Matriz de cambio de base

Sean $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ y $C = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ bases del espacio V . Las matrices de cambio de base son:

$$C_{BC} = \begin{bmatrix} C_C(\bar{v}_1) & C_C(\bar{v}_2) & \dots & C_C(\bar{v}_n) \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$C_{CB} = \begin{bmatrix} C_B(\bar{w}_1) & C_B(\bar{w}_2) & \dots & C_B(\bar{w}_n) \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C_{BC}^{-1} \quad (2.11)$$

Si B y C son bases ortonormales, entonces C_{BC} es una matriz ortogonal.



2.7. Teorema de la dimensión

Teorema de la dimensión

Dados los subespacios S, H y T :

$$\text{Dim}(S + H) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) - \text{Dim}(S \cap H) \quad (2.12)$$

$$\text{Dim}(S + H + T) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(S \cap (H + T)) - \text{Dim}(H \cap T) \quad (2.13)$$



3. Producto interno

3.1. Axiomas

Axiomas del producto interno

Sea $\langle, \rangle: V_K \times V_K \rightarrow R$ un producto interno:

1. $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$ y $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$
2. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\overline{\bar{y}}, \bar{x})$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$
3. $(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \overline{\lambda}(\bar{x}, \bar{y})$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
4. $(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
5. $(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{z})$, $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$
6. $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$, $(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$

N

3.2. Producto interno canónico

Producto interno canónico

Se definen los siguientes productos internos para los siguientes espacios vectoriales:

- **Vectores reales:** $R^n : (\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T \bar{y}$
- **Vectores complejos:** $C^n : (\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^H \bar{y}$
- **Matrices reales:** $R^{n \times m} : (A, B) = \text{tr}(A^T B)$
- **Matrices complejas:** $C^{n \times m} : (A, B) = \text{tr}(A^H B)$
- **Funciones reales:** $P_R[a, b] : (p, q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$
- **Funciones complejas:** $P_C[a, b] : (p, q) = \int_a^b \overline{p(t)}q(t)dt$

N

3.3. Definiciones

Ortogonalidad

Dados \bar{x}, \bar{y} :

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} \perp \bar{y} \quad (3.1)$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

N

norma de un vector

Se define la norma de un vector como:

$$|\bar{x}|^2 = (\bar{x}, \bar{x}) \quad (3.2)$$

La **norma de un vector** depende del producto interno, pero cumple las siguientes propiedades:

- $|\bar{x}| \in \mathbb{R} \forall \bar{x} \in V$
- $|\bar{x}| \geq 0$ ($|\bar{x}| = 0 \iff \bar{x} = 0$)
- $|k \cdot \bar{x}| = |k| \cdot |\bar{x}|$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**

$$|(\bar{x}, \bar{y})| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|, \quad x, y \in V_K \quad (3.3)$$

La igualdad se cumple si $\bar{x} \parallel \bar{y}$

- **Desigualdad triangular:**

$$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}| \quad (3.4)$$

- **Teorema de pitágoras:** Si $\bar{x} \perp \bar{y}$ entonces:

$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 \quad (3.5)$$

La recíproca solo vale para \mathbb{R}

- **Identidad del paralelogramo:**

$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 + |\bar{x} - \bar{y}|^2 = 2(|\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2), \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad (3.6)$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

**Ángulo entre dos vectores**

Dado \bar{x}, \bar{y} :

$$\cos(\theta) = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|} \quad (3.7)$$

Con $\theta \in [0, \pi]$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \neq 0$ para espacios vectoriales reales con producto interno.

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

**Complemento ortogonal**

Sea $A \subset V_K \cdot A^\perp = \{\bar{x} \in V_K | (\bar{x}, \bar{y}) = 0, \forall \bar{y} \in A\}$

Para el cálculo del complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita, alcanza con exigir la ortogonalidad a un sistema de generadores

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.



Distancia entre vectores

Dados $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$, se define la función distancia como:

$$d : V_R \times V_R \rightarrow R^+ : d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}| = |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}| \quad (3.8)$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

N

3.4. Matriz asociada al producto interno**Matriz de producto interno**

Sea $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_k\}$ base de V_K . Entonces $G \in K^{k \times k}$, $g_{ij} = (\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_j)$ es la matriz de producto interno:

$$G = \begin{bmatrix} |\bar{\mathbf{v}}_1|^2 & \dots & (\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{\mathbf{v}}_k, \bar{\mathbf{v}}_1) & \dots & |\bar{\mathbf{v}}_k|^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Si B es base de V_K y G es la matriz del producto interno en esa base, entonces $\forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in V$:

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = C_B^H(\bar{\mathbf{x}}) \cdot G \cdot C_B(\bar{\mathbf{y}}) \quad (3.10)$$

N

Propiedades de la matriz de producto interno

Dada la matriz G de producto interno se tiene que:

$$g_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, k \quad (3.11)$$

$$G^H = G \quad (3.12)$$

$$G \text{ es definida positiva} \quad (3.13)$$

$$\exists G^{-1} \quad (3.14)$$

$$G \text{ de una Base Ortogonal (BOG) es una matriz diagonal} \quad (3.15)$$

$$G \text{ de una Base Ortonormal (BON) es una matriz identidad} \quad (3.16)$$

N

4. Proyecciones y matrices de proyección

4.1. Propiedades de la proyección

Propiedades de la proyección

Sea $S \subset V$ y S^\perp su complemento ortogonal, entonces $\forall \bar{x} \in V$:

$$\bar{x} = \underbrace{\bar{u}}_{\in S} + \underbrace{\bar{v}}_{\in S^\perp} = P_S(\bar{x}) + P_S^\perp(\bar{x}) \quad (4.1)$$

Se definen las siguientes propiedades:

- $P_S(\bar{x})$ es el vector de S mas próximo a \bar{x}
- $P_S(\bar{v}) = \bar{v} \iff \bar{v} \in S$ y además $P_S(\bar{w}) = 0 \iff \bar{w} \in S^\perp$
- Por pitágoras: $|\bar{x}|^2 = |P_S(\bar{x})|^2 + |P_S^\perp(\bar{x})|^2, \forall x \in V$
- $|P_S(\bar{x})| \leq |\bar{x}|$. Si $|P_S(\bar{x})| = |\bar{x}|$ entonces $\bar{x} \in S$
- $d(\bar{x}, S) = |P_S^\perp(\bar{x})|$
- $d(\bar{x}, S^\perp) = |P_S(\bar{x})|$

⌘

4.2. Proyección y reflexión

Proyección y reflexión

Sea S un subespacio de V , y $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ una base ortogonal (BOG) de S . Entonces $\forall \bar{x} \in V$:

$$P_S(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k \frac{(\bar{v}_i, \bar{x})}{(\bar{v}_i, \bar{v}_i)} \bar{v}_i \quad (4.2)$$

$$R_S(\bar{x}) = 2P_S(\bar{x}) - \bar{x} = 2P_S(\bar{x}) - (P_S(\bar{x}) + P_S^\perp(\bar{x})) = P_S(\bar{x}) - P_S^\perp(\bar{x}) = \bar{x} - 2P_S^\perp(\bar{x}) \quad (4.3)$$

⌘

4.2.1. Proyección y transformaciones lineales

Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea $T : V_K \rightarrow V_K$ una transformación lineal tal que:

$$\text{Im}(P_S) = S \quad (4.4)$$

$$\text{Nul}(P_S) = S^\perp \quad (4.5)$$

Y sea $B = \{\underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q}_{\in S}, \underbrace{\bar{v}_{q+1}, \dots, \bar{v}_n}_{\in S^\perp}\}$ una base de V , entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[P_S]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecta, y tantos 0 como la dimensión del complemento ortogonal.

Nota: La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

N

4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales

Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea $T : V_K \rightarrow V_K$ una transformación lineal tal que:

$$T(\bar{v}) = \bar{v}, \forall \bar{v} \in S \quad (4.7)$$

$$T(\bar{v}) = -\bar{v}, \forall \bar{v} \in S^\perp \quad (4.8)$$

Y sea $B = \{\underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q}_{\in S}, \underbrace{\bar{v}_{q+1}, \dots, \bar{v}_n}_{\in S^\perp}\}$ una base de V , entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & & -1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecta, y tantos -1 como la dimensión del complemento ortogonal.

Nota: La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

N

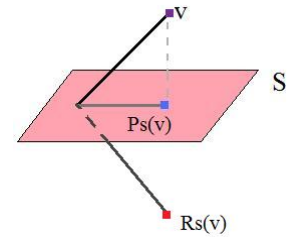


Figura 4.1: Proyección y reflexión

4.3. Matriz de Householder

Propiedades de la proyección

La matriz de reflexión sobre un subespacio de dimensión $n - 1$ que es ortogonal a un vector $\bar{\mathbf{w}}$ en un espacio de dimensión n se puede obtener mediante la expresión:

$$H = I_d - 2 \frac{\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}^T}{\bar{\mathbf{w}}^T \cdot \bar{\mathbf{w}}} \quad (4.10)$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- Es involutiva: $H \circ H = I_d$
- Es simétrica: $H^T = H$
- Es inversible: $\exists H^{-1}$ y $\exists H^{-1} = H$
- Es ortogonal: $H^T H = H H^T = I_d$

N

4.4. Rotaciones en R^3

Rotaciones en R^3

Sea $B = \{\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3\}$ una Base Ortonormal (BON) de R^3 y sea T la rotación θ grados alrededor del eje v_i :

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_1 : [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_2 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\text{Rotación sobre } \bar{\mathbf{v}}_3 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

N

4.5. Proceso de Gram-Schmidt

Proceso de Gram-Schmidt

Dada una base $\{\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_p\}$ para un subespacio $W \in R^n$ defina:

1. $\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1$
2. $\bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{x}}_2 - \frac{\bar{\mathbf{x}}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1}{\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1} \bar{\mathbf{v}}_1$
3. $\bar{\mathbf{v}}_p = \bar{\mathbf{x}}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\bar{\mathbf{x}}_p \cdot \bar{\mathbf{v}}_i}{\bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{v}}_i} \bar{\mathbf{v}}_i$

Entonces $\{\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p\}$ es una Base Ortogonal (BOG) de W .

Si luego se divide a cada componente por la norma de la base se obtiene una Base Ortogonal (BON) de W .

N

4.6. Matrices de proyección

Matriz de proyección

Utilizando el producto interno canónico de sobre K^n , con $K = R$ o $K = C$.

$P \in K^{n \times n}$ es una matriz de proyección si y solo si:

$$P^2 = P \quad (4.15)$$

$$P^H = P \quad (4.16)$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- $\text{Col}(P) = \text{Nul}(P)^\perp$
- $P \cdot y = y \iff y \in \text{Col}(P)$
- Si P_S es matriz de proyección sobre S y P_S^\perp es matriz de proyección sobre S^\perp entonces $P_S + P_S^\perp = I_d$
- Las columnas de P son una base del espacio sobre el cual proyectan
- $\text{rango}(P) = \text{tr}(P)$
- $\det P \neq 0$ si $P \neq I_d$
- Si P_1 y P_2 son matrices de proyección y $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$, entonces $P_1 + P_2$ es matriz de proyección y $\text{rango}(P_1 + P_2) = \text{rango}(P_1) + \text{rango}(P_2)$

Obtención de la matriz de proyección:

1. Sea Q una matriz cuyas columnas son una Base Ortonormal (BON) de $S \subset V$. Entonces la única matriz de proyección sobre S es $[P_S] = Q \cdot Q^T$. La matriz de proyección sobre S^\perp es $[P_S^\perp] = I_d - [P_S]$
2. Sea $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q\}$ una base de S , y A la matriz que tiene por columnas a $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q$. Entonces la única matriz de proyección sobre S se obtiene mediante $[P_S] = A (A^H A)^{-1} A^H = AA^\#$

N

4.7. Inversas y pseudoinversas

Propiedades de la pseudoinversa

Sea $A \in K^{n \times q} | \text{rango}(A) = q$. La matriz pseudoinversa de A es $A^\# = (A^H A)^{-1} A^H$:

- Si A es cuadrada invertible, $A^{-1} = A^\#$
- $A^\# \in R^{q \times n}$
- $A^\# A = I_{d(q)}$
- $AA^\# = [P]_{\text{Col}(A)}$
- $\text{Nul}(AA^\#) = [\text{Col}(A)]^\perp$

N

4.8. Cuadrados mínimos

Cuadrados mínimos

Sea $A \in K^{n \times q}$, $\bar{x} \in K^q$, $\bar{b} \in R^n$. Si $Ax = b$ tiene una solución exacta, entonces $\bar{b} \in \text{Col}(A)$. Si $b \notin \text{Col}(A)$, intentamos hallar una solución $\hat{x} \in K^q$ (la solución por **cuadrados mínimos**) tal que:

- $\|A\hat{x} - \bar{b}\| < \|A\bar{u} - \bar{b}\|, \forall \bar{u} \in K^q$
- $d(A\hat{x}, \bar{b}) \leq d(A\bar{u}, \bar{b}), \forall \bar{u} \in K^q$
- $\|A\hat{x}\| \leq \|\bar{b}\|$ (Son iguales si $\bar{b} \in \text{Col}(A)$)
- Ecuaciones normales de cuadrados mínimos: $A^T A \hat{x} = A^T \bar{b}$
- $A\hat{x} = \hat{b} = P_{\text{Col}(A)}(\bar{b})$ si y solo si:

$$A\hat{x} \in \text{Col}(A) \quad (4.17)$$

$$\bar{b} - A\hat{x} \in \text{Col}(A)^\perp \quad (4.18)$$

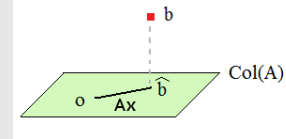


Figura 4.2: Cuadrados mínimos

Propiedades de Cuadrados mínimos

1. Si $\hat{x} = 0$ entonces $\bar{b} \in [\text{Col}(A)]^\perp$. La recíproca solo es cierta si A es invertible.
2. Si las columnas de A son linealmente independientes, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{b} = A^\# \bar{b} \quad (4.19)$$

Si las columnas de A son linealmente dependientes, el sistema $A^T A \hat{x} = A^T b$ tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma $\hat{x} = \hat{x}_p + \underbrace{\hat{x}_n}_{\in \text{Nul}(A)}$

3. Si $\bar{b} \in \text{Col}(A)$, entonces toda solución de $A\bar{x} = \bar{b}$ es una solución exacta y por cuadrados mínimos
4. El error de aproximación ϵ es igual a $\|\bar{b} - \hat{b}\|$

4.8.1. Norma mínima

Pseudoinversa de Moore-Penrose

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima pertenece al espacio $\text{Fil}(A)$ y se obtiene como:

$$\tilde{x} = A^+ \bar{b} \quad (4.20)$$

Siendo A^+ la **pseudoinversa de Moore-Penrose** de A .

4.9. Regresión lineal

Regresión lineal

Sean los puntos $\bar{\mathbf{P}}_i = (x_i, y_i)$ con $i = 1, 2, \dots, n$. La recta que mejor aproxima a los puntos es:

$$\bar{y} = \alpha_0 \bar{\mathbf{1}} + \alpha_1 \bar{\mathbf{x}} \quad (4.21)$$

Y los coeficientes α_i se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Si se aproxima por una parábola se agrega otro nivel de complejidad, con $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$, lo que implica una columna adicional a la matriz para los términos cuadráticos, una fila adicional para la constante α_2 en la variable.

Se siguen agregando columnas a la matriz y filas al vector tantas veces como grados de complejidad se necesiten.

⌘

5. Transformaciones lineales

Sea $T \in \ell(V_K, W_K)$ y $A = [T]_{BC}$ con B base de V y C base de W la matriz de T .

5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales

Condiciones para ser Transformación lineal

Para que una transformación se considere lineal debe cumplir:

1. $T(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) = T(\bar{\mathbf{u}}) + T(\bar{\mathbf{v}})$, con $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in V$
2. $T(\alpha \bar{\mathbf{u}} + \beta \bar{\mathbf{v}}) = \alpha \cdot T(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \cdot T(\bar{\mathbf{v}})$, con $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in V_K$ y $\alpha, \beta \in K$
3. $T(0_{V_K}) = 0_{W_K}$

⌘

5.2. Núcleo e Imágen

Núcleo e Imágen

Núcleo: $\text{Nul}(T) = \{\bar{\mathbf{v}} \in V_K \mid T(\bar{\mathbf{v}}) = 0_W\} = C_B^{-1}(\text{Nul}(A)).$

Imágen: $\text{Im}(T) = \{\bar{\mathbf{w}} \in W_K \mid T(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{w}} \text{ con } \bar{\mathbf{v}} \in V_K\} = C_C^{-1}(\text{Col}(A)).$

Ambos son subespacios vectoriales.

La imágen de una Transformación Lineal puede obtenerse como lo que generan los transformados de una base del espacio de partida.

⌘

Teorema de la dimensión

Sea $T \in \ell(V, W)$ y sea $\text{Dim}(V) = n$ (finita). Entonces:

$$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(\text{Nul}(T)) + \text{Dim}(\text{Im}(T)) \quad (5.1)$$

**5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales****5.3.1. Monomorfismo(Inyectividad)****Monomorfismo**

Una Transformación lineal es inyectiva si verifica:

$$\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2 \Rightarrow T(\bar{v}_1) \neq T(\bar{v}_2), \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \quad (5.2)$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \iff \text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{Dim}(V) \quad (5.3)$$

Una Transformación Lineal Inyectiva transforma conjuntos Linealmente Independientes a conjuntos Linealmente Independientes.

La recíproca también es cierta: si A es un conjunto Linealmente Independiente y es transformado en otro conjunto Linealmente Independiente, la Transformación Lineal es inyectiva. Es decir: Si T es inyectiva y A es Linealmente Independiente, $T(A)$ es Linealmente Independiente.

Las matrices asociadas a Transformaciones Lineales inyectivas tienen sus columnas Linealmente Independientes.

Si $\text{Dim}(V) > \text{Dim}(W)$, T no puede ser inyectiva.

**5.3.2. Epimorfismo(Sobreyectividad)****Epimorfismo**

Una Transformación lineal es sobreyectiva si y solo si:

$$\text{Im}(T) = W \quad (5.4)$$

Las matrices asociadas a Transformaciones lineales sobreyectivas tienen sus filas Linealmente Independientes.

Si $\text{Dim}(W) > \text{Dim}(V)$, T no puede ser sobreyectiva.



5.3.3. Isomorfismo(Biyectividad)

Biyectividad

Una Transformación lineal es biyectiva si y solo si:

$$\text{Dim}(W) = \text{Dim}(V) \quad (5.5)$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \quad (5.6)$$

Es decir, si es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez.

T es biyectiva \iff si $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ es base de $V \Rightarrow \{T(\bar{v}_1), \dots, T(\bar{v}_n)\}$ es base de W

La matriz asociada a una Transformación lineal biyectiva tiene sus filas y columnas Linealmente Independientes, o sea que es una matriz inversible, es decir, existe una transformación lineal inversa $T^{-1} = [T]^{-1}$

Si $\text{Dim}(V) = \text{Dim}(W)$, entonces o bien T es inyectiva y sobreyectiva, o no es ninguna de las dos.

N

5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal

Matriz de la Transformación lineal

Sea $T \in \ell(V_K, W_K)$, sea $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q\}$ base de V y $C = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ base de W . Entonces T se puede escribir como $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, con $A \in K^{m \times q}$ tal que:

$$A = [T]_{BC} = \begin{bmatrix} C_C(T(\bar{v}_1)) & C_C(T(\bar{v}_2)) & \dots & C_C(T(\bar{v}_q)) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Dicha matriz posee las siguientes propiedades:

- $[T]_{BC} \cdot C_B(\bar{v}) = C_C(T(\bar{v})), \forall \bar{v} \in V$
- $\bar{v} \in \text{Nul}(T) \iff C_B(\bar{v}) \in \text{Nul}(A)$
- $\bar{w} \in \text{Im}(T) \iff C_C(\bar{w}) \in \text{Col}(A)$
- $\text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{rango}(A)$

N

Teorema para matrices de Transformación lineal

Sean V y W K -espacios vectoriales ($K = R$ o C). Sea $T : V \rightarrow W$.

Si B_1 y B_2 son bases ordenadas de V , y C_1 y C_2 son bases ordenadas de W , entonces:

$$\text{rango}([T]_{B_1 C_1}) = \text{rango}([T]_{B_2 C_2}) \quad (5.8)$$

N

5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

Sea $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de V y $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$ vectores de W . Entonces existe y es única la Transformación lineal que verifica:

$$T(\bar{v}_i) = \bar{w}_i, \forall i = 1, \dots, n \quad (5.9)$$

Además, dada una Transformación lineal y un par de bases, existe una única matriz asociada.

La recíproca también es verdadera: dada una matriz y un par de bases, existe una única Transformación lineal asociada.



5.6. Composición de Transformaciones lineales

Composición de Transformaciones lineales

Sea $f \in \ell(V, W)$ y $g \in \ell(W, H) \Rightarrow g \circ f \in \ell(V, H)$. Podemos encontrar la siguientes propiedades:

$$\text{Nul}(f) \subseteq \text{Nul}(g \circ f) \quad (5.10)$$

$$\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g) \quad (5.11)$$

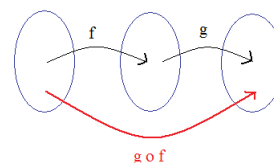


Figura 5.1: Composición

5.7. Operadores lineales

Operadores lineales

Un operador lineal es una Transformación lineal que va de un espacio en si mismo, se escribe como $T \in \ell(V)$ y cuenta con las siguientes propiedades:

- Si $T_1 \in \ell(V)$ y $T_2 \in \ell(V)$, entonces $T_1 \circ T_2 \in \ell(V)$
- Si $T \in \ell(V)$, $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ veces}}$



6. Autovalores y Autovectores

6.1. Definiciones básicas

Definiciones básicas

Autovector: Un vector $\bar{v} \neq 0$ es autovector de $A \in K^{n \times n} \iff \exists \lambda \in K \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}$

Autoespacio: El autoespacio de A asociado a un autovalor λ es $S_\lambda(A) = \text{Nul}(A - \lambda I)$

Polinomio característico: El polinomio característico de una matriz $A \in K^{n \times n}$ es $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$, y tiene grado n . Si $K = \mathbb{R}$ el polinomio tiene a lo sumo n raíces. Si $K = \mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces.

Autovalor: Los autovalores λ de una matriz son las raíces de su polinomio característico.

Espectro de una matriz: $\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ es autovalor de } A\}$.



6.2. Autovalores complejos de matriz real

Autovalores complejos

Supongamos que \bar{v} es un autovector de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ asociado a $\lambda = a + jb$ con $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Entonces \bar{v}^* es también un autovector de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ asociado a $\lambda^* = a - jb$.

En particular si $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ es una base de S_λ , entonces $\{\bar{v}_1^*, \dots, \bar{v}_n^*\}$ es una base de S_{λ^*}



6.3. Multiplicidad geométrica y algebraica de un Autovalor

Multiplicidad de Autovalores

Se define:

- $m_g(\lambda) = \text{Dim}(S_\lambda(A))$
- $m_a(\lambda) \doteq$ número de veces que aparece λ como raíz del polinomio característico.

Siempre se verifica que:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad (6.1)$$



6.4. Propiedades

Propiedades de Autovalores y Autovectores

Sea $A \in K^{n \times n}$:

- A es singular $\iff 0$ es un autovalor de $A \iff m_g(0) = n - k \iff \text{rango}(A) = k < n$
- Dos autovectores asociados a autovalores distintos son Linealmente Independientes
- Si $A \in K^{2 \times 2}$, entonces $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A|$
- Si todas las filas o columnas de A sumas s , entonces s es autovalor de A .
- Sea $p(t)$ un polinomio de grado k . Si λ es autovalor de A , entonces se cumple que $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$, y para cada autovalor μ de $p(A)$ existe un autovalor λ de A tal que $p(\lambda) = \mu$.
- Si λ es autovalor de A :
 - λ es autovalor de A^T
 - λ^{-1} es autovalor de A^{-1} y $S_{\lambda^{-1}}(A^{-1}) = S_\lambda(A)$
 - $r \cdot \lambda$ es autovalor de $r \cdot A$
 - λ^k es autovalor de A^k , con $k \in \mathbb{N}$
 - $\lambda + r$ es autovalor de $A + r \cdot I$

⌘

6.5. Autovalores y Autovectores de operadores lineales

Autovalores y Autovectores de Operadores lineales

$T : V_K \rightarrow V_K$. Un vector $\bar{v} \neq \bar{0}$ es autovector de $T \iff T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$, con λ autovalor de T .

$S_\lambda(T) = \{\bar{x} \in V \mid T(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \text{ y } \lambda \text{ autovalor de } T\} = \text{Nul}(T - \lambda I)$. Si B es base de V y A es la matriz de T en esa base, entonces:

$$\sigma(A) = \sigma(T) \forall B \text{ base de } V \quad (6.2)$$

$$\bar{x} \text{ es autovector de } T \iff C_B(\bar{x}) \text{ es autovector de } [T]_B = A \quad (6.3)$$

Se deducen las siguientes propiedades:

- $T(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Rightarrow T^n(\bar{x}) = \lambda^n \bar{x}, n \in \mathbb{N}$
- Si λ es autovalor de T , λ^{-1} es autovalor de T^{-1}
- Si h es un polinomio en K y $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, entonces:

$$\sigma[h(A)] = h[\sigma(A)] \quad (6.4)$$

$$S_{h(\lambda)}h(A) = S_\lambda(A) \quad (6.5)$$

- $T : V_K \rightarrow V_K$ es regular $\iff 0 \notin \sigma(T)$

⌘

6.6. Diagonalización

Diagonalización

Los siguientes enunciados son equivalentes para definir si $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable:

- $A \sim D$
- \exists una base de K^n compuesta por autovectores de A
- A tiene n autovalores Linealmente Independientes
- $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) \forall \lambda \in \sigma(A)$
- $\exists P$ invertible y D diagonal tal que:

$$A = PDP^{-1} \quad (6.6)$$

Siendo P la matriz de autovectores y D la matriz diagonal de autovalores.

⌘

6.6.1. Matrices trivialmente diagonalizables

Diagonalizaciones triviales

- **Matriz nula:**
 - Autovalores: 0
 - Autovectores: Cualquier vector no nulo
- **Matriz identidad:**
 - Autovalores: 1
 - Autovectores: Cualquier vector no nulo
- **Matriz diagonal:**
 - Autovalores: a_{ii} , los elementos de la diagonal
 - Autovectores: Los que tienen sus componentes nulas, excepto la n -ésima.
- **Matriz escalar:**
 - Autovalores: $k \in R$
 - Autovectores: Cualquier vector no nulo
- **Matriz de proyección:**
 - Autovalores: 1 con $m_a(1) = m_g(1) = \text{Dim}(S)$ y 0 con $m_a(0) = m_g(0) = \text{Dim}(S^\perp)$
 - Autovectores: Los vectores de S asociados a 1 y los asociados a S^\perp a 0
- **Matriz de reflexión:**
 - Autovalores: 1 con $m_a(1) = m_g(1) = \text{Dim}(S)$ y -1 con $m_a(0) = m_g(0) = \text{Dim}(S^\perp)$
 - Autovectores: Los vectores de S asociados a 1 y los asociados a S^\perp a -1

⌘

6.6.2. Propiedades

Propiedades de la diagonalización

- Si A es diagonalizable entonces A^n es diagonalizable ($D_A^n = D_{A^n}$ y $\sigma(A^n) = \sigma^n(A)$). La recíproca es falsa
- Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tiene n autovalores distintos entonces A es diagonalizable. La recíproca es falsa
- $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i = p_A(0)$
- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

N

6.6.3. Diagonalización de transformaciones lineales

Diagonalización de Transformaciones Lineales

Los siguientes enunciados son equivalentes para decir que $T \in \ell(V_K)$ con $\text{Dim}(V_K) = n$, es diagonalizable:

- $\exists B$ base de V_K tal que $[T]_B$ es diagonal
- $\exists B$ base de V_K formada por autovectores de T
- T tiene n autovectores Linealmente Independientes

Esa base B y $[T]_B = \text{diag}(\sigma(T))$.

Si $A = [T]_H$, H cualquiera base, entonces T es diagonalizable si y solo si A es diagonalizable.

N

7. Matrices hermíticas y simétricas

7.1. Diagonalización

Matriz antisimétrica

Matriz antisimétrica: Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es antisimétrica ($A^T = -A$) entonces:

- Los autovalores de A son imaginarios puros o nulos
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- A es diagonalizable unitariamente.

N

Matriz simétrica(hermítica)

Matriz simétrica(hermítica): Si $A \in R^{n \times n}$ es simétrica ($B \in C^{n \times n}$ es hermítica) si y solo si:
 A es diagonalizable ortogonalmente:

$$A = PDP^T \quad (7.1)$$

B es diagonalizable unitariamente:

$$B = PDP^H \quad (7.2)$$

Con D real.

Se deducen las siguientes propiedades:

- A y B tienen n autovalores reales
- Los elementos de la diagonal de A y B son reales
- $|A| \in R$
- $\text{Dim}(S_\lambda(A)) = m_a(\lambda) \forall \lambda \in \sigma(A)$
- $\text{Dim}(S_\lambda(B)) = m_a(\lambda) \forall \lambda \in \sigma(B)$
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales

**Matriz ortogonal(unitaria)**

Matriz ortogonal(unitaria): Si $A \in R^{n \times n}$ es ortogonal ($B \in C^{n \times n}$ es unitaria) si y solo si:

$$AA^T = A^T A = I_d \quad (7.3) \quad \text{ó} \quad BB^H = B^H B = I_d \quad (7.5)$$

$$A^T = A^{-1} \quad (7.4) \quad B^H = B^{-1} \quad (7.6)$$

Las columnas de A y B son Base Ortonormal de R^n y C^n respectivamente.

Se deducen las siguientes propiedades:

- $|A| = \pm 1$. Si $|A| = 1$, A es la matriz de rotación
- Los autovalores tienen módulo 1 y pueden ser reales o complejos
- Son matrices unitariamente diagonalizables
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- Preservan los productos internos: $(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$
- Preservan las normas asociadas al producto interno: $|A\bar{x}| = |\bar{x}|$
- Si C es unitaria, BC y CB son unitarias también.



7.2. Descomposición espectral

Descomposición espectral de matrices simétricas

Si $A = PDP^{-1} = PDP^T$, las columnas de P son autovectores ortonormales $\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n$ de A y los autovalores correspondientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ están en la matriz diagonal D . Entonces:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\mathbf{u}}_i \bar{\mathbf{u}}_i^T \quad (7.7)$$

N

7.3. Subespacios invariantes por una transformación lineal

Subespacios invariantes por una transformación lineal

- $S \subset K^n$ es invariante por $A \in K^{n \times n} \iff \forall \bar{\mathbf{x}} \in S \mid A\bar{\mathbf{x}} \in S$
- $S \subset V$ es invariante por $T \in \ell(V) \iff \forall \bar{\mathbf{x}} \in S \mid T(\bar{\mathbf{x}}) \in S$

Se deducen las siguientes propiedades:

- Si λ es autovalor de T , entonces $S_\lambda(T)$ es un subespacio invariante por T , puesto que:

$$\forall \bar{\mathbf{x}} \in S_\lambda(T) \Rightarrow T(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \bar{\mathbf{x}} \in S_\lambda(T) \quad (7.8)$$

- No todo subespacio invariante es un autoespacio de T , pero sí los de dimensión 1

N

8. Formas cuadráticas

Formas cuadráticas

Una forma cuadrática en R^n es una función $Q : R^n \rightarrow R$ tal que:

$$Q(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^T A \bar{\mathbf{x}} \quad (8.1)$$

Donde A es una matriz simétrica $\in R^{n \times n}$.

N

Teorema de los ejes principales

Sea A una matriz simétrica $\in R^{n \times n}$. Entonces existe un cambio ortogonal de variable, $\bar{\mathbf{x}} = P\bar{\mathbf{y}}$, donde P es una matriz ortogonal tal que $|P| = +1$ e $\bar{\mathbf{y}}$ es el nuevo vector, que transforma la forma cuadrática $\bar{\mathbf{x}}^T A \bar{\mathbf{x}}$ a una forma cuadrática $\bar{\mathbf{y}}^T D \bar{\mathbf{y}}$ sin términos cruzados:

$$\bar{\mathbf{x}}^T A \bar{\mathbf{x}} = (P\bar{\mathbf{y}})^T A (P\bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{y}}^T \underbrace{P^T A P}_D \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}^T D \bar{\mathbf{y}} = g(\bar{\mathbf{y}}) \quad (8.2)$$

N

Perspectiva geométrica de los ejes principales

Sea la forma cuadrática $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$, con $A = PDP^T$.

El conjunto de todas las $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x}^T A \bar{x} = c$ es una elipse, una hipérbola, dos rectas, un punto o ninguno.

Si A es diagonal, la gráfica está en posición estándar. Si A no es diagonal, la gráfica está girada hasta salirse de la posición estándar. Los **ejes principales** son los autovectores de A y son el nuevo sistema de coordenadas para los cuales la gráfica está en posición estándar.

N

8.1. Clasificación

Clasificación de las formas cuadráticas

Una forma cuadrática $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$ es:

	Definición	Criterio I	Criterio II
Definida positiva	$Q(\bar{x}) > 0,$ $\forall \bar{x} \neq 0$	$a_{11} > 0,$ $ A > 0$	Autovalores de A positivos
Semidefinida positiva	$Q(\bar{x}) \geq 0,$ $\forall \bar{x}$	$ A_k \geq 0,$ $k = 1, \dots, n$	Autovalores de A positivos o nulos
Definida negativa	$Q(\bar{x}) < 0,$ $\forall \bar{x} \neq 0$	$a_{11} < 0,$ $ A > 0$	Autovalores de A negativos
Semidefinida negativa	$Q(\bar{x}) \leq 0,$ $\forall \bar{x}$	$ A_k \leq 0,$ $k = 1, \dots, n$	Autovalores de A negativos o nulos
Indefinida	$Q(\bar{x}) \asymp 0$		Autovalores de A negativos y/o positivos

N

8.2. Optimización restringida

Teorema de Rayleigh

Sea la forma cuadrática $Q(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^T A \bar{\mathbf{x}}$, con A simétrica. Se verifica:

$$\lambda_{\min}(A) \leq \frac{Q(\bar{\mathbf{x}})}{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2} \leq \lambda_{\max}(A) \quad (8.3)$$

Sea extremar una forma cuadrática $f : R^n \rightarrow R$, $f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^T A \bar{\mathbf{x}}$, (A simétrica), sujeto a la restricción $|\bar{\mathbf{x}}| = \alpha$.

El máximo de f es $\lambda_{\max}(A)\alpha^2$ y se alcanza en $M = \{\bar{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{\max}}(A) \mid |\bar{\mathbf{x}}| = \alpha\}$

El mínimo de f es $\lambda_{\min}(A)\alpha^2$ y se alcanza en $m = \{\bar{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{\min}}(A) \mid |\bar{\mathbf{x}}| = \alpha\}$

Sea extremar una forma cuadrática $f : R^n \rightarrow R$, $f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^T A \bar{\mathbf{x}}$, (A simétrica), sujeto a la restricción $\bar{\mathbf{x}}^T B \bar{\mathbf{x}} = \alpha^2$, y sea B definida positiva tal que $B = P_B D_B P_B^T$. Mediante el cambio de variable $\bar{\mathbf{y}} = \sqrt{D_B} P_B^T \bar{\mathbf{x}} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \sqrt{D_B^{-1}} P_B \bar{\mathbf{y}}$, esto es equivalente a extremar $g(\bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{y}}^T \left(\sqrt{D_B^{-1}}^T P_B^T A P_B \sqrt{D_B^{-1}} \right)$ y sujeto a la restricción $|\bar{\mathbf{y}}| = \alpha$. Entonces:

$$\text{Máx } g(\bar{\mathbf{y}}) = \text{Máx } f(\bar{\mathbf{x}}) \quad (8.4)$$

$$\text{mín } g(\bar{\mathbf{y}}) = \text{mín } f(\bar{\mathbf{x}}) \quad (8.5)$$

Los $\bar{\mathbf{x}}$ en donde se alcanza ese extremo se hallan realizando $\bar{\mathbf{x}} = P_B \bar{\mathbf{y}}$



9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)

9.1. Definición

Descomposición en Valores Singulares (DVS)

Valores singulares: Se define como:

$$VS(A) = \sqrt{\lambda_i}, \forall \lambda_i \in \sigma(A^T A) \quad (9.1)$$

Sea A una matriz de $m \times n$ con rango r . Entonces existe una matriz Σ , y existen una matriz U ortogonal de $m \times m$ y una matriz V ortogonal de $n \times n$ tales que $A = U \Sigma V^T$ donde:

- $\Sigma \in R^{m \times n}$ es tal que $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, y la matriz diagonal D tiene como elementos a los primeros r valores singulares de $A^T A$, ordenados en forma descendente $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.
- $V \in R^{n \times n}$ es una matriz cuyas columnas son unas Base Ortonormal (BON) de autovectores $\{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n\}$ asociados a los autovalores de $A^T A$.
- $U \in R^{m \times m}$ es una matriz cuyas primeras r columnas son los vectores $\frac{A \bar{\mathbf{v}}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{A \bar{\mathbf{v}}_r}{\sigma_r}$. Las otras columnas se obtienen completando la Base Ortonormal (BON) de R^m . Las columnas de U son autovectores de AA^T .



9.2. Subespacios de las DVS

Subespacios de la DVS

Sea $A \in K^{m \times n}$:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{\mathbf{u}}_1 & \dots & \bar{\mathbf{u}}_m \\ | & & | \end{bmatrix}}_{m \times m} \underbrace{\begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{\mathbf{v}}_1 & \dots & \bar{\mathbf{v}}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{n \times n}^T \quad (9.2)$$

Si $\text{rango}(A) = r$ entonces:

$$\underbrace{\{\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_r\}}_{\text{BON de Col}(A)}, \underbrace{\{\bar{\mathbf{u}}_{r+1}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_m\}}_{\text{BON de Col}(A)^\perp} \quad (9.3)$$

$$\underbrace{\{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_r\}}_{\text{BON de Fil}(A)}, \underbrace{\{\bar{\mathbf{v}}_{r+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n\}}_{\text{BON de Fil}(A)^\perp} \quad (9.4)$$

N

9.3. Propiedades de las DVS

Propiedades de la DVS

- $\text{rango}(A) = \text{rango}(\Sigma) = \text{rango}(\Sigma^T) = \#VS(A)_{>0}$
- $A \in R^{n \times n}$ es inversible $\iff A$ tiene n VS positivos
- $VS(A)_{>0} = VS(A^T)_{>0}$
- Si $A \in R^{n \times n} \Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^n VS_i(A)$
- Si A es cuadrada y definida positiva $\Rightarrow \sigma(A) = VS(A)$
- Si $A \sim B \Rightarrow VS(A) = VS(B)$
- Si B es ortogonal $\Rightarrow A, AB$ y BA tienen los mismos valores singulares
- Si A es cuadrada y simétrica $\Rightarrow VS_i(A) = |\lambda_i(A)|$
- Si las filas de A son una Base Ortonormal (BON), los valores singulares no nulos de A son 1
- Si las columnas de A son una Base Ortonormal (BON), los valores singulares de A son 1
- La matriz $A^T A$ (Matriz de Gram de A) es siempre simétrica y semidefinida positiva, con lo cual nunca tendrá valores singulares negativos. Será definida positiva cuando A tenga columnas Linealmente Independientes.
- Sea $T : R^m \rightarrow R^n$ una transformación lineal tal que $T(\bar{x}) = A\bar{x}$. Sea la forma cuadrática $f(\bar{x}) = |T(\bar{x})|^2 = \bar{x}^T (A^T A) \bar{x}$. Entonces:
 - El máximo de $f(\bar{x})$ sujeto a $|\bar{x}| = 1$ es $\lambda_{max}(A^T A)$. Entonces el máximo de $|T(\bar{x})|$ es $VS_{max}(A)$ y se alcanza en $M = \{\bar{x} \in R^m \mid \bar{x} \in S_{\lambda_{max}}(A^T A), |\bar{x}| = 1\}$
 - El mínimo de $f(\bar{x})$ sujeto a $|\bar{x}| = 1$ es $\lambda_{min}(A^T A)$. Entonces el mínimo de $|T(\bar{x})|$ es $VS_{min}(A)$ y se alcanza en $m = \{\bar{x} \in R^m \mid \bar{x} \in S_{\lambda_{min}}(A^T A), |\bar{x}| = 1\}$



9.4. DVS reducida y Pseudoinversa

DVS reducida

Sea $A \in R^{n \times m}$. Si $A = U\Sigma V^T$ y $\text{rango}(A) = r$. Entonces una Descomposición en Valores Singulares reducida (DVSr) de A es:

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T \quad (9.5)$$

Siendo $U_r \in R^{n \times r}, \Sigma_r \in R^{r \times r}, V_r^T \in R^{r \times m}$



Pseudoinversa de Moore-Penrose

Se define la **pseudoinversa de Moore-Pensore** como:

$$A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T \quad (9.6)$$

Sea $A \in R^{n \times m}$, se deducen las siguientes propiedades:

- $A^+ = A^\#$ cuando $\text{rango}(A) = m$
- $A^+ A = V_r V_r^T = P_{\text{Fil}(A)}$
- $AA^+ = U_r U_r^T = P_{\text{Col}(A)}$

N

10. Ecuaciones diferenciales

10.1. Wronskiano

Matriz de Wronski

Sea $A = \{f_1, \dots, f_q\}$ funciones definidas en un intervalo $I \subset R$, a valores en C , con derivada hasta el orden $q - 1$ continua en I . La **matriz de Wronski** de A es, para cada $\bar{x} \in I$

$$M_{w_A}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) & \dots & f_q(\bar{x}) \\ f_1'(\bar{x}) & \dots & f_q'(\bar{x}) \\ f_1''(\bar{x}) & \dots & f_q''(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(q-1)}(\bar{x}) & \dots & f_q^{(q-1)}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Se define al **Wronskiano** como:

$$w_A(\bar{x}) = |M_{w_A}| = \begin{vmatrix} f_1(\bar{x}) & \dots & f_q(\bar{x}) \\ f_1'(\bar{x}) & \dots & f_q'(\bar{x}) \\ f_1''(\bar{x}) & \dots & f_q''(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(q-1)}(\bar{x}) & \dots & f_q^{(q-1)}(\bar{x}) \end{vmatrix} \quad (10.2)$$

Se deducen las siguientes propiedades:

- Si existe un $\bar{x}_0 \in I$ tal que $w_A(\bar{x}_0) \neq 0$, entonces las funciones f_1, \dots, f_q son Linealmente Independientes
- Si un conjunto es Linealmente Dependiente en I , su wronskiano es la función nula. La recíproca es falsa; es verdadera solo si las funciones que componen el wronskiano son soluciones de una Ecuación Diferencial lineal de orden superior
- La derivada del wronskiano es el determinante obtenido derivando la última fila.
- La derivada del wronskiano es la suma de q determinantes.

N

10.2. Identidad de Abel

Identidad de Abel

Sea la ecuación diferencial $y(\bar{x})^{(n)} + a_{n-1} \cdot y(\bar{x})^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y'(\bar{x}) + a_0 \cdot y(\bar{x}) = 0$ en un intervalo $I \subset R$, sea $S = \{y_1, \dots, y_n\}$ el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial, y sea W_s el Wronskiano de este conjunto. Entonces se verifica que:

$$W'_s(\bar{x}) = -a_{n-1} \cdot W_s(\bar{x}) \quad (10.3)$$



10.3. Existencia y unicidad de Problemas de Valores Iniciales (PVI)

Problemas de Valores Iniciales



10.4. Variables separables

Variables separables



10.5. Homogéneas

Homogéneas



10.6. Lineales de 1^{er} orden

Lineales de 1^{er} orden



10.7. Diferencial exacta

Diferencial exacta



10.8. Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes



10.9. Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes



11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales

11.1. Sistemas homogéneos con A diagonalizable

11.2. Sistemas no homogéneos con A diagonalizable

11.3. Sistemas homogéneos con A no diagonalizable

11.3.1. Caso A 2x2

11.3.2. Caso A 3x3