UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2015 - 1er Cuatrimestre

ÁLGEBRA II A (61.08)

Resumen de Álgebra II

INTEGRANTE:
Maria Inés Parnisari - 92235
⟨maineparnisari@gmail.com⟩

Menéndez, Martín Nicolás - 92830
⟨menendez91@live.com.ar⟩

Índice

1. Matrices

1.1. Propiedades generales

Propiedades de matrices

Dadas las matrices A, B, C se tiene que:

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $A + 0_n = A$
- $A + (-A) = 0_n$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(BC) = (AB)C$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- $A0_n = 0_n$

ℵ

1.2. Propiedades de la inversa, la traza y la traspuesta

Propiedades de matrices

Dadas las matrices A, B, C se tiene que:

Propiedades de la inversa:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{A^{-1}}{\alpha}, \alpha \neq 0$
- $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$
- $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{|A|}$

Propiedades de la traza:

- $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A)+\text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha\text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

ℵ

1.3. Propiedades de los determinantes

Propiedades de determinantes

Sean $A, B \in R^{n\times m}$

$$\left|A^T\right| = |A| \tag{1.1}$$
$$|AB| = |A|\,|B| \tag{1.2}$$

Si B la obtengo de sumar k veces una fila de A sobre otra:

$$|B| = |A| \tag{1.3}$$

Si B la obtengo de intercambiar k veces las fila de A:

$$|B| = (-1)^k\,|A| \tag{1.4}$$

Si B la obtengo de multiplicar por k, n veces las filas de A:

$$|B| = k^n\,|A| \tag{1.5}$$

Si A es una matriz triangular:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} aii \tag{1.6}$$

ℵ

1.4. Subespacios fila, columna y null

Espacio fila,columna y nulo de matrices

Sean $A \in R^{n\times m}$, $B \in R^{r\times n}$, se define:

- **Espacio Fila:** Fif$(A) = \{x \in R^m | x$ es combinación lineal de las filas de $A\}$
- **Espacio Columna:** Col$(A) = \{b \in R^n | Ax = b$ para alguna x$\}$
- **Espacio nulo:** Nul$(A) = \{x \in R^m | Ax = 0\}$

ℵ

Propiedades de los espacios definidos

Propiedades:

$$\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A) = \text{Fil}(A)^{\perp} \tag{1.7}$$
$$\text{Nul}(A^T) = \text{Nul}(AA^T) = \text{Col}(A)^{\perp} \tag{1.8}$$
$$\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,\left(A^T A\right) \Rightarrow A^T A \tag{1.9}$$
$$\text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Fil}(A)) \tag{1.10}$$
$$\text{Col}(A) \bigotimes \text{Col}(A)^{\perp} = R^n \tag{1.11}$$
$$\text{Fil}(A) \bigotimes \text{Fil}(A)^{\perp} = R^m \tag{1.12}$$
$$\text{rango}\,(A) + \dim \text{Nul}(A) = m \tag{1.13}$$
$$\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B), \text{Iguales si rango}\,(A) = n \tag{1.14}$$
$$\text{Nul}(A) \subseteq \text{Nul}(BA), \text{Iguales si rango}\,(B) = n \tag{1.15}$$
$$\text{Si rango}\,(A) = n \Rightarrow \text{rango}\,(BA) = \text{rango}\,(B) \tag{1.16}$$
$$\text{Si rango}\,(B) = n \Rightarrow \text{rango}\,(BA) = \text{rango}\,(A) \tag{1.17}$$
$$\text{Col}(A) \perp \text{Col}(B) \Leftrightarrow A^T B = 0 \tag{1.18}$$

De **(1.15)** se ve que $A^T A$ invertible $\longleftrightarrow A$ invertible

ℵ

Matrices equivalentes

Dos matrices A y B son equivalentes si existen otras dos matrices E y F regulares tal que:

$$A = EBF \tag{1.19}$$

Dos matrices equivalentes pueden pensarse como dos descripciones de una misma Transformación Lineal, pero con respecto a bases distintas.

ℵ

Matrices semejantes

Dos matrices cuadradas A y B son semejantes (notamos $A \sim B$) si y solo si existe una matriz P inversible tal que:

$$B = P^{-1} A P \text{ ,ó} \tag{1.20}$$
$$A = P B P^{-1} \tag{1.21}$$

ℵ

Propiedades de matrices semejantes

Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de un mismo operador lineal, pero con respecto a bases distintas. Estas dos matrices cumplen que:

$$|A| = |B| \tag{1.22}$$
$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \tag{1.23}$$
$$\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,(B) \tag{1.24}$$
$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B) \tag{1.25}$$

ℵ

2. Espacios vectoriales

2.1. Propiedades de los subespacios

Propiedades de los subespacios

S es un subespacio vectorial del espacio V_K si y solo si:

$$0_V \in S \tag{2.1}$$

$$(\alpha X + Y) \in S, \forall X, Y \in V \text{ y } \forall \alpha \in K \tag{2.2}$$

ℵ

2.2. Independencia lineal

Combinación lineal

El vector $\overline{\mathbf{x}}$ es una combinación lineal de $\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n$ si:

$$\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{2.3}$$

Y si $a_1, \ldots, a_n$ no son todos nulos.

ℵ

Independencia lineal

$\overline{\mathbf{x}}$ es **linealmente independiente** si:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \text{ , y} \tag{2.4}$$

$$a_i = 0 \forall i \tag{2.5}$$

Dos vectores son **linealmente dependientes** si son proporcionales. Un subconjunto de un conjunto linealmente dependiente sigue siendo linealmente dependiente

ℵ

2.3. Operaciones con subespacios

Operaciones con subespacios

- **Intersección:** $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i = \{\overline{\mathbf{x}} \in V | \overline{\mathbf{x}} \in S_i \text{ , } \forall i = 1, \ldots, n\}$
- **Suma:** $S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \text{gen}\left\{\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right\}$, donde B_i es una base de S_i
- **Unión:** $S = S_1 \cup S_2$ es un subespacio cuando $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$
- **Suma directa:** $S_1, \ldots, S_k$ están en suma directa $\iff$ la unión de sus bases es base de V

Dos subespacios son **suplementarios** cuando están en suma directa y su suma es todo el espacio.

ℵ

2.4. Bases

Bases

Si $\text{Dim}(V) = n$, $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de V si y solo si:

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ genera } V \tag{2.6}$$
$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ son linealmente independientes} \tag{2.7}$$

ℵ

2.5. Coordenadas de un vector en una base

Coordenadas de un vector en una base

Si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de un espacio vectorial B y $\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\mathbf{v}}_i$, entonces $C_B(\overline{\mathbf{x}}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Dado un vector y una base, las coordenadas de ese vector en esa base son únicas.

$\forall \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} \in V$ y $\forall k \in K$:

$$C_B(v + w) = C_B(v) + C_B(w) \tag{2.8}$$
$$C_B(k \times v) = k \times C_B(v) \tag{2.9}$$

Finalmente $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ son linealmente independientes $\iff \{C_B(\overline{\mathbf{v}}_1), \ldots, C_B(\overline{\mathbf{v}}_n)\}$ lo son para cualquier base de B.

ℵ

2.6. Matriz de cambio de base

Matriz de cambio de base

Sean $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ y $C = \{\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_n\}$ bases del espacio V. Las matrices de cambio de base son:

$$C_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(\overline{\mathbf{v}}_1) & C_C(\overline{\mathbf{v}}_2) & \ldots & C_C(\overline{\mathbf{v}}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$C_{CB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_B(\overline{\mathbf{w}}_1) & C_B(\overline{\mathbf{w}}_2) & \ldots & C_B(\overline{\mathbf{w}}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C_{BC}^{-1} \tag{2.11}$$

Si B y C son bases ortonormales, entonces C_{BC} es una matriz ortogonal.

ℵ

2.7. Teorema de la dimensión

Teorema de la dimensión

Dados los subespacios S, H y T:

$$\text{Dim}(S + H) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) - \text{Dim}(S \cap H) \tag{2.12}$$
$$\text{Dim}(S + H + T) = \text{Dim}(S) + \text{Dim}(H) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(S \cap (H + T)) - \text{Dim}(H \cap T) \tag{2.13}$$

ℵ

3. Producto interno

3.1. Axiomas

Axiomas del producto interno

Sea $<,>$: $V_K \times V_K \to R$ un producto interno:

1. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \in K$ y $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$
2. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})}$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$
3. $(\lambda\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\lambda}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
4. $(\overline{\mathbf{x}}, \lambda\overline{\mathbf{y}}) = \lambda(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ y $\forall \lambda \in K$
5. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}})$, $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in V$
6. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \geq 0, (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \longleftrightarrow \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$

3.2. Producto interno canónico

Producto interno canónico

Se definen los siguientes productos internos para los siguientes espacios vectoriales:

- **Vectores reales:** R^n : $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^T\overline{\mathbf{y}}$
- **Vectores complejos:** C^n : $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}^H\overline{\mathbf{y}}$
- **Matrices reales:** $R^{n\times m}$: $(A, B) = \text{tr}(A^T B)$
- **Matrices complejas:** $C^{n\times m}$: $(A, B) = \text{tr}(A^H B)$
- **Funciones reales:** $P_R[a, b] : (p, q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$
- **Funciones complejas:** $P_C[a, b] : (p, q) = \int_a^b \overline{p(t)}q(t)dt$

3.3. Definiciones

Ortogonalidad

Dados $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \iff \overline{\mathbf{x}} \perp \overline{\mathbf{y}} \tag{3.1}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

norma de un vector

Se define la norma de un vector como:

$$|\bar{\mathbf{x}}|^2 = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \tag{3.2}$$

La **norma de un vector** depende del producto interno, pero cumple las siguientes propiedades:

- $|\bar{\mathbf{x}}| \in R \forall \bar{\mathbf{x}} \in V$
- $|\bar{\mathbf{x}}| \geq 0$ $(|\bar{\mathbf{x}}| = 0 \iff \bar{\mathbf{x}} = 0)$
- $|k \cdot \bar{\mathbf{x}}| = |k| \cdot |\bar{\mathbf{x}}|$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**

$$|(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})| \leq |\bar{\mathbf{x}}| \cdot |\bar{\mathbf{y}}| \ , x, y \in V_K \tag{3.3}$$

  La igualdad se cumple si $\bar{\mathbf{x}} \parallel \bar{\mathbf{y}}$

- **Desigualdad triangular:**

$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}| \leq |\bar{\mathbf{x}}| + |\bar{\mathbf{y}}| \tag{3.4}$$

- **Teorema de pitágoras:** Si $\bar{\mathbf{x}} \perp \bar{\mathbf{y}}$ entonces:

$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}|^2 = |\bar{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{y}}|^2 \tag{3.5}$$

  La recíproca solo vale para R

- **Identidad del paralelogramo:**

$$|\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}|^2 + |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}|^2 = 2\left(|\bar{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{y}}|^2\right), \forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in V \tag{3.6}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Ángulo entre dos vectores

Dado $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$:

$$\cos(\theta) = \frac{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})}{|\bar{\mathbf{x}}| \cdot |\bar{\mathbf{y}}|} \tag{3.7}$$

Con $\theta \in [0, \pi], \forall \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \neq 0$ para espacios vectoriales reales con producto interno.

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Complemento ortogonal

Sea $A \subset V_K \cdot A^{\perp} = \{\bar{\mathbf{x}} \in V_K | (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0, \forall \bar{\mathbf{y}} \in A\}$

Para el cálculo del complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita, alcanza con exigir la ortogonalidad a un sistema de generadores

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

Distancia entre vectores

Dados $\overline{\mathbf{x}}$,$\overline{\mathbf{y}}$, se define la función distancia como:

$$d : V_R \times V_R \to R^+ : d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = |\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}| = |\overline{\mathbf{y}} - \overline{\mathbf{x}}| \tag{3.8}$$

Los elementos pueden ser de cualquier espacio vectorial, se utilizaron vectores por comodidad.

ℵ

3.4. Matriz asociada al producto interno

Matriz de producto interno

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_k\}$ base de V_K. Entonces $G \in K^{k \times k}$, $g_{ij} = (\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{v}}_j)$ es la matriz de producto interno:

$$G = \begin{bmatrix} |\overline{\mathbf{v}}_1|^2 & \ldots & (\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{\mathbf{v}}_k, \overline{\mathbf{v}}_1) & \ldots & |\overline{\mathbf{v}}_k|^2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Si B es base de V_K y G es la matriz del producto interno en esa base, entonces $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = C_B^H(\overline{\mathbf{x}}) \cdot G \cdot C_B(\overline{\mathbf{y}}) \tag{3.10}$$

ℵ

Propiedades de la matriz de producto interno

Dada la matriz G de producto interno se tiene que:

$$g_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \ldots, k \tag{3.11}$$

$$G^H = H \tag{3.12}$$

$$G \text{ es definida positiva} \tag{3.13}$$

$$\exists G^{-1} \tag{3.14}$$

$$G \text{ de una Base Ortogonal (BOG) es una matriz diagonal} \tag{3.15}$$

$$G \text{ de una Base Ortonornal (BON) es una matriz identidad} \tag{3.16}$$

ℵ

4. Proyecciones y matrices de proyección

4.1. Propiedades de la proyección

Propiedades de la proyección

Sea $S \subset V y S^{\perp}$ su complemento ortogonal, entonces $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\mathbf{u}}}_{\in S} + \underbrace{\overline{\mathbf{v}}}_{\in S^{\perp}} = P_S(\overline{\mathbf{x}}) + P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) \tag{4.1}$$

Se definen las siguientes propiedades:

- $P_S(\overline{\mathbf{x}})$ es el vector de S mas próximo a $\overline{\mathbf{x}}$
- $P_S(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{v}} \iff \overline{\mathbf{v}} \in S$ y además $P_S(\overline{\mathbf{w}}) = 0 \iff \overline{\mathbf{w}} \in S^{\perp}$
- Por pitágoras: $|\overline{\mathbf{x}}|^2 = |P_S(\overline{\mathbf{x}})|^2 + \left|P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})\right|^2, \forall x \in V$
- $|P_S(\overline{\mathbf{x}})| \leq |\overline{\mathbf{x}}|$. Si $|P_S(\overline{\mathbf{x}})| = |\overline{\mathbf{x}}|$ entonces $\overline{\mathbf{x}} \in S$
- $d(\overline{\mathbf{x}}, S) = \left|P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})\right|$
- $d(\overline{\mathbf{x}}, S^{\perp}) = |P_S(\overline{\mathbf{x}})|$

ℵ

4.2. Proyección y reflexión

Proyección y reflexión

Sea S un subespacio de V, y $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_k\}$ una base ortogonal (BOG) de S. Entonces $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V$:

$$P_S(\overline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{x}})}{(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i)} \overline{\mathbf{v}}_i \tag{4.2}$$

$$R_S(\overline{\mathbf{x}}) = 2P_S(\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{x}} = 2P_S(\overline{\mathbf{x}}) - \left(P_S(\overline{\mathbf{x}}) + P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}})\right) = P_S(\overline{\mathbf{x}}) - P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} - 2P_S^{\perp}(\overline{\mathbf{x}}) \tag{4.3}$$

ℵ

4.2.1. Proyección y transformaciones lineales

Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea $T : V_K \to V_K$ una transformación lineal tal que:

$$Im(P_S) = S \tag{4.4}$$
$$\text{Nul}(P_S) = S^{\perp} \tag{4.5}$$

Y sea $B = \{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_{q+1}, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n}_{\in S^{\perp}}\}$ una base de V, entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[P_S]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos 0 como la dimensión del complemento ortogonal.

Nota: La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

4.2.2. Reflexión y transformaciones lineales

Proyecciones y Transformaciones lineales

Sea $T : V_K \to V_K$ una transformación lineal tal que:

$$T(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{v}}, \forall \overline{\mathbf{v}} \in S \tag{4.7}$$
$$T(\overline{\mathbf{v}}) = -\overline{\mathbf{v}}, \forall \overline{\mathbf{v}} \in S^{\perp} \tag{4.8}$$

Y sea $B = \{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q}_{\in S}, \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_{q+1}, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n}_{\in S^{\perp}}\}$ una base de V, entonces la matriz de la transformación lineal es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & -1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos -1 como la dimensión del complemento ortogonal.

Nota: La matriz de un operador proyección en una Base Ortonormal (BON) es una matriz de proyección. En cualquiera otra base, no lo es.

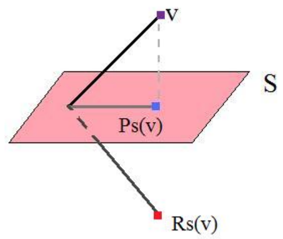

Figura 4.1: Proyección y reflexión

4.3. Matriz de Householder

Propiedades de la proyección

La matriz de reflexión sobre un subespacio de dimensión $n-1$ que es ortogonal a un vector $\overline{\mathbf{w}}$ en un espacio de dimensión n se puede obtener mediante la expresión:

$$H = I_d - 2\frac{\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{w}}^T}{\overline{\mathbf{w}}^T \cdot \overline{\mathbf{w}}} \tag{4.10}$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- Es involutiva: $H \circ H = I_d$
- Es simétrica: $H^T = H$
- Es inversible: $\exists H^{-1}$ y $\exists H^{-1} = H$
- Es ortogonal: $H^T H = H H^T = I_d$

ℵ

4.4. Rotaciones en R^3

Rotaciones en R^3

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3\}$ una Base Ortonormal (BON) de R^3 y sea T la rotación θ grados alrededor del eje v_i:

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_1 : [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_2 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\text{Rotación sobre } \overline{\mathbf{v}}_3 : [T]_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$\tag{4.14}$$

ℵ

4.5. Proceso de Gram-Schmidt

Proceso de Gram-Schmidt

Dada una base $\{\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_p\}$ para un subespacio $W \in R^n$ defina:

1. $\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{x}}_1$
2. $\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{x}}_2 - \frac{\overline{\mathbf{x}}_2 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1}{\overline{\mathbf{v}}_1 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1}\overline{\mathbf{v}}_1$
3. $\overline{\mathbf{v}}_p = \overline{\mathbf{x}}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\overline{\mathbf{x}}_p \cdot \overline{\mathbf{v}}_i}{\overline{\mathbf{v}}_i \cdot \overline{\mathbf{v}}_i}\overline{\mathbf{v}}_i$

Entonces $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_p\}$ es una Base Ortogonal (BOG) de W.

Si luego se divde a cada componente por la norma de la base se obtiene una Base Ortogonal (BON) de W.

ℵ

4.6. Matrices de proyección

Matriz de proyección

Utilizando el producto interno canónico de sobre K^n, con $K = R$ o $K = C$.

$P \in K^{n\times n}$ es una matriz de proyección si y solo si:

$$P^2 = P \tag{4.15}$$
$$P^H = P \tag{4.16}$$

Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

- $\text{Col}(P) = \text{Nul}(P)^\perp$
- $P \cdot y = y \iff y \in \text{Col}(P)$
- Si P_S es matriz de proyección sobre S y $P_S^\perp$ es matriz de proyección sobre $S^\perp$ entonces $P_S + P_S^\perp = I_d$
- Las columnas de P son una base del espacio sobre el cual proyectan
- $\text{rango}\,(P) = \text{tr}(P)$
- $\det P \neq 0$ si $P \neq I_d$
- Si P_1 y P_2 son matrices de proyección y $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$, entonces $P_1 + P_2$ es matriz de proyección y $\text{rango}\,(P_1 + P_2) = \text{rango}\,(P_1) + \text{rango}\,(P_2)$

Obtención de la matriz de proyección:

1. Sea Q una matriz cuyas columnas son una Base Ortonormal (BON) de $S \subset V$. Entonces la única matriz de proyección sobre S es $[P_S] = Q \cdot Q^T$. La matriz de proyección sobre $S^\perp$ es $[P_S^\perp] = I_d - [P_S]$
2. Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q\}$ una base de S, y A la matriz que tiene por columnas a $\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q$. Entonces la única matriz de proyección sobre S se obtiene mediante $[P_S] = A\left(A^H A\right)^{-1} A^H = AA^\#$

ℵ

4.7. Inversas y pseudoinversas

Propiedades de la pseudoinversa

Sea $A \in K^{n\times q} | \text{rango}\,(A) = q$. La matriz pseudoinversa de A es $A^\# = \left(A^H A\right)^{-1} A^H$:

- Si A es cuadrada invertible, $A^{-1} = A^\#$
- $A^\# \in R^{q\times n}$
- $A^\# A = I_{d_{(q)}}$
- $AA^\# = [P]_{\text{Col}(A)}$
- $\text{Nul}(AA^\#) = [\text{Col}(A)]^\perp$

ℵ

4.8. Cuadrados mínimos

Cuadrados mínimos

Sea $A \in K^{n\times q}, \overline{\mathbf{x}} \in K^q, \overline{\mathbf{b}} \in R^n$. Si $Ax = b$ tiene una solución extra, entonces $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$. Si $b \notin \text{Col}(A)$, intentamos hallar una solución $\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in K^q$ (la solución por **cuadrados mínimos**) tal que:

- $\left|A\hat{\overline{\mathbf{x}}} - \overline{\mathbf{b}}\right| < \left|A\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{b}}\right|, \forall \overline{\mathbf{u}} \in K^q$
- $d(A\hat{\overline{\mathbf{x}}}, \overline{\mathbf{b}}) \leq d(A\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{b}}), \forall \overline{\mathbf{u}} \in K^q$
- $\left|A\hat{\overline{\mathbf{x}}}\right| \leq \left|\overline{\mathbf{b}}\right|$ (Son iguales si $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$)
- Ecuaciones normales de cuadrados mínimos: $A^T A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = A^T\overline{\mathbf{b}} = \hat{\overline{\mathbf{b}}}$
- $A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = \hat{\overline{\mathbf{b}}} = P_{\text{Col}(A)}(\overline{\mathbf{b}})$ si y solo si:

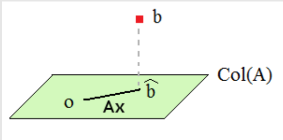

Figura 4.2: Cuadrados mínimos

$$A\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in \text{Col}(A) \tag{4.17}$$

$$\overline{\mathbf{b}} - A\hat{\overline{\mathbf{x}}} \in \text{Col}(A)^{\perp} \tag{4.18}$$

Propiedades de Cuadrados mínimos

1. Si $\hat{\overline{\mathbf{x}}} = 0$ entonces $\overline{\mathbf{b}} \in [\text{Col}(A)]^{\perp}$. La recíproca solo es cierta si A es invertible.
2. Si las columnas de A son linealmente independientes, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante:

$$\hat{\overline{\mathbf{x}}} = (A^T A)^{-1} A^T\overline{\mathbf{b}} = A^{\#}\overline{\mathbf{b}} \tag{4.19}$$

   Si las columnas de A son linealmente dependientes, el sistema $A^T A\hat{\overline{\mathbf{x}}} = A^T b$ tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma $\hat{\overline{\mathbf{x}}} = \hat{\overline{\mathbf{x}}}_p + \underbrace{\hat{\overline{\mathbf{x}}}_n}_{\in \text{Nul}(A)}$

3. Si $\overline{\mathbf{b}} \in \text{Col}(A)$, entonces toda solución de $A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ es una solución exacta y por cuadrados mínimos
4. El error de aproximación ϵ es igual a $\left|\overline{\mathbf{b}} - \hat{\overline{\mathbf{b}}}\right|$

4.8.1. Norma mínima

Pseudoinversa de Moore-Pensore

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima pertenece al espacio $\text{Fil}(A)$y se obtiene como:

$$\tilde{\overline{\mathbf{x}}} = A^{+}\overline{\mathbf{b}} \tag{4.20}$$

Siendo A^+ la **pseudoinversa de Moore-Penrose** de A.

4.9. Regresión lineal

Regresión lineal

Sean los puntos $\overline{\mathbf{P}}_i = (x_i, y_i)$ con $i = 1, 2, \dots, n$. La recta que mejor aproxima a los puntos es:

$$\overline{\mathbf{y}} = \alpha_0 \overline{\mathbf{1}} + \alpha_1 \overline{\mathbf{x}} \tag{4.21}$$

Y los coeficientes α_i se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Si se aproxima por una parábola se agrega otro nivel de complejidad, con $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$, lo que implica una columna adicional a la matriz para los términos cuadráticos, una fila adicional para la constante α_2 en la variable.

Se siguen agregando columnas a la matriz y filas al vector tantas veces como grados de complejidad se necesiten.

ℵ

5. Transformaciones lineales

Sea $T \in \ell(V_K, W_K)$ y $A = [T]_{BC}$ con B base de V y C base de W la matriz de T.

5.1. Condiciones para las Transformaciones lineales

Condiciones para ser Transformación lineal

Para que una transformación se considere lineal debe cumplir:

1. $T(\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}}) = T(\overline{\mathbf{u}}) + T(\overline{\mathbf{v}})$, con $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}} \in V$
2. $T(\alpha \overline{\mathbf{u}} + \beta \overline{\mathbf{v}}) = \alpha \cdot T(\overline{\mathbf{u}}) + \beta \cdot T(\overline{\mathbf{v}})$, con $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}} \in V_K$ y $\alpha, \beta \in K$
3. $T(0_{V_K}) = 0_{V_K}$

ℵ

5.2. Núcleo e Imágen

Núcleo e Imágen

Núcleo: $\text{Nul}(T) = \{\overline{\mathbf{v}} \in V_K \mid T(\overline{\mathbf{v}}) = 0_W\} = C_B^{-1}(\text{Nul}(A))$.
Imágen: $\text{Im}(T) = \{\overline{\mathbf{w}} \in W_K \mid T(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{w}} \text{ con } \overline{\mathbf{v}} \in V_K\} = C_C^{-1}(\text{Col}(A))$.

Ambos son subespacios vectoriales.

La imágen de una Transformación Lineal puede obtenerse como lo que generan los transformados de una base del espacio de partida.

ℵ

Teorema de la dimensión

Sea $T \in \ell(V, W)$ y sea $\text{Dim}(V) = n$ (finita). Entonces:

$$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(\text{Nul}(T)) + \text{Dim}(\text{Im}(T)) \tag{5.1}$$

ℵ

5.3. Clasificación de las Transformaciones lineales

5.3.1. Monomorfismo(Inyectividad)

Monomorfismo

Una Transformación lineal es inyectiva si verifica:

$$\overline{\mathbf{v}}_1 \neq \overline{\mathbf{v}}_2 \Rightarrow T(\overline{\mathbf{v}}_1) \neq T(\overline{\mathbf{v}}_2)\ , \forall \overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2 \in V \tag{5.2}$$

$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \iff \text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{Dim}(V) \tag{5.3}$$

Una Transformación Lineal Inyectiva transforma conjuntos Linealmente Independientes a conjuntos Linealmente Independientes.

La recíproca también es cierta: si A es un conjunto Linealmente Independiente y es transformado en otro conjunto Linealmente Independiente, la Transformación Lineal es inyectiva. Es decir: Si T es inyectiva y A es Linealmente Independiente, $T(A)$ es Linealmente Independiente.

Las matrices asociadas a Transformaciones Lineales inyectivas tienen sus columnas Linealmente Independientes.

Si $\text{Dim}(V) > \text{Dim}(W)$, T no puede ser inyectiva.

ℵ

5.3.2. Epimorfismo(Sobreyectividad)

Epimorfismo

Una Transformación lineal es sobreyectiva si y solo si:

$$\text{Im}(T) = W \tag{5.4}$$

Las matrices asociadas a Transformaciones lineales sobreyectivas tienen sus filas Linealmente Independientes.

Si $\text{Dim}(W) > \text{Dim}(V)$, T no puede ser sobreyectiva.

ℵ

5.3.3. Isomorfismo(Biyectividad)

Biyectividad

Una Transformación lineal es biyectiva si y solo si:

$$\text{Dim}(W) = \text{Dim}(V) \tag{5.5}$$
$$\text{Nul}(T) = \{0_V\} \tag{5.6}$$

Es decir, si es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez.

T es biyectiva $\iff$ si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es base de $V \Rightarrow \{T(\overline{\mathbf{v}}_1), \ldots, T(\overline{\mathbf{v}}_n)\}$ es base de W
La matriz asociada a una Transformación lineal biyectiva tiene sus filas y columnas Linealmente Independientes, o sea que es una matriz inversible, es decir, existe una transformación lineal inversa $T^{-1} = [T]^{-1}$

Si $\text{Dim}(V) = \text{Dim}(W)$, entonces o bien T es inyectiva y sobreyectiva, o no es ninguna de las dos.

ℵ

5.4. Matriz asociada a una Transformación lineal

Matriz de la Transformación lineal

Sea $T \in \ell(V_K, W_K)$, sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_q\}$ base de V y $C = \{\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_m\}$ base de W. Entonces T se puede escribir como $T(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}}$, con $A \in K^{m \times q}$ tal que:

$$A = [T]_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_1)) & C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_2)) & \ldots & C_C(T(\overline{\mathbf{v}}_q)) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Dicha matriz posee las siguientes propiedades:

- $[T]_{BC} \cdot C_B(\overline{\mathbf{v}}) = C_C(T(\overline{\mathbf{v}}))$, $\forall \overline{\mathbf{v}} \in V$
- $\overline{\mathbf{v}} \in \text{Nul}(T) \iff C_B(\overline{\mathbf{v}}) \in \text{Nul}(A)$
- $\overline{\mathbf{w}} \in \text{Im}(T) \iff C_C(\overline{\mathbf{w}}) \in \text{Col}(A)$
- $\text{Dim}(\text{Im}(T)) = \text{rango}\,(A)$

ℵ

Teorema para matrices de Transformación lineal

Sean V y W K-espacios vectoriales ($K = R$ o C). Sea $T : V \to W$.

Si B_1 y B_2 son bases ordenadas de V, y C_1 y C_2 son bases ordenadas de W, entonces:

$$\text{rango}\,([T]_{B_1C_1}) = \text{rango}\,([T]_{B_2C_2}) \tag{5.8}$$

ℵ

5.5. Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

Teorema fundamental de las Transformaciones lineales

Sea $B = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ base de V y $\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_n$ vectores de W. Entonces existe y es única la Transformación lineal que verifica:

$$T(\overline{\mathbf{v}}_i) = \overline{\mathbf{w}}_i \ , \forall i = 1, \ldots, n \tag{5.9}$$

Además, dada una Transformación lineal y un par de bases, existe una única matriz asociada.

La recíproca tambíen es verdadera: dada una matriz y un par de bases, existe una única Transformación lineal asociada.

5.6. Composición de Transformaciones lineales

Composición de Transformaciones lineales

Sea $f \in \ell(V, W)$ y $g \in \ell(W, H) \Rightarrow g \circ f \in (V, H)$. Podemos encontrar la siguientes propiedades:

$$\text{Nul}(f) \subseteq \text{Nul}(g \circ f) \tag{5.10}$$

$$\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g) \tag{5.11}$$

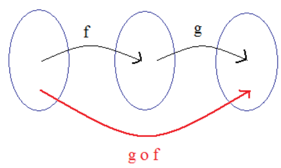

Figura 5.1: Composición

5.7. Operadores lineales

Operadores lineales

Un operador lineal es una Transformación lineal que va de un espacio en si mismo, se escríbe como $T \in \ell(V)$ y cuenta con las siguientes propiedades:

- Si $T_1 \in \ell(V)$ y $T_2 \in \ell(V)$, entonces $T_1 \circ T_2 \in \ell(V)$
- Si $T \in \ell(V)$, $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{\text{n veces}}$

6. Autovalores y Autovectores

6.1. Definiciones básicas

Definiciones básicas

Autovector: Un vector $\overline{\mathbf{v}} \neq 0$ es autovector de $A \in K^{n\times n} \iff \exists \lambda \in K \mid A\overline{\mathbf{v}} = \lambda\overline{\mathbf{v}}$

Autoespacio: El autoespacio de A asociado a un autovalor λ es $S_\lambda(A) = \text{Nul}(A - \lambda I)$

Polinomio característico: El polinomio característico de una matriz $A \in K^{n\times n}$ es $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$, y tiene grado n. Si $K = R$ el polinomio tiene a lo sumo n raíces. Si $K = C$ tiene exactamente n raíces.

Autovalor: Los autovalores λ de una matriz son las raíces de su polinomio característico.

Espectro de una matriz: $\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ es autovalor de } A\}$.

ℵ

6.2. Autovalores complejos de matriz real

Autovalores complejos

Supongamos que $\overline{\mathbf{v}}$ es un autovector de $A \in R^{n\times n}$ asociado a $\lambda = a + \jmath b$ con $a, b \in R, b \neq 0$.
Entonces $\overline{\mathbf{v}}^*$ es también un autovector de $A \in R^{n\times n}$ asociado a $\lambda^* = a - \jmath b$.

En particular si $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ es una base de S_λ, entonces $\{\overline{\mathbf{v}}_1^*, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n^*\}$ es una base de S_{λ^*}

ℵ

6.3. Multiplicidad geométrica y algebráica de un Autovalor

Multiplicidad de Autovalores

Se define:

- $m_g(\lambda) = \text{Dim}(S_\lambda(A))$
- $m_a(\lambda) \doteq$ número de veces que aparece λ como raíz del polinomio característico.

Siempre se verifica que:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \tag{6.1}$$

ℵ

6.4. Propiedades

Propiedades de Autovalores y Autovectores

Sea $A \in K^{n \times n}$:

- A es singular $\iff$ 0 es un autovalor de $A \iff m_g(0) = n - k \iff$ rango $(A) = k < n$
- Dos autovectores asociados a autovalores distintos son Linealmente Independientes
- Si $A \in K^{2x2}$, entonces $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A|$
- Si todas las filas o columnas de A sumas s, entonces s es autovalor de A.
- Sea $p(t)$ un polinomio de grado k. Si λ es autovalor de A, entonces se cumple que $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$, y para cada autovalor μ de $p(A)$ existe un autovalor λ de A tal que $p(\lambda) = \mu$.
- Si λ es autovalor de A:
  - λ es autovalor de A^T
  - λ^{-1} es autovalor de A^{-1} y $S_{\lambda^{-1}}\left(A^{-1}\right) = S_\lambda(A)$
  - $r \cdot \lambda$ es autovalor de $r \cdot A$
  - λ^k es autovalor de A^k, con $k \in N$
  - $\lambda + r$ es autovalor de $A + r \cdot I$

ℵ

6.5. Autovalores y Autovectores de operadores lineales

Autovalores y Autovectores de Operadores lineales

$T : V_K \to V_K$. Un vector $\overline{\mathbf{v}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ es autovector de $T \iff T(\overline{\mathbf{v}}) = \lambda\overline{\mathbf{v}}$, con λ autovalor de T.
$S_\lambda(T) = \{\overline{\mathbf{x}} \in V \mid T(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda\overline{\mathbf{x}}$ y λ autovalor de $T\} = \text{Nul}(T - \lambda I)$. Si B es base de V y A es la matriz de T en esa base, entonces:

$$\sigma(A) = \sigma(T) \forall B \text{ base de } V \tag{6.2}$$

$$\overline{\mathbf{x}} \text{ es autovector de } T \iff C_B(\overline{\mathbf{x}}) \text{ es autovector de } [T]_B = A \tag{6.3}$$

Se deducen las siguientes propiedades:

- $T(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda\overline{\mathbf{x}} \Rightarrow T^n(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda^n\overline{\mathbf{x}}$, $n \in N$
- Si λ es autovalor de T, λ^{-1} es autovalor de T^{-1}
- Si h es un polinomio en K y $T(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}}$, entonces:

$$\sigma[h(A)] = h[\sigma(A)] \tag{6.4}$$

$$S_{h(\lambda)}h(A) = S_\lambda(A) \tag{6.5}$$

- $T : V_K \to V_K$ es regular $\iff 0 \notin \sigma(T)$

ℵ

6.6. Diagonalización

Diagonalización

Los siguientes enunciados son equivalentes para definir si $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable:

- $A \sim D$
- $\exists$ una base de K^n compuesta por autovectores de A
- A tiene n autovalores Linealmente Independientes
- $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) \; \forall \lambda \in \sigma(A)$
- $\exists P$ invertible y D diagonal tal que:

$$A = PDP^{-1} \tag{6.6}$$

Siendo P la matriz de autovectores y D la matriz diagonal de autovalores.

ℵ

6.6.1. Matrices trivialmente diagonalizables

Diagonalizaciones triviales

- **Matriz nula:**
  - **Autovalores:** 0
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz identidad:**
  - **Autovalores:** 1
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz diagonal:**
  - **Autovalores:** a_{ii}, los elementos de la diagonal
  - **Autovectores:** Los que tienen sus componentes nulas, excepto la n-ésima.
- **Matriz escalar:**
  - **Autovalores:** $k \in R$
  - **Autovectores:** Cualquier vector no nulo
- **Matriz de proyección:**
  - **Autovalores:** 1 con $m_a(1) = m_g(1) = \text{Dim}(S)$ y 0 con $m_a(0) = m_g(0) = \text{Dim}(S^{\perp})$
  - **Autovectores:** Los vectores de S asociados a 1 y los asociados a $S^{\perp}$ a 0
- **Matriz de reflexión:**
  - **Autovalores:** 1 con $m_a(1) = m_g(1) = \text{Dim}(S)$ y -1 con $m_a(0) = m_g(0) = \text{Dim}(S^{\perp})$
  - **Autovectores:** Los vectores de S asociados a 1 y los asociados a $S^{\perp}$ a -1

ℵ

6.6.2. Propiedades

Propiedades de la diagonalización

- Si A es diagonalizable entonces A^n es diagonalizable ($D_A^n = D_{A^n}$ y $\sigma(A^n) = \sigma^n(A)$). La recíproca es falsa
- Si $A \in C^{n\times n}$ tiene n autovalores distintos entonces A es diagonalizable. La recíproca es falsa
- $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = p_A(0)$
- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

ℵ

6.6.3. Diagonalización de transformaciones lineales

Diagonalización de Transformaciones Lineales

Los siguientes enunciados son equivalentes para decir que $T \in \ell(V_K)$ con $\text{Dim}(V_K) = n$, es diagonalizable:

- $\exists B$ base de V_K tal que $[T]_B$ es diagonal
- $\exists B$ base de V_K formada por autovectores de T
- T tiene n autovectores Linealmente Independientes

Esa base B y $[T]_B = \text{diag}(\sigma(T))$.

Si $A = [T]_H$, H cualquiera base, entonces T es diagonalizable si y solo si A es diagonalizable.

ℵ

7. Matrices hermíticas y simétricas

7.1. Diagonalización

Matriz antisimétrica

Matriz antisimétrica: Si $A \in R^{n\times n}$ es antisimétrica ($A^T = A$) entonces:

- Los autovalores de A son imaginarios puros o nulos
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- A es diagonalizable unitariamente.

ℵ

Matriz simétrica(hermítica)

Matriz simétrica(hermítica): Si $A \in R^{n \times n}$ es simétrica ($B \in C^{n \times n}$ es hermítica) si y solo si:
A es diagonalizable ortogonalmente:

$$A = PDP^T \tag{7.1}$$

B es diagonalizable unitariamente:

$$B = PDP^H \tag{7.2}$$

Con D real.

Se deducen las siguientes propiedades:

- A y B tienen n autovalores reales
- Los elementos de la diagonal de A y B son reales
- $|A| \in R$
- $\text{Dim}(S_\lambda(A)) = m_a(\lambda) \forall \lambda \in \sigma(A)$
- $\text{Dim}(S_\lambda(B)) = m_a(\lambda) \forall \lambda \in \sigma(B)$
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales

ℵ

Matriz ortogonal(unitaria)

Matriz ortogonal(unitaria): Si $A \in R^{n \times n}$ es ortogonal ($B \in C^{n \times n}$ es unitaria) si y solo si:

$$AA^T = A^T A = I_d \tag{7.3}$$
$$A^T = A^{-1} \tag{7.4}$$

ó

$$BB^H = B^H B = I_d \tag{7.5}$$
$$B^H = B^{-1} \tag{7.6}$$

Las columnas de A y B son Base Ortonormal de R^n y C^n respectivamente.

Se deducen las siguientes propiedades:

- $|A| = \pm 1$. Si $|A| = 1$, A es la matriz de rotación
- Los autovalores tienen módulo 1 y pueden ser reales o complejos
- Son matrices unitariamente diagonalizables
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- Preservan los productos internos: $(A\bar{\mathbf{x}}, A\bar{\mathbf{y}}) = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$
- Preservan las normas asociadas al producto interno: $|A\bar{\mathbf{x}}| = |\bar{\mathbf{x}}|$
- Si C es unitaria, BC y CB son unitarias también.

ℵ

7.2. Descomposición espectral

Descomposición espectral de matrices simétricas

Si $A = PDP^{-1} = PDP^T$, las columnas de P son autovectores ortonormales $\overline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{u}}_n$ de A y los autovalores correspondientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ están en la matriz diagonal D. Entonces:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{u}}_i^T \tag{7.7}$$

ℵ

7.3. Subespacios invariantes por una transformación lineal

Subespacios invariantes por una transformación lineal

- $S \in K^n$ es invariante por $A \in K^{n\times n} \iff \forall \overline{\mathbf{x}} \in S \mid A\overline{\mathbf{x}} \in S$
- $S \subset V$ es invariante por $T \in \ell(V) \iff \forall \overline{\mathbf{x}} \in S \mid T(\overline{\mathbf{x}}) \in S$

Se deducen las siguientes propiedades:

- Si λ es autovalor de T, entonces $S_\lambda(T)$ es un subespacio invariante por T, puesto que:

$$\forall \overline{\mathbf{x}} \in S_\lambda(T) \Rightarrow T(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda\overline{\mathbf{x}} \in S_\lambda(T) \tag{7.8}$$

- No todo subespacio invariante es un autoespacio de T, pero sí los de dimensión 1

ℵ

8. Formas cuadráticas

Formas cuadráticas

Una forma cuadrática en R^n es una función $Q : R^n \to R$ tal que:

$$Q(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}} \tag{8.1}$$

Donde A es una matriz simétrica $\in R^{n\times n}$.

ℵ

Teorema de los ejes principales

Sea A una matriz simétrica $\in R^{n\times n}$. Entonces existe un cambio ortogonal de variable, $\overline{\mathbf{x}} = P\overline{\mathbf{y}}$, donde P es una matriz ortogonal tal que $|P| = +1$ e $\overline{\mathbf{y}}$ es el nuevo vector, que transforma la forma cuadrática $\overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}}$ a una forma cuadrática $\overline{\mathbf{y}}^T D\overline{\mathbf{y}}$ sin términos cruzados:

$$\overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{x}} = (P\overline{\mathbf{y}})^T A (P\overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{y}}^T \underbrace{P^T A P}_{D} \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}}^T D\overline{\mathbf{y}} = g(\overline{\mathbf{y}}) \tag{8.2}$$

ℵ

Perspectiva geométrica de los ejes principales

Sea la forma cuadrática $Q(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^T A\bar{\mathbf{x}}$, con $A = PDP^T$.

El conjunto de todas las $\bar{\mathbf{x}} \in R^n \mid \bar{\mathbf{x}}^T A\bar{\mathbf{x}} = c$ es una elipse, una hipérbola, dos rectas, un punto o ninguno.

Si A es diagonal, la gráfica está en posición estándar. Si A no es diagonal, la gráfica está girada hasta salirse de la posición estándar. Los **ejes principales** son los autovectores de A y son el nuevo sistema de coordenadas para los cuales la gráfica está en posición estándar.

8.1. Clasificación

Clasificación de las formas cuadráticas

Una forma cuadrática $Q(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^T A\bar{\mathbf{x}}$ es:

	Definición	**Criterio I**	**Criterio II**
Definida positiva	$Q(\bar{\mathbf{x}}) > 0,$ $\forall\bar{\mathbf{x}} \neq 0$	$a_{11} > 0,$ $\lvert A\rvert > 0$	Autovalores de A positivos
Semidefinida positiva	$Q(\bar{\mathbf{x}}) \geq 0,$ $\forall\bar{\mathbf{x}}$	$\lvert A_k\rvert \geq 0,$ $k = 1, \ldots, n$	Autovalores de A positivos o nulos
Definida negativa	$Q(\bar{\mathbf{x}}) < 0,$ $\forall\bar{\mathbf{x}} \neq 0$	$a_{11} < 0,$ $\lvert A\rvert > 0$	Autovalores de A negativos
Semidefinida negativa	$Q(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0,$ $\forall\bar{\mathbf{x}}$	$\lvert A_k\rvert \leq 0,$ $k = 1, \ldots, n$	Autovalores de A negativos o nulos
Indefinida	$Q(\bar{\mathbf{x}}) \asymp 0$		Autovalores de A negativos y/o positivos

8.2. Optimización restringida

Teorema de Rayleigh

Sea la forma cuadrática $Q(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A \overline{\mathbf{x}}$, con A simétrica. Se verifica:

$$\lambda_{min}(A) \leq \frac{Q(\overline{\mathbf{x}})}{\| \overline{\mathbf{x}} \|^2} \leq \lambda_{max}(A) \tag{8.3}$$

Sea extremar una forma cuadrática $f : R^n \to R$, $f(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A \overline{\mathbf{x}}$, ($A$ simétrica), sujeto a la restricción $|\overline{\mathbf{x}}| = \alpha$.

El máximo de f es $\lambda_{max}(A)\alpha^2$ y se alcanza en $M = \{\overline{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{max}}(A) \mid |\overline{\mathbf{x}}| = \alpha\}$

El mínimo de f es $\lambda_{min}(A)\alpha^2$ y se alcanza en $m = \{\overline{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{min}}(A) \mid |\overline{\mathbf{x}}| = \alpha\}$

Sea extremar una forma cuadrática $f : R^n \to R$, $f(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T A \overline{\mathbf{x}}$,($A$ simétrica), sujeto a la restricción $\overline{\mathbf{x}}^T B \overline{\mathbf{x}} = \alpha^2$, y sea B definida positiva tal que $B = P_B D_B P_B^T$. Mediante el cambio de variable $\overline{\mathbf{y}} = \sqrt{D_B} P_B^T \overline{\mathbf{x}} \to \overline{\mathbf{x}} = \sqrt{D_B^{-1}} P_B \overline{\mathbf{y}}$, esto es equivalente a extremar $g(\overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{y}}^T \left(\sqrt{D_B^{-1}}^T P_B^T A P_B \sqrt{D_B^{-1}} \right)$ y sujeto a la restricción $|\overline{\mathbf{y}}| = \alpha$. Entonces:

$$\text{Máx } g(\overline{\mathbf{y}}) = \text{Máx } f(\overline{\mathbf{x}}) \tag{8.4}$$
$$\text{mín } g(\overline{\mathbf{y}}) = \text{mín } f(\overline{\mathbf{x}}) \tag{8.5}$$

Los $\overline{\mathbf{x}}$ en donde se alcanza ese extremo se hallan realizando $\overline{\mathbf{x}} = P_B \overline{\mathbf{y}}$

9. Descomposición en Valores Singulares (DVS)

9.1. Definición

Descomposición en Valores Singulares (DVS)

Valores singulares: Se define como:

$$VS(A) = \sqrt{\lambda_i}\ , \forall \lambda_i \in \sigma(A^T A) \tag{9.1}$$

Sea A una matriz de $m \times n$ con rango r. Entonces existe una matriz Σ, y existen una matriz U ortogonal de $m \times m$ y una matriz V ortogonal de $n \times n$ tales que $A = U \Sigma V^T$ donde:

- $\Sigma \in R^{m \times n}$ es tal que $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, y la matriz diagonal D tiene como elementos a los primeros r valores singulares de $A^T A$, ordenados en forma descendente $\sigma_i \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.
- $V \in R^{n \times n}$ es una matriz cuyas columnas son unas Base Ortonormal (BON) de autovectores $\{\overline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_n\}$ asociados a los autovalores de $A^T A$.
- $U \in R^{m \times m}$ es una matriz cuyas primeras r columnas son los vectores $\frac{A\overline{\mathbf{v}}_1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{A\overline{\mathbf{v}}_r}{\sigma_r}$. Las otras columnas se obtienen completando la Base Ortonormal (BON) de R^m. Las columnas de U son autovectores de AA^T

9.2. Subespacios de las DVS

Subespacios de la DVS

Sea $A \in K^{m\times n}$:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \overline{\mathbf{u}}_1 & \dots & \overline{\mathbf{u}}_m \\ | & & | \end{bmatrix}}_{m\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \overline{\mathbf{v}}_1 & \dots & \overline{\mathbf{v}}_n \\ | & & | \end{bmatrix}^T}_{n\times n} \tag{9.2}$$

Si rango $(A) = r$ entonces:

$$\{\underbrace{\overline{\mathbf{u}}_1, \dots, \overline{\mathbf{u}}_r}_{\text{BON de Col}(A)}, \overbrace{\overline{\mathbf{u}}_{r+1}, \dots, \overline{\mathbf{u}}_m}^{\text{BON de Col}(A)^\perp}\} \tag{9.3}$$

$$\{\underbrace{\overline{\mathbf{v}}_1, \dots, \overline{\mathbf{v}}_r}_{\text{BON de Fil}(A)}, \overbrace{\overline{\mathbf{v}}_{r+1}, \dots, \overline{\mathbf{v}}_m}^{\text{BON de Fil}(A)^\perp}\} \tag{9.4}$$

ℵ

9.3. Propiedades de las DVS

Propiedades de la DVS

- rango (A) = rango (Σ) = rango $\left(\Sigma^T\right) = \#VS(A)_{>0}$
- $A \in R^{n\times n}$ es inversible $\iff A$ tiene n VS positivos
- $VS(A)_{>0} = VS(A^T)_{>0}$
- Si $A \in R^{n\times n} \Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^{n} VS_i(A)$
- Si A es cuadrada y definida positiva $\Rightarrow \sigma(A) = VS(A)$
- Si $A \sim B \Rightarrow VS(A) = VS(B)$
- Si B es ortogonal $\Rightarrow A, AB$ y BA tienen los mismos valores singulares
- Si A es cuadrada y simétrica $\Rightarrow VS_i(a) = |\lambda_i(A)|$
- Si las filas de A son una Base Ortonormal (BON), los valores singulares no nulos de A son 1
- Si las columnas de A son una Base Ortonormal (BON), los valores singulares de A son 1
- La matriz A^TA (*Matriz de Gram* de A) es siempre simétrica y semidefinida positiva, con lo cual nunca tendrá valores singulares negativos. Será definida positiva cuando A tenga columnas Linealmente Independientes.
- Sea $T : R^m \to R^n$ una transformación lineal tal que $T(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}}$. Sea la forma cuadrática $f(\overline{\mathbf{x}}) = |T(\overline{\mathbf{x}})|^2 = \overline{\mathbf{x}}^T(A^TA)\overline{\mathbf{x}}$. Entonces:
  - El máximo de $f(\overline{\mathbf{x}})$ sujeto a $|\overline{\mathbf{x}}| = 1$ es $\lambda_{max}\left(A^TA\right)$. Entonces el máximo de $|T(\overline{\mathbf{x}})|$ es $VS_{max}(A)$ y se alcanza en $M = \{\overline{\mathbf{x}} \in R^m \mid \overline{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{max}}\left(A^TA\right), |\overline{\mathbf{x}}| = 1\}$
  - El mínimo de $f(\overline{\mathbf{x}})$ sujeto a $|\overline{\mathbf{x}}| = 1$ es $\lambda_{min}\left(A^TA\right)$. Entonces el mínimo de $|T(\overline{\mathbf{x}})|$ es $VS_{min}(A)$ y se alcanza en $m = \{\overline{\mathbf{x}} \in R^m \mid \overline{\mathbf{x}} \in S_{\lambda_{min}}\left(A^TA\right), |\overline{\mathbf{x}}| = 1\}$

ℵ

9.4. DVS reducida y Pseudoinversa

DVS reducida

Sea $A \in R^{n\times m}$. Si $A = U\Sigma V^T$ y rango $(A) = r$. Entonces una Descomposición en Valores Singulares reducida (DVSr) de A es:

$$A = U_r\Sigma_rV_r^T \tag{9.5}$$

Siendo $U_r \in R^{n\times r}$,$\Sigma_r \in R^{r\times r}$,$V_r^T \in R^{r\times m}$

ℵ

Pseudoinversa de Moore-Penrose

Se define la **pseudoinversa de Moore-Pensore** como:

$$A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T \tag{9.6}$$

Sea $A \in R^{n\times m}$, se deducen las siguientes propiedades:

- $A^+ = A^\#$ cuando rango $(A) = m$
- $A^+ A = V_r V_r^T = P_{\text{Fil}(A)}$
- $AA^+ = U_r U_r^T = P_{\text{Col}(A)}$

10. Ecuaciones diferenciales

10.1. Wronskiano

Matriz de Wronski

Sea $A = \{f_1, \dots, f_q\}$ funciones definidas en un invervalo $I \subset R$, a valores en C, con derivada hasta el orden $q-1$ continua en I. La **matriz de Wronski** de A es,para cada $\overline{\mathbf{x}} \in I$

$$M_{w_A}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q(\overline{\mathbf{x}}) \\ f_1'(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q'(\overline{\mathbf{x}}) \\ f_1''(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q''(\overline{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(q-1)}(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q^{(q-1)}(\overline{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \tag{10.1}$$

Se define al **Wronskiano** como:

$$w_A(\overline{\mathbf{x}}) = |M_{w_A}| = \begin{vmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q(\overline{\mathbf{x}}) \\ f_1'(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q'(\overline{\mathbf{x}}) \\ f_1''(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q''(\overline{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(q-1)}(\overline{\mathbf{x}}) & \dots & f_q^{(q-1)}(\overline{\mathbf{x}}) \end{vmatrix} \tag{10.2}$$

Se deducen las siguientes propiedades:

- Si existe un $\overline{\mathbf{x}}_0 \in I$ tal que $w_A(\overline{\mathbf{x}}_0) \neq 0$, entonces las funciones $f_1, \dots, f_q$ son Linealmente Independientes
- Si un conjunto es Linealmente Dependiente en I, su wronskiano es la función nula. La recíproca es falsa; es verdadera solo si las funciones que componen el wronskiano son soluciones de una Ecuación Diferencial lineal de orden superior
- La derivada del wronskiano es el determinante obtenido derivando la última fila.
- La derivada del wronskiano es la suma de q determinantes.

10.2. Identidad de Abel

Identidad de Abel

Sea la ecuación diferencial $y(\overline{\mathbf{x}})^{(n)}+a_{n-1}\cdot y(\overline{\mathbf{x}})^{(n-1)}+\ldots+a_1\cdot y'(\overline{\mathbf{x}})+a_0\cdot y(\overline{\mathbf{x}}) = 0$ en un intervalo $I \subset R$, sea $S = \{y_1, \ldots, y_n\}$ el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial, y sea W_s el Wronskiano de este conjunto. Entonces se verifica que:

$$W_s'(\overline{\mathbf{x}}) = -a_{n-1}\cdot W_s(\overline{\mathbf{x}}) \tag{10.3}$$

ℵ

10.3. Existencia y unicidad de Problemas de Valores Iniciales (PVI)

Problemas de Valores Iniciales

Sea el problema $a_n y(\overline{\mathbf{x}})^{(n)} + a_{n-1}\cdot y(\overline{\mathbf{x}})^{(n-1)} + \ldots + a_1\cdot y'(\overline{\mathbf{x}}) + a_0\cdot y(\overline{\mathbf{x}}) = f(\overline{\mathbf{x}})$ sujeto a la condición inigial $y(\overline{\mathbf{x}}_0) = y_0$. La condición de existencia y unicidad de la solución del problema de valores iniciales es:

$$\text{Ecuación diferencial normal en } I : a_n \neq 0, \forall \overline{\mathbf{x}} \in I \tag{10.4}$$

$$\overline{\mathbf{x}}_0 \in I \tag{10.5}$$

ℵ

10.4. Variables separables

Variables separables

$$\begin{aligned} y'(\overline{\mathbf{x}}) &= \frac{f(\overline{\mathbf{x}})}{g(y)} && \text{Ecuación diferencial} \\ \frac{dy}{d\overline{\mathbf{x}}} &= \frac{f(\overline{\mathbf{x}})}{g(y)} && \text{Derivada con diferenciales} \\ g(y)dy &= f(\overline{\mathbf{x}})d\overline{\mathbf{x}} && \text{Separo las variables} \\ G(y) &= F(\overline{\mathbf{x}}) + c && \text{Integro} \end{aligned}$$

ℵ

10.5. Lineales de 1^{er} orden

Lineales de 1^{er} orden

Obtenemos primero la solución general de la homogénea y_H y luego una particular de la no homogénea y_P. La solución buscada será $y_G = y_H + y_P$

- La solución de la ecuación homogénea asociada a $y' = p(x)y = 0$ es de variables separables, una solución es $y_H(x) = e^{-\int p(x)dx}$
- La solución no homogénea se obtiene multiplicando toda la ecuación por el factor integrante de Lagrange:

$$u(v) = e^{\int p(x)dx} \tag{10.6}$$

Y la ecuación a resolver será $[u(v)\cdot y(x)]' = u(v)\cdot q(x)$

ℵ

10.6. Diferencial exacta

Diferencial exacta

Son del tipo $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Es diferencial exacta si existe $f(x,y)$ tal que $df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, es decir si:

$$\frac{df}{dx} = P(x,y) \tag{10.7}$$
$$\frac{df}{dy} = Q(x,y) \tag{10.8}$$

En ese caso, la solución general es $f(x,y) = C$. Se cumple que la ecuación anterior es diferencial exacta si y solo si $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$

Se dice además que $\mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$ si al multiplicar la ecuación por $\mu(x,y)$ la ecuación resulta diferencial exacta.

ℵ

10.7. Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Son del tipo $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)}(t) = 0, \forall t \in I$.

Polinomio característico: $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i^n$

Espectro de la ecuación diferencial: $\sigma(p) = \{\lambda \in C \mid p(\lambda) = 0\}$

$y_H(t) = t^k e^{\lambda t}$ es una solución de la Ecuación diferencial si $\lambda \in \sigma(p)$, con multiplicidad m, $k = 0, 1, \ldots, m-1$

Si la ecuación diferencial es de coeficientes reales, las raíces del polinomio característico aparecerán conjugadas. Es decir: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \jmath\beta$.Luego:

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + \jmath \sin(\beta t)\right)$$
$$y_2(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) - \jmath \sin(\beta t)\right)$$

Entonces, $\text{gen}\{y_1, y_2\} = \text{gen}\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$

ℵ

10.8. Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Son del tipo $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)}(t) = f(x)$.

La solución es de la forma $y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)$, donde $y_H(x)$ se obtiene del caso anterior, e $y_P(x)$ se obtiene mediante algunos de estos métodos:

- **Método de variación de parámetros:** Aplicable en cualquier caso.

  $y_P(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \cdot y_i(x)$, siendo $y_i(x)$ las soluciones de $y_H(x)$, y $u_i(x)$ las funciones que satisfacen:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{f(x)}{a_n} \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

- **Método de coeficientes indeterminados:** Aplicable cuando $f(x)$ es exponencial, polinómica o trigonométrica.

  Siendo $a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(x)$, con $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i(x) \cdot e^{m_i x}$, $y_P(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} q_i(x) \cdot e^{m_i x}$

  - Si $e^{m_k x}$ no es solución de la Ecuación diferencial ordinaria homogénea asociada (i.e. m_k no es solución de $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 =$), q_k es un polinomio de grado p_k con coeficientes a determinar
  - Si $e^{m_k x}$ si es solución de la Ecuación diferencial ordinaria homogénea asociada (i.e. m_k no es solución de $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 =$), q_k es un polinomio de un grado mayor que p_k con coeficientes a determinar
  - Una vez armada la $y_P(t)$ se reemplaza en la ecuación diferencial original, e igualando los términos semejantes se hallan los coeficientes indeterminados.

ℵ

11. Sistemas de Ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X' = AX + B$$

11.1. Sistemas homogéneos con A diagonalizable

Sistemas homogéneos con A diagonalizable

La solución de $X' = AX + B$, ($A \in K^{n\times n}$, con λ_i autovalor de A y $\overline{\mathbf{v}}_i$ autovector de A asociado a λ_i,es:

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\mathbf{v}}_i e^{\lambda_i t} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \overline{\mathbf{v}}_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \overline{\mathbf{v}}_n e^{\lambda_n t} \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\varphi(t)\in K^{n\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{C} \tag{11.1}$$

ℵ

11.2. Sistemas no homogéneos con A diagonalizable

Sistemas no homogéneos con A no diagonalizable

Sea el sistema $X' = AX + B$. La solución es $X_G = X_H + X_P$ con:

- $X_H = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\mathbf{v}}_i e^{\lambda_i t} = \varphi(t)C$
- $X_P = \varphi(t) \cdot u(t)$, siendo $u(t)$ tal que $\varphi(t) \cdot u'(t) = B$

ℵ

11.3. Sistemas homogéneos con A no diagonalizable

Sistemas no homogéneos con A diagonalizable

Sea el sistema $X' = AX$. Con A no diagonalizable, proponemos una factorización de la forma $A = PJP^{-1}$, donde $J \in C^{n\times n}$ es la **matriz de Jordan** de A que tiene la siguiente estructura en bloques:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

Donde cada bloque J_i es una matriz de $k_i \times k_i$ de la forma:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Para algún autovalor λ_i de A.

Dado un autovalor λ_i, su multiplicidad geométrica es el número de bloques de Jordan correspondientes a λ_i, y su multiplicidad algebraica es la suma de los tamaños de los bloques correspondientes a ese autovalor.

Luego: $X' = AX \underset{\text{X=PY}}{\longrightarrow} PY' = PJP^{-1}PY \longrightarrow Y' = JY$. Resolvemos este sistema y la solución general del problema se expresará como $X(t) = PY(t)$

ℵ

Sistemas no homogéneos con $A \in R^{2\times 2}$ no diagonalizable

A necesariamente posee un autovalor doble $\lambda \in R$ de multiplicidad geométrica 1, con lo cual la matriz J posee un solo bloque correspondiente a λ:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Respecto de la matriz $P = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2]$ debe ser inversible y $AP = PJ$. La matriz P se obtiene hallando un par de vectores $\overline{\mathbf{v}}_1$ y $\overline{\mathbf{v}}_2$ Linealmente Independientes que satisfagan las condiciones $(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_1 = 0$ y $(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1$. Observamos que $\overline{\mathbf{v}}_1$ es autovector de A asociado a λ

ℵ

Sistemas no homogéneos con $A \in R^{3\times 3}$ no diagonalizable

1. A tiene un autovalor triple $\lambda \in R$ de multiplicidad geométrica 1. En este caso:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

Respecto de $P = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3]$, estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_1 = 0 \tag{11.6}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1 \tag{11.7}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_3 = \overline{\mathbf{v}}_2 \tag{11.8}$$

Observemos que $\overline{\mathbf{v}}_1$ es autovector de A asociado a λ

2. A tiene un autovalor triple $\lambda \in R$ de multiplicidad geométrica 2. En este caso:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

Respecto de $P = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3]$, estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_1 = 0 \tag{11.10}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1 \tag{11.11}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_3 = 0 \tag{11.12}$$

Observemos que $\overline{\mathbf{v}}_1$ y $\overline{\mathbf{v}}_3$ son autovectores de A asociados a λ

3. A tiene un autovalor doble $\lambda \in R$ de multiplicidad geométrica 1 y un autovalor $\mu \in R$ simple. En este caso J debe tener dos bloques de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{11.13}$$

Respecto de $P = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \overline{\mathbf{v}}_3]$, estos autovectores deben ser Linealmente independientes y satisfacer las condiciones:

$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_1 = 0 \tag{11.14}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1 \tag{11.15}$$
$$(A - \lambda I)\,\overline{\mathbf{v}}_3 = 0 \tag{11.16}$$

Observemos que $\overline{\mathbf{v}}_1$ y $\overline{\mathbf{v}}_3$ son autovectores de A asociados a λ y μ respectivamente.

ℵ