优化方法

2016-2017学年工科硕士课程

第2章　线性规划

2.1 线性规划的标准形式

标准形式的线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \qquad\qquad\vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0. \end{aligned} \tag{1-1}$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_m \geq 0$.

上述线性规划问题可简写为

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1-2}$$

其中

$$\begin{aligned} & A = (a_{ij})_{m \times n}; \\ & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T; \\ & \mathrm{rank}(A) = m \leq n, c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T; \\ & b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T, \text{且} b \geq 0. \end{aligned}$$

例1.1

将下述线性规划问题化为标准形式.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w = 7x + 12y \\
\text{s.t.} \quad & 9x + 4y \leq 360 \\
& 4x + 5y \leq 200 \\
& 3x + 10y \leq 300 \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

例1.1

将下述线性规划问题化为标准形式.

$$\begin{aligned}
\max \quad & w = 7x + 12y \\
\text{s.t.} \quad & 9x + 4y \leq 360 \\
& 4x + 5y \leq 200 \\
& 3x + 10y \leq 300 \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}$$

令$x_4 = x, x_5 = y$,并引入松弛变量$x_1, x_2, x_3 \geq 0$,则上述问题可化为

$$\begin{aligned}
\max \quad & w = 7x_4 + 12x_5 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 9x_4 + 4x_5 = 360 \\
& x_2 + 4x_4 + 5x_5 = 200 \\
& x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 300 \\
& x_1, x_2, \cdots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

标准形式的转化方法

- 对于不等式约束,通过引入松弛变量或剩余变量总可以化为等式约束,

标准形式的转化方法

- 对于不等式约束,通过引入松弛变量或剩余变量总可以化为等式约束,
- 对于$b_i < 0$的情况,在该式两边乘以-1,

标准形式的转化方法

- 对于不等式约束,通过引入松弛变量或剩余变量总可以化为等式约束,
- 对于$b_i < 0$的情况,在该式两边乘以-1,
- 对于自由变量,如x_1,有两种方法:

标准形式的转化方法

- 对于不等式约束,通过引入松弛变量或剩余变量总可以化为等式约束,
- 对于$b_i < 0$的情况,在该式两边乘以-1,
- 对于自由变量,如x_1,有两种方法:

  (1) 令$x_1 = u_1 - v_1, u_1 \geq 0, v_1 \geq 0$,

标准形式的转化方法

- 对于不等式约束,通过引入松弛变量或剩余变量总可以化为等式约束,
- 对于$b_i < 0$的情况,在该式两边乘以-1,
- 对于自由变量,如x_1,有两种方法:
  (1) 令$x_1 = u_1 - v_1, u_1 \geq 0, v_1 \geq 0$,
  (2) 从约束方程之一解出x_1,代入其他的约束方程及目标函数.

例1.2

研究问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

例1.2

研究问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

这里x_1为自由变量,从第一个约束方程$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$中解出x_1,得

$$x_1 = 5 - 2x_2 - x_3,$$

代入目标函数w及第二个约束方程中,得到

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 5 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 + x_3 = 4 \\ & x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

例1.2

考虑标准形式的线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1-2}$$

设A的秩为m,则可从A的n列中选出m列,使它们线性无关,不妨设A的前m列是线性无关的.令

$$B = (a_1, a_2, \cdots, a_m) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

基本可行解 II

矩阵B是非奇异的,因此方程组

$$Bx_B = b \tag{1-5}$$

有唯一解$x_B = B^{-1}b$，其中x_B是一个m维列向量. 令$x^T = (x_B^T, 0^T)$,我们就得到$Ax = b$的一个解x.

我们称B为基或基底,称这样得到的x为关于基底B的基本解,而与B的列相应的x的分量称为基本变量.当基本解中有一个或一个以上的基本变量x_i为零时,则称为退化的基本解.

当一个可行解x又是基本解时,则成为基本可行解,若它是退化的,则称为退化的基本可行解.

例1.3

对线性规划问题:

$$\begin{aligned}
\max \quad & w = 10x_1 + 11x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \\
& 5x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 8 \\
& x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 1 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}$$

令$x_1 = 0, x_2 = 0$,得$x_3 = 9, x_4 = 8, x_5 = 1$,则$x = (0, 0, 9, 8, 1)$是一个基本可行解.

变量的个数n,称为线性规划的维数;等式约束方程的数目m称为线性规划的阶数.一个m阶n维的线性规划问题,其基本可行解的个数不超过C_n^m个,而

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

设$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$为线性规划问题的一个可行解,当它使目标函数$f(x)$达到最小(大)值时,我们称其为最优可行解,简称为最优解或解,而目标函数所到达的最小(大)值称为线性规划问题的值或最优值.

定义2.1

称

$$H^+ = \{x|x \in \mathbf{R}^n, c^T x \geq b\}$$

为正闭半空间,

$$H^- = \{x|x \in \mathbf{R}^n, c^T x \leq b\}$$

为负闭半空间.H^+和H^-统称为闭半空间.

定义2.2

有限个闭半空间的交集称为多面凸集,亦即集合$S = \{x|Ax \leq b\}$(其中$A = (a_{ij})_{m\times n}$)称为多面凸集或凸多胞形.

定义2.2

有界且非空的多面凸集称为多面凸体或凸多面体.

定义2.4

称S为凸集,$x \in S$,若对于x找不到$x_1, x_2 \in S(x_1 \neq x_2)$,使

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 (0 < \alpha < 1)$$

成立,则称x为凸集S的极点,或顶点.

定理2.1

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,其秩为m,且$m<n$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$,则矢量x为凸集

$$R=\{x|Ax=b,x\geq 0\} \tag{2-1}$$

的一个极点的充要条件是x为

$$Ax=b,\quad x\geq 0 \tag{2-2}$$

的一个基本可行解.

证明-必要性

设x为R的一个极点,只需证x为基本解.设x有k个分量大于零,不妨设前k个分量$x_i > 0(i = 1, 2, \cdots, k)$,只需证$a_1, a_2, \cdots, a_k$是线性无关的.
反证法. 假设$a_1, a_2, \cdots, a_k$线性相关,则必有k个不全为零的数$y_1, y_2, \cdots, y_k$使得$\sum_{i=1}^k y_i a_i = 0$.
令$y = (y_1, y_2, \cdots, y_k, 0, \cdots, 0)^T$,则$Ay = 0$. 因为$x_i > 0, i = 1, 2 \cdots, k$,所以可选取足够小的$\varepsilon > 0$,使得

$$x + \varepsilon y \geq 0, \quad x - \varepsilon y \geq 0$$

显然$x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y)$.

证明-充分性

设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T$是(2-2)的一个基本可行解,因而列向量$a_1,a_2,\cdots,a_k$线性无关,需证$x$一定是$R$的极点.
假设x不是R的一个极点,则R中必有两个不同的点y,z使

$$x=\alpha y+(1-\alpha)z \quad (0<\alpha<1)$$

即$x_j=\alpha y_j+(1-\alpha)z_j, j=1,2,\cdots,n$. 当$j=k+1,\cdots,n$时,因为$x_j=0$,则$y_i=z_j=0$. 由$Ay=b, Az=b$,

$$\begin{aligned} y_1a_1+y_2a_2+\cdots+y_ka_k&=b\\ z_1a_1+z_2a_2+\cdots+z_ka_k&=b \end{aligned}$$

两式相减得$\sum_{j=1}^{k}(y_j-z_j)a_j=0$ 由于$y\neq z$,与线性无关矛盾.

线性规划的基本定理

定理2.2

设给定的线性规划问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & w = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2-3}$$

其中$A = (a_{ij})_{m\times n}$,其秩为m,且$m < n$.

(1) 若(2-3)有可行解,那么它必有基本可行解;

(2) 若(2-3)有最优可行解,那么它必有最优的基本可行解.

证明 I

(1)x为可行解.设x有p个分量$x_i > 0$,不妨设前p个分量$x_i > 0, i = 1, 2 \cdots, p$,因此有$\sum_{i=1}^{p} x_i a_i = b$.

情形1 当$a_1, a_2, \cdots, a_p$线性无关时,易证x为基本解.

情形2 当$a_1, a_2, \cdots, a_p$线性相关时,则存在不全为零的数$y_1, y_2, \cdots, y_p$使

$$\sum_{i=1}^{p} y_i a_i = 0 \tag{2-5}$$

我们总可以假定至少有一个$y_i > 0$,令

$$\varepsilon = \min_{1 \le i \le p} \{\frac{x_i}{y_i} | y_i > 0\}.$$

令$y = (y_1, y_2, \cdots, y_p, 0, \cdots, 0)^T$,则$x - \varepsilon y$满足

$$A(x - \varepsilon y) = b, \ x - \varepsilon y \ge 0,$$

证明 II

即$x-\varepsilon y$是可行解,而且至多有$p-1$个分量大于零.如果这些大于零的分量$x_i-\varepsilon y_i$所对应的列向量a_i是线性无关的,则转化为情形1.反之,则可重复上述过程.

(2)设x为最优可行解,设$c^Tx=s$,则s为最优值.考虑集合

$$\bar{R}=\{x|Ax=b,x\geq 0,c^Tx=s\}$$

为可行集,则利用(1)可证.

推论1

若由(2-3)确定的可行集

$$R = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$$

是非空的,则它至少有一个极点.

推论2

如果一个线性规划问题(2-3)存在有限的最优解,则至少存在一个是可行集R的极点的有限最优解.

推论3

对应于(2-3)的可行集R至多有有限多个极点.

上面的定理和推论指出:

- 一个线性规划问题(2-3)的可行集R非空,那么该线性规划问题的基本可行解x一定存在;
- 如果线性规划问题(2-3)的最优解存在,那么它一定能在(2-3)的可行集R的一个极点上达到;
- 寻求线性规划(2-3)的解,只要在基本可行解(R的极点)中去寻找,而极点的个数有限,这就从理论上保证了我们有可能在有限步内求得线性规划问题的最优解.

2.3.1 单纯形法的基本思想

由线性规划的基本定理,一个求解线性规划问题的直观想法是,把所有的基本可行解求出来,并求出其相应的目标函数值,相互比较,即可求出其中相应目标函数值最小(大)的最优解了.当线性规划问题的阶数m与维数n较大时,计算量迅速增长.

2.3.1 单纯形法的基本思想

由线性规划的基本定理,一个求解线性规划问题的直观想法是,把所有的基本可行解求出来,并求出其相应的目标函数值,相互比较,即可求出其中相应目标函数值最小(大)的最优解了.当线性规划问题的阶数m与维数n较大时,计算量迅速增长. 单纯形法的基本思想是:给出一种规则,使由LP问题一个基本可行解转移到另一个基本可行解,目标函数值是减小的,而且两个基本可行解之间的转换是容易实现的.经过有限次迭代,即可求得所需的最优基本可行解.

2.3.2 基本解的转换

设线性规划问题为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & w = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0.
\end{aligned}
\tag{3-1}
$$

其中 $m < n, b_1, b_2, \cdots, b_m \geq 0$. 令 $A = (a_{ij})_{m\times n}, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$
则(3-1)可写为

$$Ax = b \tag{3-1'}$$

假定A的秩为m,不妨设A的前m列线性无关.则(3-1)式总可化为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + y_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{1n}x_n = y_{10} \\ \quad x_2 \qquad\quad + y_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{2n}x_n = y_{20} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad x_m \; + y_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{mn}x_n = y_{m0} \end{cases} \tag{3-3}$$

我们称(3-3)为约束方程组的规范形式.常简写为

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij}x_j = y_{i0}, \; i = 1, 2, \cdots, m \tag{3-3'}$$

其相应的基本解为$x = (y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{m0}, 0, \cdots, 0)^T$

2.3.2 基本解的转换

令$x_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T,x_N=(x_{m+1},\cdots,x_n)^T$,则$x_i(i=1,2,\cdots,m)$为基本变量, $x_i(i=m+1,\cdots,n)$为非基本变量.记$y_0=(y_{10},\cdots,y_{m0})^T$,因而(3-3)也可写称为

$$(I_m,N)\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=y_0$$

例 3.1

设规范形式的约束方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\; +x_4 + x_5 - x_6 = 5 \\ \quad x_2 \quad\quad +2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ \quad\quad x_3 \quad -x_4 + 2x_5 - x_6 = -1 \end{cases}$$

求基本变量为x_4, x_5, x_6的基本解.

例 3.1

设规范形式的约束方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +x_4+x_5-x_6=5 \\ \quad x_2 \qquad +2x_4-3x_5+x_6=3 \\ \qquad x_3 \quad -x_4+2x_5-x_6=-1 \end{cases}$$

求基本变量为x_4, x_5, x_6的基本解.

不难看出:基本解为$x=(5,3,-1,0,0,0)^T$,基本变量为x_1, x_2, x_3.

(1) 用非基变量x_4代替基本变量x_1,取主元为1.

例 3.1

设规范形式的约束方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad +x_4+x_5-x_6=5 \\ \quad x_2 \quad\quad +2x_4-3x_5+x_6=3 \\ \quad\quad x_3 \quad -x_4+2x_5-x_6=-1 \end{cases}$$

求基本变量为x_4, x_5, x_6的基本解.

不难看出:基本解为$x=(5,3,-1,0,0,0)^T$,基本变量为x_1, x_2, x_3.

(1) 用非基变量x_4代替基本变量x_1,取主元为1.

(2) 用非基变量x_5代替基本变量x_2,取主元为-5.

例 3.1

设规范形式的约束方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad +x_4 + x_5 - x_6 = 5 \\ \quad x_2 \quad\quad +2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ \quad\quad x_3 \quad -x_4 + 2x_5 - x_6 = -1 \end{cases}$$

求基本变量为x_4, x_5, x_6的基本解.

不难看出:基本解为$x = (5, 3, -1, 0, 0, 0)^T$,基本变量为$x_1, x_2, x_3$.

(1) 用非基变量x_4代替基本变量x_1,取主元为1.

(2) 用非基变量x_5代替基本变量x_2,取主元为-5.

(3) 用非基变量x_6代替基本变量x_3,取主元为-1/5.

例 3.1

设规范形式的约束方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +x_4+x_5-x_6=5 \\ \qquad x_2 \qquad +2x_4-3x_5+x_6=3 \\ \qquad\qquad x_3 \; -x_4+2x_5-x_6=-1 \end{cases}$$

求基本变量为x_4,x_5,x_6的基本解.

不难看出:基本解为$x=(5,3,-1,0,0,0)^T$,基本变量为x_1,x_2,x_3.

(1) 用非基变量x_4代替基本变量x_1,取主元为1.

(2) 用非基变量x_5代替基本变量x_2,取主元为-5.

(3) 用非基变量x_6代替基本变量x_3,取主元为-1/5.

例 3.1

设规范形式的约束方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad +x_4 + x_5 - x_6 = 5 \\ \quad x_2 \quad\quad +2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ \quad\quad x_3 \quad -x_4 + 2x_5 - x_6 = -1 \end{cases}$$

求基本变量为x_4, x_5, x_6的基本解.

不难看出:基本解为$x = (5, 3, -1, 0, 0, 0)^T$,基本变量为$x_1, x_2, x_3$.

(1) 用非基变量x_4代替基本变量x_1,取主元为1.

(2) 用非基变量x_5代替基本变量x_2,取主元为-5.

(3) 用非基变量x_6代替基本变量x_3,取主元为-1/5.

则新的基本解为$x^* = (0, 0, 0, 4, 2, 1)^T$,其基本变量为$x_4, x_5, x_6$.

计算表格

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	0	0	**1**	1	-1	5
0	1	0	2	-3	1	3
0	0	1	-1	2	-1	-1
1	0	0	1	1	-1	5
-2	1	0	0	**-5**	3	-7
1	0	1	0	3	-2	4
3/5	1/5	0	1	0	-2/5	18/5
2/5	-1/5	0	0	1	-3/5	7/5
-1/5	3/5	1	0	0	**-1/5**	-1/5
1	-1	-2	1	0	0	4
1	-2	-3	0	1	0	2
1	-3	-5	0	0	1	1

另一种解释 I

用$a_i, i=1,2,\cdots,n$表示A的列向量,设$a_1,a_2,\cdots,a_m$为$\mathbf{R}^m$的一组基,由于$b\in\mathbf{R}^m$,所以有

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_i = b.$$

令$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$,则$x$是一个基本解.
假定我们要把某一个非基矢量a_q引入基,而将某个基矢量a_p替换出去.称a_q为进基矢量,a_p为离基矢量.由于

$$a_q = \sum_{i=1}^{m} y_{iq} a_i = \sum_{i=1, i\neq p}^{m} y_{iq} a_i + y_{pq} a_p$$

当$y_{pq}\neq 0$时,有

$$a_p = \frac{1}{y_{pq}}(a_q - \sum_{i=1, i\neq p}^{m} y_{iq} a_i)$$

另一种解释 II

则$a_1, \cdots, a_{p-1}, a_q, a_{p+1}, \cdots, a_m$为$\mathbf{R}^m$的一组新基.

$$
\begin{aligned}
b &= \sum_{i=1}^{m} x_i a_i = \sum_{i=1, i\neq p}^{m} x_i a_i + x_p a_p \\
&= \sum_{i=1, i\neq p}^{m} x_i a_i + \frac{x_p}{y_{pq}}\left(a_q - \sum_{i=1, i\neq p}^{m} y_{iq} a_i\right) \\
&= \sum_{i=1, i\neq p}^{m} \left(x_i - \frac{x_p}{y_{pq}} y_{iq}\right) a_i + \frac{x_p}{y_{pq}} a_q
\end{aligned}
$$

这样就得到了另外一个基本解.

2.3.3 基本可行解的转换

一般来说,基本解经过转换之后,可行性不再保持(非负性不一定满足).但是只要按照某种规则来确定离基矢量,即按照某种规则来确定哪个基本变量变为非基本变量,就可以使可行性得到保持,从而我们可以从一个基本可行解转换到另一个基本可行解.

2.3.3 基本可行解的转换

一般来说,基本解经过转换之后,可行性不再保持(非负性不一定满足).但是只要按照某种规则来确定离基矢量,即按照某种规则来确定哪个基本变量变为非基本变量,就可以使可行性得到保持,从而我们可以从一个基本可行解转换到另一个基本可行解.

非退化假定

在以下的讨论中,我们总是假定:

$$Ax = b, \quad x \geq 0$$

的每一个基本可行解都是非退化的基本可行解.

这个假定贯穿整个单纯形法的推导过程之中.但是这个假定仅仅是为了方便而提出的,所有的推导论证都可以推广到退化的情况.

离基矢量的确定

设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$为LP问题$(P)$的一个基本可行解,在非退化的假定下，必有$x_i>0(i=1,2,\cdots,m)$. 假定进基矢量为$a_k$, $k>m$,由于$a_1,a_2,\cdots,a_m$为$\mathbf{R}^m$的一组基,所以$a_k=\sum_{i=1}^m y_{ik}a_i$，用$\varepsilon(\varepsilon>0)$乘上式得

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon y_{ik}a_i=\varepsilon a_k \tag{3-6}$$

因为x是基本可行解,所以有

$$\sum_{i=1}^m x_i a_i=b \tag{3-7}$$

离基矢量的确定

两式相减得$\sum_{i=1}^{m}(x_i - \varepsilon y_{ik})a_i + \varepsilon a_k = b$. 由于$x_i > 0$,所以只要$\varepsilon > 0$足够小,就可使$x_i - \varepsilon y_{ik} \geq 0$,因而

$$\tilde{x} = (x_1 - \varepsilon y_{1k}, \cdots, x_m - \varepsilon y_{mk}, 0, \cdots, 0, \varepsilon, 0, \cdots, 0)^T$$

是(P)的一个可行解,但不一定是基本解.如果

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{x_i}{y_{ik}} | y_{ik} > 0 \right\} = \frac{x_r}{y_{rk}} (1 \leq r \leq m)$$

存在,那么取$\varepsilon = \frac{x_r}{y_{rk}}$,则$\tilde{x}$至多有$m$个分量大于零,因而$\tilde{x}$是一个基本可行解.这时取$a_r$为离基变量,就可实现从一个基本解$x$到另一个基本解$\tilde{x}$的转换.

离基矢量的确定

两式相减得$\sum_{i=1}^{m}(x_i-\varepsilon y_{ik})a_i+\varepsilon a_k=b$. 由于$x_i>0$,所以只要$\varepsilon>0$足够小,就可使$x_i-\varepsilon y_{ik}\geq 0$,因而

$$\tilde{x}=(x_1-\varepsilon y_{1k},\cdots,x_m-\varepsilon y_{mk},0,\cdots,0,\varepsilon,0,\cdots,0)^T$$

是(P)的一个可行解,但不一定是基本解.如果

$$\min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{x_i}{y_{ik}}|y_{ik}>0\right\}=\frac{x_r}{y_{rk}}(1\leq r\leq m)$$

存在,那么取$\varepsilon=\frac{x_r}{y_{rk}}$,则$\tilde{x}$至多有$m$个分量大于零,因而$\tilde{x}$是一个基本可行解. 这时取$a_r$为离基变量,就可实现从一个基本解$x$到另一个基本解$\tilde{x}$的转换. 如果所有的$y_{ik}\leq 0(i=1,2,\cdots,m)$,任取$\varepsilon>0$,$\tilde{x}$总是可行解,因而$(P)$的可行集是无界的.

例3.2

设LP问题的约束条件为

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad + 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 &= 4 \\
x_2 \quad + x_4 + 2x_5 + 3x_6 &= 3 \\
x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 &= 1 \\
x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.&
\end{aligned}
$$

易见a_1, a_2, a_3为一组基,$x = (4, 3, 1, 0, 0, 0)^T$为一个基本可行解.假定我们选择a_4为进基矢量,下面来确定离基矢量a_r. 计算

$$
\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{x_i}{y_{i4}} | y_{i4} > 0 \right\} = \frac{x_1}{y_{14}} = 2
$$

例3.2

即$r=1$,所以离基矢量为a_1,相应的基本可行解为$x=(0,1,3,2,0,0)^T$. 新的表格为

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
1/2	0	0	1	2	3	2
-1/2	1	0	0	0	0	1
1/2	0	1	0	4	4	3

下面,我们来说明如何确定进基矢量a_k,使从一个基本可行解转换到另一个基本可行解时,目标函数值是减小的.

设线性规划问题(P)的约束方程组已化为如下的规范形式:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij} x_j = y_{i0}, \quad i = 1, 2 \cdots, m \tag{3-9}$$

其中$y_{i0} > 0, i = 1, 2, \cdots, m$.而$x = (y_{i0}, \cdots, y_{m0}, 0, \cdots, 0)^T$为问题$(P)$的一个基本可行解,其对应的目标函数值为$z_0 = c_B^T x_B = \sum_{k=1}^{m} c_k y_{k0}$,其中$c_B = (c_1, c_2, \cdots, c_m)^T$

而与问题(P)的任一可行解x对应的目标函数值为

$$z = c^T x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \tag{3-10}$$

利用(3-9)可将(3-10)改写为

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^{m} c_k \Big(y_{k0} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{kj} x_j\Big) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\ &= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j \end{aligned} \tag{3-11}$$

其中$z_0 = c_B^T x_B$， $z_j = c_B^T y_j = \sum_{k=1}^{m} c_k y_{kj}$.

定理3.1

已知一个非退化的基本可行解,其目标函数值为z_0,假定对于某一个j,有$c_j - z_j < 0$, 那么存在一个可行解,使其对应的目标函数值$z < z_0$. 如果能用非基矢量a_j代替原基中的某一矢量a_r,而产生一个新的基本可行解,则这个新的解将使$z < z_0$.如果不能用a_j来代替而产生一个基本可行解, 则可行集R是无界的,而且其目标函数值可任意小(趋向$-\infty$).

证明

设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$是一个非退化的基本可行解,相应的目标函数值为$z_0$,假定$c_j-z_j<0(m+1\leq j\leq n)$, 那么用上一段讲述的方法可以构造一个形式为

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= (x_1-\varepsilon y_{1j},\cdots,x_m-\varepsilon y_{mj},0,\cdots,0,\varepsilon,0,\cdots,0)^T\\ &= (x_1',x_2',\cdots,x_m',0,\cdots,0,x_j',0,\cdots,0)^T\end{aligned}$$

的新的可行解,且$x_j'>0$. 将它代入式(3-11)得$z-z_0=(c_j-z_j)x_j'<0$,所以,当$\varepsilon>0$时,对任意的解总有$z<z_0$成立.

证明

设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$是一个非退化的基本可行解,相应的目标函数值为$z_0$,假定$c_j-z_j<0(m+1\le j\le n)$, 那么用上一段讲述的方法可以构造一个形式为

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= (x_1-\varepsilon y_{1j},\cdots,x_m-\varepsilon y_{mj},0,\cdots,0,\varepsilon,0,\cdots,0)^T\\ &= (x_1',x_2',\cdots,x_m',0,\cdots,0,x_j',0,\cdots,0)^T\end{aligned}$$

的新的可行解,且$x_j'>0$. 将它代入式(3-11)得$z-z_0=(c_j-z_j)x_j'<0$,所以,当$\varepsilon>0$时,对任意的解总有$z<z_0$成立. 如果至少有一个$y_{ij}>0$,象上一段讲得那样,选取$\varepsilon>0$,就能用非基矢量a_j来代替原基中的某一矢量a_r,从而得到一个新的基本可行解;如果所有的$y_{ij}\le 0$,那么$\tilde{x}$的$m+1$个分量将随ε的增大而增大(或保持常数),但至少有一个分量随之增大而增大,因此可行集R是无界的,而且目标函数值无下界,即$z\to-\infty$.

定理3.1说明,若$c_j - z_j < 0$,则目标函数值就可以继续减小.剩下的问题是:对于所有的j,$c_j - z_j \geq 0$是否能保证这个基本可行解就是最优解?

定理3.1说明,若$c_j - z_j < 0$,则目标函数值就可以继续减小.剩下的问题是:对于所有的j,$c_j - z_j \geq 0$是否能保证这个基本可行解就是最优解?

定理3.2

如果某一个基本可行解,对所有的j,都有$c_j - z_j \geq 0$,那么这个解就是最优解.

定理3.1说明,若$c_j - z_j < 0$,则目标函数值就可以继续减小.剩下的问题是:对于所有的j,$c_j - z_j \geq 0$是否能保证这个基本可行解就是最优解?

定理3.2

如果某一个基本可行解,对所有的j,都有$c_j - z_j \geq 0$,那么这个解就是最优解.

证明.

因为对任一可行解x,必有$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$,所以,若对所有的$j$,总有$c_j - z_j \geq 0$,则$z \geq z_0$. □

定理3.1说明,若$c_j - z_j < 0$,则目标函数值就可以继续减小.剩下的问题是:对于所有的j,$c_j - z_j \geq 0$是否能保证这个基本可行解就是最优解?

定理3.2

如果某一个基本可行解,对所有的j,都有$c_j - z_j \geq 0$,那么这个解就是最优解.

证明.

因为对任一可行解x,必有$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$,所以,若对所有的$j$,总有$c_j - z_j \geq 0$,则$z \geq z_0$. □

由于$c_j - z_j = r_j$在单纯形法中起着重要的作用,所以我们称它为相对成本系数或检验数,有的文献也成为判别数.

2.3.5 单纯形法的计算步骤和例子

(1) 把一般的线性规划问题化为标准形式.

(2) 建立初始单纯形表.

(3) 若所有的检验数$r_j = c_j - z_j \geq 0$,就得到了一个最优解,运算结束;否则转到第4步.

(4) 当有多于一个的$r_j < 0$时,可选其中任一矢量a_j为进基矢量,通常选使$\min\{r_j | r_j < 0\} = r_k$的$a_k$为进基矢量.

(5) 对所有的$y_{ik} > 0$,计算比值$\frac{y_{i0}}{y_{ik}}$,设$\min\{\frac{y_{i0}}{y_{ik}} | y_{ik} > 0\} = \frac{y_{r0}}{y_{rk}}$, 则主元素为$y_{rk}$,当$A = (I_m, N)$时,$x_r$为离基矢量,转第6步. 若所有的$y_{ik} \leq 0$,则LP问题的可行集$R$是无界的,而且目标函数是无界的,运算结束.

(6) 以y_{rk}为主元素,进行一次Gauss消元(或称为旋转),从而求得一个新的基本可行解,返回到第3步.

例3.1

用单纯形法求解LP问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -(3x_1 + x_2 + 3x_3) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

解：(1)化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -(3x_1 + x_2 + 3x_3) \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \quad x_5 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + \qquad x_6 = 6 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned}$$

第一次迭代

(2)建立初始单纯形表:

基矢量	a_1	$a_2\downarrow$	a_3	$\uparrow a_4$	a_5	a_6	b
a_4	2	**1**	1	1	0	0	2
a_5	1	2	3	0	1	0	5
a_6	2	2	1	0	0	1	6
检验数	-3	-1	-3	0	0	0	0

$z_0 = c_B^T x_B = 0$,在检验数行与b列的交叉处,填上$(-z_0)$.

(3)计算检验数$r_j = c_j - z_j$

因为$z_j = c_B^T y_j, j = 1,2,3$,此处$c_B^T = (c_4, c_5, c_6) = (0,0,0)$,所以$z_j = 0, i = 1,2,3$.因此$r_1 = -3, r_2 = -1, r_3 = -3$

(4)决定进基矢量a_k

由于$r_j < 0, j = 1, 2, 3.$所以a_1, a_2, a_3均可选做进基矢量,比如选a_2为进基矢量.

(5)决定离基矢量a_r和主元素y_{rk}

首先计算比值y_{i0}/y_{ik},这里$k = 2, i = 1, 2, 3.$因为

$$\frac{y_{10}}{y_{12}} = \frac{2}{1} = 2, \frac{y_{20}}{y_{22}} = \frac{5}{2} = 2.5, \frac{y_{30}}{y_{32}} = \frac{6}{2} = 3,$$

故$\min\{\frac{y_{i0}}{y_{ik}} | y_{ik} > 0\} = \frac{y_{10}}{y_{12}}$ 因此主元素为y_{12},a_4为离基矢量.

第一次迭代

(6)消元

以y_{12}为主元素(在表中用黑色字体标记),进行一次Gauss消元,以求得一个新的基本可行解.具体计算可列表如下:

基矢量	a_1	a_2	$\downarrow a_3$	a_4	$a_5\uparrow$	a_6	b
a_2	2	1	1	1	0	0	2
a_5	-3	0	**1**	-2	1	0	1
a_6	-2	0	-1	-2	0	1	2
检验数	-1	0	-2	1	0	0	2

$$y_0=(2,1,2)^T, y_1=(2,-3,-2)^T, y_3=(1,1,-1)^T, y_4=(1,-2,-2)^T$$
$$c_B=(-1,0,0)^T, z_1=c_B^Ty_1=-2, z_3=-1, z_4=-1$$
$$r_1=c_1-z_1=-1, r_3=-2, r_4=1$$
$$z_0=c_B^Ty_0=-2$$

第二次迭代

由于$\min\{r_j | r_j < 0\} = r_3$,所以进基矢量为$a_3$.再计算比值$y_{i0}/y_{ik}$,这里$k = 3, i = 1, 2$.因为$y_{10}/y_{13} = 2/1, y_{20}/y_{23} = 1/1 (y_{33} < 0)$ 故$\min\{\frac{y_{i0}}{y_{ik}} | y_{ik} > 0\} = \frac{y_{20}}{y_{23}}$. 因此主元为$y_{23}$,离基矢量为$a_5$.

基矢量	$\downarrow a_1$	$\uparrow a_2$	a_3	a_4	a_5	a_6	b
a_2	**5**	1	0	3	-1	0	1
a_3	-3	0	1	-2	1	0	1
a_6	-5	0	0	-4	1	1	3
检验数	-7	0	0	-3	2	0	4

$c_B^T = (-1, -3, 0), z_1 = c_B^T y_1 = 4, z_4 = 3, z_5 = -2$
$r_1 = c_1 - z_1 = -7, r_4 = -3, r_5 = 2$
$z_0 = c_B^T y_0 = -4$

第三次迭代

由于$\min\{r_j | r_j < 0\} = r_1$,所以进基矢量为$a_1$.在计算比值$y_{i0}/y_{ik}$,这里$k = 1, i = 1$.因为$y_{10}/y_{11} = 1/5 (y_{21} < 0, y_{31} < 0)$, 因此主元为$y_{11}$,离基矢量为$a_2$.

基矢量	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
a_1	1	1/5	0	3/5	-1/5	0	1/5
a_3	0	3/5	1	-1/5	2/5	0	8/5
a_6	0	1	0	-1	0	1	4
检验数	0	7/5	0	6/5	3/5	0	27/5

$$c_B^T = (-3, -3, 0), z_2 = c_B^T y_2 = -12/5, z_4 = -6/5, z_5 = -3/5$$
$$r_2 = c_2 - z_2 = 7/5, r_4 = 6/5, r_5 = 3/5, z_0 = c_B^T y_0 = -27/5$$

因为$r_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 6$,所以最优解为$x^* = (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)^T$,最优值为$z^* = -27/5$.

练习

用单纯形法求解LP问题(注意迭代过程中基的变化):

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\
& 2x_1 + 0.5x_2 \le 8 \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

练习

用单纯形法求解LP问题(注意迭代过程中基的变化):

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\ & 2x_1 + 0.5x_2 \le 8 \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

最优解为$x^* = (\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0)$.

2.4 关于单纯形法的说明和补充

2.4.1 初始基本可行解的确定

用单纯形法求解线性规划问题,首先需要确定一个初始基本可行解,以便使迭代计算能够进行下去.这里给出两种处理方法,它们都是通过引入人工变量的办法来获得一个初始基本可行解.

1. 大M法

设要求解的线性规划问题的标准形式如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4-1}$$

为了获得一个初始基本可行解,引入人工变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$,
令$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$,考察另一个线性规划问题:

$$\begin{array}{ll} \min & z = c^T x + ME^T y \\ \text{s.t.} & Ax + y = b \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \tag{4-2}$$

其中$M > 0$是一个充分大的数,$E = (1, 1, \cdots, 1)^T \in \mathbf{R}^m$.

为了获得一个初始基本可行解,引入人工变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$,令$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$,考察另一个线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x + ME^T y \\ \text{s.t.} \quad & Ax + y = b \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned} \tag{4-2}$$

其中$M > 0$是一个充分大的数,$E = (1, 1, \cdots, 1)^T \in \mathbf{R}^m$.

定理4.1

设$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$是问题(4-2)的最优解,若$y^* = 0$,则$x^*$是问题(4-1)的最优解;若$y \neq 0$,则问题(4-1)没有可行解.反之,若$x^*$是问题(4-1)的最优解,则$\begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}$是问题(4-2)的最优解.

例4.1

用单纯形法求解线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & w = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad = 15 \\
& 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad = 20 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
\tag{4-3}
$$

解:添加人工变量$x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$,构造如下的线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \tag{4-4}$$

建立初始单纯形表,初始的基本可行解为$x = (0, 0, 0, 10, 15, 20)^T$,按步骤用单纯形法进行求解问题(4-4).问题(4-4)的最优解为$\tilde{x}^* = (5/2, 5/2, 5/2, 0, 0, 0)^T$,则原问题(4-3)的最优解为$x^* = (5/2, 5/2, 5/2, 0)^T$.

2.二阶段法

设要求解的LP问题为(4-1),引入人工变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$,
令$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$,构造一个辅助的LP问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{i=1}^{m} y_i \\
\text{s.t.} \quad & Ax + y = b \\
& x \geq 0, y \geq 0
\end{aligned}
\tag{4-5}
$$

二阶段法

定理4.2

若问题(4-5)的最优基本可行解为$\begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}$, 则$x^*$为问题(4-1)的一个基本可行解;若问题(4-5)的最优基本可行解为$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$,且$y^* \neq 0$,则问题(4-1)没有可行解.

由定理4.2,可将求解问题(4-1)分为两个阶段:

- 阶段1:求解辅助LP问题(4-5),它的初始基本可行解是明显的.
- 阶段2:求解原LP问题(4-1).

上述方法称为二阶段法.

例4.2 二阶段法 I

求解如下LP问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

阶段1:求解如下LP问题,

$$\begin{aligned} \min \quad & z = y_1 + y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 \quad = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + \quad y_2 = 3 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, y_i \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

例4.2 二阶段法 II

用单纯形法易得最优解为$x_1 = 1/2, x_2 = 0, x_3 = 3/2, y_1 = y_2 = 0$.
阶段2:求解原LP问题.
阶段1最后一步的单纯形表为

基矢量	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
a_3	0	-3/4	1	3/4	-1/2	3/2
a_1	1	5/4	0	-1/4	1/2	1/2
检验数	0	0	0	1	1	0

原LP问题的初始单纯形表是将上表中人工变量所在的两列去掉,并将目标函数值$z = 0$去掉,将原LP问题的目标函数值w计算出来,将$-w$填在z的位置即得

例4.2 二阶段法 III

基矢量	a_1	a_2	a_3	b
a_3	0	-3/4	1	3/2
a_1	1	5/4	0	1/2
检验数	0	-13/4	0	-7/2

此处,$c_B = (1,4)^T, x_B = (3/2, 1/2)^T$,故$w = 7/2$

$$r_2 = c_2 - z_2 = 1 - c_B^T y_2 = -\frac{13}{4}$$

然后按照单纯形法进行迭代计算,可得原问题最优解为$x^* = (0, 2/5, 9/5)^T$.

2.4.2 单纯形法的矩阵形式

前一节讲的单纯形法比较通俗易懂,但书写较繁进行理论分析不大方便,这里介绍一下单纯形法的矩阵形式.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4-6}$$

其中矩阵A的秩$r(A) = m < n, b \geq 0$. 设B为基,不妨设它是由A的前m列组成的,把A, x, c分块为

$$A = (B, N), x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

2.4.2 单纯形法的矩阵形式

于是问题(4-6)可改写为

$$\begin{array}{ll} \min & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.t.} & B x_B + N x_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array} \tag{4-6'}$$

令$x_N = 0$,则得$x_B = B^{-1}b$,于是得到与基B对应的基本可行解(假设它是可行的)为

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

与x^0对应的目标函数值$z_0 = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b$.

2.4.2 单纯形法的矩阵形式

对任意的x_N,由(4-6')可得$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$,于是与它相应的目标函数值为

$$\begin{aligned} z &= c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ &= z_0 + r_N^T x_N \end{aligned} \tag{4-7}$$

其中

$$r_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N = c_N^T - \pi^T N \tag{4-8}$$

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} \tag{4-9}$$

2.4.2 单纯形法的矩阵形式

称π为单纯形乘子矢量,r_N是非基变量对应的检验数构成的矢量. 于是与基B对应的矩阵形式的单纯形表可写成

$$T(B) = \left[\begin{array}{c|c|c} I_m & B^{-1}N & B^{-1}b \\ 0 & c_N^T - c_B^T B^{-1} N & -c_B^T B^{-1} b \end{array} \right] \tag{4-10}$$

对单纯形法进行仔细分析就会发现:在迭代过程中,我们所关心的主要是如下的数据:

(1) $r_j = c_j - \pi^T a_j, \min\{r_j | r_j < 0\} = r_k$

(2)

$$\begin{aligned} B^{-1} a_k &= (y_{1k}, y_{2k}, \cdots, y_{mk})^T, \\ x_B = B^{-1} b &= (y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{m0})^T \end{aligned}$$

用$r_j (j = 1, 2, \cdots, n)$来判别现行解是否为最优解,若$r \geq 0$不成立,则利用这两组数来确定主元素$y_{rk}$和进基,离基矢量,进行换基迭代,就可得到新基$\bar{B}$.而这些数据,只要知道$B^{-1}$,就可由问题的初始数据计算出来.同时,当基$B$变换到新基$\bar{B}$时,$\bar{B}^{-1}$容易由$B^{-1}$求得,下面来导出具体的计算公式.

不妨设$B=(a_1,\cdots,a_m)$,新基$\bar{B}=(a_1,\cdots,a_{r-1},a_k,a_r,\cdots,a_m)$
因$B^{-1}B=(B^{-1}a_1,B^{-1}a_2,\cdots,B^{-1}a_m)=I_m$, 所以

$$
\begin{aligned}
B^{-1}\bar{B} &= (B^{-1}a_1,\cdots,B^{-1}a_{r-1},B^{-1}a_k,B^{-1}a_{r+1},\cdots,B^{-1}a_m) \\
&= \begin{bmatrix}
1 & & & y_{1k} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & y_{r-1,k} & & & \\
& & & y_{rk} & & & \\
& & & y_{r+1,k} & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & y_{mk} & & & 1
\end{bmatrix} \triangleq B_{rk}
\end{aligned}
\tag{4-12}
$$

$$E_{rk} \triangleq B_{rk}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & -y_{1k}/y_{rk} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -y_{r-1,k}/y_{rk} & & & \\ & & & 1/y_{rk} & & & \\ & & & -y_{r+1,k}/y_{rk} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -y_{mk}/y_{rk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

所以$(B^{-1}\bar{B})^{-1} = \bar{B}^{-1}B = B_{rk}^{-1} = E_{rk}$,由此得到

$$\bar{B}^{-1} = E_{rk}B^{-1} \tag{4-13}$$

$$x_B = \bar{B}^{-1}b = E_{rk}B^{-1}b = E_{rk}x_B \tag{4-14}$$

修正单纯形法

设已求得LP问题(4-6)的一个初始基本可行解,与它相对应的基B(称为可行基)的逆为B^{-1},求出$x_B = B^{-1}b = y_0$.

(1) 求单纯形乘子矢量$\pi^T = c_B^T B^{-1}$及现行的检验矢量$r_j = c_j - \pi^T a_j, j = 1, 2, \cdots, n$, 若$r_N \geq 0$,则计算结束,现行解为最优解;否则转第2步.

(2) 令$r_k = min\{r_j | r_j < 0\}$,则$a_k$为进基矢量,计算$y_k = B^{-1}a_k$, 若所有的$y_{ik} \leq 0$,则LP问题没有有限的最优解,计算结束; 若至少有一个$y_{ik} > 0$,则转第3步

(3) 由$\min\{y_{i0}/y_{ik} | y_{ik} > 0\} = y_{r0}/y_{rk}$决定$a_r$离基,主元素为$y_{rk}$.

(4) 形成初等变换矩阵E_{rk}.

(5) 根据(4-13)将B^{-1}修改为$\bar{B}^{-1} = E_{rk}B^{-1}$.

(6) 根据(4-14)将x_B修改为$x_{\bar{B}} = E_{rk}x_B$,然后返回第1步.

例4.3

用修正单纯形法求解问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z=-3x_1-x_2-3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1+x_2+x_3+x_4 \qquad\quad =2 \\
& x_1+2x_2+3x_3 \quad +x_5 \quad =5 \\
& 2x_1+2x_2+x_3 \qquad\quad +x_6=6 \\
& x_i \geq 0, i=1,2,3,4,5,6
\end{aligned} \tag{4-15}
$$

可求得最优解为$x^*=(1/5,0,8/5,0,0,4)^T$.

解：问题初始可行基为$B=(a_4,a_5,a_6)=I_3$，显然$B^{-1}=B$，
$c_B=(0,0,0)^T$，$x_B=(x_4,x_5,x_6)^T=(2,5,6)^T$，$y_0=B^{-1}b=(2,5,6)^T$.

第一次迭代

(1)

$$
\begin{aligned}
&\pi^T=c_B^TB^{-1}=(0,0,0)^T,\ \pi^Ta_j=0, j=1,2,3 \\
&r_1=c_1-\pi^Ta_1=-3, r_2=-1, r_3=-3
\end{aligned}
$$

(2)$r_k=r_1=r_3=-3$，这里取$k=1$，a_1进基. $y_1=B^{-1}a_1=(2,1,2)^T$

(3)$y_{10}/y_{11}=2/2$, $y_{20}/y_{21}=5/1$, $y_{30}/y_{31}=6/2$, 所以a_4离基, 主元为$y_{11}=2$

(4)形成$E_{11}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5)将B^{-1}修改为$E_{11}B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6)将$x_B=y_0$修改为$E_{11}x_B=(1,4,4)^T$

第二次迭代

(1)

$$\pi^T=c_B^TB^{-1}=(-3,0,0)^TB^{-1}=(-3/2,0,0),\pi^Ta_2=-3/2$$
$$r_2=c_2-\pi^Ta_2=1/2,,r_3=-3/2,r_4=3/2$$

(2)$r_k=r_3$, a_3进基. $y_3=B^{-1}a_3=(1/2,5/2,0)^T$

(3)$y_{10}/y_{13}=1/(1/2)$, $y_{20}/y_{23}=4/(5/2)$, 所以a_5离基, 主元为$y_{23}=5/2$

(4)形成$E_{23}=\begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5)将B^{-1}修改为

$$E_{23}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6)将$x_B = y_0$修改为$E_{23}x_B = (1/5, 8/5, 4)^T$

第三次迭代

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} = (-3, -3, 0)B^{-1} = (-6/5, -3/5, 0)$$
$$r_2 = 7/5, , r_4 = 6/5, r_5 = 3/5$$

因为$r_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 6$, 所以最优解为$(1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)^T$

修正单纯形法的存贮量和计算量都要比单纯形法少,当n远大于m时更为明显.所以在计算机上算题时,一般多采用修正单纯形法.一般的求解LP问题的程序,也是用修正单纯形法编写. 但在手算时,修正单纯形法的优点并不明显.

2.4.4 退化与循环

在上一节的讨论中,我们总是假定:线性规划问题(4-6)的基本可行解都是非退化的,即所有的基变量$x_i = y_{i0} > 0 (i \in J_B)$, 其中$J_B$为基变量的指标集. 但在某些LP问题中, 常有一些基变量x_i取零值,这时基本可行解就是退化的. 在选主元素和确定离基矢量时,取

$$\varepsilon = \min\{y_{i0}/y_{ik} | y_{ik} > 0\} = y_{r0}/y_{rk}$$

时,就可能出现$\varepsilon = 0$,因而

$$\tilde{x} = (x_1 - \varepsilon y_{1k}, \cdots, x_m - \varepsilon y_{mk}, 0, \cdots, 0, \varepsilon, 0, \cdots, 0)^T = x$$

即在新的基本可行解$\tilde{x}$处,目标函数值与原基本可行解x的目标函数值相同,如果这种情况不断发生,就可能使迭代计算循环不止,以致得不到需要的最优解.

处理办法

为了避免迭代过程出现循环,弥补单纯形法的缺陷,保证单纯形法在有限步内收敛,已经提出三种处理办法:

(1) 摄动法

(2) 字典序法

(3) Bland法.按如下两条规则去做,就可避免迭代计算中的循环.

- 若$\min\{i|r_i<0\}=k$,则选y_k为进基矢量.
- 若$\min\{y_{i0}/y_{ik}|y_{ik}>0\}=y_{r0}/y_{rk}$,则选$y_{rk}$为主元素,$y_r$为离基矢量,若有多于一个指标可选时总选取指标最小的.

一个出现循环的例子

例4.4

$$\begin{array}{lll}
\min & z = -3x_1/4 + 150x_2 - x_3/50 + 6x_4 & \\
\text{s.t.} & x_1/4 - 60x_2 - x_3/25 + 9x_4 + x_5 & = 0 \\
 & x_1/2 - 90x_2 - x_3/50 + 3x_4 + \quad x_6 & = 0 \\
 & x_3 + \qquad x_7 = 1 & \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. &
\end{array}$$

每一个线性规划问题,都有一个被称为对偶的线性规划问题与它相对应,二者有密切的联系.因为它们可以看做是对同一问题从不同的角度所进行的分析与研究.它们是根据同样的条件和数据构成的两个不同的问题.一个是求目标函数的最小值,另一个是求另一个目标函数的最大值.它们之间存在着确定的关系,当有限的最优解存在时,二者的最优值必定相等.研究两个互为对偶的线性规划问题的解之间的这些关系就构成了线性规划的对偶理论,对偶理论对线性规划的解法也有重要的作用.因此对偶理论是线性规划的重要内容之一.

2.5.1 对偶线性规划

设有线性规划问题:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{5-1}$$

问题(5-1)的对偶线性规划问题定义为

$$\begin{array}{ll} \max & g(\lambda) = b^T \lambda \\ \text{s.t.} & \lambda^T A \leq c^T \\ & \lambda \geq 0. \end{array} \tag{5-2}$$

其中$A = (a_{ij})_{m \times n}, x, c \in \mathbf{R}^n, b, \lambda \in \mathbf{R}^m$.

对偶问题的转化

由上述定义可以看出：从已知的原始问题(5-1) 构成对偶问题(5-2)的方法是:

1. 交换常矢量c, b的位置,变矢量x用λ替换;
2. 改变约束不等式的不等号方向;
3. 把min换为max;
4. 交换A与变矢量的位置,并按需要做适当的转置.

任何一个线性规划问题的对偶问题可以通过先把原始问题化为上述形式来求得.

例5.1

求标准形式的线性规划问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{5-3}$$

例5.1

求标准形式的线性规划问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{5-3}$$

其对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T b \\ \text{s.t.} \quad & w^T A \leq c^T \end{aligned} \tag{5-4}$$

通常称(5-2)为(5-1)的对称形式的对偶线性规划问题,而称(5-4)为(5-3)的非对称形式的对偶线性规划问题. 由上述可见: 如果在原始问题中,某个约束是等式约束,那么对偶问题中,变矢量的相应分量就是自由变量,反之亦真.

例5.2

求下列线性规划问题的对偶问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\
& 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq= 3 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}
$$

例5.2

求下列线性规划问题的对偶问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\
& 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq= 3 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}
$$

其对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w = 4\lambda_1 + 3\lambda_2 \\
\text{s.t.} \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 2 \\
& \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 3 \\
& 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq 5 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 \leq 2 \\
& 3\lambda_1 + \lambda_2 \leq 3 \\
& \lambda_1, \lambda_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

2.5.2 对偶定理

引理1

若x和w分别为(5-3)和(5-4)的可行解,则$c^T x \geq w^T b$.

推论

设x^*, w^*分别为(5-3)和(5-4)的可行解,且$c^T x^* = {w^*}^T b$,则x^*, w^*分别是(5-3)和(5-4)的最优解.

线性规划的对偶定理

若(5-3)或(5-4)二者有一个有有限的最优解,则另一个也有有限的最优解,而且二者的目标函数值相同.若任何一个问题的目标函数值无界,则另一个问题没有可行解.

2.5.2 对偶单纯形法

上面讲的单纯形法是从标准形式的线性规划问题(5-3)(即原始问题)的一个基本可行解出发,逐次进行迭代,使目标函数值逐次减小,直到获得最优的基本可行解为止.下面对单纯形法给出另一种解释.

上面讲的单纯形法是从标准形式的线性规划问题(5-3)(即原始问题)的一个基本可行解出发,逐次进行迭代,使目标函数值逐次减小,直到获得最优的基本可行解为止.下面对单纯形法给出另一种解释.

定理5.1

设x为(5-3)的任一基本解,对应的基为B,令$w^T=c_B^TB^{-1}$.若x,w分别是(5-3)和(5-4) 的可行解,则x,w也分别是(5-3)和(5-4)的最优解.

证明: 若w是(5-4)的可行解,即$w^TA=(c_B^TB^{-1})A\le c^T$, 因此$c^T-c_B^TB^{-1}A\ge 0$,即$r\ge 0$,这说明$x$是(5-3)的最优解.又因

$$w^Tb=c_B^TB^{-1}b=c_B^Tx_B=c^Tx$$

由引理1的推论可知,w也是(5-4)的最优解.

2.5.2 对偶单纯形法

由上述可见:与基本可行解x相对应的所有检验数$r \geq 0$ 和$w = (c_B^T B^{-1})^T$是对偶问题(5-4) 的可行解等价.据此,我们可对单纯形法给出如下的解释:从(5-3)的一个基本可行解x出发迭代到另一个基本可行解,同时使它对应的对偶规划的解的不可行性逐步消失(即:使检验数逐步变成为非负),直到w是(5-4)的可行解为止.这时x就是(5-3)的最优解.

2.5.2 对偶单纯形法

由上述可见:与基本可行解x相对应的所有检验数$r \geq 0$ 和$w = (c_B^T B^{-1})^T$是对偶问题(5-4) 的可行解等价.据此,我们可对单纯形法给出如下的解释:从(5-3)的一个基本可行解x出发迭代到另一个基本可行解,同时使它对应的对偶规划的解的不可行性逐步消失(即:使检验数逐步变成为非负),直到w是(5-4)的可行解为止.这时x就是(5-3)的最优解.

定义5.1

若x是(5-3) 的一个基本解(对应的基为B), 且它对应的检验矢量$r \geq 0$(即$w = (c_B^T B^{-1})^T$为(5-4)的可行解), 则称x为(5-3)的对偶可行解或正则解.

2.5.2 对偶单纯形法

由上述可见:与基本可行解x相对应的所有检验数$r \geq 0$ 和$w = (c_B^T B^{-1})^T$是对偶问题(5-4) 的可行解等价.据此,我们可对单纯形法给出如下的解释:从(5-3)的一个基本可行解x出发迭代到另一个基本可行解,同时使它对应的对偶规划的解的不可行性逐步消失(即:使检验数逐步变成为非负),直到w是(5-4)的可行解为止.这时x就是(5-3)的最优解.

定义5.1

若x是(5-3) 的一个基本解(对应的基为B), 且它对应的检验矢量$r \geq 0$ (即$w = (c_B^T B^{-1})^T$为(5-4)的可行解), 则称x为(5-3)的对偶可行解或正则解.

对偶单纯形法的基本思想是:从原始问题(5-3) 的一个对偶可行的基本解开始, 逐次进行迭代,在保持对偶可行性的条件下, 逐步使原始问题(5-3)的基本解x的不可行性消失(即使$x \geq 0$),直到获得(5-3) 的一个基本可行解为止,而它即为原始问题的最优解.

对偶单纯形法的计算步骤

1. 把一般的线性规划问题化为(5-3)的形式,这时不要求$b \geq 0$.
2. 列出初始单纯形表,求一个对偶可行基本解$x = (x_B^T, 0)^T$
3. 若$x_B \geq 0$,则现行解x为最优解,计算结束;否则$x_B \ngeq 0$,令

   $$x_{B_i} = \min\{x_{B_j} | j = 1, 2, \ldots, m\},$$

   由此确定a_{B_i}为离基矢量(考虑第i行).
4. 若$y_{ij} \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$,则(5-3)没有可行解;否则必有某个$j$使$y_{ij} < 0$,令

   $$\varepsilon = \min_{1 \leq j \leq n}\{(z_j - c_j)/y_{ij} | y_{ij} < 0\} = (z_k - c_k)/y_{ik}$$

   其中

   $$z_j = w^T a_j, w^T = c_B^T B^{-1}.$$

   则a_k为进基矢量,y_{ik}为主元素.
5. 用a_k代替a_{B_i}形成新基,再确定新的对偶可行基本解,即以y_{ik}为主元素,进行一次旋转变换,回步3.

例5.4 对偶单纯形法 I

用对偶单纯形法求解

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

解:

(1) 引入剩余变量,将问题改写为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \quad = -5 \\
& -2x_1 - 2x_2 - x_3 \quad + x_5 = -6 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}
$$

(2) 令$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,则基变量为$x_4, x_5$,非基变量$x_1, x_2, x_3$,初始单纯形表为

基矢量	$a_1 \downarrow$	a_2	a_3	a_4	$a_5 \uparrow$	b
a_4	-1	-2	-3	1	0	-5
$\leftarrow a_5$	-2	-2	-1	0	1	-6
检验数	3	4	5	0	0	0

其中$r_j = c_j - z_j, z_j = w^T a_j = 0, j = 1, 2, \dots, 5.$ 因为

$$x_B = \begin{pmatrix}-5\\ -6\end{pmatrix},\ w^T = c_B^T B^{-1} = (0, 0).$$

(3) 由于$x_B \ngeq 0$,选取$x_{B_2} = x_5 = -6$,所以a_5离基.

例5.4 对偶单纯形法 III

(4) 因为

$$\varepsilon = \min_{1 \le j \le 5} \{(z_j - c_j)/y_{2j} | y_{2j} < 0\} = 3/2 = (z_1 - c_1)/y_{21}$$

所以a_1进基,主元素为$y_{21} = -2$.

(5) 以y_{21}为主元进行一次旋转变换,得到新基B.

基矢量	a_1	$a_2 \downarrow$	a_3	$a_4 \uparrow$	a_5	b
$\leftarrow a_4$	0	-1	-5/2	1	-1/2	-2
a_1	1	1	1/2	0	-1/2	3
检验数	0	1	7/2	0	3/2	-9

(6) 重复上述计算,得到离基矢量a_4,进基矢量a_2,主元$y_{12} = -1$.新的单纯形表为

基矢量	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
a_2	0	1	5/2	-1	1/2	2
a_1	1	0	-2	1	-1	1
检验数	0	0	1	1	1	-11

这时$x_B = (1, 2)^T \geq 0$,所以$x^* = (1, 2, 0, 0, 0)^T$是可行的,也是原始问题的最优解.

2.6 线性规划的多项式算法

单纯形法不是多项式算法.

求解线性规划的多项式算法:

- 哈奇扬(Khachiyan)的椭球算法(Ellipsoid algorithm);
- 卡玛卡(Karmarkar)算法;
- 内点法(interior point method).