第7章 常微分方程的数值解法

考虑一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \quad a \le t \le b \\ u(a) = u_0 \end{cases} \tag{7-1}$$

或与其等价的积分方程

变上限积分

$$u(t) = u_0 + \int_a^t f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{7-2}$$

若 $f(t,u)$ 满足Lipschitz条件，即存在常数 L ，对任意 $t \in [a,b]$ ，均有

$$\left| f(t,u) - f(t,\bar{u}) \right| \le L \left| u - \bar{u} \right|$$

则（**7-1**）的解存在且唯一。

什么是数值解法？

它是一种离散化方法，利用这种方法，可以在一系列事先取定的 $[a,b]$ 中的离散点（称为节点）

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N \le b$$

（通常取成等距，即 $t_n = t_0 + nh, \quad n = 1, \cdots, N$ 其中 $h > 0$ 称为步长）

上求出未知函数 $u(t)$ 之值 $u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_N)$ 的近似值 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 。而 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 通常称为初值问题的数值解。

构造数值解法一般采用数值积分法和Taylor展开法

7.1.2 线性单步法

将节点取为 $t_n = a + nh \quad h = \dfrac{b-a}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N$

由（7-2），

每个节点区间求积分

$$\begin{cases} u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

如果 $u(t_n)$ 的近似值 u_n 已经求出，则通过上式右端项的数值积分可求出 $u(t_{n+1})$ 的近似值 u_{n+1}.

一、Euler法

首先，对右端积分项使用左矩形求积公式，则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \approx u(t_n) + h\, f(t_n, u(t_n))$$

令

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) \qquad (7\text{-}3)$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

上式称为**Euler求解公式**，又称**矩形公式**。

例： 用**Euler**公式计算初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 + 100u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

的解 $u(t)$ 在 $t = 0.3$ 处的数值解 u_3。（取步长 $h = 0.1$，

小数点后保留**4**位）。

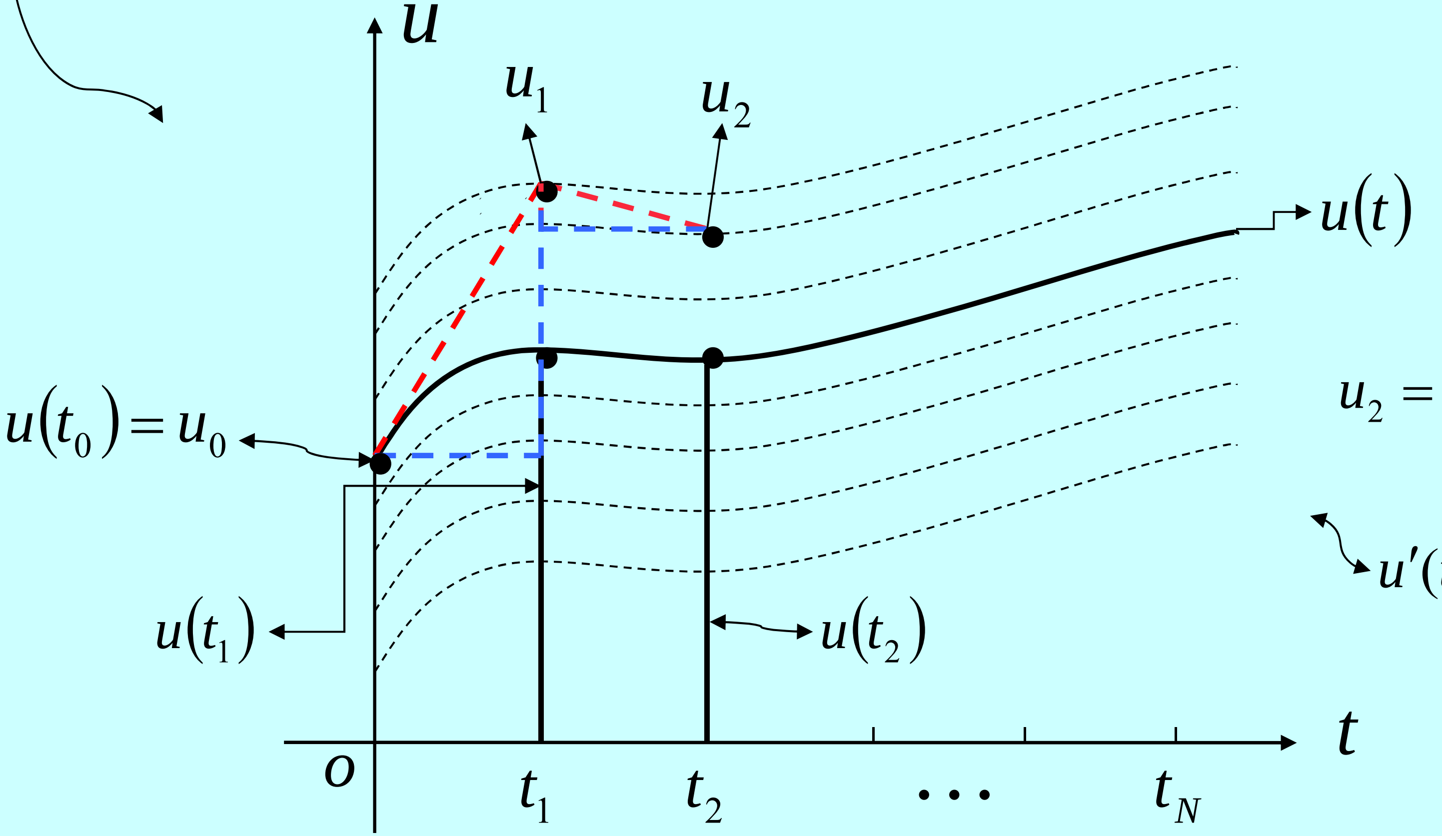
解： 相应的Euler公式：

$$u_{n+1} = u_n + h\left(t_n^2 + 100u_n^2\right) = u_n + 0.1\times\left(t_n^2 + 100u_n^2\right)$$

由初值$u(0) = u_0 = 0$，计算得

$$u(0.1) \approx u_1 = u_0 + 0.1\times\left(t_0^2 + 100u_0^2\right)$$
$$= 0.0 + 0.1\times(0.0 + 100\times 0.0) = 0.0000$$
$$u(0.2) \approx u_2 = u_1 + 0.1\times\left(t_1^2 + 100u_1^2\right)$$
$$= 0.0 + 0.1\times(0.1^2 + 100\times 0.0) = 0.0010$$
$$u(0.3) \approx u_3 = u_2 + 0.1\times\left(t_2^2 + 100u_2^2\right)$$
$$= 0.001 + 0.1\times\left(0.2^2 + 100\times(0.0010)^2\right) = 0.0051$$

$$u'(t_0)\cdot h = f(t_0, u_0)\cdot h \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_0 + f(t_0, u_0)\cdot h$$



$$u_2 = u_1 + f(t_1, u_1)\cdot h$$

$$\Uparrow$$

$$u'(t_1)\cdot h = f(t_1, u_1)\cdot h$$

Euler法（切线法）的几何解释

隐Euler法

首先，对右端积分项使用右矩形求积公式，则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \approx u(t_n) + h\, f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$$

令

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

上式称为**隐Euler公式**，又称右**矩形公式**，**或向后Euler公式**。

隐式公式需要求解方程，或者利用迭代法求解

二、梯形法

对右端的积分使用梯形求积公式计算，

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,u(t))dt \approx \frac{h}{2}\left[f(t_n,u(t_n))+f(t_{n+1},u(t_{n+1}))\right]$$

则得

$$u(t_{n+1}) \approx u(t_n)+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u(t_n))+f(t_{n+1},u(t_{n+1}))\right)$$

令

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\right) \qquad (7\text{–}5)$$

$$n=0,1,2,\cdots,N$$

上式称为**梯形公式**，简称**梯形法**.

将Euler公式与隐式Euler公式做算术平均，也可得出梯形公式

梯形公式与Euler公式相比要精确的多，但是梯形公式的计算量要大一些。每步计算要解一个关于 u_{n+1} 的非线性方程，从而要用如下迭代公式：

$$u_{n+1}^{[k+1]} = u_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[k]})\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值为 $u_{n+1}^{[0]} = u_n$ ，反复迭代，即

$$u_{n+1}^{[1]} = u_n + \frac{h}{2}\left[\, f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[0]}) \,\right]$$

如此迭代下去得到迭代序列：

$$u_{n+1}^{[0]},\quad u_{n+1}^{[1]},\quad u_{n+1}^{[2]},\quad \cdots,\quad u_{n+1}^{[k]},\quad \cdots$$

若序列$\left\{u_{n+1}^{[k]}\right\}_{k=0}^{\infty}$收敛于$u_{n+1}^{[*]}$，当 $k\to\infty$ 时，得到：

$$u_{n+1}^{[*]}=u_n+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1}^{[*]})\right)$$

则取 $u_{n+1}=u_{n+1}^{[*]}$ 为第 $n+1$ 个近似值。

在实际计算中，通常要求满足 $\left|u_{n+1}^{[k+1]}-u_{n+1}^{[k]}\right|<\varepsilon$ 为终止条件，此时取$u_{n+1}^{[k+1]}$作为$u(t_{n+1})$ 的近似值u_{n+1} 。

为了避免求解非线性代数方程，可以用Euler法将它显化，建立预测——校正系统：

先用Euler法预估

再用梯形法校正

$$\begin{cases} u(t_0) = u_0 \\ \bar{u}_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1})\right) \end{cases} \tag{6-6}$$

求解公式(6-6)称为改进的Euler法，其中 $\bar{u}_{n+1}$ 称为预测值，u_{n+1} 称为校正值. 其求解顺序为：

$$u_0 \to \bar{u}_1 \to u_1 \to \bar{u}_2 \to u_2 \to \cdots \to \bar{u}_N \to u_N$$

改进的Euler法还可写成如下形式：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + h\, f(t_n, u_n))\right] \tag{6-7}$$

如果 $f(t,u(t))$ 关于 u 是线性函数，则隐式公式可以显式化。

例，若方程为： $u'(t)=t\cdot u+5$

隐Euler公式： $u_{n+1}=u_n+h(t_{n+1}u_{n+1}+5)$

$$u_{n+1}=\frac{u_n+5h}{1-t_{n+1}h}\text{ ，}\quad n=0,1,2,\cdots,N$$

梯形公式： $u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{2}\left(t_nu_n+t_{n+1}u_{n+1}+10\right)$

$$u_{n+1}=\frac{1}{1-\dfrac{h}{2}t_{n+1}}\left(\left(1+\frac{h}{2}t_n\right)u_n+5h\right)\quad n=0,1,2,\cdots,N$$

上述公式一般可写成

$$u_{n+1} = u_n + h\varphi\left(t_n\ , u_n\ , t_{n+1}\ , u_{n+1}\ ; h\right) \qquad n = 0\ , 1\ , 2\ , \cdots , \quad (7\text{-}8)$$

其中 ϕ 依赖于(7-1)右端的函数 $f(t,u)$.

当取$\phi = f(t_n, u_n)$时，即为Euler法；

当取$\phi = f(t_{n+1}, u_{n+1})$时，即为隐式Euler法；

当取$\phi = \frac{1}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$时，即为梯形法.

共同点：要计算 t_{n+1}近似值u_{n+1}，每次只要用到前一个节点的值 u_n，所以从初值出发可逐步算出以后各节点的值，且(7-8)关于$u_n, f_n, u_{n+1}, f_{n+1}$是线性的，所以称为线性单步法

衡量求解公式好坏的一个主要标准是求解公式的精度。

定义 假设 $u_i = u(t_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$，则称

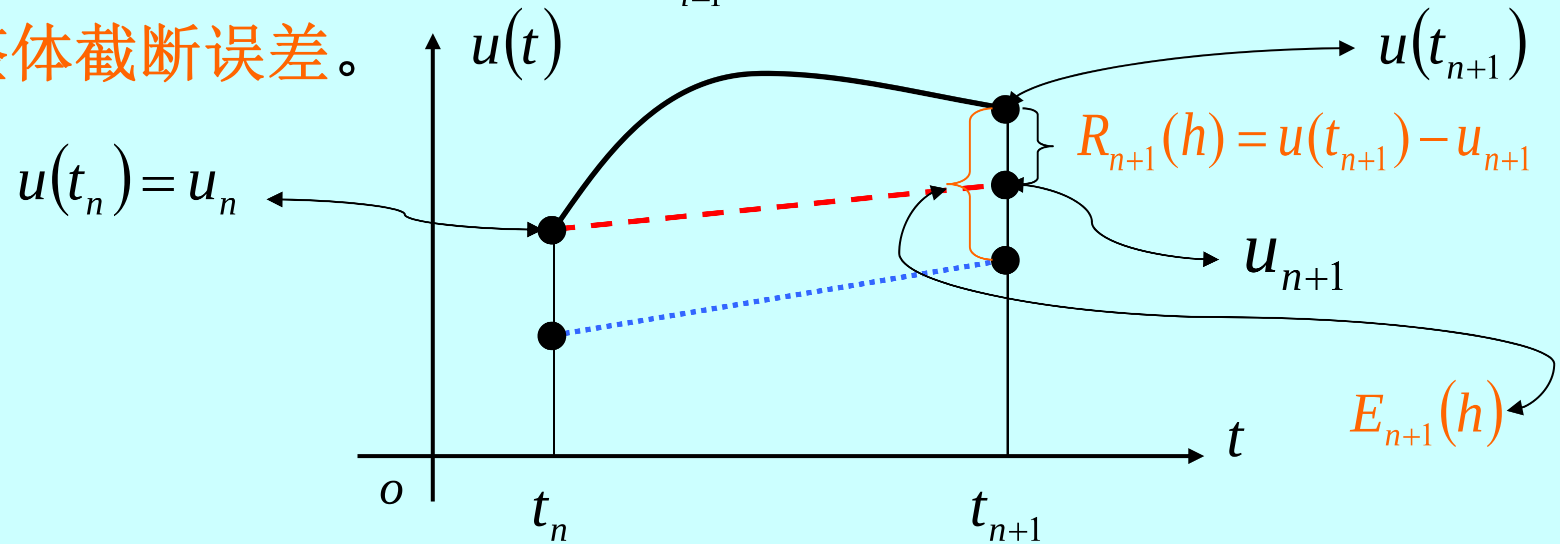
$$R_n(h) = u(t_n) - u_n$$

为求解公式第 n 步的**局部截断误差**。

假设前n−1步是精确的

所有n步的误差累计

定义 $E_n(h) = u(t_n) - u_n = \sum_{i=1}^{n} R_i(h)$ 为求解公式在 t_n 点上的**整体截断误差**。



如果设某求解公式的局部截断误差：$R_n(h) = O(h^{p+1})$

则我们可以证明其整体截断误差为：$E_n(h) = O(h^p)$

这样我们就称该求解公式具有 p 阶精度。

事实上，若 $R_i(h) = O(h^{p+1})$, $i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$E_n(h) = \sum_{i=1}^{n} R_i(h) = \sum_{i=1}^{n} O(h^{p+1}) = \sum_{i=1}^{n} h \cdot O(h^p)$$

$$= h \cdot O(h^p) \cdot n = O(h^p) \cdot n \times \frac{b-a}{n} = O(h^p)$$

求解公式的精度越高，计算解的精确性可能越好。通过简单的分析，可知Euler法具有一阶精度，梯形法具二阶精度。

下面利用**Taylor**展开，求**Euler**法的局部截断误差

$$R_n(h)=u(t_n)-u_n \quad =u(t_n)-\left[u_{n-1}+h\,f(t_{n-1},u_{n-1})\right]$$

假设前n-1步是精确的

$$=u(t_n)-\left[u(t_{n-1})+h\,f\left(t_{n-1},u(t_{n-1})\right)\right]$$

$$=u(t_n)-\left[u(t_{n-1})+h\,u'(t_{n-1})\right]$$

$$=u(t_{n-1})+hu'(t_{n-1})+\frac{h^2}{2!}u''(t_{n-1})+O\left(h^3\right)$$

$$-u(t_{n-1})-h\,u'(t_{n-1})$$

$$=\frac{h^2}{2!}u''(t_{n-1})+O\left(h^3\right) \quad =O\left(h^2\right)$$

Euler法具有一阶精度

另外，也可以用求积公式的余项，来估计局部截断误差。

7.1.3 Taylor展开法

假设初值问题的解充分光滑，将 $u(t)$ 在 t_0 处作**Taylor**展开

$$u(t)=u(t_0)+hu'(t_0)+\frac{h^2}{2!}u''(t_0)+\cdots+\frac{h^p}{p!}u^{(p)}(t_0)+O(h^{p+1})$$

$$=u(t_0)+hf(t_0,u_0)+\frac{h^2}{2!}\left.\frac{df(t,u(t))}{dt}\right|_{t=t_0}+\cdots \tag{7-9}$$

$$+\frac{h^p}{p!}\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}f(t,u(t))\Big|_{t=t_0}+O(h^{p+1})$$

把 $u'=f(t,u(t))$
当作条件代入
Taylor展式

$$u(t_0)=u_0,$$

$$u'(t_0)=f(t_0,u(t_0))=f(t_0,u_0),$$

$$u''(t_0)=\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0}=f_t+f_u u'\,|_{t=t_0}=f_t+f_u f\,|_{t=t_0}$$

$$u'''(t_0)=\left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=t_0} \tag{7-10}$$

$$=f_{tt}+f_{tu}u'+(f_{ut}+f_{uu}u')f+f_u(f_t+f_u f)\,|_{t=t_0}$$

$$=f_{tt}+f_{tu}f+(f_{ut}+f_{uu}f)f+f_u(f_t+f_u f)\,|_{t=t_0}$$

$$=f_{tt}+2f_{tu}f+f^2 f_{uu}+f_t f_u+f_u f_u f\,|_{t=t_0}$$

令

$$\varphi(t,u(t);h)=\sum_{j=1}^{p}\frac{h^{j-1}}{j!}\cdot\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}f(t,u(t)) \qquad (7\text{-}11)$$

即可将**(7-9)**改写为

$$u(t_0+h)-u(t_0)=h\varphi(t_0,u_0;h)+O(h^{p+1}),$$

舍去余项 $O(h^{p+1})$ 则得

$$u_1-u_0=h\varphi(t_0,u_0;h)$$

一般，若已知 u_n，则得

$$u_{n+1}=u_n+h\varphi(t_n,u_n;h),n=0,1,2,\ldots,$$

为单步法，局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ ，φ 关于 f 非线性。

当 $p=1$时，它是**Euler**法。由于计算 $\varphi(t_n,u_n;h)$ 的工作量太大，一般不直接用**Taylor**展开法做数值计算，但可用它计算附加值。

7.1.4 显式Runge-Kutta法

回忆改进的Euler法：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + h\, f(t_n, u_n)) \right] \qquad (7\text{-}6)$$

它是显式的单步法，具有二阶精度。

关于***f*** 非线性

再回忆显式单步法一般可以写成：

$$u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n; h),\ n = 0,1,2,\ldots$$

通过**Taylor**展式可以表示单步法的局部截断误差

希望通过非线性表示 $\varphi(t,u(t);h)$ 的方法，

使得单步法的局部截断误差的阶和**Taylor**展开法相等

下面利用**Taylor**展开的思想构造高阶显示**Runge-Kutta**公式

为了便于推导，先引进若干记号。首先取**[*t*,*t*+*h*]**上的***m***个点

$$t = t_1 \le t_2 \le t_3 \le \cdots \le t_m \le t + h$$

令

$$t_i = t + a_i h = t_1 + a_i h, \quad i = 2, \ldots, m$$

其中 a_i 与 h 无关。引进下三角形元素集

$$\begin{aligned} a_2 &= b_{2,1} \\ a_3 &= b_{3,1} + b_{3,2} \\ &\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \\ a_m &= b_{m,1} + b_{m,2} + \cdots + b_{m,m-1} \end{aligned}$$

其中 $b_{i,j}$ 与 h 无关, 且满足 $\sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j} = a_i, \quad i = 2, \ldots, m$

再设 $c_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^{m} c_i = 1$

假设三组系数 $\{a_i\}$，$\{b_{i,j}\}$，$\{c_i\}$ 已给定，则求解(7-1)的一般显式**Runge-Kutta**法的计算过程如下：

$$u_{n+1}=u_n+h\phi(t_n,u_n;h),\ n=0,1,2,\ldots \tag{7-12}$$

其中
$$\phi(t,u(t);h)=\sum_{i=1}^{m}c_ik_i \tag{7-13}$$

显式

$$\begin{cases} k_1=f(t,u), \\ k_2=f(t+ha_2,u(t)+hb_{21}k_1),\ b_{21}=a_2, \\ k_3=f(t+ha_3,u(t)+h(b_{31}k_1+b_{32}k_2)),\ b_{31}+b_{32}=a_3, \\ \quad\cdots\cdots \\ k_m=f(t+ha_m,u(t)+h\sum_{j=1}^{m-1}b_{m,j}k_j),\ \sum_{j=1}^{m-1}b_{m,j}=a_m, \end{cases} \tag{7-14}$$

系数 $\{a_i\}$，$\{b_{i,j}\}$，$\{c_i\}$ 按如下原则确定：将 k_i 关于 h 展开，代入**(7-13)**式中，使 $h^l\,(l=0,1,\ldots,p-1)$ 的系数和**(7-11)**式同次幂系数相等。如此得到的算法**(7-12)**称为**m**级**p**阶**Runge-Kutta**法。

例如，给出 $m \le 3$ 情形下显式**Runge-Kutta**法的推导。

首先将 $u(t+h)$在 t 处展开到 h 的三次幂：

$$u(t+h)=u(t)+\sum_{l=1}^{3}\frac{h^l}{l!}u^{(l)}(t)+O(h^4) \qquad (7\text{-}15)$$

$$=u(t)+h\tilde{\phi}(t,u(t);h)$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{\phi}(t,u;h)=f+\dfrac{1}{2}h\tilde{f}+\dfrac{1}{6}h^2(\tilde{f}f_u+\hat{f})+O(h^3),\\ \tilde{f}=f_t+ff_u,\\ \hat{f}=f_u+2ff_{tu}+f^2f_{uu},\end{cases} \qquad (7\text{-}16)$$

其次，由二元函数 $f(t,u)$ 在 (t,u) 处**Taylor**展开得到：

$$k_1 = f(t,u(t)) = f,$$

$$k_2 = f(t+ha_2, u(t)+ha_2k_1)$$

$$= f + ha_2(f_t + k_1 f_u) + \frac{1}{2}h^2a_2^2(f_{tt} + 2k_1 f_{tu} + k_1^2 f_{uu}) + O(h^3)$$

$$= f + ha_2\tilde{f} + \frac{1}{2}h^2a_2^2\hat{f} + O(h^3)$$

$$k_3 = f + ha_3\tilde{f} + h^2(a_2b_{32}f_u\tilde{f} + \frac{1}{2}a_3^2\hat{f}) + O(h^3)$$

于是，代入(7−13)中，合并 $h^l(l=0,1,2)$ 的同类项得到：

$$\phi(t,u(t);h) = \sum_{i=1}^{3} c_i k_i = (c_1 + c_2 + c_3)f + h(a_2c_2 + a_3c_3)\tilde{f} \qquad (7\text{−}17)$$

$$+\frac{1}{2}h^2[2a_2b_{32}c_3f_u\tilde{f} + (a_2^2c_2 + a_3^2c_3)\hat{f}] + O(h^3)$$

再比较 $\phi(t,u;h)$ 和 $\tilde{\phi}(t,u;h)$ 的同次幂系数，得到

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=1 & \Longrightarrow \text{一阶精度} \\ a_2c_2+a_3c_3=\dfrac{1}{2} & \Longrightarrow \text{二阶精度} \\ \left.\begin{array}{l} a_2b_{32}c_3=\dfrac{1}{6} \\ a_2^2c_2+a_3^2c_3=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} & \Longrightarrow \text{三阶精度} \end{cases}$$

具体方案：

（一） $m=1 \quad \Rightarrow c_1=1, c_2=c_3=0 \quad \Rightarrow \phi(t,u;h)=f$

由(7－13) $\quad \Rightarrow u_{n+1}=u_n+hf(t_n,u_n)$

即为一级一阶**Runge-Kutta**法，实际为**Euler**法。

（二） $m=2$ 此时 $\phi(t,u;h)=(c_1+c_2)f+ha_2c_2\tilde{f}+\frac{1}{2}h^2a_2^2c_2\hat{f}+O(h^3)$

与 $\tilde{\phi}(t,u;h)$ 比较 h^0,h 的系数，得到

$$c_1+c_2=1 \qquad a_2c_2=\frac{1}{2}$$

它有无穷多组解，从而有无穷多个二级二阶**Runge-Kutta**法。常见的有

(1) $c_1=0,c_2=1,a_2=\frac{1}{2}$

中点法

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+hk_2, \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f(t_n+\frac{1}{2}h,u_n+\frac{1}{2}hk_1), \end{cases}$$

(2) $c_1=c_2=\frac{1}{2},a_2=1$

改进**Euler**法

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2}h(k_1+k_2), \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f(t_n+\frac{1}{2}h,u_n+\frac{1}{2}hk_1), \end{cases}$$

（三）$m=3$

$$c_1+c_2+c_3=1 \quad a_2c_2+a_3c_3=\frac{1}{2} \quad a_2b_{32}c_3=\frac{1}{6} \quad a_2^2c_2+a_3^2c_3=\frac{1}{3}$$

四个方程不能完全确定六个系数，为含两个参数的三级三阶**R-K**法

取 $c_1=\frac{1}{6}, c_2=\frac{2}{3}, c_3=\frac{1}{6}$

$a_2=\frac{1}{2}, a_3=1, b_{32}=2$

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+hk_2, \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f(t_n+\frac{1}{2}h, u_n+\frac{1}{2}hk_1), \\ k_3=f(t_n+h, u_n-hk_1+2hk_2). \end{cases}$$

Kutta法

（四）$m=4$ 比较 $h^i(i=0,1,2,3)$ 的系数，

则得到含**13**个待定系数的**11**个方程，为含两个参数的四级四阶**R-K**法

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f(t_n+\dfrac{1}{2}h,u_n+\dfrac{1}{2}hk_1), \\ k_3=f(t_n+\dfrac{1}{2}h,u_n+\dfrac{1}{2}hk_2), \\ k_4=f(t_n+h,u_n+hk_3). \end{cases}$$

经典龙格－库塔方法

注意：通常**m**级**R-K**法最高阶不一定是**m**阶。若 **p(m)**是**m**级**R-K**法的最高阶，

可以证明： $p(5)=4,\ p(6)=5,\ p(7)=6,\ p(8)=6,\ p(9)=7.$

例 分别用Euler法、改进的Euler法和经典的Runge-Kutta法求解初值问题

$$\begin{cases} u' = 1 - \dfrac{2tu}{1+t^2}, & 0 \le t \le 2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

三个方法计算结果比较表

n	t_n	精确解 $u(t_n)$	Euler 法		改进 Euler 法		经典 Runge-Kutta 法	
			数值解 u_n	误差	数值解 u_n	误差	数值解 u_n	误差
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.5	0.433333	0.500000	0.066667	0.400000	0.033333	0.433218	0.000115
2	1.0	0.666667	0.800000	0.133333	0.635000	0.031667	0.666312	0.000355
3	1.5	0.807692	0.900000	0.092308	0.787596	0.020096	0.807423	0.000269
4	2.0	0.933353	0.985615	0.051282	0.921025	0.012308	0.933156	0.000171

7.2 线性多步法

若在区间$[t_n, t_{n+2}]$上，使用 Simpson求积公式，得

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t,u(t))\,dt \approx \frac{t_{n+2}-t_n}{6}\left[f(t_{n+2},u(t_{n+2}))+4f(t_{n+1},u(t_{n+1}))+f(t_n,u(t_n))\right]$$

令 $$u_{n+2}=u_n+\frac{2h}{6}\left[f(t_{n+2},u_{n+2})+4f(t_{n+1},u_{n+1})+f(t_n,u_n)\right]$$

可写成

$$u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}\left[f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n\right]$$

其中 $f_{n+2}=f(t_{n+2},u_{n+2})$， $f_{n+1}=f(t_{n+1},u_{n+1})$， $f_n=f(t_n,u_n)$

此为二步方法，需要已知 u_n 和 u_{n+1}，才能计算出 u_{n+2} 的值。二步以上的方法也称为多步法。

微分方程离散化求解公式的分类：

- 显式公式和 隐式公式
- 单步法和多步法

梯形法 $u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\right)$ 是单步隐式公式

改进Euler法 $u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_n+h\,f(t_n,u_n))\right]$
是单步显式公式

Simpson公式 $u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}\left[f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n\right]$是二步隐式公式

（1）显式单步法一般可以写成：

依赖于**f(t,u)**

$$u_{n+1}=u_n+h\varphi(t_n,u_n;h),\ n=0,1,2,\ldots$$

(2) 线性多步（**k**-步）法一般可以写成：

保证是k步法

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},\ \alpha_k\neq 0, \qquad (7-24)$$

其中 $f_{n+j}=f(t_{n+j},u_{n+j})$，$\alpha_j,\beta_j$ 是常数，α_0 和 β_0 不同时为0。

展开得到：

$$\alpha_0 u_n+\alpha_1 u_{n+1}+\cdots+\alpha_k u_{n+k}=h(\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n+1}+\cdots+\beta_k f_{n+k})$$

因为(7-24)关于 u_{n+j}, f_{n+j} 是线性的，所以称为线性多步法。

若 $\beta_k=0$ 则(7-24)是显式的，若 $\beta_k\neq 0$ 则(7-24)是隐式的。

7.2.1 基于数值积分的解法

考虑

$$\begin{cases} u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad (7-25)$$

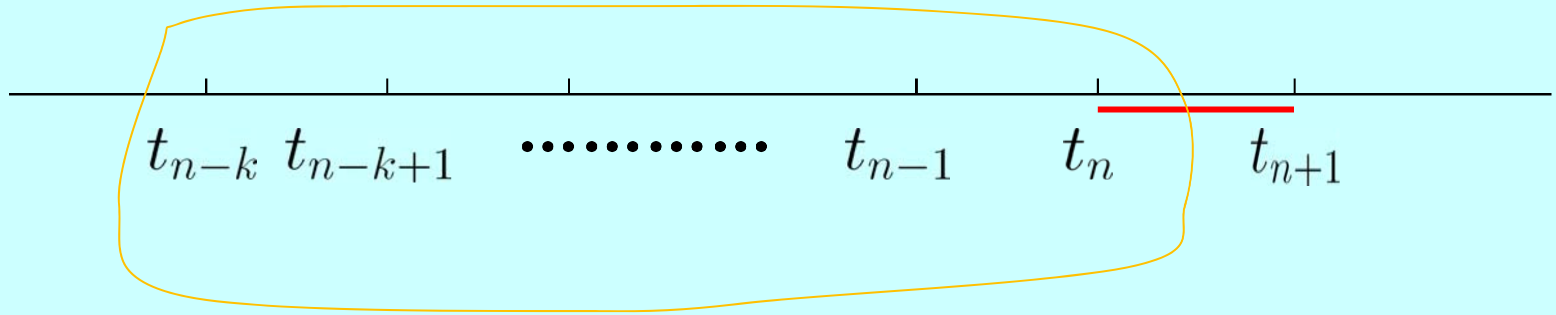
我们用k次Lagrange插值多项式

$$L_{n,k}(t) = \sum_{i=0}^{k} f(t_{n-i}, u(t_{n-i}))\, l_i(t)$$

来近似替代(7-25)中的被积函数，这里 $\{t_i\}$为等距的插值节点列

$l_i(x)$是插值基函数

1. Adams外插法（显式多步法）

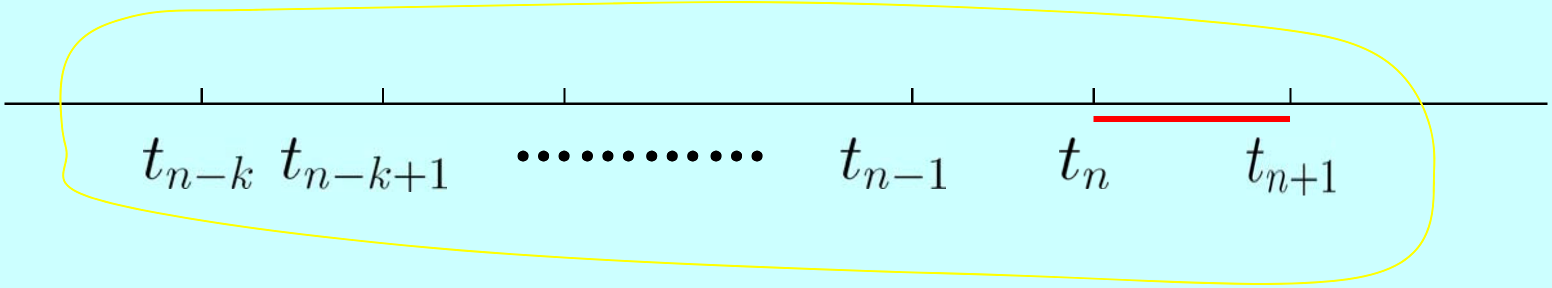


$k+1$个插值点

由于k+1个插值点在积分区间的外部，可以得到显示格式

$$u_{n+1}=u_n+h(\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n-1}+\cdots+\beta_k f_{n-k})$$

2. Adams内插法（隐式多步法）



$k+2$个插值点

由于k+2个插值点在积分区间的外部，格式是隐式的

$$u_{n+1} = u_n + h(\beta_0 f_{n+1} + \beta_1 f_n + \cdots + \beta_k f_{n-k})$$

Adams外插法和Adams内插法的几点区别:

1）计算时内插法的舍入误差的影响比外插法要小；

2）在同一个误差精度下，内插法比外插法可少算一个已知量值；

3）内插法是隐式格式，外插法是显式格式.

7.2.2 待定函数法构造多步法 $\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}$，$\alpha_k\neq 0,$

令差分算子

$$L_k[u(t);h]=\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j u(t+jh)-h\beta_j u'(t+jh)],\qquad (7\text{-}28)$$

假设 $u(t)$ 是初值问题的解，将 $u(t+jh)$ 和 $u'(t+jh)$

在点 t 处作Taylor展开

$$u(t+jh)=u(t)+\frac{jh}{1!}u'(t)+\frac{(jh)^2}{2!}u''(t)+\frac{(jh)^3}{3!}u^{(3)}(t)+\cdots$$

$$u'(t+jh)=u'(t)+\frac{jh}{1!}u''(t)+\frac{(jh)^2}{2!}u'''(t)+\frac{(jh)^3}{3!}u^{(4)}(t)+\cdots$$

代入**(7-28)**式，并按***h***的同次幂合并同类项，得

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(t+jh)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(t)+\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \frac{jh}{1!}u'(t)+\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \frac{(jh)^2}{2!}u''(t)+\cdots+$$

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \frac{(jh)^p}{p!}u^{(p)}(t)+\cdots$$

$$\sum_{j=0}^{k}\beta_j h u'(t+jh)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j h\, u'(t)+\sum_{j=0}^{k}\beta_j h\frac{jh}{1!}u''(t)+\sum_{j=0}^{k}\beta_j h\frac{(jh)^2}{2!}u'''(t)+\cdots+$$

$$\sum_{j=0}^{k}\beta_j h \frac{(jh)^{p-1}}{(p-1)!}u^{(p)}(t)+\cdots$$

$$\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j u(t+jh)-h\beta_j u'(t+jh)]=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(t)+\sum_{j=0}^{k}(j\alpha_j-\beta_j)\,hu'(t)+$$

$$\sum_{j=0}^{k}(\frac{1}{2!}j^2\alpha_j-j\beta_j)h^2u''(t)+\cdots+\sum_{j=0}^{k}(\frac{1}{p!}j^p\alpha_j-\frac{1}{(p-1)!}j^{p-1}\beta_j)h^p u^{(p)}(t)+\cdots$$

整理得到

$$L_k[u(t);h]=c_0u(t)+c_1hu'(t)+c_2h^2u''(t)+\cdots+c_ph^pu^{(p)}(t)+\cdots$$

其中

$$\begin{cases} c_0=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k, \\ c_1=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k), \\ c_2=\dfrac{1}{2!}(\alpha_1+2^2\alpha_2+\cdots+k^2\alpha_k)-(\beta_1+2\beta_2+\cdots+k\beta_k), \\ \quad\vdots \\ c_p=\dfrac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k) \end{cases} \tag{7-30}$$

$$-\frac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k),$$

整理得到 $$L_k[u(t);h]=\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j u(t+jh)-h\beta_j u'(t+jh)]=$$

$$c_0u(t)+c_1hu'(t)+\cdots+c_ph^pu^{(p)}(t)+c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t)+\cdots$$

若 $u(t)$ 有**p+2**次连续微商，则可选取适当的**k**和 α_j,β_j 使得

$c_0=c_1=c_2=\cdots=c_p=0$, $c_{p+1}\neq 0$, 即求解 α_j,β_j 的线性方程组

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)=0\\ \quad\vdots\\ \dfrac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k)\\ \qquad-\dfrac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k)=0,\ p\geq 2\end{cases}$$

使局部截断误差的阶尽可能高

此时 $L_k[u(t);h] = c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t) + O(h^{p+2}) \quad = R_n$

而 $u'(t) = f(t,u(t))$ 则 $\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j u(t_n + jh) - h\beta_j f(t_n + jh, u(t_n + jh))] = R_n,$

舍去余项$\boldsymbol{R_n}$，并记 $u_{n+j} = u(t_n + jh),\ f_{n+j} = u'(t_{n+j}, u_{n+j}),$

即得到线性多步法 $\boxed{\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},}$

p阶k步法

其局部截断误差为 $R_{n+k} = L_k[u(t_n);h] = \boxed{c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t_n)} + O(h^{p+2})$

局部截断误差主项系数

局部截断误差主项

可以证明其整体截断误差

$$E_n = O(h^p)$$

由 $c_0=c_1=c_2=\cdots=c_p=0$ 得到线性方程组

$$
(*)\quad \begin{cases}
\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k=0 \\
\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)=0 \\
\quad\vdots \\
\dfrac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k) \\
\qquad -\dfrac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k)=0,\ p\geq 2
\end{cases}
$$

注意到线性**k**步法 $\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},\ \alpha_k\neq 0,$

不妨取 $\alpha_k=1$, **p+1**个方程，**2k+1**个未知量，因此 $p\leq 2k$

即，线性**k**步法最高可达到**2k**阶精度**(**整体截断误差**)**。

线性方程组(*)的两个用途：

- 解方程组获得p阶k步法
- 对已知k步法验证其精度

例如，构造线性二步公式 $k=2$ 令 $\alpha_0=\alpha,\alpha_2=1$

$$\begin{cases} c_0=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=0 \\ c_1=\alpha_1+2\alpha_2-(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=0 \\ c_2=\dfrac{1}{2}(\alpha_1+4\alpha_2)-(\beta_1+2\beta_2)=0 \\ c_3=\dfrac{1}{6}(\alpha_1+8\alpha_2)-\dfrac{1}{2}(\beta_1+4\beta_2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-(1+\alpha) \\ \beta_0=-\dfrac{1}{12}(1+5\alpha) \\ \beta_1=\dfrac{2}{3}(1-\alpha) \\ \beta_2=\dfrac{1}{12}(5+\alpha) \end{cases}$$

所以一般二步法为 **(7-31)**

$$u_{n+2}-(1+\alpha)u_{n+1}+\alpha u_n=\frac{h}{12}[(5+\alpha)f_{n+2}+8(1-\alpha)f_{n+1}-(1+5\alpha)f_n]$$

α_2 α_1 α_0 β_2 β_1 β_0

由**(7-30)**

$$c_p=\frac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k)-\frac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k),$$

$$c_4=\frac{1}{24}(\alpha_1+16\alpha_2)-\frac{1}{6}(\beta_1+8\beta_2)=\frac{1}{24}(1+\alpha)$$

$$c_5=\frac{1}{120}(\alpha_1+32\alpha_2)-\frac{1}{24}(\beta_1+16\beta_2)=-\frac{1}{360}(17+13\alpha)$$

当 $\alpha \neq -1$ 时 $c_4 \neq 0$ 方法**(7-31)**是三阶二步法;

当 $\alpha = -1$ 时 $c_4 = 0, c_5 \neq 0$ 方法**(7-31)**化为

$$u_{n+2} = u_n + \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$$

Simpson公式

这是四阶二步法，是具有最高阶的二步法。

若取 $\alpha = 0$ 则**(7-31)** 为二步隐式**Adams**方法

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

若取 $\alpha = -5$ 则**(7-31)** 是显式方法

$\beta_2 = 0$

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} - 5u_n = 2h(2f_{n+1} + f_n)$$

类似地构造一些常用线性多步法

令 $k=1,\alpha_1=1$

$$\begin{cases} c_0=\alpha_0+\alpha_1=0 \\ c_1=\alpha_1-(\beta_0+\beta_1)=0 \\ c_2=\dfrac{1}{2}\alpha_1-\beta_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0=-1 \\ \beta_0=\dfrac{1}{2} \\ \beta_1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$c_3=\frac{1}{6}\alpha_1-\frac{1}{2}\beta_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$$

得到梯形(二阶隐式方法)： $u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{2}(f_{n+1}+f_n)$

局部截断误差为 $R_{n+1}(h)=-\dfrac{1}{12}h^3u^{(3)}(t_n)+O(h^4)$

➢对已知k步法验证其精度

向后Euler法(一阶隐式方法)： $u_{n+1}=u_n+hf_{n+1}$

得到 $k=1,\alpha_0=-1,\alpha_1=1,\beta_0=0,\beta_1=1$

$$\begin{cases} c_0=\alpha_0+\alpha_1=0 \\ c_1=\alpha_1-(\beta_0+\beta_1)=0 \\ c_2=\dfrac{1}{2}\alpha_1-\beta_1=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

局部截断误差为 $R_{n+1}(h)=-\dfrac{1}{2}h^2u^{(2)}(t_n)+O(h^3)$

三步三阶显式**Adams**方法：$u_{n+3}=u_{n+2}+\dfrac{h}{12}(23f_{n+2}-16f_{n+1}+5f_n)$

得到 $k=3,\quad \alpha_0=0,\alpha_1=0,\alpha_2=-1,\alpha_3=1,$

$$\beta_0=5/12,\beta_1=-16/12,\beta_2=23/12,\beta_3=0,$$

$$c_0=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ =0$$

$$c_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3-(\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3)\ =0$$

$$c_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+4\alpha_2+8\alpha_3)-(\beta_1+2\beta_2+3\beta_3)\ =0$$

$$c_3=\frac{1}{6}(\alpha_1+8\alpha_2+27\alpha_2)-\frac{1}{2}(\beta_1+4\beta_2+9\beta_3)=0$$

$$c_4=\frac{1}{4!}(\alpha_1+2^4\alpha_2+3^4\alpha_2)-\frac{1}{3!}(\beta_1+2^3\beta_2+3^3\beta_3)\ =\frac{3}{8}$$

局部截断误差为 $\quad R_{n+3}(h)=\dfrac{3}{8}h^4u^{(4)}(t_n)+O(h^5)$

7.3 收敛性、绝对稳定性与绝对稳定区域

收敛性：　对单步法(7-8)，当方法的阶 $p \geq 1$ 时，有整体误差

$E_n = u(t_n) - u_n = O(h^p)$　故有 $\lim\limits_{h \to 0} E_n = 0$ ，因此方法是收敛的。

对多步法(7-24)，若方法是 k 步 p 阶法，则(7-24)是一个 k 阶差分方程。

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j},\ \alpha_k \neq 0,$$

引入多步法(7-24)的第一特征多项式 $\rho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j$

和第二特征多项式　$\sigma(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j$

定义 7.1 若(7-24)的第一特征多项式 $\rho(\lambda)$ 的所有根(复根)在单位圆内或圆上。(即 $|\lambda| \leq 1$)，且位于单位圆周上的根都是单根，则称多步法满足根条件。

定理 7.1 若线性多步法(7-24)的阶 $p \geq 1$ ，且满足根条件，则方法是收敛的。

稳定性： 例1 P236

一般通过模型方程来讨论方法的数值稳定性，

$$u' = \mu u \tag{7-32}$$

其中 $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ ，模型方程为好条件问题。

$$\begin{cases} u' = \mu u \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \Rightarrow u = u_0 e^{\mu t}$$

精确解

若初值有误差：$u_0 + \varepsilon$ $\Rightarrow \tilde{u} = (u_0 + \varepsilon) e^{\mu t}$

$$\Rightarrow |u - \tilde{u}| = |\varepsilon| e^{\operatorname{Re}(\mu) t}$$

如果 $\operatorname{Re}(\mu) > 0$，则误差随 t 的增加而扩大；

坏条件问题，类似于病态问题

如果 $\operatorname{Re}(\mu) < 0$，则误差随 t 的增加而减小。

好条件问题，类似于良态问题

因为实际计算中，h 是固定的。当某一步 u_n 有 舍入误差时，

若以后的计算中不会逐步扩大，称这种稳定性为绝对稳定性。

例如，对**Euler**法

$$u_{n+1} = u_n + hf_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

用于求解模型方程得到

$$u_{n+1} = u_n + h\mu u_n = (1+\mu h)u_n$$

当 u_n 有舍入误差时，近似解为 $\tilde{u}_n$

$$\tilde{u}_{n+1} = (1+\mu h)\tilde{u}_n$$

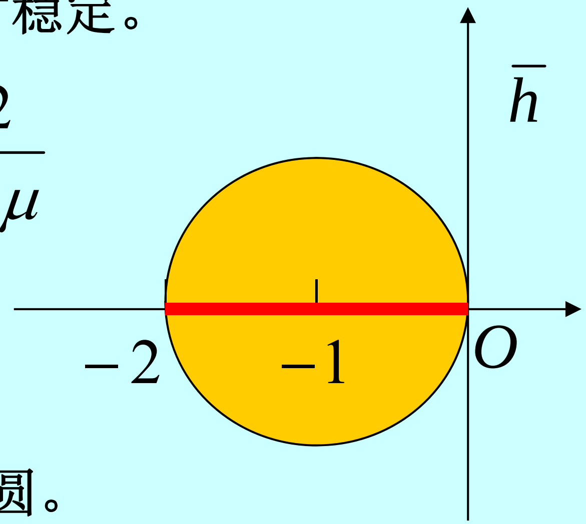
取 $\varepsilon_n = u_n - \tilde{u}_n$，得误差传播方程 $\varepsilon_{n+1} = (1+\mu h)\varepsilon_n = (1+\mu h)^n \varepsilon_1$

记 $\bar{h}=\mu h$，只要 $\left|1+\bar{h}\right|<1$，则**Euler**方法绝对稳定。

若实数 $\mu<0$，则 $-2<\bar{h}<0 \Leftrightarrow 0<h<\dfrac{2}{-\mu}$

若 μ 为复数，在 $\bar{h}=\mu h$ 的复平面上，

$\left|1+\bar{h}\right|<1$ 表示以**(-1,0)**为圆心，**1**为半径的单位圆。



定义 7.2 一个数值方法用于求解模型问题**(7-32)**，若在 $\bar{h}=\mu h$ 平面中的某一个区域**D**中方法都是绝对稳定的，而在区域**D**外，方法是不稳定的，则称**D**是方法的绝对稳定区域，它与实轴的交称为绝对稳定区间。

步长**h**的可选范围

m级m阶Runge-Kutta法的绝对稳定区域： $\left|\lambda(\bar{h})\right| < 1$

$$\lambda(\bar{h}) = 1 + \bar{h} + \frac{1}{2!}\bar{h}^2 + \cdots + \frac{1}{m!}\bar{h}^m$$

	$\lambda(\bar{h})$	绝对稳定区间
一级	$1+\bar{h}$	$(-2,0)$
二级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2$	$(-2,0)$
三级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\frac{1}{6}\bar{h}^3$	$(-2.51,0)$
四级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\frac{1}{6}\bar{h}^3+\frac{1}{24}\bar{h}^4$	$(-2.78,0)$

线性k步法的绝对稳定区域：

将k步法用于求解模型问题得到k阶线性差分方程

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j}=\mu h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j} \qquad \textbf{(7-33)}$$

若取 $\bar{h}=\mu h$，则记**(7-33)**的特征方程为 $\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=0$ **(7-34)**

其中 $\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j,\ \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j$

由**k**阶线性差分方程的性质，若特征方程**(7-34)**的根都在单位圆 $(|\lambda|<1)$内,

则多步法**(7-24)**关于 $\bar{h}=\mu h$ 绝对稳定，其绝对稳定域是复平面 $\bar{h}$上区域：

$$D=\{\bar{h}:|\lambda_j(\bar{h})|<1,\ j=1,2,\ldots,k\}$$

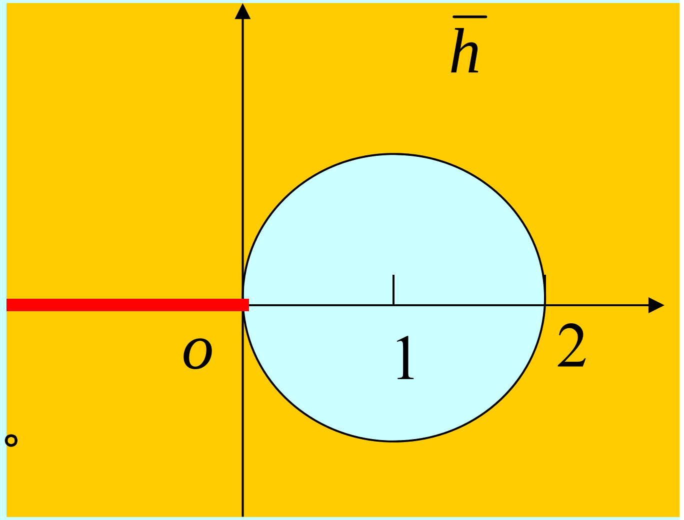
例如，隐式方法中最简单的向后**Euler**法，

$$u_{n+1}=u_n+hf(t_{n+1},u_{n+1}),\quad n=0,1,2,\ldots$$

其特征方程为

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=(\lambda-1)-\bar{h}\lambda=(1-\bar{h})\lambda-1=0$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{1-\bar{h}}$$



于是隐**Euler**法的绝对稳定区域为 $|1-\bar{h}|>1$

它是 $\bar{h}$ 平面上以**(1,0)**为圆心的单位圆外区域。

当 $\mu<0$ 为实数时，绝对稳定区间为 $(-\infty,0)$ $\Leftrightarrow h>0$

隐**Euler**法无条件稳定！

又如，梯形法

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2}h(f_n+f_{n+1}),\quad n=0,1,2,\ldots$$

其特征方程为

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=(\lambda-1)-\bar{h}\frac{1}{2}(1+\lambda)=(1-\frac{\bar{h}}{2})\lambda-(1+\frac{\bar{h}}{2})=0$$

$$\Rightarrow\lambda=(1+\frac{\bar{h}}{2})\Big/(1-\frac{\bar{h}}{2})$$

于是梯形法的绝对稳定区域为左半平面 $\left|\bar{h}+2\right|<\left|\bar{h}-2\right|$

当 $\mu<0$ 为实数时，绝对稳定区间为 $(-\infty,0)$ $\Leftrightarrow h>0$

梯形法无条件稳定！

另外，实系数二次方程 $\lambda^2-b\lambda-c=0$ 的根在单位圆内的充要条件为

$$|b|<1-c<2.$$

数值分析和计算方法的思想：

- 用有限近似无限
- 用线性近似非线性
- 用离散近似连续

欧 拉 Léonard Euler

欧拉（Léonard Euler,1707~1783）

莱昂纳尔·欧拉（Léonard Euler，1707～1783）是历史上著作最多的数学家，被同时代的人称为“分析的化身”。人们评价他：“欧拉计算毫不，就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样”，欧拉--算法学家，为解决殊类型的问题设计“算法”的数学家。

欧拉的数学事业开始于牛顿去世的那一年（1727年）。他在1748年、1755年和1768～1770所著关于微积分的伟大论著(《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》)，立即就成为了经典著作，并且在四分之三个世纪中，继续鼓舞着想成为大数学家的的年轻人。

欧拉1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔，其父是牧师，欧拉是能在任何地方、任何条件下工作的几个大数学家之一。他常常抱着一个婴儿写作他的论文，同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。据说，在家人两次叫他吃饭的半个小时左右的间隔中，他就能草就一篇数学文章。

欧拉是为月球问题形成一个可计算解（月球理论）的第一人。

在生命最后17年中他完全失明，这并没有妨碍他的无以伦比的多产的；他既靠视觉又靠听觉记忆。它还有惊人的心算本领，不仅心算算术类型的问题，也心算高等代数和微积分学中要求的更难的问题。他那个时代整个数学领域中的全部主要公式，都精确地储藏在他的记忆中。

欧拉直到他临终的那一刻仍然神志清醒、思想敏捷，他享年77岁，于1783年9月18日去世。那天下午她计算气球上升的规律消遣—像往常一样，在他的石板上计算，然后他和家人一起吃晚饭。天王星是新近发现的，欧拉略述了对它的轨道的计算。过了一会儿，他让人把他的孙子带进来。在与孩子玩和喝茶的时候，欧拉突然中风。烟斗从他的手里掉下来，他说了一句“我死了”，就中止了他的生命和计算。

欧拉（**Leonard Euler, 公元1707-1783年**），历史上最伟大的数学家之一，与阿基米德、牛顿、高斯一起被称为有史以来贡献最大的四位数学家.

欧拉从小就特别喜欢数学，不满10岁就开始自学《代数学》。13岁上大学，两年后获得巴塞尔大学的学士学位，次年又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位。1725年，欧拉来到彼得堡，开始了他的数学生涯.

1733年，年仅26岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授. 过度的工作使他得了眼病，右眼失明，时年28岁. 1741年欧拉到柏林担任科学院物理数学所所长. 1766年，重回彼得堡任职. 没过多久，左眼视力衰退，最后完全失明. 不幸的事情接踵而来，1771年一场大火将他的书房和大量研究成果全部化为灰烬.

沉重的打击，仍然没有使欧拉倒下. 他以惊人的毅力，凭着记忆和心算进行研究，直到逝世. 在失明后的17年间，他还口述了几本书和400篇左右的论文. 当大火烧掉他几乎全部的著述之后，欧拉用了一年的时间口述了所有这些论文并作了修订.

欧拉知识渊博，著作丰富，令人惊叹不已！他从19岁开始发表论文，直到76岁，一生写下了浩如烟海的书籍和论文．可以说欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家，据统计他共写下了886本书籍和论文，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。到今几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字，从初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法到数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数的欧拉公式等等，数也数不清．他对数学分析的贡献更独具匠心，《无穷小分析引论》一书便是他划时代的代表作，当时数学家们称他为"分析学的化身"．19世纪伟大数学家高斯（Gauss，1777-1855年）曾说："研究欧拉的著作永远是了解数学的最好方法．"著名数学家拉普拉斯（Laplace）曾说过："读读欧拉、读读欧拉，它是我们大家的老师！"

欧拉的一生，是为数学发展而奋斗的一生，他那杰出的智慧，顽强的毅力，孜孜不倦的奋斗精神和高尚的科学道德，永远是值得我们学习的．