第 6 章

插值函数的应用

6.1.1 数值求积公式及其代数精度

由 **Newton-Leibniz**公式，连续函数 $f(x)$在 $[a,b]$上的定积分

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。但是大多数实际问题，**N-L**公式已经无能为力。常常遇到的困难是：

- $F(x)$不能用初等函数表示，即 $f(x)$找不到原函数；

$$f(x)=\frac{1}{\ln x} \qquad f(x)=\frac{\sin x}{x} \qquad f(x)=e^{-x^2} \qquad f(x)=\frac{1}{1-k^2\sin^2 x}$$

- $f(x)$ 没有解析表达式，用表格方式给出；
- 大多数的无穷积分，除特殊的无穷积分外。

- 虽然找到 $f(x)$ 的原函数，但是它比被积函数复杂的多，

$$\int \frac{x^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{1-x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + c$$

上述积分就只能利用数值积分公式进行近似计算。

设 $f(x)$是定义在 $[a,b]$上的可积函数，考虑带权积分

$$I(f) = \int_a^b \rho(x)\, f(x)\, dx \qquad (6\text{-}1)$$

其中权函数 $\rho(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，且至多有有限个零点。

本节只讨论 $\rho(x)\equiv 1$ 的情形。 所谓**数值求积**就是用

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (6\text{-}2)$$

近似计算 $I(f)$ 的值。

求积系数

公式（6-2）称为**数值求积公式**，

数值求积公式

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

其中 $A_k\ (k=0,1,\cdots,n)$ 是与 $f(x)$无关的常数，称为**求积系数**，$[a,b]$ 上的点 $x_k\ (k=0,1,\cdots,n)$ 称为**求积节点**。

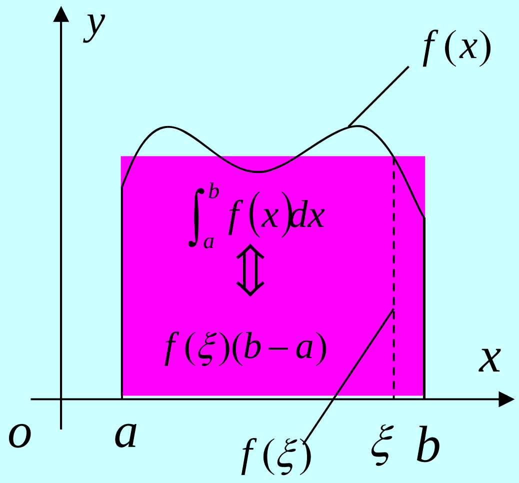
求积节点

数值积分公式产生的背景

大家熟知第一积分中值定理：

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)\,(b-a) \qquad \xi\in(a,b)$$

但是ξ的具体位置不可确定。其几何意义为：



矩形 $f(\xi)(b-a)$ 的面积= 曲边梯形 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的面积。

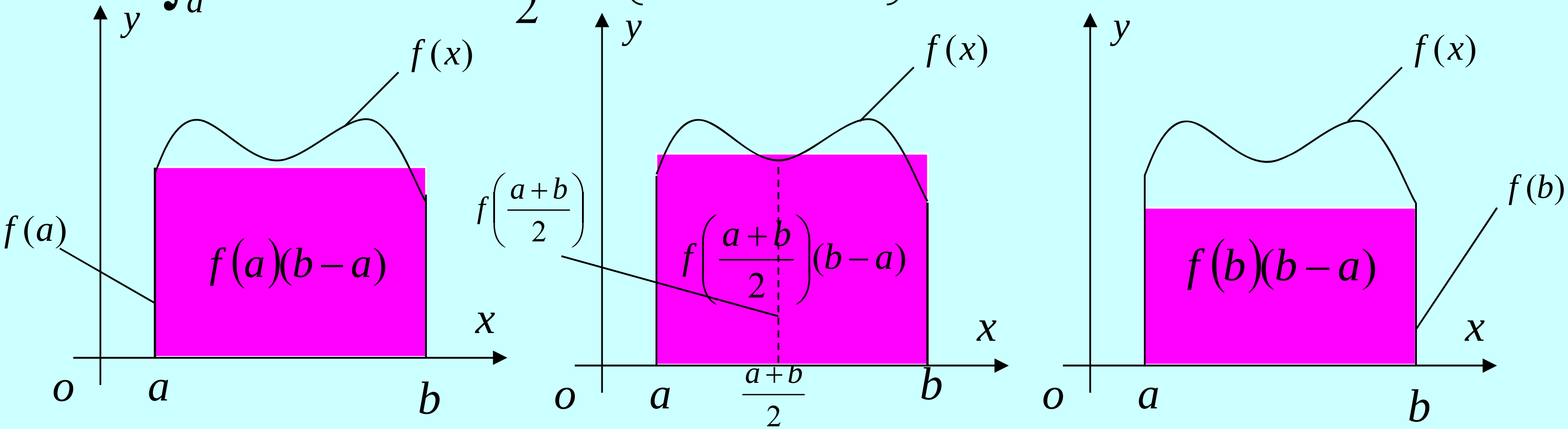
我们可以采用不同的的近似值的方法得到下述数值求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(a)\,(b-a)$$ 称为**左矩形**数值求积公式；

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$ 称为**中矩形**数值求积公式；

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(b)\,(b-a)$$ 称为**右矩形**数值求积公式；

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$ 称为**梯形**数值求积公式。



本节采用的逼近函数是 $f(x)$ 在等距节点上的插值多项式，得到的数值求积公式称为**插值型求积公式**。

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，令 $h=\dfrac{b-a}{n}$（称为步长），将分点 $x_k=a+kh\,(k=0,1,\cdots,n)$ 取为插值节点（也是求积节点），则 $f(x)$ 可表示为它的**Lagrange**插值多项式及其余项之和，即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)+r_n(x) \qquad \text{（6-3）}$$

所以

$$\int_a^b f(x)\ dx=\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)\right)dx+\int_a^b r_n(x)\ dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k(x)\ dx\right)f(x_k)+\int_a^b r_n(x)\ dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n} A_k \cdot f(x_k) + \int_a^b r_n(x)\ dx \qquad （6-4）$$

这样得到的插值型求积公式

等距节点

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot f(x_k) \qquad (6-5)$$

称为 $n+1$ 点的**Newton-Cotes公式**，其中求积系数

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\ dx \qquad k = 0, 1, \cdots, n \qquad (6-6)$$

求积余项

$$E_n(f) = \int_a^b r_n(x)\ dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)\,!}\ w_{n+1}(x)\ dx \qquad (6-7)$$

标志着求积公式的误差大小。

在Newton-Cotes公式中，最常用的是 $n=1,2,4$ 时的三个公式，即 $n=1$

$$I_1(f)=A_0\ f(a)+A_1\ f(b)$$

此时

$$A_0=\int_a^b l_0(x)\ dx=\int_a^b \frac{x-b}{a-b}\ dx=\frac{b-a}{2}$$

$$A_1=\int_a^b l_1(x)\ dx=\int_a^b \frac{x-a}{b-a}\ dx=\frac{b-a}{2}$$

这就是**梯形求积公式**:

梯形求积公式

$$I_1(f)=T=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \quad \textbf{(6-8)}$$

$$n=2$$

$$I_2(f)=A_0\ f(a)+A_1\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)+A_2\ f(b)$$

此时

$$A_0=\int_a^b l_0(x)\,dx=\int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}dx=\frac{b-a}{6}$$

$$A_1=\int_a^b l_1(x)\ dx=\int_a^b \frac{(x-a)\ (x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\ dx=\frac{2(b-a)}{3}$$

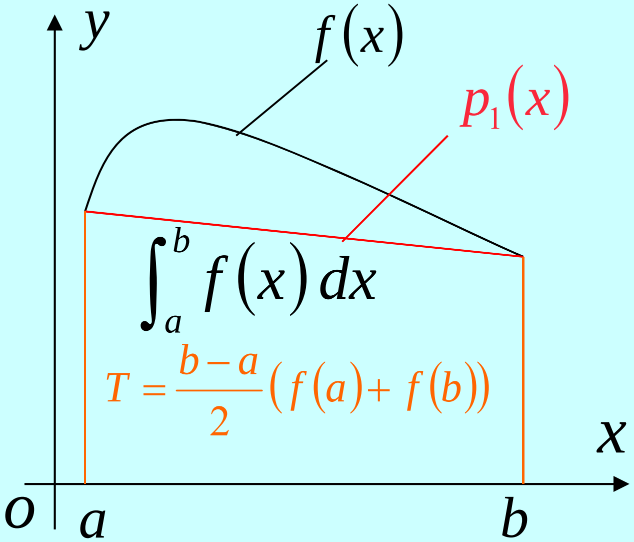
$$A_2=\int_a^b l_2(x)\ dx=\int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}dx=\frac{b-a}{6}$$

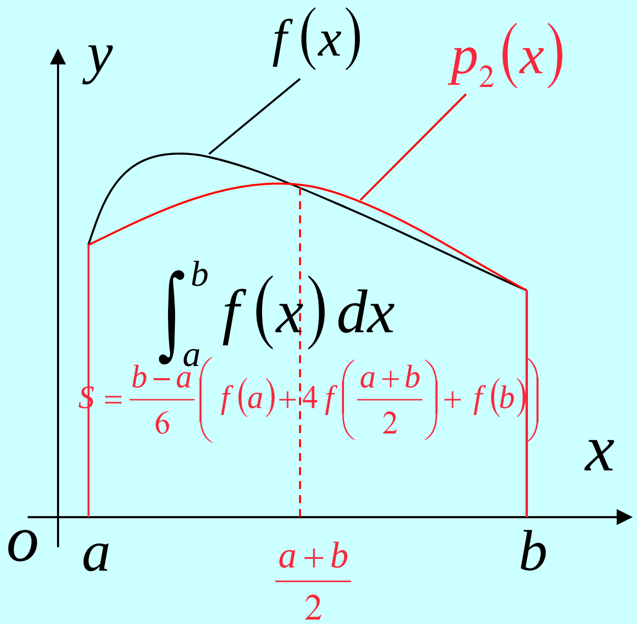
这称为Simpson**求积公式**：

Simpson求积公式

$$I_2(f) = S = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\times f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad \textbf{(6-9)}$$

$f(x) \approx p_n(x)$ → $I(f) \approx I(p_n) = I_n(f)$





进一步可得 $n=4$ **Cotes公式**

$$I_4(f)=C=\frac{b-a}{90}\left[7f(a)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(b)\right] \quad \textbf{(6-10)}$$

Cotes求积公式

n+1点Newton-cotes公式求积系数的特点：

由等距节点的**Lagrange**插值基函数对称，且满足单位分解性

因此**N-C**公式的求积系数是对称的，并且满足“单位分解性”

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x)dx = \int_a^b 1dx = b-a$$

练习题 用梯形求积公式和**Simpson**求积公式计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

解： 由梯形求积公式：

$$T=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\right]=\frac{3}{4}$$

由Simpson求积公式：

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{1}{6}\left[1+\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\right]=\frac{25}{36}$$

练习题 用梯形求积公式和**Simpson**求积公式计算积分

$$I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

解： 由梯形求积公式：

$$T=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]=\frac{1}{2}\left[1+e^{-1}\right]$$

由Simpson求积公式：

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{1}{6}\left[1+4e^{-\frac{1}{4}}+e^{-1}\right]$$

如果某个数值求积公式对比较多的函数能够准确成立，即 $I_n(f)=I(f)$ 那么这个公式的使用价值就较大，可以说这个公式的精度较高．为衡量数值求积公式的精度，引进代数精度的概念。

定义6.1 如果某个数值求积公式，对于任何次数不超过 m 次的代数多项式都是精确成立的

$$I(x^m)=\int_a^b x^m dx \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot x_k^m = I_n(x^m)$$

但对于 $m+1$ 次代数多项式不一定能准确成立，即

$$I(x^{m+1})=\int_a^b x^{m+1} dx \neq \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot x_k^{m+1} = I_n(x^{m+1})$$

则称该求积公式具有 m 次代数精度．

n+1点Newton-Cotes公式$I_n(f)$至少有n次代数精度

显然，一个数值求积公式具有m次代数精度的充要条件是它对$f(x)=1, x, \cdots, x^m$都能准确成立，但对x^{m+1}不能准确成立。

这是确定代数精度的最常用方法。

下面求梯形数值求积公式和**Simpson**数值求积公式的代数精度。

对于$f(x)=1, x, x^2$，我们可得

$$I(1)=\int_a^b 1\,dx = b-a = \frac{b-a}{2}(1+1) = I_1(1)$$

$$I(x)=\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{2}(a+b) = I_1(x)$$

$$I(x^2)=\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} \neq \frac{b-a}{2}\left(a^2+b^2\right) = I_1(x^2)$$

故梯形数值求积公式具有**1次代数精度**。

对于 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ ，我们可得

$$I(1)=\int_a^b 1\,dx = b-a = \frac{b-a}{6}(1+4+1) = I_2(1) = S$$

$$I(x)=\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{6}\left(a+4\left(\frac{a+b}{2}\right)+b\right) = I_2(x) = S$$

$$I(x^2)=\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b-a}{6}\left(a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right) = I_2(x^2) = S$$

$$I(x^3)=\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4} = \frac{b-a}{6}\left(a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right) = I_2(x^3) = S$$

而 $$I(x^4)=\int_a^b x^4\,dx = \frac{b^5-a^5}{5} \neq \frac{b-a}{6}\left(a^4+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+b^4\right) = I_2(x^4) = S$$

故**Simposon**数值求积公式具有**3**次代数精度。

当然也可以通过求积余项估计，得到代数精度．以下先推导几个求积余项，进而指出n+1点Newton-Cotes公式的代数精度。

梯形公式的求积余项：

由于 $$f(x)=p_1(x)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \qquad \xi=\xi(x)\in[a,b]$$

$$E_1(f)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)dx$$

因为$(x-a)(x-b)$在**(a,b)** 上恒为负(不变号)，由积分中值定理

$$E_1(f)=\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b(x-a)(x-b)dx \qquad \eta\in(a,b)$$

$$=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

Simpson公式的求积余项：

由于 $f(x)=p_2(x)+f[a,x_1,b,x](x-a)(x-x_1)(x-b)$ $\qquad x_1=\dfrac{a+b}{2}$

$$
\begin{aligned}
E_2(f) &= \int_a^b f[a,x_1,b,x](x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)dx \\
&= \int_a^b f[a,x_1,b,x](x-a)(x-b)\frac{1}{2}d(x-a)(x-b) \\
&= \int_a^b f[a,x_1,b,x]d\frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4} \\
&= \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4} f[a,x_1,b,x]\Big|_a^b \\
&\quad -\int_a^b \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4} df[a,x_1,b,x]
\end{aligned}
$$

由于 $$\frac{df[a,x_1,b,x]}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[a,x_1,b,x+\Delta x]-f[a,x_1,b,x]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} f[a,x_1,b,x,x+\Delta x]=f[a,x_1,b,x,x]$$

因此 $$E_2(f)=-\int_a^b\frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4}f[a,x_1,b,x,x]dx$$

因为$\dfrac{(x-a)^2(x-b)^2}{4}$在**(a,b)** 上恒为正(不变号)，由积分中值定理

$$E_2(f)=-\frac{1}{4}f[a,x_1,b,\xi,\xi]\int_a^b(x-a)^2(x-b)^2dx$$

$\eta\in(a,b)$ $$=-\frac{1}{4}\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b(x-a)^2(x-b)^2dx=-\frac{1}{90}f^{(4)}(\eta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

一般的**n+1**点**Newton-Cotes**公式的求积余项，有如下定理：

定理6.1 n 是偶数，且 $f(x)\in \mathbf{C}^{n+2}[a,b]$ ，则

$$E_n(f)=C_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta)\,,\quad \eta\in(a,b)$$

其中

$$C_n=\frac{1}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t$$

若 n 是奇数，且 $f(x)\in \mathbf{C}^{n+1}[a,b]$，则

$$E_n(f)=C_n h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)\,,\quad \eta\in(a,b)$$

其中

$$C_n=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t$$

代数精度是“粗”的误差估计

求积余项是“细”的误差估计

由于对 n 次多项式 $f(x)$, $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$ 所以由上述定理可知，

当 n 为偶数时，$n+1$ 点的**Newton-Cotes**公式的代数精度为$n+1$;

当 n 为奇数时，$n+1$ 点的**Newton-Cotes**公式的代数精度为 n。

梯形公式、Simpson公式及Cotes公式的代数精度分别为1，3，5.

$n=1 \quad \rightarrow m=1$ 梯形公式

代数精度相等 $\left\{\begin{array}{l} n=2 \quad \rightarrow m=3 \\ n=3 \quad \rightarrow m=3 \end{array}\right.$ **Simpson公式**

代数精度相等 $\left\{\begin{array}{l} n=4 \quad \rightarrow m=5 \\ n=5 \quad \rightarrow m=5 \end{array}\right.$ **Cotes公式**

Newton-Cotes 公式的稳定性

截断误差（收敛性）

$$I(f) = I_n(f) + E_n(f)$$

舍入误差（稳定性）

注意到 $f(x_k) = \tilde{f}_k + \varepsilon_k$

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k \tilde{f}_k + \sum_{k=0}^{n} A_k \varepsilon_k$$

而 $$\left|\sum_{k=0}^{n} A_k \varepsilon_k\right| \le \max_{0\le k\le n} |\varepsilon_k| \cdot \sum_{k=0}^{n} |A_k|$$

N-C公式求积系数的绝对值和发散

高次N-C公式的稳定性差！

Newton-Cotes
公式的收敛性

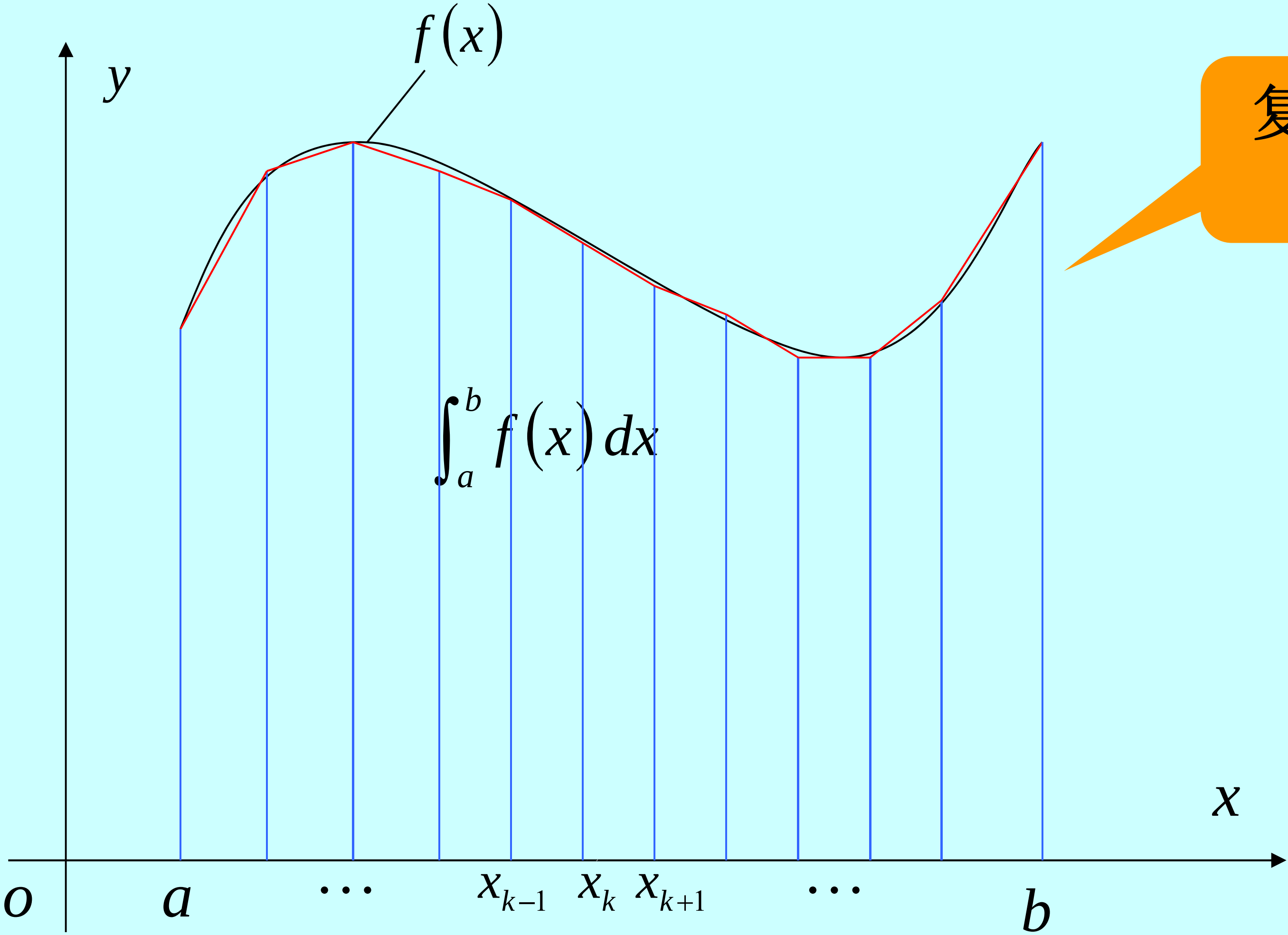
采用分段低次插值型求积公式

我们希望有 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n(f) = I(f)$ 成立吗？

注意到 $I_n(f)=\int_a^b p_n(x)dx \qquad I(f)=\int_a^b f(x)dx$

然而，多项式插值 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ 不成立！

通过分段低次插值解决收敛性问题



复化求积公式

$$x_k = a + k\,h \quad h = \frac{b-a}{n} \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

6.1.2 复化求积公式

本节讨论在大区间上，对于数值积分使用低阶**Newton-Cotes**公式的**分段**解决办法。

将 $[a,b]$ 等分成若干个小区间，在每个小区间上用点数少的**Newton-Cotes公式**，然后再对所有子区间求和。这样得到的数值求积公式称为**复化Newton-Cotes公式**.

将区间 $[a,b]$进行 n 等分，每个子区间的长度 $h=\dfrac{b-a}{n}$。

如果在每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$上用梯形求积公式，即

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$$

则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

由此可得复化梯形公式

复化梯形公式

$$T_n=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right] \qquad (6\text{-}14)$$

如果在每个子区间$[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$上用**Simpson**公式，即

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\right]$$

$$=\frac{h}{6}\Big[f(x_0)+4f(x_{1/2})+f(x_1)+f(x_1)+4f(x_{3/2})+f(x_2)$$

$$+\cdots+f(x_{n-1})+4f(x_{n-1/2})+f(x_n)\Big]$$

可得复化**Simpson**公式

复化Simpson公式

$$S_n=\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(b)\right] \qquad （6\text{-}13）$$

复化Cotes公式

同理可得复化**Cotes**公式

$$C_n = \frac{b-a}{90n}\left[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)\right] \qquad (6\text{-}15)$$

下面推导这三种复化求积公式的余项估计。

设 $f(x) \in C^2[a,b]$，由**(6-11)** 得复化梯形公式的余项：

$$I - T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{h^3}{12} f''(\eta_k)\right) = -\frac{nh^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f''(\eta_k)}{n}$$

利用
介值定理

$$= -\frac{b-a}{12} h^3 f''(\eta), \quad \eta \in (a,b)$$

又由于

$$\lim_{h\to 0}\frac{I-T_n}{h^2} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1} hf''(\eta_k)\right) = -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx = \frac{-1}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

误差是**2**阶
无穷小

当**n**充分大时，

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

同理可得复化**Simpson**公式的余项：

$$I-S_n=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta),\ \ \eta\in(a,b)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{I-S_n}{h^4}=-\frac{1}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4[f'''(b)-f'''(a)]$$

当**n**充分大时，$I-S_n\approx-\frac{1}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4[f'''(b)-f'''(a)]$

对于复化**Cotes**公式，

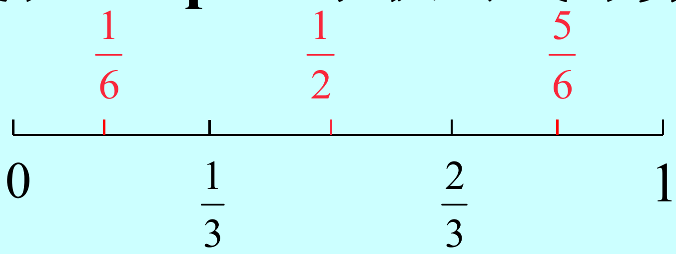
$$I-C_n=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta),\ \ \eta\in(a,b)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{I-C_n}{h^6}=-\frac{2}{945}\left(\frac{1}{4}\right)^6[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]$$

当**n**充分大时， $I-C_n\approx-\frac{2}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]$

练习题 用 $n=3$ 复化梯形、复化**Simpson**求积公式计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$



解： 由复化梯形求积公式：

$$T_3=\frac{b-a}{2\times 3}\left[f(a)+2\times\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\ f(b)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[1\ +\ 2\times\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{2}\ \right]=\frac{21}{30}$$

由复化Simpson求积公式：

$$S_3=\frac{b-a}{6\times 3}\left[f(a)+2\times\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+4\times\left(f\left(x_{\frac{1}{2}}\right)+f\left(x_{\frac{3}{2}}\right)+f\left(x_{\frac{5}{2}}\right)\right)+f(b)\right]$$

$$=\frac{1}{18}\left[1\ +\ 2\times\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)\ +4\times\left(\frac{6}{7}+\frac{2}{3}+\frac{6}{11}\right)+\frac{1}{2}\right]\ =0.6931670$$

6.1.3 数值微分公式 插值型数值微分公式

设已知**$f(x)$**在**n+1**互异节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数值

$$f_i = f(x_i) \ (i = 0,1,\ldots,n)$$

则有**Lagrange**插值

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x - x_j), \qquad \xi_x \in [a,b]$$

两端求导得

$$f'(x) = p_n'(x) + \frac{1}{(n+1)!}[f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)]'$$

$$= p_n'(x) + \frac{1}{(n+1)!}[\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)]' f^{(n+1)}(\xi_x)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}[f^{(n+1)}(\xi_x)]'\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

无法确定

当 $x = x_k (k = 0,1,\ldots,n)$ 时，有

$$f'(x_k) = p_n'(x_k) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)[\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)]'_{x=x_k}$$

$$= p_n'(x_k) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0, j\neq k}^{n}(x_k - x_j)$$

取 $f'(x_k) \approx p_n'(x_k)$

截断误差为 $E_n(x_k) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0, j\neq k}^{n}(x_k - x_j)$

由于高次多项式插值的不稳定性，
实际应用多采用**n=1,2,4**的二，三，五点插值型求导公式

一、两点公式

当 $n=1$ 时，假设 $f'(x)$ 连续，$f''(x)$ 存在，则

$$p_1(x) = f_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$\Rightarrow p_1'(x) = \frac{f_0}{x_0-x_1} + \frac{f_1}{x_1-x_0} = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = f[x_0, x_1]$$

记 $h = x_1 - x_0$ 得带余项的两点公式：

$$\begin{cases} f'(x_0) = \dfrac{f_1-f_0}{h} - \dfrac{h}{2} f''(\xi), \\ f'(x_1) = \dfrac{f_1-f_0}{h} + \dfrac{h}{2} f''(\xi), \end{cases}$$

二、三点公式

当 $n=2$ 时，取等距节点 $x_k = x_0 + kh \ (k=0,1,2)$

若 $f''(x)$ 连续，$f'''(x)$ 存在，则

$$p_2(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$p_2'(x) = f_0 \frac{2x-(x_1+x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{2x-(x_0+x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{2x-(x_0+x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

由此得带余项的三点公式：

$$
\begin{cases}
f'(x_0)=\dfrac{1}{2h}(-3f_0+4f_1-f_2)+\dfrac{h^2}{3}f'''(\xi), \\
f'(x_1)=\dfrac{1}{2h}(f_2-f_0)-\dfrac{h^2}{6}f'''(\xi), \\
f'(x_2)=\dfrac{1}{2h}(f_0-4f_1+3f_2)+\dfrac{h^2}{3}f'''(\xi),
\end{cases}
$$

三、五点公式

当 $n=4$时，取等距节点 $x_k = x_0 + kh \ (k=0,1,2,3,4)$

若$f^{(4)}(x)$连续，$f^{(5)}(x)$存在，则 带余项的五点公式：

$$
\begin{cases}
f'(x_0) = \dfrac{1}{12h}(-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4) + \dfrac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi), \\
f'(x_1) = \dfrac{1}{12h}(-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4) - \dfrac{h^4}{20}f^{(5)}(\xi), \\
f'(x_2) = \dfrac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) + \dfrac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi), \\
f'(x_3) = \dfrac{1}{12h}(-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_4) - \dfrac{h^4}{20}f^{(5)}(\xi), \\
f'(x_4) = \dfrac{1}{12h}(3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4) + \dfrac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi),
\end{cases}
$$

利用**Lagrange**插值多项式导出的数值微分公式只能求节点的导数的近似值，为了求非节点处的数值导数，可利用三次样条插值。

设 $f(x)\in C^2[a,b]$，令 $h=\dfrac{b-a}{n}$ 取等距节点 $x_j=a+jh\ (j=0,1,\dots,n)$

给定边界条件 $m_0=f_0',m_n=f_n'$ (或者其它边界条件)，此时

$$\lambda_j=\mu_j=\frac{1}{2},\ \ g_j=\frac{3}{2h}(y_{j+1}-y_{j-1}),\ \ j=1,2,\dots,n-1,$$

三转角方程组为

$$m_{j-1}+4m_j+m_{j+1}=2g_j,\quad j=1,2,\dots,n-1,$$

解出 $m_1,m_2,\dots,m_{n-1}$ 之后，可得三次样条插值函数为

$$s(x)=\frac{1}{h^3}[h+2(x-x_j)](x-x_{j+1})^2 y_j+\frac{1}{h^3}[h+2(x_{j+1}-x)](x-x_j)^2 y_{j+1}$$

$$+\frac{1}{h^2}(x-x_j)(x-x_{j+1})^2 m_j+\frac{1}{h^2}(x-x_{j+1})(x-x_j)^2 m_{j+1},\quad x\in[x_j-x_{j+1}]$$

求一阶导，得

$$s'(x)=\frac{2}{h^3}(x-x_{j+1})(3x-2x_j-x_{j+1}+h)y_j$$

$$-\frac{2}{h^3}(x-x_j)(3x-x_j-2x_{j+1}-h)y_{j+1}$$

$$+\frac{1}{h^2}(x-x_{j+1})(3x-2x_j-x_{j+1})m_j$$

$$+\frac{1}{h^2}(x-x_j)(3x-2x_{j+1}-x_j)m_{j+1},\qquad x\in[x_j-x_{j+1}]$$

样条插值型一阶数值微分公式

由三次样条的收敛性知，对 $x\in[x_j-x_{j+1}]$，$f'(x)\approx s'(x)$

两端再求一次导数，即得样条插值型二阶数值微分公式。

其它数值微分公式

差商公式 $f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\dfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$

Taylor公式 取等距节点 $x_k=x_0+kh\ (k=0,1,2)$

$$f(x_0)=f(x_1)+f'(x_1)(x_0-x_1)+\frac{f''(x_1)}{2}(x_0-x_1)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}(x_0-x_1)^3$$

$$f(x_0)=f(x_1)-f'(x_1)h+\frac{f''(x_1)}{2}h^2-\frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3$$

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+\frac{f''(x_1)}{2}(x_2-x_1)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{6}(x_2-x_1)^3$$

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)h+\frac{f''(x_1)}{2}h^2+\frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

两式相减得 $$f(x_2)-f(x_0)=2hf'(x_1)+\frac{h^3}{6}(f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1))$$

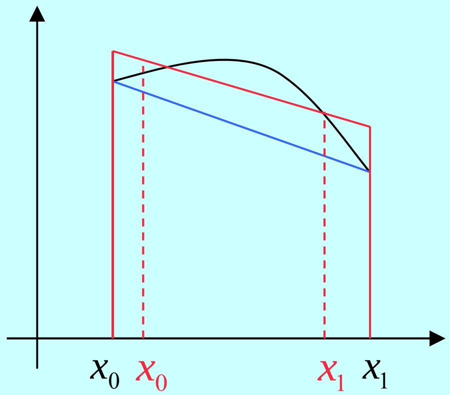
$$\Rightarrow f'(x_1)=\frac{1}{2h}(f(x_2)-f(x_0))-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

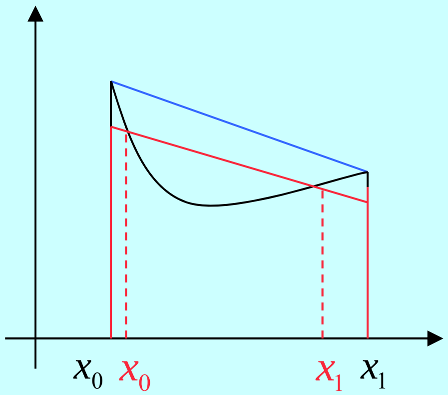
5.2 Gauss型求积公式

本节介绍具有最高代数精度的数值求积公式，即Gauss型**求积**公式。形如

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k) \tag{6-32}$$

插值型求积公式（并未要求取等距节点）的代数精度至少为n。





两点的求积公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

两点的**Newton-Cotes**求积公式是等距节点的梯形公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(-1) + f(1)$$

其代数精度为**1**。

若不限制等距节点，我们特意的去选取 x_0, x_1, A_0, A_1 ，则可由代数精度的定义，分别取 $f(x) = 1,\ x$ ，$x^2,\ x^3$,令

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

可得到如下非线性方程组：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 = 0 \\ A_0 \cdot x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_0 \cdot x_0^3 + A_1 \cdot x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ x_0 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}},\ x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

即
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

至少具有3次代数精度，又取 $f(x) = x^4$ 时，

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$$

故具有3次代数精度。

这样如果我们用代数精度最高原则，通过求解 $2n+2$ 阶非线性方程组来确定所有 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 和 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 共 $2n+2$ 个待定系数，就可以构造出具有 $2n+1$ 次代数精度的数值积分公式。

事实上，**n+1**个节点的求积公式，代数精度必小于**2n＋2**

取**2n＋2**次多项式 $p_{2n+2}(x) = (x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2$

$$I(p_{2n+2}) = \int_a^b \rho(x) p_{2n+2}(x) dx > 0 \ \neq \ I_n(p_{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} A_k p_{2n+2}(x_k) = 0$$

定义 6.2 如果形如（**6-32**）的求积公式具有代数精度 $2n+1$ 次，则称其为**Gauss型求积公式**，并称其中的求积节点 $x_k \ (k = 0, 1, \cdots, n)$ 为**Gauss**点.

6.2.1 Gauss型求积公式

定理 6.2 要使插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E_n(f) \qquad (6\text{-}33)$$

具有 $2n+1$ 次代数精度，必须且只须以节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为零点的 $n+1$次多项式

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

与所有次数不超过 n 的多项式在 $[a,b]$ 上关于权函数$\rho(x)$ 正交。

定理 **6.2** 换句话为：

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是**Gauss点** $\Longleftrightarrow$ $\omega_{n+1}(x)$ 是正交多项式。

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是**Gauss点** $\Longleftrightarrow$ $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是正交多项式的根。

证明： $I(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx$ $\quad I_n(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

必要性 假设(6-33)具有2n+1次代数精度，则 $\forall q(x)\in \boldsymbol{P}_n$

$$\Rightarrow \omega_{n+1}(x)q(x)\in \boldsymbol{P}_{2n+1}$$

$$(\omega_{n+1},q)=\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)q(x)dx = I(\omega_{n+1}q) = I_n(\omega_{n+1}q)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} A_k \boxed{\omega_{n+1}(x_k)}\, q(x_k) = 0$$

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

即 $\omega_{n+1}(x)$与任意次数不超过n的多项式在**[a,b]**上关于 $\rho(x)$ 正交。

充分性 假设 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意次数不超过n的多项式在**[a,b]**上关于权函数 $\rho(x)$ 正交。往证(6-33)具有2n+1次代数精度。

$\forall f(x)\in \boldsymbol{P}_{2n+1}$ 利用多项式的带余除法，有唯一的 $q_n(x), r_n(x)\in \boldsymbol{P}_n$

使得
$$f(x)=\omega_{n+1}(x)q_n(x)+r_n(x)$$

$$\Rightarrow I(f)=I(\omega_{n+1}q_n)+I(r_n)=\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)q_n(x)dx+I(r_n)$$

$$=\boxed{(\omega_{n+1},q_n)}+I(r_n)=I(r_n)$$

积分,求和的线性性

另一方面 $I_n(f)=I_n(\omega_{n+1}q_n)+I_n(r_n)=I_n(r_n)$

$$=\sum_{k=0}^{n}A_k\boxed{\omega_{n+1}(x_k)}q_n(x_k)+I_n(r_n)$$

n+1个节点的插值型求积公式的代数精度至少为n

充分性得证 $\quad I(f)=I_n(f)\Leftarrow \quad I(r_n)=I_n(r_n)$

通过求一个**2n+1**次**Hermite**插值多项式的积分来构造**n+1**点**Gauss**求积公式

设 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为**[a,b]**上以 $\rho(x)$ 为权函数的**n+1**次正交多项式

$\omega_{n+1}(x)$ 的零点，$H_{2n+1}(x)$ 是满足插值条件

$$H_{2n+1}(x_k) = f(x_k),\quad H'_{2n+1}(x_k) = f'(x_k),\quad k = 0,1,\ldots,n$$

的**2n+1**次**Hermite**插值多项式，即（**P175 例5**）

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2\left(1-\frac{\omega''_{n+1}(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)}(x-x_k)\right)f(x_k)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2(x-x_k)f'(x_k)$$

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 f(x_k)$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\left(\frac{\omega''_{n+1}(x_k)\omega_{n+1}(x)}{(\omega'_{n+1}(x_k))^3(x-x_k)}\right)f(x_k)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{(\omega'_{n+1}(x_k))^3(x-x_k)}\right)f'(x_k)$$

n次多项式

由于 $\omega_{n+1}(x)$ 与所有n次多项式正交，则有

$$\int_a^b \rho(x)H_{2n+1}(x)dx=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\int_a^b \rho(x)\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 dx$$

$I(H_{2n+1})$

$\tilde{I}_n(f)$

因为 $f(x)=H_{2n+1}(x)+r_{2n+1}(x)$，从而

$$I(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx=\int_a^b \rho(x)H_{2n+1}(x)dx+\int_a^b \rho(x)r_{2n+1}(x)dx$$

$$=I(H_{2n+1})+I(r_{2n+1})=\tilde{I}_n(f)+\tilde{E}_n(f)$$

$$\tilde{E}_n(f)=\int_a^b \rho(x)r_{2n+1}(x)dx=\frac{1}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)f^{(2n+2)}(\xi_x)\omega_{n+1}^2(x)dx$$

积分中值定理

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\boxed{f^{(2n+2)}(\eta)}\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}^2(x)dx,\ \eta\in(a,b)$$

代数精度为**2n+1**

$\tilde{I}_n(f)=\int_a^b \rho(x)H_{2n+1}(x)dx$ 为**Gauss**型求积公式

求积系数 $A_k=\int_a^b \rho(x)\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 dx>0$ **(6-37)**

因为求积系数 $A_k=\int_a^b \rho(x)\left(\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 dx>0$

有界

$$\sum_{k=0}^{n}|A_k|=\sum_{k=0}^{n}A_k=\sum_{k=0}^{n}A_k\cdot 1=\tilde{I}_n(1)=I(1)=\int_a^b \rho(x)dx$$

求积公式的稳定性

故**Gauss**型求积公式是数值稳定的。 并且

定理 设 $f(x)\in C[a,b]$，则**Gauss**型求积公式是收敛的。

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{I}_n(f)=I(f)$$

$$I(l_k)=I_n(l_k)=\tilde{I}_n(l_k)$$

另外，确定求积节点后，可由**Lagrange**插值基函数的积分得求积系数

$$A_k=\int_a^b \rho(x)\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}dx \qquad \textbf{(6-37)'}$$

小结 构造n+1个节点的Gauss型求积公式的方法：

1. 以求积节点和求积系数为2n+2个未知量，
   求解由2n+1次代数精度得到的2n+2个非线性方程

2. 由求积区间和权函数得到n+1次正交多项式，
   解其零点获得n+1个求积节点，再如下计算求积系数：

   a. 按照Hermite基函数得到的求积系数公式(6-37)

   b. 按照Lagrange基函数得到的求积系数公式(6-37)'

   c. 求解由n次代数精度得到的n+1个线性方程

例1 求 $[-1,1]$ 上关于的 $\rho(x)=1$ 两点**Gauss**型求积公式。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

构造二次正交多项式

$$\phi_2(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & x \\ \mu_2 & \mu_3 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & x \\ \frac{2}{3} & 0 & x^2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}\left(3x^2-1\right)$$

令 $\phi_2(x) = \frac{4}{9}\left(3x^2-1\right) = 0 \implies x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

此时，得

$$A_0 = \int_{-1}^{1} l_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}dx = 1$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}dx \quad = 1$$

或 取 $f(x)=1, x$ ，由代数精度的定义，得线性方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_1 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_1 - A_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A_0 = A_1 = 1$$

则得具有**3**次代数精度的**Gauss-Legendre**公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

对于任意区间 $[a,b]$ 上权函数 $\rho(x)=1$ 的**Gauss**型求积公式，只需作变量替换：

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t$$

则有 $x\in[a,b] \leftrightarrow t\in[-1,1]$，这样

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t\right)dt$$

$$\approx\frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} A_k f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_k\right)$$

例，构造求解 $\int_1^5 f(x)dx$ 的具有**3**次代数精度的数值积分公式。

解：由 $2n+1=3 \Rightarrow n=1$，此求积公式具有**2**个**Gauss**节点。

作变量替换：$x=3+2t$，则取**Gauss**节点、求积系数：

$$t_0=-\sqrt{\frac{1}{3}},\quad t_1=\sqrt{\frac{1}{3}}\qquad A_0=A_1=1$$

从而，得

$$\int_1^5 f(x)dx = 2\cdot\int_{-1}^1 f(3+2t)dt$$

$$\approx 2\sum_{k=0}^{1} A_k f(3+2t_k) = 2f\left(3-2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+2f\left(3+2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

若取 $\int_1^5 e^{-x^2}dx$ 则具有3次代数精度公式为：

$$\int_1^5 e^{-x^2}dx = 2\cdot\int_{-1}^1 e^{-(3+2t)^2}dt \approx 2\sum_{k=0}^{1} A_k \cdot e^{-(3+2t_k)^2}$$

$$= 2e^{-\left(3-2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} + 2e^{-\left(3+2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

例2，确定 x_0, x_1, A_0, A_1 使以下的求积公式为Gauss型求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\, f(x)\, dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解：首先构造 $[0,1]$上关于$\rho(x)=\sqrt{1-x}$ 的首项系数为**1**的二次正交多项式，为此可设

$\phi_0(x)=1 \quad \phi_1(x)=x+a \quad \phi_2(x)=x^2+bx+c$ ，从而有

$$\left.\begin{aligned}
(\phi_0,\phi_1)&=\int_0^1\sqrt{1-x}(x+a)dx=0\\
(\phi_0,\phi_2)&=\int_0^1\sqrt{1-x}(x^2+bx+c)dx=0\\
(\phi_1,\phi_2)&=\int_0^1\sqrt{1-x}\cdot(x+a)\cdot(x^2+bx+c)dx=0
\end{aligned}\right.
\Rightarrow
\begin{cases}
a=-\dfrac{2}{5}\\
b=-\dfrac{8}{9}\\
c=\dfrac{8}{63}
\end{cases}$$

则

$$\phi_2(x) = x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{8}{63}$$

其零点为： $x_0 = 0.7188, \quad x_1 = 0.7101$

令 $f(x) = 1, x$，用代数精度定义得：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \frac{2}{3} \\ 0.7188\, A_0 + 0.7101\, A_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x} \cdot x \cdot dx = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 0.3891 \\ A_1 = 0.2776 \end{cases}$$

从而

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} f(x)dx \approx 0.3891 \cdot f(0.7188) + 0.2776 \cdot f(0.7101)$$

。