# Wavelets

Jan Kandyba

10. Mai 2022

## 1 Signale und Filter

**Definition 1.1** (Signalraum)**.** $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *ist ein diskretes Signal. Wir verwenden die Energienorm für Signale:*

$$||x|| = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|)^{1/2}$$

*Im folgenden werden wir nur Signale mit endlicher Energie betrachten. Dafür definieren wir uns den Raum*

$$l^2(\mathbb{Z}) \coloneqq \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : ||x|| < \infty\}$$

*Bemerkung.* Wir bilden auf $\mathbb{C}$ ab, da wir eine Frequenz in der Form von $r \cdot e^{i\omega}$, mit $r$ die Amplitude und $\omega$ die Frequenz darstellen.

Um mit diesen Signalen zu arbeiten, definieren wir uns *Filter* als Abbildungen von $l^2(\mathbb{Z})$ auf sich selber, mit der Notation $y = Hx$, $H : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$

*Beispiel.* Ein Besipiel für einen linearen Filter (s. u.) ist der sogenannte *Delay-Operator*, definiert durch

$$y = D^n x \Leftrightarrow y_k = x_{k-n}$$

**Definition 1.2.** *Ein Filter $H$ ist* LTI *(Linear, time invariant), falls*

*(i)* $H(x + y) = Hx + Hy$

*(ii)* $H(ax) = aHx$

*(iii)* $H(Dx) = D(Hx)$

*Bemerkung.* Für einen LTI-Filter $H$ gilt $H(D^n x) = D^n(Hx)$

Eine wichtiges Signal ist das sogenannte *Impulssignal*:

$$\delta_k \coloneqq \begin{cases} 1, & falls\, k = 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Ein beliebiges zeitdisretes Signal lässt sich durch das Impulssignal ausdrücken:

$$x = \sum_n x_n D^n \delta$$

Für ein LTI-Filter definieren wir uns die *Impusantwort* $h := H\delta$
Wenden wir nun einen LTI-Filter $H$ auf $x$ an, bekommen wir folgene Umformung:

$$\begin{aligned} y = Hx \Leftrightarrow y = H(\sum_n x_n D^n \delta) &= \sum_n x_n H(D^n \delta) \\ &= \sum_n x_n D^n h := h * x \end{aligned}$$

Mit $*$ als Definition einer Faltung, da mit einsetzen folgendes gilt:

$$y = h * x \Leftrightarrow y_k = \sum_n x_n h_{k-n}$$

Damit können wir jeden LTI-Filter durch eine Folge als seine Impulsantwort definieren.

## 2 Multiskalenanalyse

Nun verstetigen wir den Begriff des Signals, und betrachten nun funktionen.

**Definition 2.1.** *Der Raum, indem alle unsere Signale enthalten sind ist*

$$L^2(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \, dt < \infty\}$$

*mit der Norm*

$$||f|| = (\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \, dt)^{1/2}$$

*und des daraus induzierten Skalarproduktes*

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f\overline{g} \, dt$$

Unser Ziel ist es nun eine numerisch Stabile Basis des unendlich-dimensionalen Vektorraumes $L^2(\mathbb{R})$ zu konstruieren. Dazu definieren wir den Begriff der Riesz-Basis.

**Definition 2.2.** $\{\varphi_k\}_k$ *eine Basis von* $V \subset L^2(\mathbb{R})$ *eine Riesz-Basis, falls* $\exists A, B \in \mathbb{R}$, *mit*

$$f = \sum_k c_k \varphi_k \Rightarrow A||f||^2 \leq \sum_k |c_k|^2 \leq B||f||^2$$

*Bemerkung.* Für eine Approximation $\tilde{f} = \sum_k \tilde{c_k}\varphi_k$ für $f = \sum_k c_k \varphi_k$ gilt:

$$A||f - \tilde{f}||^2 \leq \sum_k c_k - \tilde{c_k} \leq B||f - \tilde{f}||^2$$

Somit folgen für kleine Fehler in der Approximation auch kleine Fehler in den Koeffizienten.

Nun führen wir die Multiskalenanalyse ein:

**Definition 2.3.** *Eine Familie von Unterräumen $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ von $L^2(\mathbb{R})$ heißt* Multiskalenanalyse *(MSA), falls*

*(i)* $V_j \subset V_{j+1} \; \forall\, j \in \mathbb{Z}$

*(ii)* $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} \; \forall\, j \in \mathbb{Z}$

*(iii)* $\bigcup_j V_j$ *dicht in* $L^2(\mathbb{R})$

*(iv)* $\bigcap_j V_j = \{0\}$

*(v) Es existiert eine Skalierungsfunktion $\varphi \in V_0$, mit $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ Orthonormalbasis von $V_0$, mit $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = 1$*

Mit Punkt (ii) folgt, dass für ein $V_j$ die Familie $\{\varphi_{j,k}\}_k$ eine Basis bildet, mit

$$\varphi_{j,k}(t) := 2^{j/k}\varphi(2^j t - k)$$

*Bemerkung.* Der Vorfaktor von $2^{j/k}$ ist notwendig, damit $||\varphi_{j,k}|| = ||\varphi||$ gilt.

Die Multiskalenanalyse ist also eine Familie von Detailräumen. Mit jedem weiteren Index werden die Signale besser approximiert. Durch Punkt (iii) bekommen wir später im Grenzübergang eine Basis von $L^2(\mathbb{R})$.

Mit Punkt (i) folgt, dass $\varphi \in V_1$. Damit ist $\varphi$ auch folgendermaßen darstellbar:

$$\varphi(t) = 2\sum_k h_k \varphi(2t - k)$$

Durch Anwendung der kontinuierlichen Fouriertransformation bekommen wir mit den üblichen Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\omega) &= 2\sum_k h_k \mathcal{F}\varphi(2t-k) \\
&= 2(\sum_k h_k e^{-i\frac{\omega}{2}k}) \cdot \hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})\frac{1}{2} \\
&= H(\frac{\omega}{2})\hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})
\end{aligned}$$

mit $H(\omega) := \sum_k h_k e^{i\omega k}$

Mit Punkt (v) folgt auch $\hat{\varphi}(0) = 1$, und damit $H(0) = \sum_k h_k = 1$. Man kann auch mit der Orthogonalität der Basen zeigen, dass $\{\varphi_{j,k}\}_k$ auch $H(\pi) = 0$ gelten muss. Damit wäre $H$ ein Tiefpaßfilter.

**Lemma 2.4** (Allgemeine Skallierungsgleichung)**.** *Es gilt*

$$\varphi_{j,k} = \sqrt{2}\sum_l h_l \varphi_{j+1,l+2k}$$

*Beweis.* Per Definition gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}(t) &= 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)\\ &\stackrel{2.4}{=} 2\cdot 2^{j/2}\sum_l h_l\varphi(2^{j+1}t - 2k - l)\\ &= \sqrt{2}\sum_l h_l\varphi_{j+1,l+2k}\end{aligned}$$

□

# 3 Wavelets

Nun definieren wir uns die Komplementärräume zu einer MSA.

**Definition 3.1.** *Für $\{V_j\}_j$ eine MSA ist $\psi$ ein Wavelet, falls $\psi(t-k)$ eine Orthonormalbasis von $W_0$, mit $W_0$ der Komplementärraum von $V_0$ in $V_1$, also $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Außerdem soll gelten*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,dt = 0 \tag{1}$$

Analog definieren wir uns

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$$

Auch hier gilt, dass $\{\psi_{j,k}\}_k$ eine Basis von $W_j$ ist. Damit gilt, dass $\psi \in V_1$, mit

$$\psi(t) = 2\sum_k g_k\varphi(2t-k)$$

Analog zu oben folgern wir

$$\hat{\psi}(\omega) = G(\frac{\omega}{2})\hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})$$

mit

$$G(\omega) = \sum_k g_k e^{-ik\omega}$$

Durch Gleichung 1 folgt $\hat{\psi}(0) = 1\ \hat{\varphi}(0) = 0$, und damit $G(0) = \sum_k g_k = 0$. Durch die Orthogonalität kann man auch hier zeigen, dass $G(1) = 1$. Damit ist $G$ ein Hochpaßfilter.

# 4 Die Fast Forward Wavelet Transformation

Ziel dieser Transformation ist es bei gegebener Detailschärfer (hier Koeffizienten aus einem Raum $V_j$) die Koeffizienten aus den gröberen Räumen zu berechnen. Hierbei nehmen wir als Koeffizienten die Projektion einer funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ auf den Raum $V_j + 1$, also mit $s_{j+1,k} = \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle$:

$$\sum_k s_{j+1,k}\varphi_{j+1,k} = \sum_k s_{j,k}\varphi_{j,k} + \sum_k \omega_{j,k}\psi_{j,k}$$

Durch Skallarmultiplikation auf beiden Seiten bekommen wir für ein $l \in \mathbb{Z}$ fix.:

$$\sum_k s_{j+1,k}\langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j,l} \rangle = \sum_k s_{j,k}\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,l} \rangle + \sum_k \omega_{j,k}\langle \psi_{j,k}, \varphi_{j,l} \rangle$$
$$s_{j,l} = \sum_k s_{j+1,k}\langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j,l} \rangle$$

Durch $\varphi_{j,k} = \sqrt{2}\sum_l h_l\varphi_{j+1,l+2k}$ folgt:

$$\langle \varphi_{j+1,l}, \varphi_{j,k} \rangle = \sqrt{2}\sum_m h_m\langle \varphi_{j+1,l}, \varphi_{j+1,m+2k} \rangle = \sqrt{2}h_{l-2k}$$

Somit gilt:

$$s_{j,k} = \sqrt{2}\sum_l s_{j+1,l}h_{l-2k}$$