

# 平衡树及相关应用

汪直方

宁波市镇海蛟川书院

2024 年 2 月 2 日



## Problem (动态离散化)

有一个集合  $S$ ，其上有全序关系  $\leq_S$  (下面不引起歧义的情况下简记为  $\leq$ )，维护一个初始为空的集合  $A \subseteq S$  与映射  $f: A \rightarrow [0, 2^w) \cap \mathbb{N}$ ，满足  $\forall x, y \in A, (x \leq y) \Leftrightarrow (f(x) \leq f(y))$ ， $q$  次操作：给定  $x \in S$ ，执行  $A \leftarrow A \cup \{x\}$ ，可以修改均摊  $O(1)$  个  $f$  的点值，通过插入操作的编号与新点值的方式输出。

强制在线，要求每次操作  $\leq_S$  的比较次数为  $O(\log q)$ ，额外时间复杂度  $O(\log q)$ 。

## Problem (动态离散化)

有一个集合  $S$ ，其上有全序关系  $\leq_S$  (下面不引起歧义的情况下简记为  $\leq$ )，维护一个初始为空的集合  $A \subseteq S$  与映射  $f: A \rightarrow [0, 2^w) \cap \mathbb{N}$ ，满足  $\forall x, y \in A, (x \leq y) \Leftrightarrow (f(x) \leq f(y))$ ， $q$  次操作：给定  $x \in S$ ，执行  $A \leftarrow A \cup \{x\}$ ，可以修改均摊  $O(1)$  个  $f$  的点值，通过插入操作的编号与新点值的方式输出。

强制在线，要求每次操作  $\leq_S$  的比较次数为  $O(\log q)$ ，额外时间复杂度  $O(\log q)$ 。

## Solution

按  $w$  分块，块内易于  $\Theta(1)$  直接维护，用 treap 或替罪羊树维护块，块总插入次数为  $O(q/w)$ ，插入一个块期望复杂度或均摊复杂度为  $\Theta(\log q)$ 。

## Problem (动态离散化)

有一个集合  $S$ ，其上有全序关系  $\leq_S$  (下面不引起歧义的情况下简记为  $\leq$ )，维护一个初始为空的集合  $A \subseteq S$  与映射  $f: A \rightarrow [0, 2^w) \cap \mathbb{N}$ ，满足  $\forall x, y \in A, (x \leq y) \Leftrightarrow (f(x) \leq f(y))$ ， $q$  次操作：给定  $x \in S$ ，执行  $A \leftarrow A \cup \{x\}$ ，可以修改均摊  $O(1)$  个  $f$  的点值，通过插入操作的编号与新点值的方式输出。

强制在线，要求每次操作  $\leq_S$  的比较次数为  $O(\log q)$ ，额外时间复杂度  $O(\log q)$ 。

## Solution

按  $w$  分块，块内易于  $\Theta(1)$  直接维护，用 treap 或替罪羊树维护块，块总插入次数为  $O(q/w)$ ，插入一个块期望复杂度或均摊复杂度为  $\Theta(\log q)$ 。

单次操作时间复杂度  $\Theta(\log q)$ ，修改均摊  $\Theta(1)$  个点值。