

题目选讲

hehezhou

2024 年 7 月

【PR 5】双向奔赴

给定一张有向图，第 i 条边可以花 a_i 的代价反向，求使图强连通最小的代价。

$$n \leq 18$$

考虑类似耳分解的结构，每次加入一个耳。
直接这么做是 $O(3^n)$ 的，将两部分 DP 结合即可做到 $O(2^n n^3)$ 。

Merge Triplets

定义一个长为 $3n$ 的排列是好的当且仅当他能被 n 个长度为 3 的序列“归并”得到。

求有多少排列是好的。

$$n \leq 2000$$

观察到非单调序列的归并等价于将所有序列按照前缀最大值划分为若干段后，按照有序序列归并。
然后 DP 统计答案即可。

【JOI Open 2020】黑白点

一个环上有 n 个黑点和 n 个白点，给定点的顺序，你需要连 n 条线段，形成黑白点之间的匹配。

你需要求出，线段相交数最大是多少。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

观察到等价于让匹配间距离之和尽量远。
考虑每个元素对答案的贡献，双指针计算分界点，前缀和。

游戏

有一张 n 个点的有向图，前 k 个点是关键点，初始有一条 1 到 k 的链，在线地加入 m 条边。

如果某一次加边后，图中存在一个包含关键点的环，你需要立刻输出。

$n, m \leq 10^5$

考虑维护一个分治结构，最终确定每个点所在链上的拓扑序位置。
加边时可以 bfs 更新，复杂度 $O(n \log n)$ 。

UOJ749

对于数列，你和小 h 博弈，他无脑取最前面的元素，你随便取。
每次询问一个区间，只在这个区间博弈你最多多少分。

$$n, q \leq 200000$$

观察到答案的结构为：每个长为 $2^i - 1$ 的前缀你最多取 i 个。
分治为二区间合并，随后二分计算答案即可。
复杂度 $O(n \log^2 n)$

语言

给定一棵树和 m 条路径。

某个点对产生贡献当且仅当存在给定的路径完全同时包含两个点。

求有多少点对产生贡献。

要求 $O(n \log n)$

考虑一种特殊的计算虚树大小的方式，按照 dfs 序算距离和。
随后线段树合并即可。

UOJ814

略微转化后：数列，支持

- 1 单点改
- 2 单点查
- 3 区间 $[l,r]$ 中值在 $[L,R]$ 的数改为 R

要求 $n \log^2 n$

THUPC2024 I

有 n 颗行星，第 i 颗的公转周期为 p_i ，初始他们连成一条线。
当某一刻 k 颗行星连成一条线时，称为发生 k 星连珠。
对所有 k 求平均每秒发生几次 k 星连珠，取模。

$$n \leq 20$$

考虑怎么对分数做 lcm：分子 gcd 分母 lcm。
对于整数 lcm 带取模，使用容斥即可。

CCPCF2024 K

定义一个 $n \times n$ 的 01 矩阵合法当且仅当，可以在每行每列的开头放一些木棍，所有木棍互不相交且有且仅有棍子的位置是 1。

给定一个含问号的 01 矩阵，问能填成多少合法矩阵。

$n \leq 3000$

考虑怎么判定矩阵合法：不断删最后一行/最后一列。
合理设计 dp 不重不漏即可。

CCPCF2024 L

可以查询一个区间的最大子段和，与 0 取 max。
在 $2n$ 次查询内还原出一个等价序列。

先进行一轮查询确定正数的值和其余负数。
然后查询 $++$ 以获得较大的负数。
最后考虑不断删最小的正数。

【PR 4】到底有没有九

给定整数 k ，定义一个数 x 是好的当且仅当 $x \times (10^k - 1)$ 的十进制表示不包含 9。

请求出第 n 个好的数。

$$1 \leq k \leq 18, 1 \leq n \leq 10^{18}$$

考虑直接数位 DP 第 n 个 $x \times (10^k - 1)$ 。
不包含 9 易于处理，是 $99 \cdots 9$ 的倍数则等价于划分成段相加。

【UNR 6】 小火车

给定一个数列 a_1, a_2, \dots, a_n , 你要求出一个序列 b 满足:

- $\sum a_i b_i \equiv 0 \pmod p$

- b_i 不全是 0

- $b_i \in \{-1, 0, 1\}$

$$n \leq 40, 2^n > p$$

题意等价于选出两个子集使得和相等。不难发现一定有解。
考虑计算 $f(l, r)$ 表示有多少子集的和在 $[l, r]$ 中，可以 meet in middle 求解。
复杂度 $O(2^{n/2} \text{poly}(n))$

【UNR 6】面基之路加强版

有一张 n 个点 m 条边的无向图，每条边有长度。

小 h 初始在 1 号点，共 k 个网友，第 i 个网友初始在 p_i 点，小 h 的速度是 a ，网友的速度都是 b 。

小 h 希望和网友依次碰面，碰面可以发生在边中间，掉头也可以，求碰完所有面的最小总时长是多少。

$n \leq 10^5, m \leq 2 \times 10^5, k \leq 20$

分为两种情况。
如果小 h 更慢，则相当于最后所有人到同一地点。
否则在同一条边上时，永远相向而行。
分别考虑即可。

ECF2024 A

对于所有父亲编号小于自己的树，求有多少种可能的 DFS 序。
DFS 时，要求必须先走编号较小的儿子。
 $n \leq 800$ ，时限较宽。

考虑判断一个 DFS 序是否合法。则会构造出对应的“最左”的树。
DP 计算这类最左的树，其中需要容斥。
复杂度 $O(n^3)$

无线电信号塔

有 n 个信号塔，高度分别是 h_1, \dots, h_n 。

两个信号塔 i, j 能通信当且仅当，存在 $i < k < j$ ，并且 $h_k \geq \max(h_i, h_j) + D$ 。

每次查询 l, r, D ，区间中能通信的最大团是多少。

$n \leq 100000$

首先观察到只需考虑相邻塔。考虑统计中转塔。
每个中转塔只在较小的 D 有效。预处理，主席树查询。

和平共处

平面上有 n 只黑蚂蚁。

在接下来，陆陆续续来了 m 只白蚂蚁。

如果有一只黑蚂蚁 (x, y) 和白蚂蚁 (x', y') 满足 $x \leq x', y \leq y'$ ，并且它们都没得到食物，它们就会打架。

每次来了一只蚂蚁以后，都要求出，最少喂食多少只蚂蚁才能保证蚂蚁不会打架。

$n, m \leq 10^5$ ，可以离线

考虑选出最大独立集。
答案具有单调性，整体二分。
时间复杂度 $O(n \log^2 n)$