

# HIDRODINÂMICA DOS MEIOS POROSOS E FRATURADOS

WAGNER QUEIROZ BARROS  
BISMARCK GOMES SOUZA JÚNIOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE  
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

MACAÉ - RJ  
FEVEREIRO - 2014

Este documento foi criado com base nas notas de aula do Prof. Carlos Enrique Pico Ortiz da disciplina "Hidrodinâmica dos Meios Porosos e Fraturados" do curso de pós-graduação em Engenharia de Reservatórios e Exploração da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), ministrada no primeiro semestre de 2013.

Quaisquer dúvidas ou sugestões favor encaminhar um e-mail para:

- [bismarckjunior@outlook.com](mailto:bismarckjunior@outlook.com)
- [wagnerqb@gmail.com](mailto:wagnerqb@gmail.com)

# Sumário

<b>1</b>	<b>Equação da Difusividade</b>	<b>6</b>
1.1	Hipótese do contínuo . . . . .	6
1.2	Definição de fases e componentes . . . . .	7
1.3	Formulação da equação de conservação da massa . . . . .	8
1.3.1	Taxa de acúmulo . . . . .	8
1.3.2	Taxa de entrada de matéria . . . . .	9
1.3.3	Taxa de saída de matéria . . . . .	9
1.3.4	Produção de matéria . . . . .	9
1.4	Formulação da equação composicional da difusividade . . . . .	11
1.4.1	Termo de acúmulo . . . . .	12
1.4.2	Termo de fluxo . . . . .	12
1.4.3	Termo fonte . . . . .	13
1.5	Lei de Darcy multifásica . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Formulação “Black Oil” da Equação da Difusividade</b>	<b>16</b>
2.1	Formulação “ <i>Black Oil</i> ” convencional . . . . .	17
2.1.1	Pseudo-componente água: . . . . .	18
2.1.2	Pseudo-componente óleo . . . . .	19
2.1.3	Pseudo-componente gás . . . . .	20
2.2	Formulação “ <i>Black Oil</i> ” modificada . . . . .	22
2.2.1	Pseudo-componente água . . . . .	24
2.2.2	Pseudo-componente óleo . . . . .	24

2.2.3	Pseudo-componente gás . . . . .	25
2.3	Formulação “ <i>Black Oil</i> ” modificada baseada nas concentrações mássicas . . . . .	26
2.3.1	Definição das concentrações mássicas . . . . .	26
2.3.2	Definição das saturações das fases em função das concentrações mássicas . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Soluções dos Regimes Permanentes da Equação Radial da Difusividade</b>	<b>30</b>
3.1	Equação da difusividade em coordenadas cilíndricas . . . . .	30
3.2	Solução do regime permanente . . . . .	34
3.2.1	Solução da pressão no regime permanente . . . . .	35
3.2.2	Pressão média no regime permanente . . . . .	36
3.3	Solução do regime pseudo-permanente . . . . .	37
3.3.1	Solução da pressão no regime pseudo-permanente: . . . . .	39
3.3.2	Pressão média no regime pseudo-permanente . . . . .	40
3.3.3	Pressão em função do raio e do tempo no regime pseudo-permanente . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Solução do Regime Transiente da Equação Radial da Difusividade</b>	<b>45</b>
4.1	Adimensionalização da equação da difusividade radial . . . . .	45
4.1.1	Adimensionalização do raio ( $r$ ) . . . . .	46
4.1.2	Adimensionalização do tempo ( $t$ ) . . . . .	46
4.1.3	Adimensionalização da pressão ( $P$ ) . . . . .	47
4.1.4	Adimensionalização das condições de contorno . . . . .	48
4.1.5	Sistema de unidades . . . . .	49
4.2	Solução do tipo linha-fonte (Transformada de Boltzmann) . . . . .	50
4.2.1	Definição da equação da difusividade na forma de Boltzmann . . . . .	50
4.2.2	Solução da equação da difusividade na forma de Boltzmann . . . . .	53
4.3	Solução do tipo linha-fonte (Transformada de Laplace) . . . . .	56
4.3.1	Equação da difusividade no campo de Laplace . . . . .	56

4.3.2	Solução da equação da difusividade no campo de Laplace . . .	58
4.3.3	Transformada inversa da solução linha-fonte no campo de Laplace	60
4.4	Algoritmo de Gaver-Stehfest . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Solução Reservatório Radial Infinito com Estocagem e Dano</b>	<b>63</b>
5.1	Solução reservatório infinito com poço de raio finito . . . . .	63
5.2	Efeito de dano de formação . . . . .	66
5.2.1	Conceito de fator de película . . . . .	66
5.2.2	Conceito de raio equivalente . . . . .	68
5.3	Efeito de estocagem no poço . . . . .	69
5.4	Solução reservatório infinito com estocagem e dano . . . . .	72
5.5	Análise de testes de pressão por curvas tipo . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Solução Reservatório Radial Selado com Estocagem e Dano</b>	<b>79</b>
6.1	Solução reservatório finito com estocagem e dano . . . . .	79
6.2	Curvas Tipo para a solução do reservatório selado . . . . .	82
	<b>Apêndice A – Função Exponencial Integral</b>	<b>86</b>
	<b>Apêndice B – Transformada de Laplace</b>	<b>88</b>
	<b>Apêndice C – Funções Modificadas de Bessel</b>	<b>91</b>
C.1	Notação $Z_\nu$ das funções modificadas de Bessel . . . . .	91
C.2	Relações de recorrência . . . . .	92
C.3	Derivadas das funções modificadas de Bessel . . . . .	93

# **1      *Equação da Difusividade***

A equação da difusividade governa o escoamento de fluidos em meios porosos. Ela é deduzida a partir da equação da conservação da massa, de equações constitutivas para os componentes presentes no fluido e da Lei de Darcy. Para se aplicar essa equação é necessário a definição da hipótese do contínuo.

## **1.1    Hipótese do contínuo**

Imagine uma porção de fluido distribuída em uma região do espaço, podemos considerar as propriedades do fluido como sendo constantes nessa porção. A medida que o volume da porção diminuí, as propriedades do fluido permanecem constantes. Em um determinado limite, as propriedades dos fluidos começam a ser influenciadas pela região por onde são medidas, esse limite é conhecido como limite do contínuo.

Na região abaixo do limite do contínuo, as propriedades moleculares são importantes na modelagem das propriedades dos fluidos. A Fig. 1 mostra a variação da massa específica de um fluido em função do volume de controle, é possível perceber que abaixo do limite do contínuo, as moléculas do fluido possuem tamanhos da mesma ordem de grandeza do volume de controle, influenciando o valor de massa específica calculada.

Apesar do escoamento em meios porosos ocorrer em poros muito pequenos, na ordem de micrômetros, a hipótese do contínuo é satisfeita na maioria das aplicações práticas em engenharia de reservatórios (LAKE, 1989).

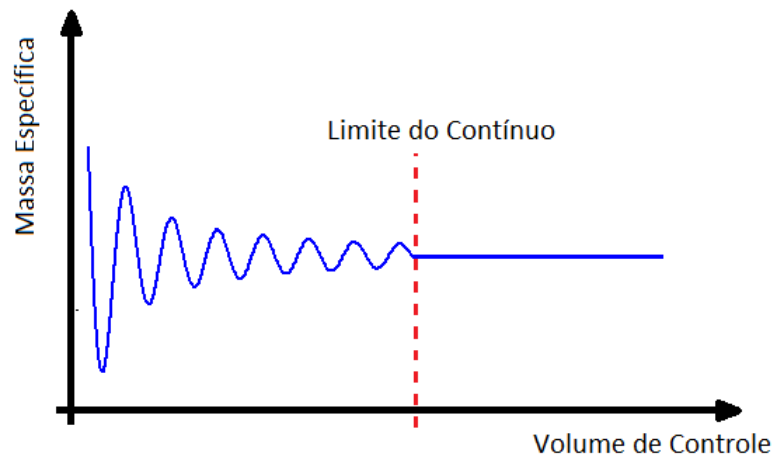


Figura 1: Variação da massa específica de um fluido em função do volume de controle.

## 1.2 Definição de fases e componentes

A formulação deduzida nesse capítulo é conhecida como "Formulação Composicional da Equação do Balaço de Massa", pois leva em consideração a conservação da massa de todos os componentes presentes em todas as fases no fluido. Assim, é necessário o entendimento de dois conceitos básicos utilizados em engenharia de reservatórios:

- **Componente:** Compostos que possuem propriedades físicas e químicas semelhantes, que fazem parte de uma fase fluida.
- **Fase:** Mistura de componentes fluidos delimitada por meio de interfaces.

Dessa forma as diferentes moléculas de gás podem ser classificados como componentes ( $N_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ , etc) pertencendo a uma fase gasosa. Se essas moléculas estiverem dissolvidas na água, esses componentes pertencem a fase aquosa. É possível considerar que todos os gases possuem propriedades semelhantes, assim, classifica-se o componente gás pertencendo à fase gás.

Como descrito no parágrafo anterior, as definições de componente e fase são bastante amplas, sendo formuladas de acordo com o problema que será resolvido. Por convenção, o subscrito " $i$ " refere-se ao componente, e o subscrito " $j$ " refere-se à fase. O subscrito " $ij$ " refere-se ao componente  $i$  dissolvido na fase  $j$ . Por exemplo, a notação  $\rho_{ij}$  indica a massa específica do componente  $i$  presente na fase  $j$ .

## 1.3 Formulação da equação de conservação da massa

Considere o volume de controle  $V$  mostrado na Fig. 2.

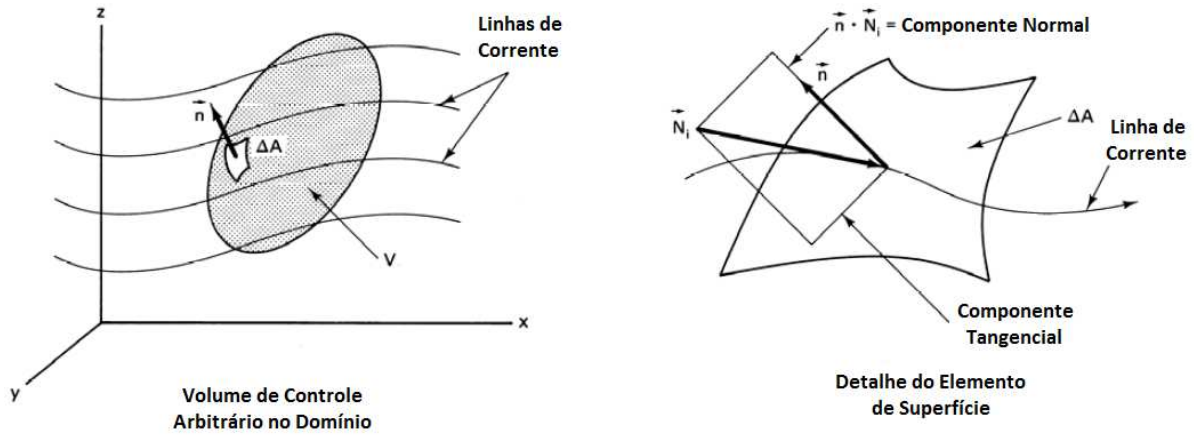


Figura 2: Volume de controle espacial. Adaptado de Lake (1989).

Considerando o escoamento de um fluido através das fronteiras do volume de controle, é possível escrever a seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa} \\ \text{de} \\ \text{Acúmulo} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de} \\ \text{Entrada de} \\ \text{Matéria} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de} \\ \text{Saída de} \\ \text{Matéria} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Produção} \\ \text{de} \\ \text{Matéria} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

É possível definir cada termo da Eq. (1.1) separadamente:

### 1.3.1 Taxa de acúmulo

A taxa de acúmulo do componente  $i$  é definida como a variação temporal da massa do componente, no interior do volume de controle  $V$ . A concentração do componente  $i$  é dada por:

$$W_i = \frac{\text{Massa de } i}{\text{Volume total}} \quad (1.2)$$

Dessa forma a taxa de acúmulo é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa} \\ \text{de} \\ \text{Acúmulo} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V W_i dV \quad (1.3)$$



### 1.3.2 Taxa de entrada de matéria

A taxa de entrada do componente  $i$  é definida como sendo a massa do componente  $i$  atravessando o volume de controle por unidade de tempo. Para se escrever esse conceito é necessária a definição de fluxo do componente  $i$ , definido por:

$$\vec{N}_i = \frac{\text{Massa de } i}{\text{Área} \times \text{Tempo}} \quad (1.4)$$

Considerando que o vetor normal,  $\hat{n}$ , aponta sempre para fora do volume de controle, a taxa de entrada de matéria é definido como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de} \\ \text{Entrada de} \\ \text{Matéria} \end{array} \right\} = - \int_A \hat{n} \cdot \vec{N}_i dA \quad (1.5)$$

### 1.3.3 Taxa de saída de matéria

Da mesma forma como foi definida a taxa de entrada de matéria, a taxa de saída pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de} \\ \text{Saída de} \\ \text{Matéria} \end{array} \right\} = \int_A \hat{n} \cdot \vec{N}_i dA \quad (1.6)$$

### 1.3.4 Produção de matéria

A produção de matéria no interior do volume de controle é definido como sendo a massa do componente  $i$  criada ou destruída no interior do volume de controle por unidade de tempo. É modelada através de um termo fonte na Eq. (1.1), definido por:

$$R_i = \frac{\text{Massa } i}{\text{Volume} \times \text{Tempo}} \quad (1.7)$$

Assim:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Produção} \\ \text{de} \\ \text{Matéria} \end{array} \right\} = \int_V R_i dV \quad (1.8)$$

Utilizando os resultados obtidos acima, a Eq. (1.1) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W_i dV = - \int_A \hat{n} \cdot \vec{N}_i dA + \int_V R_i dV \quad (1.9)$$

ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W_i dV + \int_A \hat{n} \cdot \vec{N}_i dA = \int_V R_i dV \quad (1.10)$$

A Eq. (1.10) é conhecida como a forma fraca da equação da conservação de massa. Essa equação não depende de um sistema de coordenadas, e é utilizada quando a equação possui divergências como ondas de choque, por exemplo. Para se escrever a forma forte da equação, “forma diferencial”, é necessário se utilizar o teorema da divergência, definido por:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \int_A \vec{n} \cdot \vec{B} dA \quad (1.11)$$

Substituindo-se a Eq. (1.11) na Eq. (1.10):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W_i dV + \int_V \nabla \cdot \vec{N}_i dV = \int_V R_i dV \quad (1.12)$$

Considerando que a função  $W_i$  seja de classe  $C^1$ , unindo-se as integrais:

$$\int_V \left( \frac{\partial W_i}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{N}_i - R_i \right) dV = 0 \quad (1.13)$$

Por último, a forma forte da equação da conservação da massa é dada por:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{N}_i = R_i \quad (1.14)$$

A forma da equação do balanço de massa dada pela Eq. (1.14) é a mais utilizada nas aplicações de engenharia de reservatórios.

## 1.4 Formulação da equação composicional da difusividade

Na seção anterior foi deduzida a equação da conservação da massa, que é uma das equações fundamentais para se formular a equação da difusividade. Cada termo da Eq. (1.14) representa importantes mecanismos ou processos físicos que serão descritos nessa seção.

Considere um volume de controle possuindo diversas fases fluidas e diversos componentes dissolvidos nas fases. A Fig. 3 mostra um exemplo de um volume de controle possuindo duas fases fluidas e uma fase sólida. A fase sólida é definida como sendo o volume de grãos presentes no volume de controle.

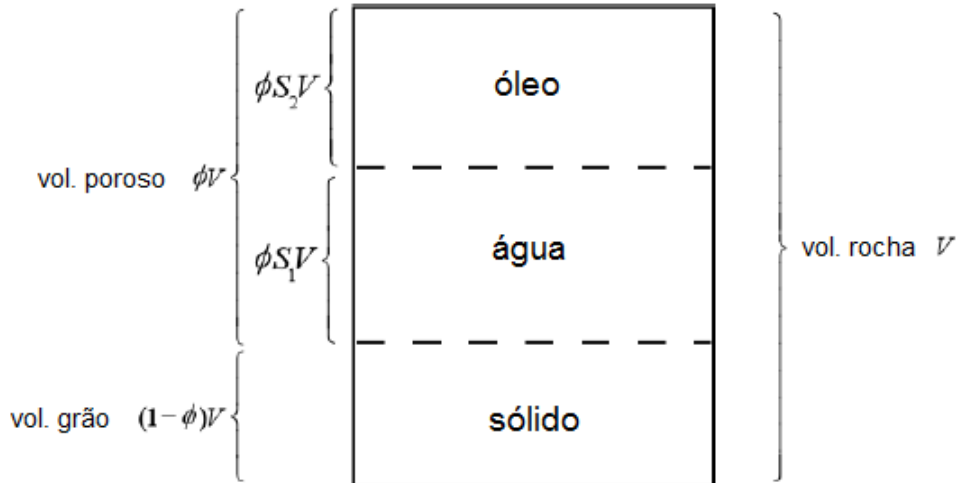


Figura 3: Volume de controle mostrando as fases fluidas e a fase sólida em um reservatório com óleo e água. (LAKE, 1989)

Um conceito importante utilizado para se separar as diferentes fases em um volume de controle é o conceito de saturação. Saturação da fase  $j$  é definido como a fração do volume da fase  $j$  presente no volume poroso total, ou seja:

$$S_j = \frac{V_j}{V_{poroso}} \quad (1.15)$$

Outro conceito importante é o de porosidade, definido como a razão entre o volume poroso total e o volume total da amostra, ou seja:

$$\phi = \frac{V_{poroso}}{V} \quad (1.16)$$

Como mostrado na Fig. 3, a soma do volume de todas as fases fluidas no domínio representa o volume poroso total da amostra. Com base nessas informações, cada termo da Eq. (1.14) pode ser modelado.

### 1.4.1 Termo de acúmulo

O termo de acúmulo definido por  $\frac{\partial W_i}{\partial t}$  é dada para cada componente  $i$  contido no fluido. A fração mássica de um componente pode ser definida como:

$$\omega_{ij} = \frac{\text{Massa do Componente } i \text{ na Fase } j}{\text{Massa da Fase } j} \quad (1.17)$$

e a densidade da fase  $j$  é dada por:

$$\rho_j = \frac{\text{Massa da Fase } j}{\text{Volume da Fase } j} \quad (1.18)$$

Dessa forma, a concentração do componente  $i$  dada pela Eq. (1.2) pode ser escrita como:

$$W_i = \{\text{Massa de } i \text{ nas Fases Fluidas}\} + \{\text{Massa de } i \text{ na Fase Sólida}\} \quad (1.19)$$

$$W_i = \phi \sum_{j=1}^{Np} [S_j \rho_j \omega_{ij}] + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is} \quad (1.20)$$

onde o subscrito  $s$  indica a fase sólida e  $Np$  indica o número total de fases do sistema. Assim, o termo de acúmulo é definido por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Termo de} \\ \text{Acúmulo} \end{array} \right\} = \frac{\partial W_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi \sum_{j=1}^{Np} [S_j \rho_j \omega_{ij}] + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is} \right\} \quad (1.21)$$

### 1.4.2 Termo de fluxo

O fluxo da substância  $i$  ocorre de duas formas: por difusão e por advecção. O fluxo advectivo assume que o componente se propaga com a mesma velocidade que a fase que o contém, dessa forma, o fluxo advectivo é modelado como sendo uma

soma da advecção do componente  $i$  em todas as fases fluidas presentes no volume de controle, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fluxo} \\ \text{Advectivo} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{Np} (\rho_j \omega_{ij} \vec{v}_j) \quad (1.22)$$

Enquanto fluxo advectivo expressa a vazão mássica da substância  $i$  por unidade de área do volume de controle, o fluxo difusivo é composto pela difusão molecular (independente do escoamento) e da difusão mecânica, que é influenciada pelo sentido e magnitude do escoamento. O fluxo difusivo é modelado pela Lei de Fick<sup>1</sup>, e pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fluxo} \\ \text{Difusivo} \end{array} \right\} = - \sum_{j=1}^{Np} \left( \phi S_j \overleftrightarrow{D}_{ij} \nabla (\rho_j \omega_{ij}) \right) \quad (1.23)$$

O sinal negativo indica que o fluxo difusivo ocorre contra o gradiente de concentração do componente  $i$ , ou seja, da maior para a menor concentração. O tensor  $\overleftrightarrow{D}_{ij}$  é conhecido como o tensor de dispersão.

Portanto, o termo de fluxo pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Termo de} \\ \text{Fluxo} \end{array} \right\} = \nabla \cdot \vec{N}_i = \nabla \cdot \sum_{j=1}^{Np} \left( \rho_j \omega_{ij} \vec{v}_j - \phi S_j \overleftrightarrow{D}_{ij} \nabla (\rho_j \omega_{ij}) \right) \quad (1.24)$$

### 1.4.3 Termo fonte

Existem basicamente três formas de termos fonte que são inseridos na equação da conservação de componente: a geração do componente  $i$  à partir de reações com a fase fluida, a geração à partir de reações com a fase sólida e a injeção ou produção do componente pela presença de um poço. Considerando  $r_{ij}$  como a taxa de reação do componente  $i$  na fase  $j$ , o termo fonte devido às reações com as fases fluidas e sólidas é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fonte por} \\ \text{Reação} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{Np} [\phi S_j r_{ij}] + (1 - \phi) r_{is} \quad (1.25)$$

---

<sup>1</sup>Mais detalhes sobre a Lei de Fick podem ser encontrados em Bird (BIRD *et al.*, 2007) ou em Lake (LAKE, 1989).

O termo fonte devido à presença de poços injetores ou produtores no volume de controle é escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fonte por} \\ \text{Poço} \end{array} \right\} = \frac{\omega_{ij}\rho_j q_j}{V_c} = R_{iWell} \quad (1.26)$$

onde  $V_c$  é o volume de controle que será inserido o poço. Portanto o termo fonte é modelado como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Termo} \\ \text{Fonte} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{Np} [\phi S_j r_{ij}] + (1 - \phi) r_{is} + R_{iWell} \quad (1.27)$$

Com os três termos modelados a equação composicional da difusividade, Eq. (1.14), pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi \sum_{j=1}^{Np} [S_j \rho_j \omega_{ij}] + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is} \right\} + \vec{\nabla} \cdot \sum_{j=1}^{Np} \left( \rho_j \omega_{ij} \vec{v}_j - \phi S_j \overleftrightarrow{D}_{ij} \nabla (\rho_j \omega_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{Np} [\phi S_j r_{ij}] + (1 - \phi) r_{is} + R_{iWell} \quad (1.28)$$

Por questões de simplicidade a Eq. (1.28) é comumente escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi S_j \rho_j \omega_{ij} + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is} \} + \nabla \cdot \left( \rho_j \omega_{ij} \vec{v}_j - \phi S_j \overleftrightarrow{D}_{ij} \nabla (\rho_j \omega_{ij}) \right) = \phi S_j r_{ij} + (1 - \phi) r_{is} + R_{iWell} \quad (1.29)$$

A Eq. (1.29) é conhecida como a Equação Composicional da Difusividade em termos da velocidade do escoamento no meio poroso. As medidas de velocidade em meios porosos são muito difíceis de serem realizadas, assim a Eq. (1.29) não possui aplicação acessível nos problemas de engenharia de reservatório. Uma variável mais fácil de ser medida em campo é a pressão, dessa forma, utiliza-se a Lei de Darcy para se escrever a velocidade do escoamento em função da pressão.

## 1.5 Lei de Darcy multifásica

A Lei de Darcy (DARCY, 1856) expressa a velocidade do escoamento em meios porosos, em função do gradiente de pressão ao qual o fluido está sujeito. A forma multifásica da Lei de Darcy é expressa como sendo:

$$\vec{v}_j = -\frac{\overleftrightarrow{K} k_{rj}}{\mu_j} (\nabla P_j + \rho_j \vec{g}) \quad (1.30)$$

onde  $\overleftrightarrow{K}$  é o tensor de permeabilidades do meio poroso,  $k_{rj}$  é a permeabilidade relativa da fase  $j$ ,  $\mu_j$  é a viscosidade da fase  $j$  e  $\vec{g}$  é o vetor aceleração da gravidade. A pressão da fase  $j$ ,  $P_j$ , é definida com base na pressão capilar da fase  $j$  em relação à fase molhante a rocha (fase  $n$ ), definida como:

$$P_{cjn} = P_j - P_n \quad (1.31)$$

Combinando as Eqs. (1.29) e (1.30) a Equação da Difusividade Composicional pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi S_j \rho_j \omega_{ij} + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is} \} + \nabla \cdot \left( -\rho_j \omega_{ij} \frac{\overleftrightarrow{K} k_{rj}}{\mu_j} (\nabla P_j + \rho_j \vec{g}) - \phi S_j \overleftrightarrow{D}_{ij} \nabla (\rho_j \omega_{ij}) \right) = \phi S_j r_{ij} + (1 - \phi) r_{is} + R_{iWell} \quad (1.32)$$

A Eq. (1.32) é a forma mais utilizada da Equação composicional da Difusividade. Essa fórmula possui uma alta precisão no cálculo da concentração de todos os componentes escoando no volume poroso, porém possui a desvantagem de necessitar de se resolver uma grande quantidade de equações, o que faz com que o método tenha um alto custo computacional.

## 2 **Formulação “Black Oil” da Equação da Difusividade**

No Capítulo 1 foi deduzida a formulação composicional da equação da difusividade. Como discutido anteriormente, essa formulação possui a vantagem de ser um modelo robusto, capaz de resolver os mais diversos problemas em engenharia de reservatórios. A desvantagem do modelo encontra-se no grande número de equações diferenciais que devem ser resolvidas, necessitando de um alto poder computacional. Uma alternativa à formulação composicional é a formulação “Black Oil”, ou Modelo  $\beta$ , que possui um número reduzido de fases e componentes (ERTEKIN *et al.*, 2001).

A formulação “Black Oil” baseia-se na Equação Composicional da Difusividade, Eq. (1.29), e adotada as seguintes considerações:

1. Não existe fluxo difusivo no reservatório, ou seja:

$$\phi S_j \overleftrightarrow{D}_{ij} \nabla (\rho_j \omega_{ij}) = 0 \quad (2.1)$$

2. Não existe acumulação dos componentes fluidos na matriz sólida, ou seja:

$$(1 - \phi) \rho_s \omega_{is} = 0 \quad (2.2)$$

3. Não existe reações químicas nos componentes da mistura, ou seja:

$$\phi S_j r_{ij} + (1 - \phi) r_{is} = 0 \quad (2.3)$$

Dessa forma a Equação da Difusividade assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi S_j \rho_j \omega_{ij} \} + \nabla \cdot (\rho_j \omega_{ij} \vec{v}_j) = R_{iWell} \quad (2.4)$$



## 2.1 Formulação “*Black Oil*” convencional

O modelo “Black Oil” convencional, cuja representação é mostrada na Fig. 4, é a forma mais simples dessa formulação. Nela existem três pseudo-componentes de interesse no modelo: água, gás e óleo. No modelo “Black Oil” são adotadas as seguintes considerações:

1. Existem três fases imiscíveis no reservatório: água ( $w$ ), óleo ( $o$ ) e gás ( $g$ ).
2. A fase óleo possui dois componentes: óleo e gás dissolvido.
3. Não existe gás dissolvido na água.
4. Os componentes gás livre e gás dissolvido (em condições padrão) possuem as mesmas propriedades.

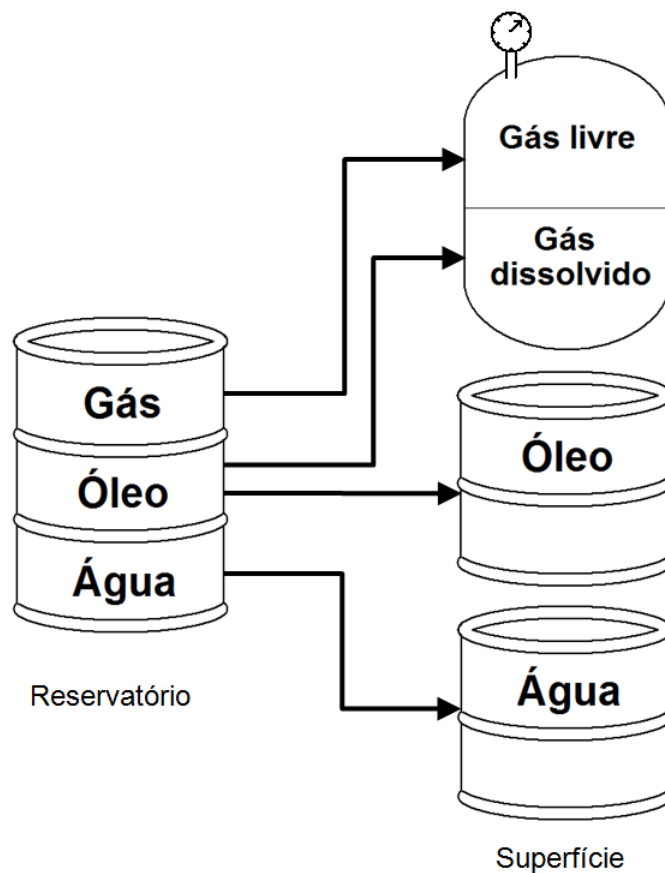


Figura 4: Típico reservatório “Black Oil”.

Além disso, existem dois conceitos básicos na formulação “Black Oil”, derivados de análises PVT:

### Fator volume-formação $B_j$

O Fator Volume-Formação da fase  $j$  é definido como sendo a razão entre o volume que uma fase ocupa na superfície (STC) e o volume que essa mesma fase possui em condições de reservatório (RC), é definida como:

$$B_j = \frac{\text{Volume da Fase } j(\text{RC})}{\text{Volume da Fase } j(\text{STC})} \quad (2.5)$$

$$B_j = \frac{(V_j^{RC})}{(V_{jj}^{STC})} = \frac{(\rho_j^{STC})}{(\rho_{jj}^{RC})} \quad (2.6)$$

### Razão de solubilidade $R_s$

A Razão de Solubilidade é definida como sendo a razão entre o volume de gás dissolvido no óleo e o volume de óleo produzido, em condições de superfície, ou seja:

$$R_s = \frac{\text{Volume de Gás Dissolvido no Óleo (STC)}}{\text{Volume de Óleo Morto (STC)}} \quad (2.7)$$

$$R_s = \frac{(V_{go}^{STC})}{(V_{oo}^{STC})} \quad (2.8)$$

De acordo com as considerações adotadas, é possível se escrever as seguintes relações:

$$B_o = \frac{(\rho_o^{RC})}{(\rho_{oo}^{STC})} \quad (2.9)$$

$$B_g = \frac{(\rho_g^{RC})}{(\rho_{gg}^{STC})} \quad (2.10)$$

$$B_w = \frac{(\rho_w^{RC})}{(\rho_{ww}^{STC})} \quad (2.11)$$

A Equação da Difusividade será escrita para cada pseudo-componente (água, óleo e gás) separadamente.

#### 2.1.1 Pseudo-componente água:

Para o pseudo-componente água o termo de acúmulo pode ser escrito como:

$$W_w = \phi \sum_{j=1}^{Np} (S_j \rho_j \omega_{wj}) \quad (2.12)$$

$$W_w = \phi [S_w \rho_w \omega_{ww} + S_o \rho_o \omega_{wo} + S_g \rho_g \omega_{wg}] \quad (2.13)$$

Como não existe água dissolvida nas fases óleo e gás,  $\omega_{wo} = \omega_{wg} = 0$ , e como o único componente na fase água é o componente água,  $\omega_{ww} = 1$ , ou seja:

$$W_w = \phi S_w \rho_w \quad (2.14)$$

A densidade da água em condições de reservatório é dada por:

$$\rho_w = \frac{\rho_w^{STC}}{B_w} \quad (2.15)$$

Assim:

$$W_w = \frac{\phi S_w \rho_w^{STC}}{B_w} \quad (2.16)$$

Já o termo de fluxo, para o pseudo-componente água, pode ser escrito como:

$$\vec{N}_w = \sum_{j=1}^{Np} (\rho_j \omega_{wj} \vec{v}_j) \quad (2.17)$$

$$\vec{N}_w = \rho_w \omega_{ww} \vec{v}_w + \rho_o \omega_{wo} \vec{v}_o + \rho_g \omega_{wg} \vec{v}_g = \frac{\rho_w^{STC} \vec{v}_w}{B_w} \quad (2.18)$$

Como a densidade da água em condições padrão é considerada constante, a Eq. (2.4), para o pseudo-componente água, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_w} \cdot \vec{v}_w \right) = \frac{R_w W_{ell}}{\rho_w^{STC}} \quad (2.19)$$

### 2.1.2 Pseudo-componente óleo

Para o pseudo-componente óleo, o termo de acúmulo pode ser escrito como:

$$W_o = \phi \sum_{j=1}^{Np} (S_j \rho_j \omega_{oj}) \quad (2.20)$$

$$W_o = \phi [S_w \rho_w \omega_{ow} + S_o \rho_o \omega_{oo} + S_g \rho_g \omega_{og}] \quad (2.21)$$

Como não existe óleo dissolvido nas fases água e gás,  $\omega_{og} = \omega_{ow} = 0$ . Então, na fase óleo, temos:

$$W_o = \phi S_o \rho_o \omega_{oo} \quad (2.22)$$

Utilizando o conceito de fator volume-formação para o óleo, é possível provar que:

$$\rho_o \omega_{oo} = \frac{\rho_o^{STC}}{B_o} \quad (2.23)$$

Assim a Eq. (2.22) fica escrita como:

$$W_o = \frac{\phi S_o \rho_o^{STC}}{B_o} \quad (2.24)$$

O termo de fluxo pode ser escrito como:

$$\vec{N}_o = \sum_{j=1}^{Np} (\rho_j \omega_{oj} \vec{v}_j) \quad (2.25)$$

$$\vec{N}_o = \rho_w \omega_{ow} \vec{v}_w + \rho_o \omega_{oo} \vec{v}_o + \rho_g \omega_{og} \vec{v}_g = \frac{\rho_o^{STC}}{B_o} \vec{v}_o \quad (2.26)$$

Portanto, a Eq. (2.4), para o pseudo-componente óleo, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_o} \cdot \vec{v}_o \right) = \frac{R_{oWell}}{\rho_o^{STC}} \quad (2.27)$$

### 2.1.3 Pseudo-componente gás

Para o pseudo-componente gás, o termo de acúmulo pode ser escrito como:

$$W_g = \phi \sum_{j=1}^{Np} (S_j \rho_j \omega_{gj}) \quad (2.28)$$

$$W_g = \phi [S_w \rho_w \omega_{gw} + S_o \rho_o \omega_{go} + S_g \rho_g \omega_{gg}] \quad (2.29)$$

Como não existe gás dissolvido na fase água,  $\omega_{gw} = 0$ , e como o gás é o único componente presente na fase gás,  $\omega_{gg} = 1$ :

$$W_g = \phi [S_o \rho_o \omega_{go} + S_g \rho_g] \quad (2.30)$$

O produto  $\rho_o \omega_{go}$  pode ser escrito por:

$$\rho_o \omega_{go} = \frac{m_o}{V_o^{RC}} \frac{m_{go}}{m_o} = \frac{m_{go}}{V_o^{RC}} = \frac{\rho_{go}^{STC} V_{go}^{STC}}{B_o V_{oo}^{STC}} \quad (2.31)$$

$$\rho_o \omega_{go} = \frac{\rho_g^{STC} R_s}{B_o} \quad (2.32)$$

A densidade do gás em condições de reservatório é dada por:

$$\rho_g = \frac{\rho_g^{STC}}{B_g} \quad (2.33)$$

Assim a Eq. (2.30) adquire a seguinte forma:

$$W_g = \rho_g^{STC} \phi \left[ \frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right] \quad (2.34)$$

O termo de fluxo pode ser escrito como:

$$\vec{N}_g = \sum_{j=1}^{Np} (\rho_j \omega_{gj} \vec{v}_j) \quad (2.35)$$

$$\vec{N}_g = \rho_w \omega_{gw} \vec{v}_w + \rho_o \omega_{go} \vec{v}_o + \rho_g \omega_{gg} \vec{v}_g = \rho_o \omega_{go} \vec{v}_o + \rho_g \vec{v}_g \quad (2.36)$$

$$\vec{N}_g = \frac{\rho_g^{STC} R_s}{B_o} \vec{v}_o + \frac{\rho_g^{STC}}{B_g} \vec{v}_g \quad (2.37)$$

Portanto, a Eq. (2.4), para o pseudo-componente gás, é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right] \right) + \nabla \cdot \left( \frac{R_s}{B_o} \vec{v}_o + \frac{1}{B_g} \vec{v}_g \right) = \frac{R_{gWell}}{\rho_g^{STC}} \quad (2.38)$$

onde  $R_{gWell}$  inclui os volumes de gás injetados ou produzidos mais os volumes de gás presentes na fase óleo produzida.

Juntando as Eqs. (2.19), (2.27) e (2.38) é formado o conjunto de equações do tipo “Black Oil” Convencional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_w} \vec{v}_w \right) &= \frac{R_{wWell}}{\rho_w^{STC}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_o} \vec{v}_o \right) &= \frac{R_{oWell}}{\rho_o^{STC}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi R_s S_o}{B_o} + \frac{\phi S_g}{B_g} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{R_s}{B_o} \vec{v}_o + \frac{1}{B_g} \vec{v}_g \right) = \frac{R_{gWell}}{\rho_g^{STC}}$$

A Eq. (2.39) é função das saturações e das pressões parciais das fases água, óleo e gás. Como existem seis incógnitas e apenas três equações, são necessárias mais três equações, conhecidas como equações de fechamento:

### 1. Fechamento para a saturação

Considerando que existem apenas três fases no meio poroso:

$$S_g + S_o + S_w = 1 \quad (2.40)$$

### 2. Fechamento para as pressões parciais

As pressões parciais são escritas como função das pressões capilares:

$$P_{c(ow)} = P_o - P_w \quad (2.41)$$

$$P_{c(gw)} = P_g - P_w \quad (2.42)$$

## 2.2 Formulação “Black Oil” modificada

A formulação “Black Oil” deduzida na seção anterior possui um grau aceitável de precisão na maioria dos casos práticos de simulação de reservatórios. Porém alguns

óleos leves possuem a característica de se volatilizarem na fase gasosa do reservatório. Para reservatórios de óleos leves a formulação “Black Oil Modificada” é mais aceita. A Fig. 5 mostra um exemplo de um óleo típico dessa formulação. É possível observar que existe um componente óleo volatilizado na fase gás.

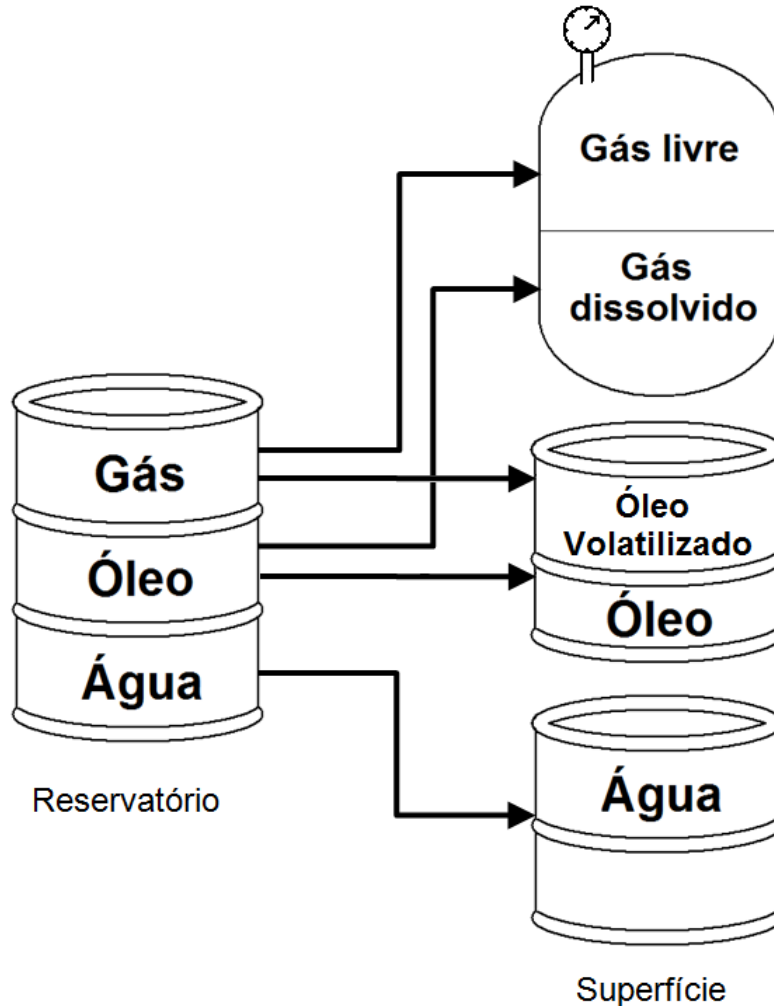


Figura 5: Típico reservatório do tipo “Black Oil Modificado”

Os mesmos conceitos de fator volume-formação e razão de solubilidade deduzidos anteriormente são válidos nessa formulação, e adicionalmente deve ser incluído o conceito de Razão de Volatilidade, dado por:

$$R_v = \frac{\text{Volume de Óleo Dissolvido no Gás (STC)}}{\text{Volume de Gás Livre Morto (STC)}} \quad (2.43)$$

$$R_v = \frac{(V_{og}^{STC})}{(V_{gg}^{STC})} \quad (2.44)$$

Da mesma forma que na formulação “Black Oil” convencional, cada componente deve ser modelado separadamente. As mesmas considerações do modelo “Black Oil” convencional são adotadas nesse modelo, e adicionalmente considera-se que o óleo dissolvido no gás tem as mesmas propriedades que o óleo do reservatório. Dessa forma, a equação da difusividade dada pela Eq. (2.4) ainda é válida:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi S_j \rho_j \omega_{ij} \} + \nabla \cdot (\rho_j \omega_{ij} \vec{v}_j) = R_{iWell} \quad (2.45)$$

### 2.2.1 Pseudo-componente água

Nas duas formulações só existe o componente água presente na fase água, assim, utilizando a Eq. (2.45), é possível obter:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_w} \vec{v}_w \right) = \frac{R_{wWell}}{\rho_w^{STC}} \quad (2.46)$$

### 2.2.2 Pseudo-componente óleo

O termo de acúmulo, para o pseudo-componente óleo, pode ser escrito como:

$$W_o = \phi \sum_{j=1}^{N_p} (S_j \rho_j \omega_{oj}) \quad (2.47)$$

$$W_o = \phi [S_w \rho_w \omega_{ow} + S_o \rho_o \omega_{oo} + S_g \rho_g \omega_{og}] \quad (2.48)$$

Como existe óleo volatilizado no gás, nesse modelo,  $\omega_{og} \neq 0$  Assim:

$$W_o = \phi [S_o \rho_o \omega_{oo} + S_g \rho_g \omega_{og}] \quad (2.49)$$

Como deduzido anteriormente:

$$\rho_o \omega_{oo} = \frac{m_o}{V_o} \frac{m_{oo}}{m_o} = \frac{m_{oo}}{V_o} = \frac{m_{oo}}{B_o V_{oo}^{STC}} = \frac{\rho_o^{STC}}{B_o} \quad (2.50)$$

$$\rho_g \omega_{og} = \frac{m_g}{V_g} \frac{m_{og}}{m_g} = \frac{m_{og}}{V_g} = \frac{\rho_{og}^{STC} V_{og}^{STC}}{B_g V_{gg}^{STC}} \quad (2.51)$$



$$\rho_g \omega_{og} = \frac{\rho_o^{STC} R_v}{B_g} \quad (2.52)$$

Assim,

$$W_o = \phi \rho_o^{STC} \left[ \frac{1}{B_o} S_o + \frac{R_v}{B_g} S_g \right] \quad (2.53)$$

e o termo de fluxo pode ser escrito como:

$$\vec{N}_o = \sum_{j=1}^{Np} (\rho_j \omega_{oj} \vec{v}_j) \quad (2.54)$$

$$\vec{N}_o = \rho_w \omega_{ow} \vec{v}_w + \rho_o \omega_{oo} \vec{v}_o + \rho_g \omega_{og} \vec{v}_g \quad (2.55)$$

$$\vec{N}_o = \rho_o^{STC} \left( \frac{1}{B_o} \vec{v}_o + \frac{R_v}{B_g} \vec{v}_g \right) \quad (2.56)$$

Dessa forma, a equação da difusividade, para o pseudo-componente óleo, é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \frac{1}{B_o} S_o + \frac{R_v}{B_g} S_g \right] \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_o} \vec{v}_o + \frac{R_v}{B_g} \vec{v}_g \right) = \frac{R_{oWell}}{\rho_o^{STC}} \quad (2.57)$$

### 2.2.3 Pseudo-componente gás

A formulação, para o pseudo-componente gás, é a mesma que na formulação “Black Oil” convencional e é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right] \right) + \nabla \cdot \left( \frac{R_s}{B_o} \vec{v}_o + \frac{1}{B_g} \vec{v}_g \right) = \frac{R_{gWell}}{\rho_g^{STC}} \quad (2.58)$$

Juntando as Eqs. (2.46), (2.57) e (2.58) são obtidas as equações conhecidas como “Formulação Black Oil Modificada”, dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_w} \vec{v}_w \right) &= \frac{R_{wWell}}{\rho_w^{STC}} \\
\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \frac{1}{B_o} S_o + \frac{R_v}{B_g} S_g \right] \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_o} \vec{v}_o + \frac{R_v}{B_g} \vec{v}_g \right) &= \frac{R_{oWell}}{\rho_o^{STC}} \\
\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right] \right) + \nabla \cdot \left( \frac{R_s}{B_o} \vec{v}_o + \frac{1}{B_g} \vec{v}_g \right) &= \frac{R_{gWell}}{\rho_g^{STC}}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

## 2.3 Formulação “*Black Oil*” modificada baseada nas concentrações mássicas

As formulações “Black Oil” e “Black Oil Modificada” produzem um conjunto de equações onde as variáveis a serem resolvidas são as velocidades de cada fase, dada pela Lei de Darcy Modificada e as saturações de cada componente. O problema dessas formulações é que a saturação de cada componente é um número que varia entre zero e um, produzindo dificuldades computacionais na implementação. Dessa forma, pode-se escrever as saturações dos componentes em função das concentrações mássicas dos mesmos, que são números positivos sem limitante superior.

### 2.3.1 Definição das concentrações mássicas

Pode-se definir as seguintes propriedades:

**Concentração mássica do componente  $i$  na fase  $j$**

$$h_{ij} = \frac{\text{Massa do Componente } i \text{ na Fase } j}{\text{Volume Poroso}} \tag{2.60}$$

$$h_{ij} = \frac{m_{ij}}{V_p} \tag{2.61}$$

**Concentração mássica do componente  $i$**

$$h_i = \frac{\text{Massa do Componente } i}{\text{Volume Poroso}} \tag{2.62}$$

$$h_i = \frac{m_i}{V_p} = \sum_{j=1}^{N_p} h_{ij} \tag{2.63}$$

### Concentração mássica da fase $j$

$$H_j = \frac{\text{Massa da Fase } j}{\text{Volume Poroso}} \quad (2.64)$$

$$H_j = \frac{m_j}{V_p} = \sum_{i=1}^{N_c} h_{ij} \quad (2.65)$$

Pode-se escrever as seguinte relações para a razão de solubilidade,  $R_s$ , e a razão de volatilidade,  $R_v$ :

$$R_s = \frac{V_{go}^{STC}}{V_{oo}^{STC}} = \frac{m_{go} \rho_o^{STC}}{m_{oo} \rho_g^{STC}} \rightarrow R_s = \frac{h_{go} \rho_o^{STC}}{h_{oo} \rho_g^{STC}} \quad (2.66)$$

$$R_v = \frac{V_{og}^{STC}}{V_{gg}^{STC}} = \frac{m_{og} \rho_g^{STC}}{m_{gg} \rho_o^{STC}} \rightarrow R_v = \frac{h_{og} \rho_g^{STC}}{h_{gg} \rho_o^{STC}} \quad (2.67)$$

Utilizando as Eqs. (2.61), (2.63) e (2.65) é possível construir o seguinte sistema:

$$\begin{cases} h_o = h_{oo} + h_{og} \\ h_g = h_{go} + h_{gg} \\ H_o = h_{oo} + h_{go} \\ H_g = h_{gg} + h_{og} \end{cases} \quad (2.68)$$

Com as Eqs. (2.66) - (2.68) é possível se escrever o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\rho_g^{STD} & 0 & 0 & \rho_o^{STD} R_v & 0 \\ \rho_g^{STD} R_s & 0 & 0 & -\rho_o^{STD} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{oo} \\ h_{og} \\ H_o \\ h_{go} \\ h_{gg} \\ H_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_o \\ h_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Resolvendo o sistema (2.69), encontram-se as seguintes relações:

$$h_{oo} = \frac{\rho_g^{STD} h_o - R_v \rho_o^{STD} h_g}{\rho_g^{STD} (1 - R_s R_v)} \quad (2.70)$$

$$h_{gg} = \frac{\rho_o^{STD} h_g - R_s \rho_g^{STD} h_o}{\rho_o^{STD} (1 - R_s R_v)} \quad (2.71)$$

$$h_{og} = \frac{R_v (\rho_o^{STD} h_g - R_s \rho_g^{STD} h_o)}{\rho_g^{STD} (1 - R_s R_v)} \quad (2.72)$$

$$h_{go} = \frac{R_s (\rho_g^{STD} h_o - R_v \rho_o^{STD} h_g)}{\rho_o^{STD} (1 - R_s R_v)} \quad (2.73)$$

$$H_o = \frac{(\rho_o^{STD} + \rho_g^{STD} R_s) (\rho_g^{STD} h_o - R_v \rho_o^{STD} h_g)}{\rho_o^{STD} \rho_g^{STD} (1 - R_s R_v)} \quad (2.74)$$

$$H_g = \frac{(\rho_g^{STD} + \rho_o^{STD} R_v) (\rho_o^{STD} h_g - R_s \rho_g^{STD} h_o)}{\rho_o^{STD} \rho_g^{STD} (1 - R_s R_v)} \quad (2.75)$$

As Eqs. (2.70) - (2.75) são as concentrações mássicas do modelo “Black Oil” em função das propriedades dos fluidos. Observa-se que as deduções realizadas estendem-se ao modelo “Black Oil Convencional”, se considerar  $R_v = 0$ .

### 2.3.2 Definição das saturações das fases em função das concentrações mássicas

Utilizando a definição de saturação, Eq. (1.15):

$$S_o = \frac{V_o^{RC}}{V_p} = \frac{B_o V_{oo}^{STC}}{V_p} \quad (2.76)$$

$$S_o = \frac{B_o}{\rho_o^{STC}} h_{oo} \quad (2.77)$$

Analogamente:

$$S_g = \frac{B_g}{\rho_g^{STC}} h_{gg} \quad (2.78)$$

$$S_w = \frac{B_w}{\rho_w^{STC}} h_w \quad (2.79)$$

Substituindo as definições de concentração mássica:

$$S_o = \frac{B_o (\rho_g^{STC} h_o - R_v \rho_o^{STC} h_g)}{\rho_o^{STC} \rho_g^{STC} (1 - R_s R_v)} \quad (2.80)$$

$$S_g = \frac{B_g (\rho_o^{STC} h_g - R_s \rho_g^{STC} h_o)}{\rho_o^{STC} \rho_g^{STC} (1 - R_s R_v)} \quad (2.81)$$

$$S_w = \frac{B_w}{\rho_w^{STC}} h_w \quad (2.82)$$

Após as definições das saturações das fases água, óleo e gás, a formulação “Black Oil” baseada nas concentrações mássicas pode ser escrito substituindo as Eqs. (2.80) - (2.82) na Eq. (2.59):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi h_w}{\rho_w^{STC}} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_w} \vec{v}_w \right) &= \frac{R_{wWell}}{\rho_w^{STC}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi h_o}{\rho_o^{STC}} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{B_o} \vec{v}_o + \frac{R_v}{B_g} \vec{v}_g \right) &= \frac{R_{oWell}}{\rho_o^{STC}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi h_g}{\rho_g^{STC}} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{R_s}{B_o} \vec{v}_o + \frac{1}{B_g} \vec{v}_g \right) &= \frac{R_{gWell}}{\rho_g^{STC}} \end{aligned} \quad (2.83)$$

A equação de fechamento para a saturação deve ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{B_o (\rho_g^{STC} h_o - R_v \rho_o^{STC} h_g)}{\rho_o^{STC} \rho_g^{STC} (1 - R_s R_v)} + \frac{B_g (\rho_o^{STC} h_g - R_s \rho_g^{STC} h_o)}{\rho_o^{STC} \rho_g^{STC} (1 - R_s R_v)} + \frac{B_w}{\rho_w^{STC}} h_w = 1 \quad (2.84)$$

### 3 Soluções dos Regimes Permanentes da Equação Radial da Difusividade

Após deduzida a equação da difusividade utilizando o modelo composicional e o modelo “*Black Oil*”, esse capítulo tratará a solução da equação da difusividade ao redor de um poço produtor ou injetor, considerando que a pressão não varia com o tempo (regime permanente) ou considerando que a queda de pressão seja uniforme no reservatório (regime pseudo-permanente).

#### 3.1 Equação da difusividade em coordenadas cilíndricas

Conforme a Seção 1.5, a Eq. (1.32) governa o escoamento de um fluido multifásico em um reservatório. Repetindo essa equação por conveniência:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi S_j \rho_j \omega_{ij} + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is} \} + \nabla \cdot \left( -\rho_j \omega_{ij} \frac{\overleftrightarrow{K} k_{rj}}{\mu_j} (\nabla P_j + \rho_j \vec{g}) - \phi S_j \overleftrightarrow{D}_{ij} \nabla (\rho_j \omega_{ij}) \right) = \phi S_j r_{ij} + (1 - \phi) r_{is} + R_{iWell}$$

Considerando que o fluido não interage com a rocha e que não há presença de termos fontes<sup>1</sup>, a Eq. (1.32) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi S_j \rho_j \omega_{ij} \} = \nabla \cdot \left( \rho_j \omega_{ij} \frac{\overleftrightarrow{K} k_{rj}}{\mu_j} (\nabla P_j + \rho_j \vec{g}) + \phi S_j \overleftrightarrow{D}_{ij} \nabla (\rho_j \omega_{ij}) \right) \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Nesse caso a presença de um poço produtor ou injetor será modelado como condições de contorno da equação da difusividade.

Nesse caso, considera-se que o reservatório está inicialmente saturado com óleo e água conata e que essa água não se move, portanto acontece um fluxo de óleo na presença de água imóvel. Considerando que não há fluxo difusivo no reservatório e que a pressão capilar entre as fases seja nula, a Eq. (3.1) pode ser escrita para cada fase como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\phi S_w \rho_w\} = \nabla \cdot \left( \rho_w \frac{\overleftrightarrow{K} k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P + \rho_w \vec{g}) \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\phi S_o \rho_o\} = \nabla \cdot \left( \rho_o \frac{\overleftrightarrow{K} k_{ro}}{\mu_o} (\nabla P + \rho_o \vec{g}) \right) \quad (3.3)$$

Como a água é considerada imóvel no problema, o fluxo advectivo para a água no meio poroso é nulo. Dessa forma, a Eq. (3.2) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\phi S_w \rho_w\} = 0 \quad (3.4)$$

ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\phi S_w \rho_w\} = S_w \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w) + \phi \rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

Assim:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = - \frac{S_w}{\phi \rho_w} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = - \frac{S_w}{\phi \rho_w} \left[ \phi \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = -S_w \left[ \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \right] \quad (3.8)$$

Considerando que a água e a rocha sejam pouco compressíveis, é possível utilizar o conceito de compressibilidade:

$$c_j = - \frac{1}{\rho_j} \left( \frac{\partial \rho_j}{\partial P} \right)_{T=cte} \quad (3.9)$$

Dessa forma:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = -S_w [c_w + c_f] \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.10)$$

onde  $c_w$  e  $c_f$  são, respectivamente, as compressibilidades da água e da formação. Assumindo que o meio poroso seja saturado somente com óleo e água:

$$S_o + S_w = 1 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial S_o}{\partial t} = -\frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (3.12)$$

Logo a Eq. (3.10) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial S_o}{\partial t} = S_w \frac{\partial P}{\partial t} [c_w + c_f] \quad (3.13)$$

Derivando o lado esquerdo da Eq. (3.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o \rho_o) = S_o \rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi S_o \frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \phi \rho_o \frac{\partial S_o}{\partial t} \quad (3.14)$$

Utilizando novamente os conceitos de compressibilidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o \rho_o) = S_o \rho_o c_f \phi \frac{\partial P}{\partial t} + \phi S_o \rho_o c_o \frac{\partial P}{\partial t} + \phi \rho_o \frac{\partial S_o}{\partial t} \quad (3.15)$$

Substituindo a Eq. (3.13):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o \rho_o) = S_o \rho_o c_f \phi \frac{\partial P}{\partial t} + \phi S_o \rho_o c_o \frac{\partial P}{\partial t} + \phi \rho_o S_w [c_w + c_f] \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.16)$$

Rearranjando:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o \rho_o) = \rho_o \phi \frac{\partial P}{\partial t} (c_f + S_o c_o + S_w c_w) \quad (3.17)$$

Definindo a compressibilidade efetiva do sistema como:

$$c_t = c_f + S_o c_o + S_w c_w \quad (3.18)$$



a Eq. (3.17) é escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o \rho_o) = c_t \rho_o \phi \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.19)$$

Substituindo a Eq. (3.19) na Eq. (3.3):

$$c_t \rho_o \phi \frac{\partial P}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \rho_o \frac{\vec{K} k_{ro}}{\mu_o} (\nabla P + \rho_o \vec{g}) \right) \quad (3.20)$$

Considerando o meio isotrópico e homogêneo, o tensor de permeabilidades pode ser aproximado por uma permeabilidade média. Considerando o fluido levemente compressível, é possível dizer que o fator volume-formação do fluido e a viscosidade não variam com a pressão, dessa forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{K_o}{c_t \phi \mu_o} \nabla \cdot (\nabla P + \rho_o \vec{g}) \quad (3.21)$$

onde  $K_o = K \cdot k_{ro}$ .

A Eq. (3.21) é válida para qualquer sistema de coordenadas. A Fig. 6 mostra um esboço do problema estudado. É possível perceber que a utilização de coordenadas cilíndricas é mais adequada ao problema.

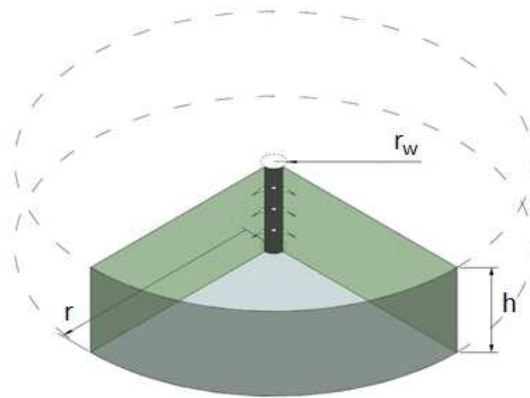


Figura 6: Escoamento ao redor de um poço.

O gradiente da pressão em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\nabla P = \left\langle \frac{\partial P}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}; \frac{\partial P}{\partial z} \right\rangle \quad (3.22)$$

Considerando o escoamento totalmente radial, a gravidade não influencia no es-

coamento, e a queda de pressão se dá apenas na direção radial, assim:

$$\nabla P = \left\langle \frac{\partial P}{\partial r}; 0; 0 \right\rangle \quad (3.23)$$

$$\vec{g} = \langle 0; 0; 0 \rangle \quad (3.24)$$

Assim a Eq. (3.21) fica escrita como:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{K_o}{c_t \phi \mu_o} \nabla \cdot \left\langle \frac{\partial P}{\partial r}; 0; 0 \right\rangle \quad (3.25)$$

O produto interno em coordenadas cilíndricas para um vetor qualquer  $\vec{b}$  é definido como:

$$\nabla \cdot \vec{b} = \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial (r b_r)}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial (b_\theta)}{\partial \theta}; \frac{\partial b_z}{\partial z} \right\rangle \quad (3.26)$$

Dessa forma a Eq. (3.25) adquire a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \frac{c_t \phi \mu_o}{K_o} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.27)$$

A Eq. (3.27) é a equação da difusividade na forma radial, utilizada quando se deseja estudar o comportamento do fluxo no reservatório nas regiões próximas ao poço. Nas próximas seções serão estudadas algumas soluções dessa equação.

## 3.2 Solução do regime permanente

O regime permanente é caracterizado pela não variação da pressão com o tempo de produção (ROSA *et al.*, 2006). Esse padrão de escoamento é muito raro, ocorrendo quando o reservatório é muito grande, ou quando existe uma alimentação externa do reservatório causado por um aquífero. Como a pressão não varia com o tempo:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (3.28)$$

Assim o problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) &= 0 & (\text{E.D.P}) \\
P(r, t_0) &= P_i & (\text{C.I.}) \\
P(r_e, t) &= P_i & (\text{C.C.E}) \\
P(r_{well}, t) &= P_{wf} & (\text{C.C.I})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

### 3.2.1 Solução da pressão no regime permanente

Na Eq. (3.29), a sigla E.D.P mostra a equação diferencial parcial que será resolvida<sup>2</sup>; C.I. indica a condição inicial do reservatório, e expressa que no tempo inicial a pressão de todo o reservatório era constante; C.C.E expressa a condição de contorno externa, nesse caso a pressão na fronteira externa é igual a pressão inicial do reservatório; e C.C.I é a condição de contorno interna, e nesse caso indica que a pressão na face do poço é constante. Utilizando a “Lei de Darcy” na condição de contorno interna, e considerando que no regime transiente a vazão no poço é constante:

$$q_o^{STC} = \frac{2\pi K_o h}{B_o \mu} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \tag{3.30}$$

Será utilizada a seguinte convenção: a vazão produzida pelo poço é positiva e a vazão injetada é negativa. Resolvendo a Eq. (3.29):

$$\left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = cte \tag{3.31}$$

Utilizando a Eq. (3.30):

$$\left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} \tag{3.32}$$

$$\int_{P(r_w)}^{P(r)} dP = \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} \int_{r_w}^r \frac{1}{r} dr \tag{3.33}$$

---

<sup>2</sup>De fato a Eq. (3.29) é uma equação diferencial ordinária, mas está sendo tratada como uma equação diferencial parcial a fim de generalizar o problema.

Assim:

$$P(r, t) = P_{wf} + \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) \quad (3.34)$$

que pode ser escrito da seguinte forma:

$$P(r) = P_{wf} + \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) \quad (3.35)$$

A Fig. 7 mostra como varia a pressão em função da distância radial do reservatório. É possível observar que a pressão cai do valor da pressão inicial (raio externo do reservatório) até o valor de pressão no fundo do poço (raio do poço).

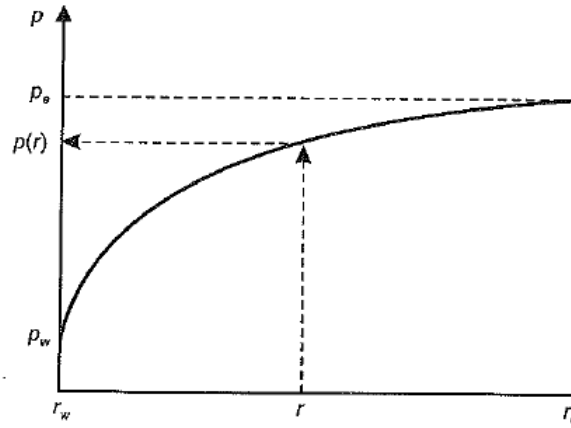


Figura 7: Variação da pressão em função da distância radial do centro do poço, para um reservatório produzindo no regime permanente.

### 3.2.2 Pressão média no regime permanente

Uma outra forma de se escrever essa equação é com base na pressão média do reservatório, que é um parâmetro fácil de se obter em testes de pressão. A pressão média em um ponto com distância  $r$  do centro do poço é definida com base em uma média ponderada no volume compreendido entre o raio do poço e o raio  $r$ :

$$\bar{P}(r, t) = \frac{\int_{r_w}^r P(r, t) dV}{\int_{r_w}^r dV} \quad (3.36)$$

onde  $V$  é o volume poroso de todo o reservatório, definido por:

$$V = \phi h \pi (r^2 - r_w^2) \quad (3.37)$$

Dessa forma a Eq. (3.36) pode ser escrita como:

$$\bar{P}(r, t) = \frac{2\pi h\phi \int_{r_w}^r P(r, t) r dr}{2\pi h\phi \int_{r_w}^r r dr} \quad (3.38)$$

$$\bar{P}(r, t) = \left( \frac{2}{r^2 - r_w^2} \right) \int_{r_w}^r P(r, t) r dr \quad (3.39)$$

Substituindo a Eq. (3.34):

$$\bar{P}(r, t) = \left( \frac{2}{r^2 - r_w^2} \right) \int_{r_{well}}^r \left[ P_{wf} + \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) \right] r dr \quad (3.40)$$

$$\bar{P}(r, t) = P_{wf} + \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{(r^2 - r_w^2) \pi K_o h} \int_{r_w}^r \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) r dr \quad (3.41)$$

Utilizando integral por partes:

$$\bar{P}(r, t) = P_{wf} + \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} \left[ \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) \frac{r^2}{(r^2 - r_w^2)} - \frac{1}{2} \right] \quad (3.42)$$

A Eq. (3.42) mostra a pressão média em cada ponto do reservatório. Observe que não existe termo temporal nessa equação, o que significa que a pressão não varia com o tempo (regime permanente). Essa equação pode ser simplificada quando o raio investigado é muito maior que o raio do poço ( $r \gg r_w$ ), ou seja:

$$\frac{r^2}{(r^2 - r_w^2)} \approx 1 \quad (3.43)$$

. Dessa maneira a Eq. (3.42) fica escrita como:

$$\bar{P}(r, t) = P_{wf} + \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} \left[ \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad (3.44)$$

que é a forma comumente encontrada nos livros de engenharia de reservatório.

### 3.3 Solução do regime pseudo-permanente

O regime pseudo-permanente é uma aproximação muito útil, onde se assume que a queda de pressão em todos os pontos do reservatório é constante com o tempo

(ROSA *et al.*, 2006). A Fig. 8 mostra uma representação esquemática da variação da pressão nesse regime. É possível perceber que uma vez que o reservatório atinge um perfil de produção, todos os pontos decaem com o mesmo perfil. Esse regime é válido quando um reservatório produz com mecanismo de gás em solução, para tempos suficientemente longos.

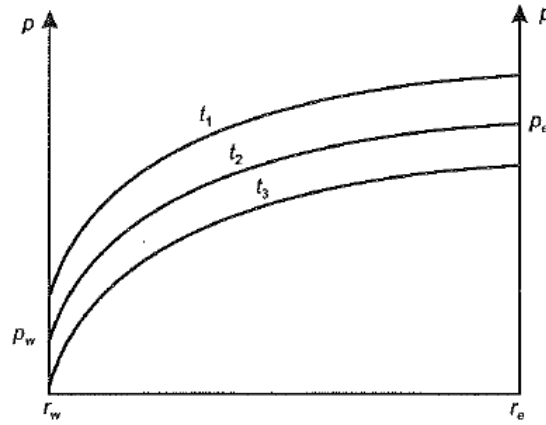


Figura 8: Variação da pressão em função da distância radial do centro do poço, para um reservatório produzindo no regime pseudo-permanente (ROSA *et al.*, 2006).

A queda de pressão no reservatório é constante, assim:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha \quad (3.45)$$

onde  $\alpha$  é uma constante qualquer. Como o reservatório é selado, não há fluxo na fronteira externa, desse modo:

$$q(r_e) = 0 \quad (3.46)$$

Utilizando a Lei de Darcy:

$$\frac{2\pi K_o h}{\mu} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (3.47)$$

$$\left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (3.48)$$

Assim, o sistema que governa o regime pseudo-permanente é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] &= \frac{c_t \phi \mu_o}{K_o} \frac{\partial P}{\partial t} & (\text{E.D.P}) \\
P(r, t_0) &= P_i & (\text{C.I.}) \\
\frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_e} &= 0 & (\text{C.C.E}) \\
P(r_w, t) &= P_{wf}(t) & (\text{C.C.I})
\end{aligned} \tag{3.49}$$

### 3.3.1 Solução da pressão no regime pseudo-permanente:

A Eq. (3.49) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{c_t \phi \mu_o \alpha}{K_o} r \tag{3.50}$$

Integrando os dois lados da equação entre o poço e o limite do reservatório:

$$\int_{r_w}^{r_e} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) dr = \int_{r_w}^{r_e} \frac{c_t \phi \mu_o \alpha}{K_o} r \cdot dr \tag{3.51}$$

$$\left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_e} - \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} = \frac{c_t \phi \mu_o \alpha}{K_o} \frac{(r_e^2 - r_w^2)}{2} \tag{3.52}$$

Utilizando a Lei de Darcy:

$$q_o^{STC} = \frac{2\pi K_o h}{B_o \mu} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \tag{3.53}$$

$$\frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} = - \frac{c_t \phi \mu_o \alpha}{K_o} \frac{(r_e^2 - r_w^2)}{2} \tag{3.54}$$

Logo:

$$\alpha = - \frac{q_o^{STC} B_o}{c_t \pi \phi h (r_e^2 - r_w^2)} \tag{3.55}$$

Note que  $\pi \phi h (r_e^2 - r_w^2)$  é o volume poroso do reservatório, logo a Eq. (3.55) expressa o balanço de materiais nesse reservatório. Resolvendo a E.D.P.:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = - \frac{q_o^{STC} B_o \mu_o}{\pi h (r_e^2 - r_w^2) K_o} r \quad (3.56)$$

$$r \frac{\partial P}{\partial r} = - \frac{q_o^{STC} B_o \mu_o}{\pi h (r_e^2 - r_w^2) K_o} \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (3.57)$$

Utilizando a condição de contorno externa:

$$C_1 = \frac{q_o^{STC} B_o \mu_o}{\pi h (r_e^2 - r_w^2) K_o} \frac{r_e^2}{2} \quad (3.58)$$

Assim:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{q_o^{STC} B_o \mu_o}{2\pi h (r_e^2 - r_w^2) K_o} \left( \frac{r_e^2}{r} - r \right) \quad (3.59)$$

Integrando entre o poço e um raio qualquer:

$$\int_{P_{wf}(t)}^{P(r)} dP = \int_{r_w}^r \frac{q_o^{STC} B_o \mu_o}{2\pi h (r_e^2 - r_w^2) K_o} \left( \frac{r_e^2}{r} - r \right) dr \quad (3.60)$$

$$P(r) = P_{wf}(t) + \frac{q_o^{STC} B_o \mu_o}{2\pi h K_o} \left[ \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{1}{2} \frac{(r^2 - r_w^2)}{(r_e^2 - r_w^2)} \right] \quad (3.61)$$

A Eq. (3.61) expressa a variação da pressão em função do raio para um reservatório no regime pseudo-permanente.

### 3.3.2 Pressão média no regime pseudo-permanente

Da mesma forma que no regime permanente, a pressão média em um ponto do reservatório é um parâmetro muito mais fácil de ser medido através de um teste de pressão. Dessa forma, utilizando o conceito de pressão média:

$$\bar{P}(r) = \frac{\int_{r_w}^r P(r) dV}{\int_{r_w}^r dV} = \frac{2}{(r^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^r P(r) r dr \quad (3.62)$$

Utilizando a Eq. (3.61):



$$\overline{P}(r) = \frac{2}{(r^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^r \left\{ P_{wf}(t) + \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi h K_o} \left[ \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{1}{2} \frac{(r^2 - r_w^2)}{(r_e^2 - r_w^2)} \right] \right\} r dr \quad (3.63)$$

Rearranjando a equação:

$$\overline{P}(r) = \frac{2}{(r^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^r \left\{ r P_{wf}(t) + \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi h K_o} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left[ r \cdot \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) \right] - \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{4\pi h K_o (r_e^2 - r_w^2)} [r (r^2 - r_w^2)] \right\} dr \quad (3.64)$$

É possível dividir a integral da Eq. (3.64) em três integrais:

$$I_1 = \int_{r_w}^r r P_{wf}(t) dr \quad (3.65)$$

$$I_2 = \int_{r_w}^r \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi h K_o} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left( r \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) \right) dr \quad (3.66)$$

$$I_3 = - \int_{r_w}^r \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{4\pi h K_o (r_e^2 - r_w^2)} [r (r^2 - r_w^2)] dr \quad (3.67)$$

Resolvendo as integrais, chega-se aos seguintes resultados:

$$I_1 = \frac{P_{wf}(t)}{2} (r^2 - r_w^2) \quad (3.68)$$

$$I_2 = \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi h K_o} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left[ \frac{r^2}{2} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{1}{4} (r^2 - r_w^2) \right] \quad (3.69)$$

$$I_3 = - \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{16\pi h K_o} \left[ \frac{(r^2 - r_w^2)^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \right] \quad (3.70)$$

Substituindo os valores das integrais na Eq. (3.64):

$$\begin{aligned} \overline{P}(r) = \frac{2}{(r^2 - r_w^2)} \left\{ \frac{P_{wf}(t)}{2} (r^2 - r_w^2) + \right. \\ \left. \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi h K_o} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left[ \frac{r^2}{2} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{1}{4} (r^2 - r_w^2) \right] \right. \\ \left. - \frac{\mu_o q_o^{STD} B_o}{16\pi h K_o} \left[ \frac{(r^2 - r_w^2)^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \right] \right\} \quad (3.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{P}(r) = P_{wf}(t) + \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi h K_o} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left[ \frac{r^2}{(r^2 - r_w^2)} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{1}{2} \right] \\ - \frac{\mu_o q_o^{STD} B_o}{8\pi h K_o} \left[ \frac{(r^2 - r_w^2)}{(r_e^2 - r_w^2)} \right] \quad (3.72) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\overline{P}(r) = P_{wf}(t) + \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi K_o h} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left[ \frac{r^2}{(r^2 - r_w^2)} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{1}{4} \frac{(r^2 - r_w^2)}{r_e^2} - \frac{1}{2} \right] \quad (3.73)$$

A Eq. (3.73) expressa a pressão média em função do raio do reservatório, para o regime pseudo-permanente. Essa equação pode ser simplificada utilizando-se a seguinte aproximação:

$$\frac{r^2}{(r^2 - r_{well}^2)} \approx 1 \quad (3.74)$$

De fato essa aproximação é válida quando  $r \gg r_{well}$ . Dessa maneira a Eq. (3.73) adquire a seguinte forma:

$$\overline{P}(r) = P_{wf}(t) + \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi K_o h} \left[ \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{3}{4} \right] \quad (3.75)$$

que é a expressão comumente apresentada nos livros de engenharia de reservatórios.

### 3.3.3 Pressão em função do raio e do tempo no regime pseudo-permanente

Como pode ser observado nas Eqs. (3.61) e (3.73), o termo  $P_{wf}(t)$  é função do tempo de abertura do reservatório. Como definido anteriormente, a queda de pressão em função do tempo no reservatório é constante, dessa forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \alpha \quad (3.76)$$

onde  $\bar{P}$  é a pressão média de todo o reservatório. Substituindo o valor de  $\alpha$ :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = -\frac{q_o^{STD} B_o}{c_t \pi \phi h (r_e^2 - r_w^2)} \quad (3.77)$$

Integrando a equação:

$$\int_{P_i}^{\bar{P}(t)} d\bar{P} = -\int_0^t \frac{q_o^{STD} B_o}{c_t \pi \phi h (r_e^2 - r_w^2)} dt \quad (3.78)$$

onde  $P_i$  é a pressão inicial do reservatório. Dessa forma, a pressão média do reservatório em função do tempo é dada por:

$$\bar{P}(t) = P_i - \frac{q_o^{STD} B_o}{c_t \pi \phi h (r_e^2 - r_w^2)} t \quad (3.79)$$

A pressão média de todo o reservatório variando no tempo, deve ser igual a pressão média de todo o reservatório variando com a distância radial, ou seja:

$$\bar{P}(t) = \bar{P}(r_e) \quad (3.80)$$

Substituindo a Eq. (3.73):

$$P_i - \frac{q_o^{STD} B_o}{c_t \pi \phi h (r_e^2 - r_w^2)} t = P_{wf}(t) + \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi K_o h} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left[ \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{1}{4} \frac{(r_e^2 - r_w^2)}{r_e^2} - \frac{1}{2} \right] \quad (3.81)$$

$$P_{wf}(t) = P_i - \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi K_o h} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left[ \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{1}{4} \frac{(r_e^2 - r_w^2)}{r_e^2} - \frac{1}{2} \right] - \frac{q_o^{STD} B_o}{c_t \pi \phi h (r_e^2 - r_w^2)} t \quad (3.82)$$

A Eq. (3.82) expressa a pressão na face do poço em função do tempo de abertura do reservatório. Dessa forma, combinando as Eqs. (3.82) e (3.61) é possível encontrar um expressão que calcula a pressão em qualquer ponto do reservatório e em qualquer tempo de produção:

$$P(r, t) = P_i - \frac{q_o^{STD} B_o \mu_o}{2\pi K_o h} \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \left[ \frac{r_e^2}{(r_e^2 - r_w^2)} \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{1}{4} \frac{(r_e^2 - r_w^2)}{r_e^2} + \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{1}{2} \frac{(r^2 - r_w^2)}{r_e^2} - \frac{1}{2} \right] - \frac{q_o^{STD} B_o}{c_t \pi \phi h (r_e^2 - r_w^2)} t \quad (3.83)$$

## 4 *Solução do Regime Transiente da Equação Radial da Difusividade*

A solução do regime transiente foi colocada em um capítulo a parte devido a complexidade matemática das deduções e principalmente porque as soluções desenvolvidas para esse regime possuem aplicações práticas na análise de testes de pressão em poços de petróleo. As soluções desenvolvidas nesse capítulo são independentes do sistema de unidades utilizado e das dimensões e propriedades do reservatório. Dessa forma, uma boa prática é se desenvolver uma forma adimensional da equação da difusividade, onde as soluções serão válidas para qualquer sistema de unidades.

### 4.1 *Adimensionalização da equação da difusividade radial*

A Equação da Difusividade em coordenadas radiais, Eq. (3.27), foi definida como:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \frac{c_t \phi \mu_o}{K_o} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.1)$$

O sistema de variáveis serão modificados da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} P & t & r & \eta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P_D & t_D & r_D & 1 \end{array} \quad (4.2)$$

onde o subscrito  $D$  indica que a variável está na forma adimensional e  $\eta$  é a constante de difusividade, definida como:

$$\eta = \frac{K_o}{c_t \phi \mu_o} \quad (4.3)$$

#### 4.1.1 Adimensionalização do raio ( $r$ )

O raio  $r$  pode ser escrito na forma adimensional utilizando-se o raio do poço como parâmetro, da seguinte forma:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (4.4)$$

Dessa forma, utilizando-se a regra da cadeia, a derivada parcial da pressão em relação ao raio adimensional pode ser escrito como:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r_w} \frac{\partial P}{\partial r_D} \quad (4.5)$$

Substituindo na Eq. (4.1):

$$\frac{1}{r_w r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r_D \frac{\partial P}{\partial r_D} \right) \right] = \frac{c_t \phi \mu_o}{K_o} \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right] \right) + \nabla \cdot \left( \frac{R_s}{B_o} \vec{v}_o + \frac{1}{B_g} \vec{v}_g \right) = \frac{R_{gWell}}{\rho_g^{STC}} \quad (4.6)$$

Derivando novamente em relação ao raio adimensional:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r_D \frac{\partial P}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial P}{\partial r_D} \right) \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial P}{\partial r_D} \right) \quad (4.7)$$

Assim a Equação da Difusividade com o raio adimensional pode ser escrita como:

$$\frac{1}{r_w^2 r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial P}{\partial r_D} \right) \right] = \frac{c_t \phi \mu_o}{K_o} \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right] \right) + \nabla \cdot \left( \frac{R_s}{B_o} \vec{v}_o + \frac{1}{B_g} \vec{v}_g \right) = \frac{R_{gWell}}{\rho_g^{STC}} \quad (4.8)$$

#### 4.1.2 Adimensionalização do tempo ( $t$ )

Para se adimensionalizar o tempo, observa-se que a seguinte constante possui dimensão de tempo:

$$\left[ \frac{r_w^2}{\eta} \right] = \left[ \frac{r_w^2 c_t \phi \mu_o}{K_o} \right] = \frac{[L^2] [P^{-1}] [1] [P.T]}{[L^2]} = [T] \quad (4.9)$$

onde  $L$ ,  $P$  e  $T$  expressam as dimensões de comprimento, pressão e tempo, respectivamente. Dessa forma:

$$t_D = \frac{t}{\left( \frac{r_w^2 c_t \phi \mu_o}{K_o} \right)} \quad (4.10)$$

Derivando a pressão em relação ao tempo adimensional:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t_D} \frac{\partial t_D}{\partial t} = \frac{K_o}{r_w^2 c_t \phi \mu_o} \frac{\partial P}{\partial t_D} \quad (4.11)$$

Substituindo na Eq. (4.8):

$$\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial P}{\partial r_D} \right) \right] = \frac{\partial P}{\partial t_D} \quad (4.12)$$

### 4.1.3 Adimensionalização da pressão ( $P$ )

Para se adimensionalizar a pressão, utiliza-se a Lei de Darcy radial calculada no poço:

$$q_o^{STC} = \frac{2\pi K_o h}{B_o \mu} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \quad (4.13)$$

Adimensionalizando o raio:

$$q_o^{STC} = \frac{2\pi K_o h}{B_o \mu} \left( r_D \frac{\partial P}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} \quad (4.14)$$

$$\left( r_D \frac{\partial P}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = \frac{q_o^{STC} B_o \mu}{2\pi K_o h} \quad (4.15)$$

Logo, observa-se que o lado direito da equação possui dimensão de pressão. Em aplicações práticas, é melhor trabalhar com a variação da pressão do que com a pressão no reservatório, dessa forma seria interessante se escrever a pressão adimensional em função de  $\Delta P$ , onde:

$$\Delta P = P_i - P(r, t) \quad (4.16)$$

Como a vazão produzida pelo poço é positiva e a vazão injetada é negativa, a pressão pode ser adimensionalizada da seguinte forma:

$$P_D = -\frac{(P_i - P) 2\pi K_o h}{q_o^{STD} B_o \mu} \quad (4.17)$$

Calculando as derivadas parciais da pressão em relação ao tempo e ao raio adimensionais:

$$\frac{\partial P}{\partial t_D} = \frac{\partial P}{\partial P_D} \frac{\partial P_D}{\partial t_D} = \frac{q_o^{STD} B_o \mu}{2\pi K_o h} \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r_D} = \frac{\partial P}{\partial P_D} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} = \frac{q_o^{STD} B_o \mu}{2\pi K_o h} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \quad (4.19)$$

Substituindo na Eq. (4.12):

$$\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right) \right] = \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \quad (4.20)$$

A Eq. (4.20) representa a equação da difusividade na forma radial adimensional, observa-se que ela é muito parecida com a forma dimensional. O próximo passo é adimensionalizar as condições de contorno.

#### 4.1.4 Adimensionalização das condições de contorno

A condição inicial para o reservatório pode ser escrita como:

$$P_D(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (4.21)$$

A condição de contorno interna, considerando vazão constante, pode ser escrita como:

$$\left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -1 \quad (4.22)$$

A condição de contorno externa para um reservatório infinito pode ser escrita como:



$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} P_D(r_D, t_D) = 0 \quad (4.23)$$

Observa-se que as condições de contorno são todas lineares, dessa forma o sistema de adimensionalização escolhido foi capaz de simplificar o problema matemático.

#### 4.1.5 Sistema de unidades

A Eq. (4.1) está deduzida no sistema internacional de unidades. Esse sistema de unidades não é muito prático na indústria do petróleo. Assim, devem ser impostas as seguintes conversões de unidades:

$$a = \frac{c_a q B_o \mu}{2\pi h} \quad (4.24)$$

$$\eta = \frac{c_b k}{\phi \mu c_t} \quad (4.25)$$

$$C_D = \frac{C}{c_a c_b} \quad (4.26)$$

onde  $C_D$  é o coeficiente de estocagem adimensional que será definido com detalhes no Capítulo 5. Os coeficientes  $c_a$  e  $c_b$  são os coeficientes de conversão de unidades e possuem os seguintes valores:

Sistema de unidades Petrobras (PETROSI):

$$\begin{cases} c_a = 119.5690 \\ c_b = 3.484e - 4 \end{cases} \quad (4.27)$$

Sistema de unidades americano (OILFIELD):

$$\begin{cases} c_a = 887.1860 \\ c_b = 2.6374e - 4 \end{cases} \quad (4.28)$$

## 4.2 Solução do tipo linha-fonte (Transformada de Boltzmann)

A aproximação da linha-fonte considera que o raio do reservatório é muito maior que o raio do poço, desse modo, o poço pode ser visto como sendo apenas uma linha produzindo ou injetando fluidos no reservatório. Utilizando essas aproximações, é possível se escrever o seguinte conjunto de equações para esse problema:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right) \right] &= \frac{\partial P_D}{\partial t_D} & (\text{E.D.P.}) \\
 P_D(r_D, t_D = 0) &= 0 & (\text{C.I.}) \\
 \lim_{r_D \rightarrow \infty} P_D(r_D, t_D) &= 0 & (\text{C.C.E}) \\
 \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D \rightarrow 0} &= -1 & (\text{C.C.I})
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

### 4.2.1 Definição da equação da difusividade na forma de Boltzmann

A transformada de Boltzmann consiste em se encontrar uma solução da E.D.P. da forma  $P = P(\xi)$ , onde:

$$\xi = Ar_D^B t_D^C \tag{4.30}$$

sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  constantes reais. Calculando as derivadas parciais em relação ao tempo e ao raio adimensionais:

$$\frac{\partial P_D(\xi)}{\partial t_D} = \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t_D} = ACr_D^B t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial P_D(\xi)}{\partial r_D} = \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r_D} = AB r_D^{(B-1)} t_D^C \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \tag{4.32}$$

Substituindo as derivadas parciais na Eq.(4.29):

$$\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D AB r_D^{(B-1)} t_D^C \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right) \right] = ACr_D^B t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \tag{4.33}$$

$$\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( A B r_D^B t_D^C \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right) \right] = A C r_D^B t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.34)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( B \xi \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right) \right] = A C r_D^{B+1} t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.35)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \xi \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right) \right] = A B^{-1} C r_D^{B+1} t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.36)$$

Utilizando a regra do produto:

$$\left[ \xi \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial r_D} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right] = A B^{-1} C r_D^{B+1} t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.37)$$

$$\left[ \xi \left( \frac{\partial^2 P_D(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial r_D} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial r_D} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right] = A B^{-1} C r_D^{B+1} t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r_D} \left[ \xi \left( \frac{\partial^2 P_D(\xi)}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right] = A B^{-1} C r_D^{B+1} t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.39)$$

$$A B r_D^{(B-1)} t_D^C \left[ \xi \frac{\partial^2 P_D(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right] = A B^{-1} C r_D^{B+1} t_D^{(C-1)} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.40)$$

$$\left[ \xi \frac{\partial^2 P_D(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right] = B^{-2} C r_D^2 t_D^{-1} \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.41)$$

$$\xi \frac{\partial^2 P_D(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} (1 - B^{-2} C r_D^2 t_D^{-1}) = 0 \quad (4.42)$$

Fazendo a seguinte substituição:

$$\xi^N = -B^{-2} C r_D^2 t_D^{-1} \quad (4.43)$$

Dessa forma, a Eq. (4.42) pode ser escrita como:

$$\xi \frac{\partial^2 P_D(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} (1 + \xi^N) = 0 \quad (4.44)$$

onde:

$$\xi = \sqrt[N]{B^{-2}(-C)r_D^2 t_D^{-1}} \quad (4.45)$$

Comparando com a Eq. (4.30):

$$B^{\frac{-2}{N}}(-C)^{\frac{1}{N}}r_D^{\frac{2}{N}}t_D^{\frac{-1}{N}} = Ar_D^B t_D^C \quad (4.46)$$

Encontra-se os seguintes valores das constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

$$A = B^{\frac{-2}{N}}(-C)^{\frac{1}{N}} = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{-2}{N}} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{N}} \quad (4.47)$$

$$B = \frac{2}{N} \quad (4.48)$$

$$C = -\frac{1}{N} \quad (4.49)$$

Observa-se que a Eq. (4.44) é uma E.D.O. de segunda ordem, assim, com a transformada de Boltzmann foi possível se transformar uma E.D.P. de segunda ordem em uma E.D.O. de segunda ordem. Para se completar o sistema de equações do problema é necessário se escrever as condições de contorno na forma de Boltzmann:

• **Condição de Contorno Interna C.C.I.:**

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left( r_D \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial r_D} \right) = -1 \quad (4.50)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left( r_D \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r_D} \right) = -1 \quad (4.51)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left( B \xi \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right) = -1 \quad (4.52)$$

Observa-se que quando  $r_D \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$ , assim:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \xi \frac{\partial P_D(\xi)}{\partial \xi} \right) = -\frac{1}{B} \quad (4.53)$$

• **Condição de Contorno Externa C.C.E.:**

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} P_D(\xi) = 0 \quad (4.54)$$

Quando  $r_D \rightarrow \infty$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ , assim:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} P_D(\xi) = 0 \quad (4.55)$$

## 4.2.2 Solução da equação da difusividade na forma de Boltzmann

Utilizando as equações desenvolvidas anteriormente, é possível se escrever o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \xi \frac{d^2 P_D(\xi)}{d\xi^2} + \frac{dP_D(\xi)}{d\xi} (1 + \xi^N) &= 0 & (\text{E.D.O}) \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \xi \frac{dP_D(\xi)}{d\xi} \right) &= -\frac{1}{B} & (\text{C.C.I}) \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_D(\xi) &= 0 & (\text{C.C.E}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Para se resolver a Eq. (4.56), utiliza-se a seguinte transformação:

$$y = \frac{dP_D(\xi)}{d\xi} \quad (4.57)$$

Dessa forma:

$$\xi \frac{dy}{d\xi} + y (1 + \xi^N) = 0 \quad (4.58)$$

$$\left[ \frac{1}{\xi} + \xi^{(N-1)} \right] d\xi = -\frac{1}{y} dy \quad (4.59)$$

Como  $N$  é um número inteiro positivo, é possível se integrar a Eq. (4.59)<sup>1</sup>:

$$\ln(\xi) + \frac{\xi^N}{N} + C_0 = -\ln(y) \quad (4.60)$$

---

<sup>1</sup>De fato a EDP original não depende de  $N$ , logo a solução da Eq. (4.59) também não depende. Assim, uma forma mais fácil de se resolver essa equação é considerar  $N = 1$ .

$$y = \frac{C_0}{\xi} e^{\frac{-1}{N}\xi^N} \quad (4.61)$$

Utilizando a condição de contorno interna:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left( C_0 e^{\frac{-1}{N}\xi^N} \right) = -\frac{1}{B} \quad (4.62)$$

$$C_0 = -\frac{1}{B} \quad (4.63)$$

Dessa forma:

$$y = \frac{dP_D(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{B\xi} e^{\frac{-1}{N}\xi^N} \quad (4.64)$$

$$B.dP_D = -\frac{1}{\xi} e^{\frac{-1}{N}\xi^N} d\xi \quad (4.65)$$

Integrando, e utilizando a condição de contorno externa:

$$\int_0^{P_D} B.dP_D = -\int_{\infty}^{\xi} \frac{1}{\xi} e^{\frac{-1}{N}\xi^N} d\xi \quad (4.66)$$

Para se facilitar esse cálculo, é possível se definir a seguinte substituição:

$$\frac{\xi^N}{N} = \mu \quad (4.67)$$

$$\xi^{(N-1)} d\xi = d\mu \quad (4.68)$$

Assim, a Eq. (4.66) pode ser escrita como:

$$B.P_D = -\int_{\infty}^{\mu} \frac{1}{\xi^N} e^{-\mu} d\mu = -\int_{\infty}^{\mu} \frac{1}{N\mu} e^{-\mu} d\mu \quad (4.69)$$

Utilizando a definição de  $B$  (Eq. (4.48)):

$$P_D = \frac{1}{2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\mu} d\mu \quad (4.70)$$

A Eq. (4.70) é conhecida como função exponencial integral, descrita no Apêndice A, tal que:

$$\frac{1}{2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\mu} d\mu = -\frac{1}{2} E_i(-\mu) \quad (4.71)$$

Lembrando que:

$$\mu = \frac{\xi^N}{N} = \frac{r_D^2}{4t_D} \quad (4.72)$$

Logo, a pressão adimensional é dada por:

$$P_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right) \quad (4.73)$$

A Eq. (4.73) expressa a solução do regime transiente em coordenadas radiais adimensionais, utilizando-se a aproximação da linha-fonte. Observa-se que a solução não depende do valor de  $N$  utilizado, o que de fato é uma verdade pois a substituição de Boltzmann não poderia afetar a solução da equação original. Utilizando a aproximação logarítmica para a função exponencial integral, conforme o Apêndice A, a solução aproximada pode ser escrita como:

$$P_D(r_D, t_D) \approx \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4t_D}{e^{\gamma} r_D^2}\right) \quad (4.74)$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni, cujo valor numérico é  $\gamma \approx 0,5772156649$ .

A Fig. 9 compara a solução exata, dada pela função exponencial integral, com a solução dada pela aproximação logarítmica em função do parâmetro  $t_D/r_D^2$ . É possível perceber que a medida que o tempo avança, os erros introduzidos pela aproximação logarítmica diminuem.

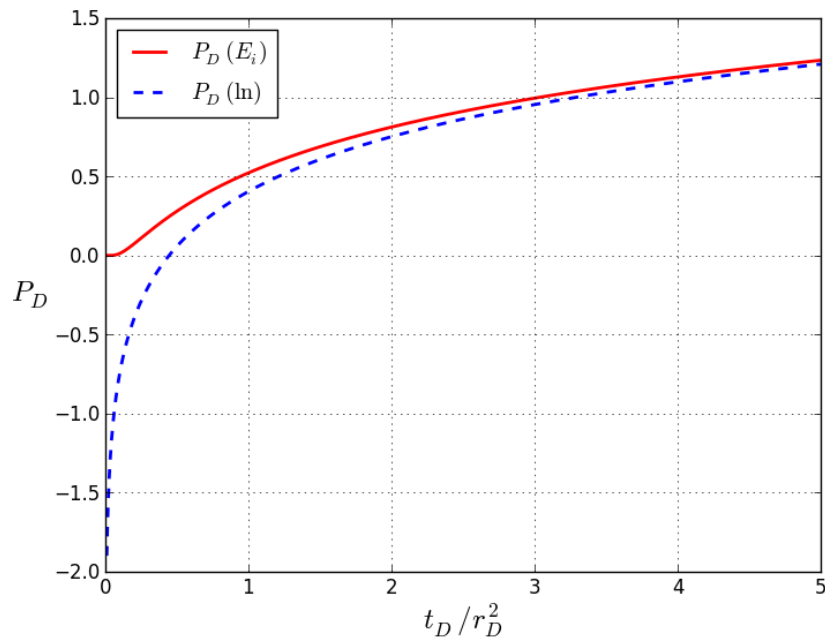


Figura 9: Comparação entre a solução exata, e a solução dada pela aproximação logarítmica.

### 4.3 Solução do tipo linha-fonte (Transformada de Laplace)

A solução do tipo linha-fonte será deduzida novamente, porém utilizando-se a transformada de Laplace para se verificar que é um método eficiente de solução de equações diferenciais parciais. A transformada de Laplace está discutida no Anexo B.

#### 4.3.1 Equação da difusividade no campo de Laplace

O problema da equação da difusividade transiente, utilizando-se a aproximação da linha-fonte em coordenadas adimensionais é dada pela Eq. (4.29), repetido aqui por conveniência.



$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right) \right] &= \frac{\partial P_D}{\partial t_D} & (\text{E.D.P}) \\
P_D(r_D, t_D = 0) &= 0 & (\text{C.I.}) \\
\lim_{r_D \rightarrow \infty} P_D(r_D, t_D) &= 0 & (\text{C.C.E}) \\
\left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D \rightarrow 0} &= -1 & (\text{C.C.I})
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Para se resolver essa equação no campo de Laplace, a equação e as condições de contorno devem ser convertidas para o campo de Laplace. A transformada de Laplace leva a variável  $t_D$ , tempo adimensional, para o campo de Laplace, aplicando a seguinte transformação linear, tem-se:

$$\mathcal{L} \{P_D(r_D, t_D)\} = \bar{P}_D(r_D, u) \tag{4.76}$$

onde  $u$  é a variável correspondente ao tempo no campo de Laplace. Uma das propriedades úteis da transformada de Laplace é a transformada da função derivada, definida como:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial P_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right\} = \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} = u \bar{P}_D(r_D, u) - P_D(r_D, t_D = 0) \tag{4.77}$$

Como observado, a transformada de Laplace só afeta as funções que dependem do tempo adimensional. Aplicando a transformada na equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right) \right] = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \right\} = u \bar{P}_D(r_D, u) - P_D(r_D, t_D = 0) \tag{4.78}$$

Aplicando a transformada de Laplace em todas as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right) \right] &= u \bar{P}_D(r_D, u) - P_D(r_D, t_D = 0) & (\text{E.D.P}) \\
\bar{P}_D(r_D, u = 0) &= 0 & (\text{C.I.}) \\
\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{P}_D(r_D, u) &= 0 & (\text{C.C.E}) \\
\left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D \rightarrow 0} &= -\frac{1}{u} & (\text{C.C.I})
\end{aligned} \tag{4.79}$$

A Eq. (4.79) é a equação que governa o problema do escoamento radial infinito, utilizando-se a aproximação do tipo linha-fonte.

### 4.3.2 Solução da equação da difusividade no campo de Laplace

Utilizando a regra do produto na derivada da Eq. (4.79):

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} = u \bar{P}_D(r_D, u) - P_D(r_D, t_D = 0) \quad (4.80)$$

Como a pressão adimensional no início do problema é nula (condição inicial no campo real), tem-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} = u \bar{P}_D(r_D, u) \quad (4.81)$$

A fim de obter uma E.D.P. cuja solução é conhecida, deve-se fazer a seguinte substituição de variáveis:

$$z = r_D \sqrt{u} \quad (4.82)$$

Assim:

$$\frac{\partial \bar{P}_D(r_D, u)}{\partial r_D} = \frac{\partial \bar{P}_D(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r_D} = \sqrt{u} \frac{\partial \bar{P}_D(z)}{\partial z} \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_D(r_D, u)}{\partial r_D^2} = u \frac{\partial^2 \bar{P}_D(z)}{\partial z^2} \quad (4.84)$$

Substituindo na Eq. (4.81):

$$u \frac{\partial^2 \bar{P}_D(z)}{\partial z^2} + \frac{u}{z} \frac{\partial \bar{P}_D(z)}{\partial z} = u \bar{P}_D(r_D, u) \quad (4.85)$$

$$z^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_D(z)}{\partial z^2} + z \frac{\partial \bar{P}_D(z)}{\partial z} - z^2 \bar{P}_D(r_D, u) = 0 \quad (4.86)$$

A Eq. (4.86) é a equação modificada de Bessel de ordem zero, discutida no Anexo C. Sua solução é dada por:

$$\overline{P}_D(z) = AI_0(z) + BK_0(z) \quad (4.87)$$

onde  $A$  e  $B$  são duas constantes reais e positivas. Para se determinar o valor dessas constantes é necessário se utilizar as condições de contorno. Utilizando a condição de contorno externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \overline{P}_D(r_D, u) = \lim_{z \rightarrow \infty} \overline{P}_D(z) = 0 \quad (4.88)$$

Como a função  $I_0(z)$  tende ao infinito quando seu argumento tende ao infinito, a constante  $A$  deve ser igual a zero. Assim:

$$\overline{P}_D(z) = BK_0(z) \quad (4.89)$$

Utilizando a condição de contorno interna:

$$\left( r_D \frac{\partial \overline{P}_D}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D \rightarrow 0} = -\frac{1}{u} \quad (4.90)$$

$$\left( z \frac{\partial \overline{P}_D(z)}{\partial z} \right) \Big|_{z \rightarrow 0} = -\frac{1}{u} \quad (4.91)$$

As derivadas das funções de Bessel estão descritas no Anexo C, dessa forma:

$$(-B.z.K_1(z)) \Big|_{z \rightarrow 0} = -\frac{1}{u} \quad (4.92)$$

$$B(z.K_1(z)) \Big|_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{u} \quad (4.93)$$

De acordo com Abramowitz e Stegun (1964):

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z.K_1(z)) = 1 \quad (4.94)$$

Daí:

$$B = \frac{1}{u} \quad (4.95)$$

Substituindo o valor de  $B$  na Eq. (4.89), tem-se:

$$\overline{P}_D(r_D, u) = \frac{1}{u} K_0(r_D \sqrt{u}) \quad (4.96)$$

A Eq. (4.96) expressa a variação da pressão adimensional no campo de Laplace, para um reservatório radial e infinito, considerando a aproximação do tipo linha-fonte. Na próxima seção será utilizada a transformada inversa de Laplace para se escrever a solução no campo real.

### 4.3.3 Transformada inversa da solução linha-fonte no campo de Laplace

Para se inverter a Eq. (4.96), aplica-se a propriedade da transformada de Laplace em uma função do tipo integral, definido por:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\alpha) d\alpha \right\} = \frac{1}{u} \mathcal{L} \{f(t)\} \quad (4.97)$$

Se considerarmos que:

$$\overline{P}_D(r_D, u) = \mathcal{L} \{P_D(r_D, t_D)\} = \frac{1}{u} \mathcal{L} \{f(t)\} \quad (4.98)$$

Então:

$$P_D(r_D, t_D) = \int_0^t f(\alpha) d\alpha \quad (4.99)$$

Substituindo a Eq. (4.96):

$$P_D(r_D, t_D) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \{K_0(r_D \sqrt{u})\} d\alpha \quad (4.100)$$

Mas, como pode ser visto no Anexo B:

$$\mathcal{L}^{-1} \{K_0(r_D \sqrt{u})\} = \frac{1}{2t_D} \exp \left( -\frac{r_D^2}{4t_D} \right) \quad (4.101)$$

Assim:

$$P_D(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} \frac{1}{2t_D} \exp\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right) dt_D \quad (4.102)$$

Substituindo,

$$\mu = \frac{r_D^2}{4t_D} \rightarrow d\mu = -\frac{r_D^2}{4t_D^2} dt_D = -\mu \frac{dt_D}{t_D} \quad (4.103)$$

$$P_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} \int_0^{t_D} \frac{1}{\mu} e^{-\mu} d\mu \quad (4.104)$$

A Eq. (4.104) é a função exponencial integral, discutida no Anexo A, dessa forma, a solução da pressão adimensional calculada pela transformada de Laplace, é dada por:

$$P_D = -\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right) \quad (4.105)$$

Observa-se que é o mesmo resultado obtido através da transformada de Boltzmann, o que já era esperado, pois o método de solução de uma E.D.P. não pode influenciar no resultado.

## 4.4 Algoritmo de Gaver-Stehfest

A solução da pressão adimensional no campo de Laplace, Eq. (4.96), foi invertida para o espaço real utilizando-se métodos analíticos de cálculo. Porém, a maioria das soluções que serão encontradas são muito complexas para serem invertidas. Para se resolver esse problema, alguns autores desenvolveram técnicas numéricas de inversão de uma função no campo de Laplace.

O algoritmo de Gaver-Stehfest é um algoritmo extremamente rápido e eficiente para funções sem variações bruscas, ou oscilações (KRYLOV; SKOBLIŽ Aĭžĭ, 1969). Esse algoritmo é dado por:

$$f(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^n V_j \overline{F}\left(\frac{\ln(2)}{t} j\right) \quad (4.106)$$

onde  $V_j$  são os coeficientes desse método, calculados por:

$$V_j = (-1)^{(1+\frac{n}{2})} \sum_{k=\text{int}[\frac{i+1}{2}]}^{\min(i, \frac{n}{2})} \frac{k^{(1+\frac{n}{2})} (2k)!}{(\frac{n}{2} - k)! (k!)^2 (j - k)! (2k - j)!} \quad (4.107)$$

onde  $n$  é o número par de termos utilizados no somatório. Em tese, quanto maior o valor de  $n$ , mais preciso será o algoritmo. Porém, devido a falta de precisão da máquina (calculadora ou computador), quando  $n$  é grande, os valores do numerador e do denominador do somatório da Eq. (4.107) não são corretamente representados e, conseqüentemente, a precisão do cálculo da divisão fica prejudicada. Os valores comumente utilizados são  $8 \leq n \leq 16$ . Os autores deste trabalho sugerem utilizar  $n = 14$ .

## **5 Solução Reservatório Radial Infinito com Estocagem e Dano**

No Capítulo 4 foram deduzidas as equações que governam o escoamento transiente considerando um poço de raio nulo e um reservatório de extensão infinita. A consideração de poço com raio nulo implica em erros consideráveis durante a interpretação de testes de formação, assim nesse tópico serão considerados os fenômenos que influenciam os primeiros períodos de um teste de formação, que são os fenômenos de poço e de dano de formação. As soluções serão realizadas no campo de Laplace, e os resultados serão todos invertidos utilizando-se o algoritmo de Stehfest (Seção 4.4).

### **5.1 Solução reservatório infinito com poço de raio finito**

Nesse caso, a condição de contorno interna do tipo linha fonte deverá ser substituída para a seguinte condição de contorno:

$$\left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right) \bigg|_{r_D=1} = -1 \quad (5.1)$$

e as equações que governam esse fenômeno, escritas no campo de Laplace, são:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right) \right] &= u \bar{P}_D(r_D, u) - P_D(r_D, t_D = 0) & (\text{E.D.P}) \\
\bar{P}_D(r_D, u = 0) &= 0 & (\text{C.I.}) \\
\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{P}_D(r_D, u) &= 0 & (\text{C.C.E}) \\
\left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} &= -\frac{1}{u} & (\text{C.C.I})
\end{aligned} \tag{5.2}$$

A solução do sistema (5.2) foi discutida na Seção 4.3.2, e é dada por:

$$\bar{P}_D(z) = AI_0(z) + BK_0(z) \tag{5.3}$$

onde  $A$  e  $B$  são duas constantes reais e positivas. Para se determinar o valor das constantes é necessário se utilizar as condições de contorno. Utilizando a condição de contorno externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{P}_D(r_D, u) = \lim_{z \rightarrow \infty} \bar{P}_D(z) = 0 \tag{5.4}$$

Conforme o Apêndice C, a função  $I_0(z)$  tende ao infinito quando seu argumento tende ao infinito, portanto a constante  $A$  deve ser igual a zero. Assim:

$$\bar{P}_D(z) = BK_0(z) \tag{5.5}$$

Para se determinar o valor da constante  $B$ , aplica-se a condição de contorno interna:

$$\left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = \left( r_D \frac{\partial BK_0(z)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -\frac{1}{u} \tag{5.6}$$

Utilizando-se a regra da cadeia:

$$\left( Br_D \frac{\partial K_0(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -\frac{1}{u} \tag{5.7}$$

Lembrando que:

$$z = r_D \sqrt{u} \tag{5.8}$$



$$(-B\sqrt{u}r_D K_1(z))|_{r_D=1} = -\frac{1}{u} \quad (5.9)$$

$$B\sqrt{u}K_1(\sqrt{u}) = \frac{1}{u} \quad (5.10)$$

$$B = \frac{1}{u\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})} \quad (5.11)$$

Dessa forma, a perda de pressão adimensional para um poço de raio finito, no campo de Laplace, é dado por:

$$\overline{P}_D(z) = \frac{K_0(r_D\sqrt{u})}{u\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})} \quad (5.12)$$

A Fig. 10 mostra uma comparação entre a solução aproximada pela linha fonte e a solução real dada por um poço de raio finito durante a abertura de um poço. É possível perceber que a solução linha fonte se estende para a região dentro do poço, causando a diferença entre os modelos no início da produção. A solução do tipo raio finito consegue perceber as variações de pressão nos arredores do poço com uma precisão superior para pequenos tempos de produção.

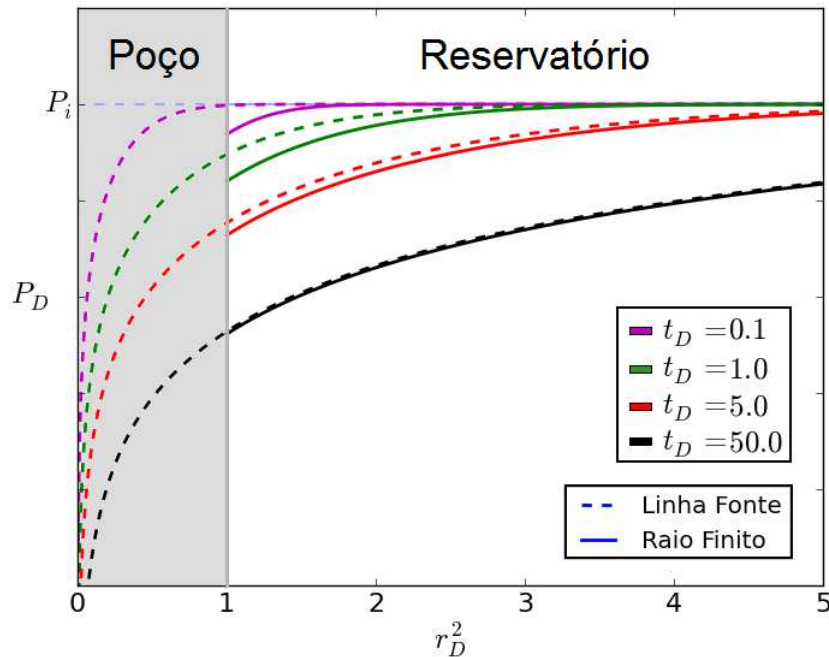


Figura 10: Comparação entre a solução do tipo linha fonte, e a solução para um poço finito.

## 5.2 Efeito de dano de formação

A operação de perfuração de um poço de petróleo é um processo que causa modificações nas propriedades físicas do reservatório, onde as zonas mais afetadas são as zonas nos arredores do poço. Geralmente a invasão dos fluidos de perfuração e completação, as operações de cimentação e canhoneio reduzem a permeabilidade efetiva do reservatório. Essa zona de baixa permeabilidade é chamada de zona danificada. A Fig. 11 mostra uma comparação entre a queda de pressão entre um reservatório normal e um danificado. É possível perceber que a presença de uma zona danificada acentua a perda de pressão na região próxima ao poço.

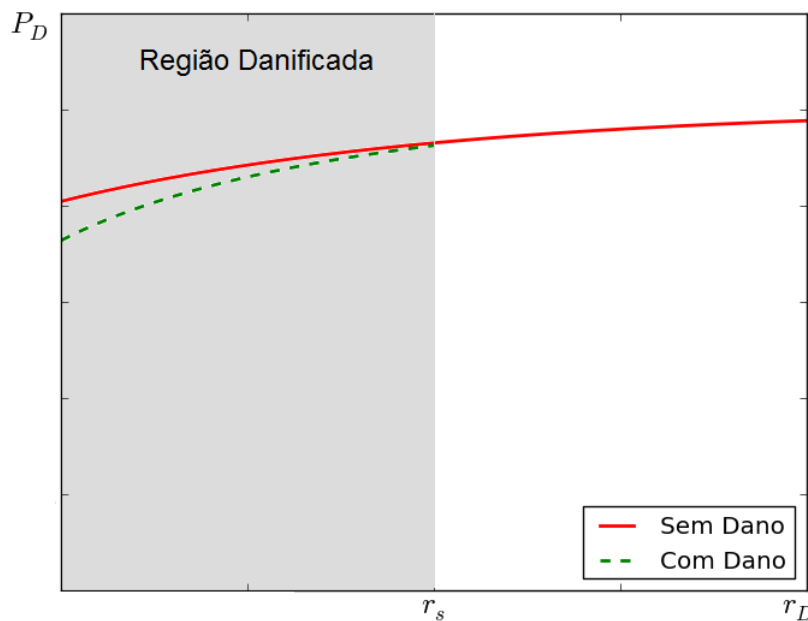


Figura 11: Efeito do dano de formação no perfil de pressão de um reservatório.

### 5.2.1 Conceito de fator de película

Considerando um escoamento permanente e utilizando-se a lei de Darcy radial, a queda de pressão causada pela zona danificada é dada por:

$$\frac{2\pi k_s h}{q\mu} [P(r = r_s) - P_s(r = r_w)] = \ln \left( \frac{r_s}{r_w} \right) \quad (5.13)$$

onde  $k_s$  é a permeabilidade da zona alterada e  $P_s(r = r_w)$  é a pressão calculada na parede do poço, considerando o dano na formação. Se essa zona não estivesse danificada, a queda de pressão ao redor do poço pode ser calculada por:

$$\frac{2\pi kh}{q\mu} (P(r = r_s) - P(r = r_w)) = \ln \left( \frac{r_s}{r_w} \right) \quad (5.14)$$

Combinando as duas equações, é possível se obter a seguinte relação:

$$\frac{2\pi kh}{q\mu} (P_s(r = r_w) - P(r = r_w)) = \left( \frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \left( \frac{r_s}{r_w} \right) \quad (5.15)$$

O fator  $P_s(r = r_w) - P(r = r_w)$  pode ser visto como a variação da pressão sentida pelo poço devido ao dano na formação. Dessa forma, considerando que toda a perda de carga ocorra na parede do poço, é possível definir o fator de película (do inglês *skin*) como sendo:

$$S = \frac{2\pi kh}{q\mu} (P_s(r = r_w) - P(r = r_w)) \quad (5.16)$$

Observa-se que o *skin* expressa a perda de carga adicional causada pelo dano na formação, em unidades adimensionais. A Fig. 12 mostra a perda de carga adicional causada pelo fator de película. Observa-se que toda a perda de carga é convertida em condição de contorno interna na face do poço.

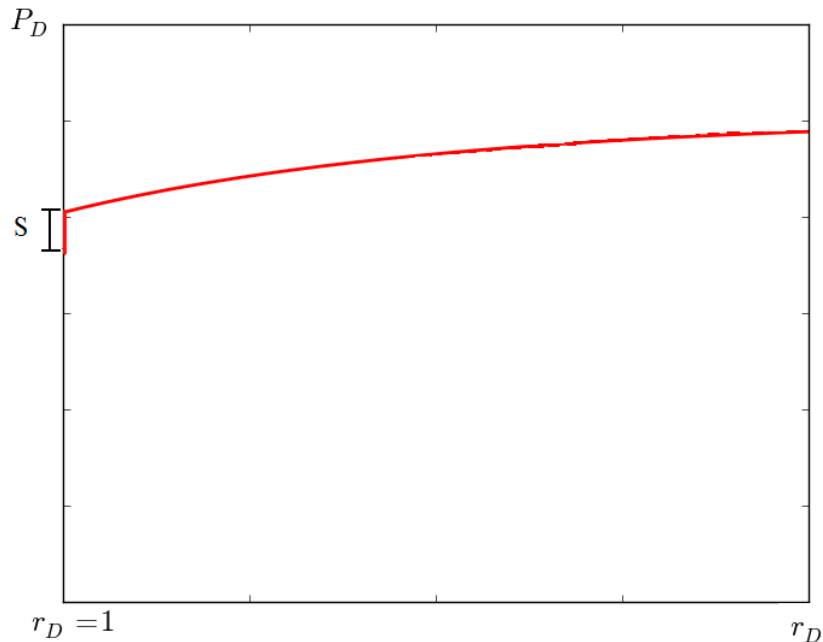


Figura 12: Perda de carga adicional, causado pela utilização do fator de película.

A Eq. (5.16) pode ser escrita em termos adimensionais, definida por:

$$P_{wD}(t_D) = P_D(r_D = 1, t_D) - S \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (5.17)$$

onde  $P_{wD}(t_D)$  é a pressão adimensional no interior do poço, já considerando o efeito do fator de película.

## 5.2.2 Conceito de raio equivalente

A solução aproximada, para tempos longos o suficiente para que a hipótese da linha-fonte seja válida, é dada pela Eq. (4.74), ou seja:

$$P_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4t_D}{e^\gamma r_D^2} \right) \quad (5.18)$$

Substituindo na Eq. (5.17):

$$P_{wD} = P_D(r_D = 1) - S \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (5.19)$$

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4t_D}{e^\gamma} \right) + S \quad (5.20)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4t_D}{e^\gamma e^{-2S}} \right) \quad (5.21)$$

A Eq. (5.21) expressa a variação da pressão no fundo do poço em função do tempo adimensional e do fator de película. Escrevendo essa equação em variáveis dimensionais:

$$P_{wf} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4kt}{c_t \phi \mu_o e^\gamma r_w^2 e^{-2S}} \right) \quad (5.22)$$

É possível se definir o conceito de raio equivalente, dado por:

$$r_w^* = r_w e^{-S} \quad (5.23)$$

O conceito do raio equivalente consiste em se encontrar um raio equivalente para

um poço produzir com as mesmas características de um reservatório danificado. Alguns autores acreditam que essa representação é numericamente mais estável pois evita-se utilizar a condição de salto imposta pelo fator de película. Observa-se que a variação da pressão no fundo do poço, utilizando-se esse conceito é dada por:

$$P_{wf} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4kt}{c_t \phi \mu_o e^\gamma r_w^{*2}} \right) \quad (5.24)$$

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4t_D^*}{e^\gamma} \right) \quad (5.25)$$

### 5.3 Efeito de estocagem no poço

Uma das hipóteses consideradas até esse momento era que o fluido escoando no reservatório era levemente compressível ou incompressível. Assim, quando se abre um poço pela primeira vez, os fluidos estão comprimidos dentro do poço e a produção é causada pela descompressão desses fluidos. Nesse momento está ocorrendo a produção, na superfície, mas na, face do poço, não ocorre entrada de fluido oriundo do reservatório ainda. Esse fenômeno de descompressão inicial dos fluidos no poço é chamado de efeito de estocagem e atua como uma espécie de região de sombra em testes de formação, pois os sensores de pressão estão detectando a queda de pressão que não está sendo causada por produção de fluidos do reservatório. Felizmente, em um tempo relativamente curto o regime de escoamento dentro do poço se torna permanente e a estocagem deixa de influenciar os dados de testes de pressão.

Durante um teste de pressão, o poço é colocado em fluxo devido a existência de uma válvula de abertura, que pode estar localizada na superfície, ou no fundo do poço. A Fig. 13 mostra uma representação esquemática de um poço de petróleo. É possível perceber que o efeito de estocagem é mais intenso quando o poço entra em produção do que quando o poço fecha a produção. Isso se deve ao fato da medição da vazão ser realizada na superfície e o fechamento da produção ser realizada no fundo, aumentando o volume permitido para expansão do fluido durante a abertura.

Utilizando a lei da conservação da massa, na forma integral, dentro do poço:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} (\rho u) dA = 0 \quad (5.26)$$

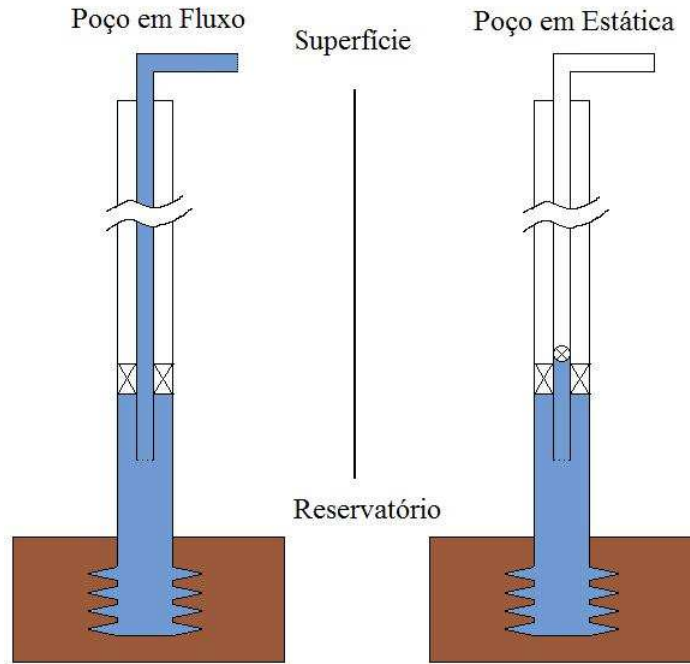


Figura 13: Representação esquemática de um poço de petróleo.

Considerando que só há entrada de massa na face do poço e saída de massa na válvula de abertura do poço:

$$\rho_{wf} q_{wf} - \rho_{valv.} q_{valv.} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \rho dV \quad (5.27)$$

A densidade pontual, em cada ponto do poço, pode ser substituída por uma densidade média, assim:

$$\rho_{wf} q_{wf} - \rho_{valv.} q_{valv.} = \frac{d(\bar{\rho} V_w)}{dt} \quad (5.28)$$

onde  $V_w$  é o volume compreendido entre a base do poço e a válvula de abertura do mesmo. Como foi assumido que o fluido era pouco compressível, ou seja, compressibilidade constante, é possível considerar que a variação da densidade média dos fluidos dentro do poço é igual a variação da densidade do fluido na face da formação. Daí:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\rho_{wf}}{dt} \quad (5.29)$$

Assim:

$$\rho_{wf}q_{wf} - \rho_{valv.}q_{valv.} = V_w \frac{d\rho_{wf}}{dt} \quad (5.30)$$

Considerando que a pressão na face da formação varie apenas com o tempo:

$$\rho_{wf}q_{wf} - \rho_{valv.}q_{valv.} = V_w \frac{d\rho_{wf}}{dP} \frac{dP}{dt} \quad (5.31)$$

Utilizando a definição de compressibilidade:

$$c_f = \frac{1}{\rho_{wf}} \frac{\partial \rho_{wf}}{\partial P_{wf}} \quad (5.32)$$

é possível escrever:

$$\rho_{wf}q_{wf} - \rho_{valv.}q_{valv.} = V_w c_f \rho_{wf} \frac{dP_{wf}}{dt} \quad (5.33)$$

$$q_{wf} - \frac{\rho_{valv.}}{\rho_{wf}} q_{valv.} = V_w c_f \frac{dP_{wf}}{dt} \quad (5.34)$$

Lembrando que  $\rho_{valv.}$  é a massa específica do fluido medido na saída da válvula. Considerando que a válvula está na superfície, do conceito de fator volume-formação, tem-se:

$$q_{wf} - B_{wf}q_{valv.} = V_w c_f \frac{dP_{wf}}{dt} \quad (5.35)$$

onde  $B_{wf}$  é o fator volume-formação do fluido na face do poço com o reservatório. Considerando que esse fluido seja o próprio fluido do reservatório e que esse seja óleo, então  $B_{wf} = B_o$ . A vazão na face do poço pode ser calculada utilizando-se a lei de Darcy, dada por:

$$q_{wf} = \frac{2\pi kh}{\mu} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_w} \quad (5.36)$$

Dessa maneira:

$$\frac{2\pi kh}{\mu} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_w} = q_o B_o + V_w c_f \frac{dP_{wf}}{dt} \quad (5.37)$$

O parâmetro  $V_w c_f$  é conhecido como coeficiente de estocagem, dada pela letra  $C$ , assim:

$$\frac{2\pi kh}{B_o q_o \mu} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_w} = 1 + \frac{C}{q_o B_o} \frac{dP_{wf}}{dt} \quad (5.38)$$

A Eq. (5.38) modela o efeito de estocagem no poço, considerando variáveis dimensionais. Adimensionalizando a equação é possível escrever:

$$- \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1 - C_D \frac{dP_{wD}}{dt_D} \quad (5.39)$$

onde  $P_{wD}$  é a pressão adimensional no fundo do poço; e  $C_D$ , o coeficiente de estocagem adimensional, definido por:

$$C_D = \frac{C}{\phi h c_t r_w^2} \quad (5.40)$$

Observa-se que as Eqs. (5.17) e (5.39) formam um conjunto de equações de contorno internas que serão utilizadas na resolução do problema com estocagem e dano.

## 5.4 Solução reservatório infinito com estocagem e dano

Para se resolver o problema do escoamento transiente, em um reservatório infinito, considerando um poço com estocagem em um reservatório danificado, é necessário se converter as duas condições de contorno internas para o campo de Laplace. Convertendo a condição de contorno devido ao efeito da estocagem:

$$- \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1 - C_D \frac{dP_{wD}}{dt_D} \quad (5.41)$$

$$- \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} - C_D [u \bar{P}_{wD} - P_{wD}(t_D = 0)] \quad (5.42)$$

$$- \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} - C_D u \bar{P}_{wD} \text{ (C.C.I 1)} \quad (5.43)$$

Convertendo a condição de contorno auxiliar devido ao efeito do dano de forma-



ção:

$$P_{wD}(t_D) = P_D(r_D = 1, t_D) - S \left( r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (5.44)$$

$$\bar{P}_{wD}(u) = \bar{P}_D(r_D = 1, u) - S \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (\text{C.C.I 2}) \quad (5.45)$$

O conjunto de equações que governam esse escoamento são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right) \right] &= u \bar{P}_D(r_D, u) - P_D(r_D, t_D = 0) \quad (\text{E.D.P}) \\ \bar{P}_D(r_D, u = 0) &= 0 \quad (\text{C.I.}) \\ \lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{P}_D(r_D, u) &= 0 \quad (\text{C.C.E}) \\ - \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} &= \frac{1}{u} - C_D u \bar{P}_{wD} \quad (\text{C.C.I 1}) \\ \bar{P}_{wD}(u) &= \bar{P}_D(r_D = 1, u) - S \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (\text{C.C.I 2}) \end{aligned} \quad (5.46)$$

A solução do sistema (5.46) foi discutida na Seção 4.3.2 e é dada por:

$$\bar{P}_D(z) = A I_0(z) + B K_0(z) \quad (5.47)$$

onde  $A$  e  $B$  são duas constantes reais e positivas. Para se determinar o valor das constantes é necessário se utilizar as condições de contorno. Utilizando a condição de contorno externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{P}_D(r_D, u) = \lim_{z \rightarrow \infty} \bar{P}_D(z) = 0 \quad (5.48)$$

Conforme o Apêndice C, a função  $I_0(z)$  tende ao infinito quando seu argumento tende ao infinito, a constante  $A$  deve ser igual a zero. Assim:

$$\bar{P}_D(z) = B K_0(z) \quad (5.49)$$

Para se determinar o valor da constante  $B$ , utiliza-se a condição de contorno interna 1:

$$-\left(r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} - C_D u \bar{P}_{wD} \quad (5.50)$$

$$-\left(r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} - C_D u \bar{P}_{wD} \quad (5.51)$$

Lembrando que:

$$z = r_D \sqrt{u} \quad (5.52)$$

$$(Br_D \sqrt{u} K_1(z))_{r_D=1} = \frac{1}{u} - C_D u \bar{P}_{wD} \quad (5.53)$$

Para se determinar o valor de  $\bar{P}_{wD}$ , utiliza-se a condição de contorno interna 2:

$$\bar{P}_{wD}(u) = \bar{P}_D(r_D = 1, u) - S \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (5.54)$$

$$\bar{P}_{wD}(u) = BK_0(\sqrt{u}) + SB\sqrt{u}K_1(\sqrt{u}) \quad (5.55)$$

Substituindo a Eq. (5.55) em (5.53):

$$(Br_D \sqrt{u} K_1(z))_{r_D=1} = \frac{1}{u} - C_D u (BK_0(\sqrt{u}) + SB\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})) \quad (5.56)$$

$$B [C_D u K_0(\sqrt{u}) + \sqrt{u} (1 + SC_D u) K_1(\sqrt{u})] = \frac{1}{u} \quad (5.57)$$

Dessa forma:

$$B = \frac{1}{u [C_D u K_0(\sqrt{u}) + \sqrt{u} (1 + SC_D u) K_1(\sqrt{u})]} \quad (5.58)$$

Portanto a pressão adimensional em função do raio e do tempo adimensional no campo de Laplace é dada por:

$$\bar{P}_D(r_D, u) = \frac{K_0(r_D \sqrt{u})}{u [C_D u K_0(\sqrt{u}) + \sqrt{u} (1 + SC_D u) K_1(\sqrt{u})]} \quad (5.59)$$

Observa-se que a Eq. (5.59) expressa a pressão adimensional em qualquer ponto do reservatório, para qualquer tempo de produção, ou injeção. No estudo de avaliações de formações, os registradores de pressão são inseridos no interior dos poços, dessa forma eles registram a pressão no fundo do poço,  $P_{wD}$ . Para se converter a pressão no reservatório para a pressão no fundo do poço, utiliza-se a Condição de Contorno Interna 2 novamente:

$$\bar{P}_{wD}(u) = \bar{P}_D(r_D = 1, u) - S \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (5.60)$$

$$\bar{P}_{wD}(u) = \frac{K_0(\sqrt{u}) - S\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})}{u [C_D u K_0(\sqrt{u}) + \sqrt{u} (1 + S C_D u) K_1(\sqrt{u})]} \quad (5.61)$$

A Eq. (5.61) expressa a pressão adimensional no interior do poço<sup>1</sup>, observa-se que essa equação é dependente apenas do tempo de abertura do poço. Essa equação é muito utilizada na análise de testes de pressão e será discutida na próxima seção.

## 5.5 Análise de testes de pressão por curvas tipo

Curvas Tipo são gráficos utilizando eixos log-log, onde os regimes de escoamento adquirem um comportamento específico, sendo possível se definir características do reservatório utilizando-se apenas interpretações geométricas a respeito dessas curvas. A Curva Tipo mais famosa é a de Bourdet (BOURDET, 2002), que pode ser interpretada a partir do método das retas. A Curva de Bourdet foi uma evolução da Curva Tipo de Gringarten (BOURDAROT, 1998), mostrada na Fig. 14.

---

<sup>1</sup>Na verdade essa pressão é medida na face da formação do lado interno do poço (meio limpo). Para aplicações práticas, considera-se que o registrador seja capaz de capturar esse ponto de pressão, desprezando perdas de carga e gradientes hidrostáticos.

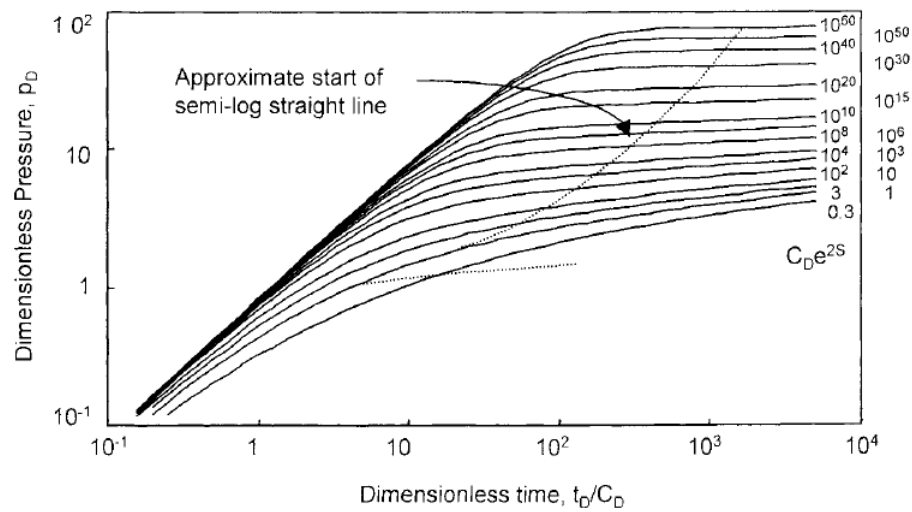


Figura 14: Curva tipo de Gringarten. (BOURDET, 2002)

A curva de Gringarten é uma representação log-log da pressão adimensional, em função do parâmetro  $t_D/C_D$ . As curvas plotadas possuem uma curvatura característica, que é função do parâmetro  $C_D e^{2S}$ . Dessa forma, ajustando-se os dados plotados na representação de Gringarten, é possível obter diretamente o valor de  $C_D e^{2S}$  e indiretamente os parâmetros do reservatório, como permeabilidade, porosidade e outros. A Fig. 15 mostra um exemplo de interpretação de testes de pressão, utilizando-se a Curva Tipo de Gringarten.

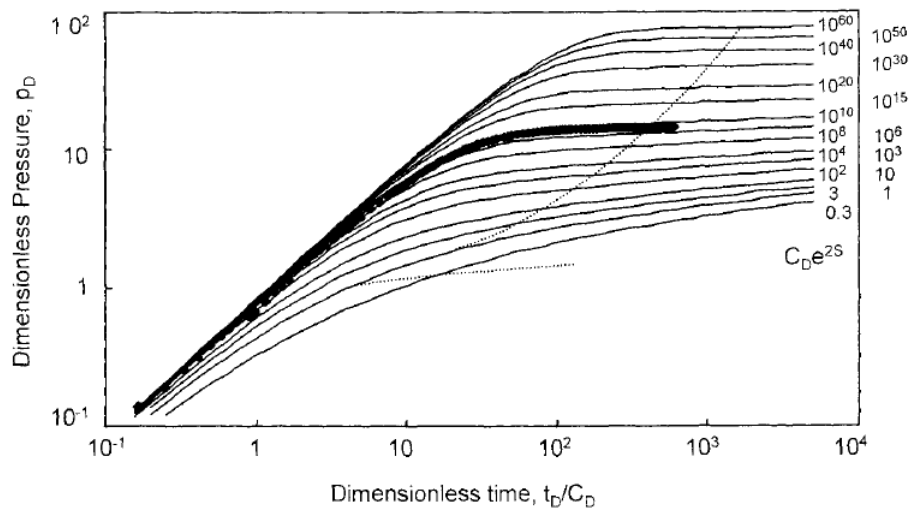


Figura 15: Interpretação de um teste de pressão, utilizando-se a Curva Tipo de Gringarten. Na figura, a partir dos dados do poço é possível plotar a curva mais escura, na qual obtem-se que o valor de  $C_D e^{2s} \approx 10^9$ .

A Cuva Tipo de Bourdet é criada a partir da derivada de Bourdet, definida por:

$$P'_{wD} = \frac{dP_{wD}}{d[\ln(t_D/C_D)]} \quad (5.62)$$

$$P'_{wD} = \frac{t_D}{C_D} \frac{dP_{wD}}{d[t_D/C_D]} \quad (5.63)$$

$$P'_{wD} = t_D \frac{dP_{wD}}{dt_D} \quad (5.64)$$

Essa curva é muito utilizada pois os padrões de escoamento são caracterizados por retas com inclinações bem definidas (BOURDET, 2002). A Fig. 16 mostra um exemplo da Curva Tipo de Bourdet. Observa-se que a curva é construída com os mesmos parâmetros utilizados na Curva Tipo de Gringarten.

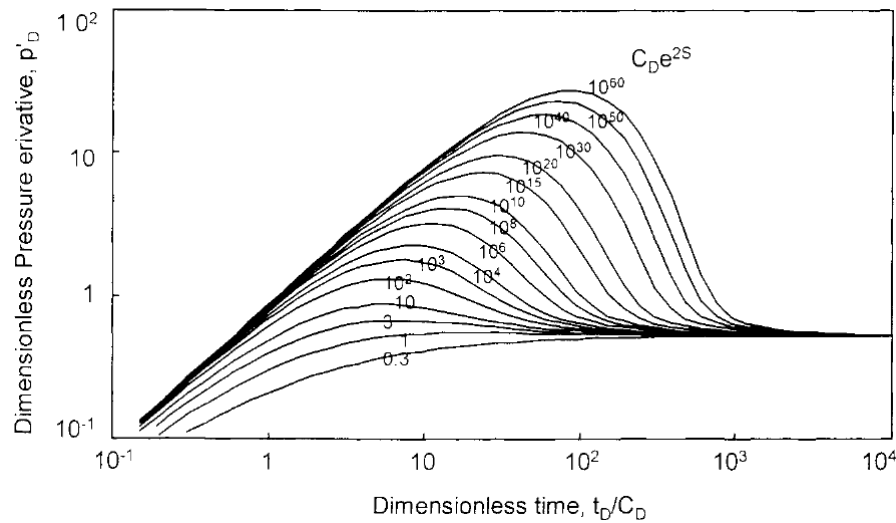


Figura 16: Curva Tipo de Bourdet.(BOURDET, 2002)

Como as curvas de Gringarten e Bourdet são construídas na mesma escala, o ajuste entre as curvas tipo, e os dados de pressão é facilitado quando essas duas curvas estão plotadas juntas. A Fig. 17 mostra as Curvas Tipo de Gringarten e Bourdet plotadas no mesmo eixo.

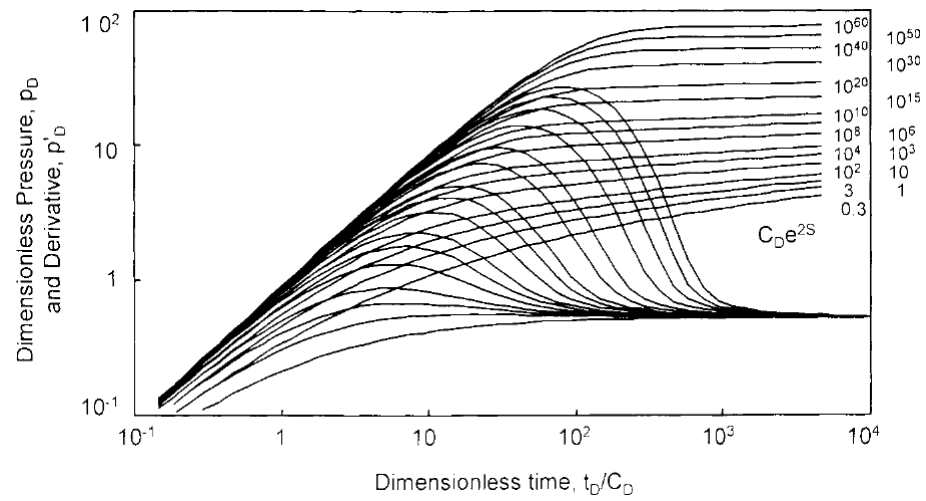


Figura 17: Curvas Tipo de Gringarten e Bourdet juntas(BOURDET, 2002).

## **6      *Solução Reservatório Radial Selado com Estocagem e Dano***

No Capítulo 5 foi deduzida a solução do escoamento ao redor de um poço finito em um reservatório de extensão infinita. Nesse capítulo será deduzida a solução do escoamento transiente em um reservatório radial selado considerando os efeitos de estocagem e dano para o poço. Novamente as soluções serão deduzidas no campo de Laplace, e os resultados serão invertidos com o algoritmo de Stehfest (Seção 4.4).

### **6.1    Solução reservatório finito com estocagem e dano**

As condições de contorno internas foram deduzidas no Capítulo 5 e são mostradas na Eq. 5.46. Para se modelar o reservatório selado a condição de contorno externa deve ser modificada. Para isso deve ser introduzido o raio externo adimensional do reservatório, dado por:

$$r_{eD} = \frac{r_e}{r_w} \quad (6.1)$$

onde  $r_e$  é o raio externo do reservatório, onde se encontram os limites selantes. Assim as equações governantes para esse problema são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right) \right] &= u \bar{P}_D(r_D, u) - P_D(r_D, t_D = 0) \quad (\text{E.D.P}) \\
\bar{P}_D(r_D, u = 0) &= 0 \quad (\text{C.I.}) \\
\left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=r_{eD}} &= 0 \quad (\text{C.C.E}) \\
-\left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} &= \frac{1}{u} - C_D u \bar{P}_{wD}(u) \quad (\text{C.C.I 1}) \\
\bar{P}_{wD}(u) &= \bar{P}_D(r_D = 1, u) - S \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (\text{C.C.I 2})
\end{aligned} \tag{6.2}$$

A solução do sistema (5.46) foi discutida na Seção 4.3.2 e é dada por:

$$\bar{P}_D(r_D \sqrt{u}) = A I_0(r_D \sqrt{u}) + B K_0(r_D \sqrt{u}) \tag{6.3}$$

onde  $A$  e  $B$  são duas constantes reais e positivas. Multiplicando a equação por  $r_D$  e derivando:

$$r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} = A r_D \sqrt{u} I_1(r_D \sqrt{u}) - B r_D \sqrt{u} K_1(r_D \sqrt{u}) \tag{6.4}$$

Utilizando a condição de contorno externa:

$$A r_{eD} \sqrt{u} I_1(r_{eD} \sqrt{u}) - B r_{eD} \sqrt{u} K_1(r_{eD} \sqrt{u}) = 0 \tag{6.5}$$

Substituindo a condição de contorno interna 1 na Eq. 6.4:

$$-A \sqrt{u} I_1(\sqrt{u}) + B \sqrt{u} K_1(\sqrt{u}) = \frac{1}{u} - C_D u \bar{P}_{wD}(u) \tag{6.6}$$

$$\bar{P}_{wD}(u) = A \frac{1}{C_D \sqrt{u}} I_1(\sqrt{u}) - B \frac{1}{C_D \sqrt{u}} K_1(\sqrt{u}) + \frac{1}{C_D u^2} \tag{6.7}$$

Substituindo na condição de contorno interna 2:

$$A \frac{1}{C_D \sqrt{u}} I_1(\sqrt{u}) - B \frac{1}{C_D \sqrt{u}} K_1(\sqrt{u}) + \frac{1}{C_D u^2} = \bar{P}_D(r_D = 1, u) - S \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \tag{6.8}$$



Utilizando a Eq. 6.3:

$$A \frac{1}{C_D \sqrt{u}} I_1(\sqrt{u}) - B \frac{1}{C_D \sqrt{u}} K_1(\sqrt{u}) + \frac{1}{C_D u^2} = A I_0(\sqrt{u}) + B K_0(\sqrt{u}) - S A \sqrt{u} I_1(\sqrt{u}) + S B \sqrt{u} K_1(\sqrt{u}) \quad (6.9)$$

Rearranjando a equação:

$$A [C_D u I_0(\sqrt{u}) - \sqrt{u} I_1(\sqrt{u}) (1 + C_D u S)] + B [C_D u K_0(\sqrt{u}) + \sqrt{u} K_1(\sqrt{u}) (1 + C_D u S)] = \frac{1}{u} \quad (6.10)$$

As Equações 6.5 e 6.10 formam o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} A r_{eD} \sqrt{u} I_1(r_{eD} \sqrt{u}) - B r_{eD} \sqrt{u} K_1(r_{eD} \sqrt{u}) = 0 \\ A [C_D u I_0(\sqrt{u}) - \sqrt{u} I_1(\sqrt{u}) (1 + C_D u S)] + B [C_D u K_0(\sqrt{u}) + \sqrt{u} K_1(\sqrt{u}) (1 + C_D u S)] = \frac{1}{u} \end{cases} \quad (6.11)$$

Resolvendo o sistema, obtém-se a seguinte solução:

$$A = \frac{K_1(r_{eD} \sqrt{u})}{u [C_D u \alpha - \sqrt{u} \beta (1 + C_D u S)]} \quad (6.12)$$

$$B = \frac{I_1(r_{eD} \sqrt{u})}{u [C_D u \alpha - \sqrt{u} \beta (1 + C_D u S)]} \quad (6.13)$$

onde:

$$\alpha = I_0(\sqrt{u}) K_1(r_{eD} \sqrt{u}) + I_1(r_{eD} \sqrt{u}) K_0(\sqrt{u}) \quad (6.14)$$

$$\beta = I_1(\sqrt{u}) K_1(r_{eD} \sqrt{u}) - I_1(r_{eD} \sqrt{u}) K_1(\sqrt{u}) \quad (6.15)$$

Substituindo na Eq. 6.3:

$$\overline{P}_D(r_D\sqrt{u}) = \frac{I_0(r_D\sqrt{u}) K_1(r_{eD}\sqrt{u}) + I_1(r_{eD}\sqrt{u}) K_0(r_D\sqrt{u})}{u [C_D u \alpha - \sqrt{u} \beta (1 + C_D u S)]} \quad (6.16)$$

A Eq. 6.16 expressa a solução da pressão adimensional em função do raio e do tempo adimensionais. Como discutido anteriormente, os registradores de pressão medem a pressão dentro do poço durante um teste de formação, assim, utilizando-se a condição de contorno interna 2:

$$\overline{P}_{wD}(u) = \overline{P}_D(r_D = 1, u) - S \left( r_D \frac{\partial \overline{P}_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (6.17)$$

$$\overline{P}_{wD}(u) = \frac{\alpha - S\sqrt{u}\beta}{u [C_D u \alpha - \sqrt{u} \beta (1 + C_D u S)]} \quad (6.18)$$

A Eq. 6.18 expressa a variação da pressão no fundo de um poço sob injeção ou produção, para um reservatório finito com limites selados. Essa solução encontra-se no campo de Laplace e o Algoritmo de Stehfest deverá ser utilizado para se produzir as soluções no campo real.

## 6.2 Curvas Tipo para a solução do reservatório selado

O comportamento esperado da Eq. 6.18 é que para tempos pequenos ela se comporte igual a solução para um reservatório radial infinito. A Fig. 18 mostra o gráfico de Bourdet para uma solução específica dessa equação.

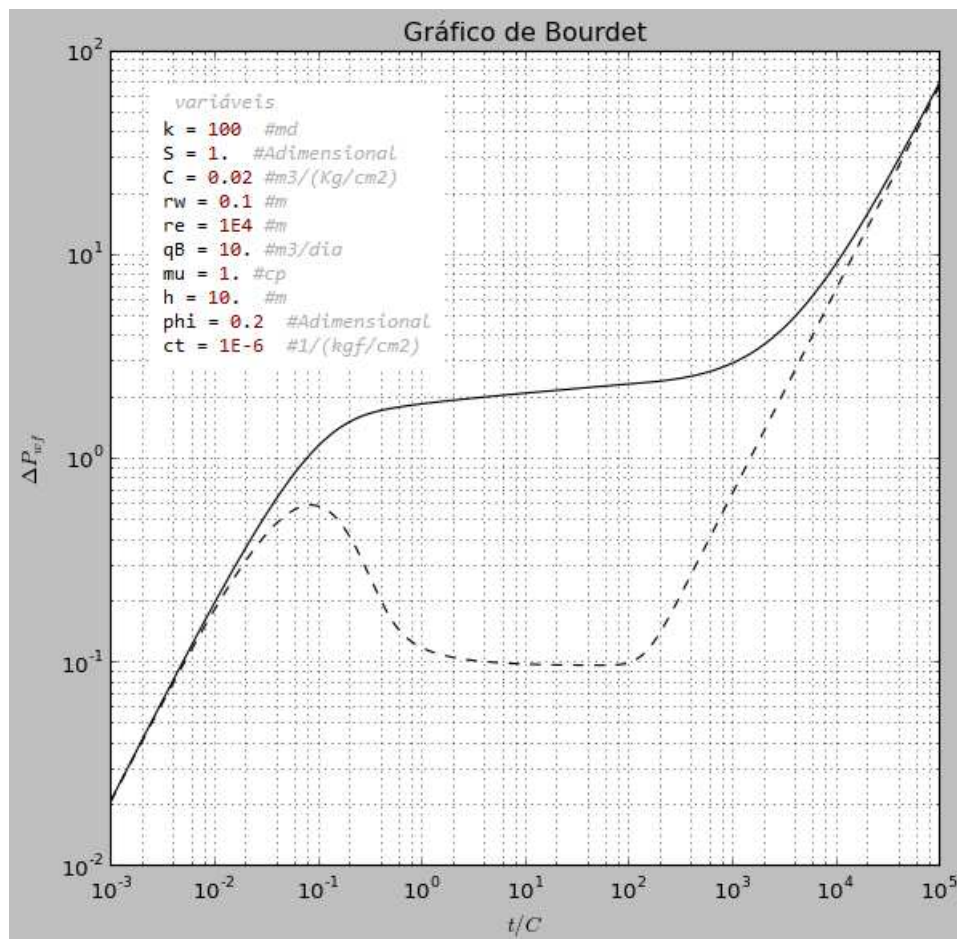


Figura 18: Gráfico de Bourdet para a solução radial selado.

É possível perceber que até perto de  $\frac{t}{C} = 10^2$  a solução se comporta da mesma forma que a solução para o reservatório radial infinito. A partir desse momento a derivada tende a uma reta unitária indicando que o sensor no interior do poço começou a sentir os efeitos do limite externo do reservatório.

As Figuras 19 e 20 mostram o efeito do raio externo do reservatório nas curvas tipo. Nesses gráficos foi variado o parâmetro  $C_D e^{2S}$  e pode-se perceber que quanto maior o raio externo do reservatório, maior o tempo necessário para se atingir o limite externo do mesmo.

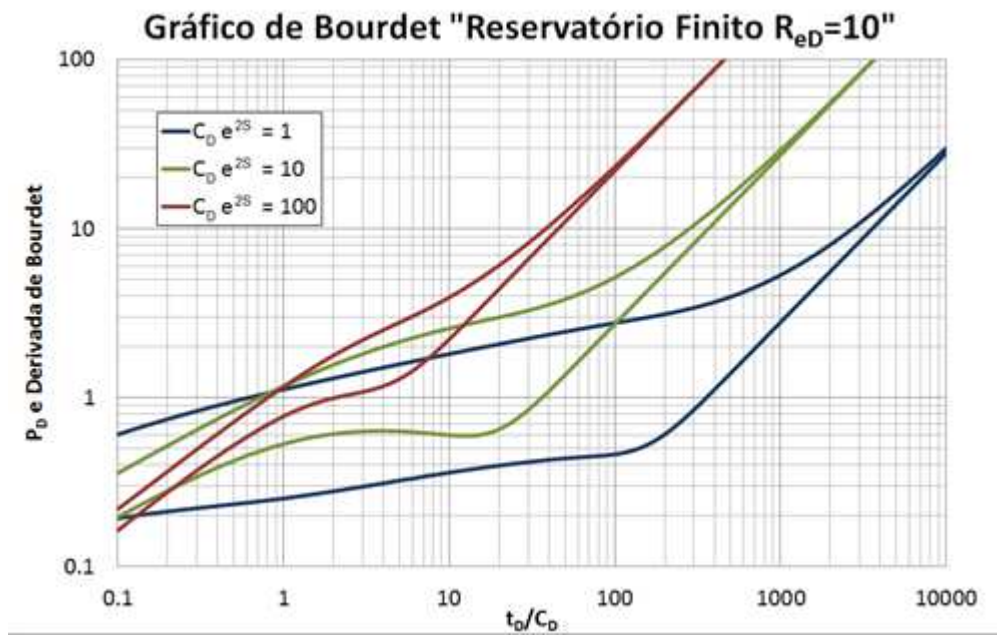


Figura 19: Curva tipo de Bourdet adimensional para um reservatório radial selado, com raio externo adimensional igual a 10.

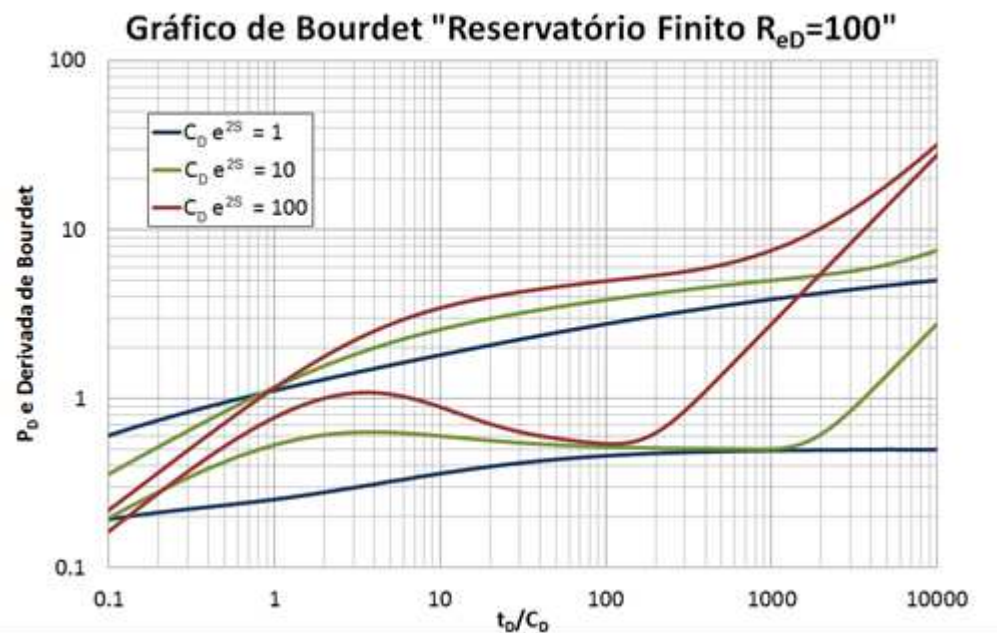


Figura 20: Curva tipo de Bourdet adimensional para um reservatório radial selado, com raio externo adimensional igual a 100.

## Referências

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1964. (Applied mathematics series). ISBN 9780486158242. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=MtU8uP7XMvoC>>.

BIRD, R.; STEWART, W.; LIGHTFOOT, E. *Transport Phenomena*. Wiley, 2007. (Wiley International edition). ISBN 9780470115398. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=L5FnNllaGfcC>>.

BOURDAROT, G. *Well Testing: Interpretation Methods*. Editions Technip, 1998. (Fundamentals of Exploration and Production Series). ISBN 9782710811015. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=UdJUFDIlzIsC>>.

BOURDET, D. *WELL TEST ANALYSIS THE USE OF ADVANCED INTERPRETATION MODELS HANDBOOK OF PETROLEUM EXPLORATION & PRODUCTION VOL 3 (HPEP)*. Elsevier Science, 2002. (Handbook of Petroleum Exploration and Production). ISBN 9780080543772. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=yVocRPXIW-QC>>.

DARCY, H. Les fontaines publiques de la ville de dijon. *Dalmont*, v. 1, p. 10, 1856.

ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J.; KING, G. *Basic Applied Reservoir Simulation*. Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers, 2001. (SPE Textbook Series). ISBN 9781555630898. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=M41dAQAACAAJ>>.

JUNQUEIRA, C. P. *Estimativa de Parâmetros de Reservatórios e Reconstrução do Histórico de Vazão a Partir de Dados de Pressão de Fundo*. Dissertação (Mestrado) — UENF, 2011.

KRYLOV, V.; SKOBLIŽ Aĭž, N. *Handbook of numerical inversion of Laplace transforms*. Israel Program for Scientific Translations, 1969. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=pWiBDfUiN4QC>>.

LAKE, L. *Enhanced oil recovery*. Prentice Hall, 1989. ISBN 9780132816014. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=nm5MAQAIAAJ>>.

ROSA, A.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. *Engenharia de reservatórios de petróleo*. Interciência, 2006. ISBN 9788571931350. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=aSUNAQAACAAJ>>.

## ***APÊNDICE A – Função Exponencial Integral***

A função exponencial integral é uma função definida no plano real, quando  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , tal que:

$$E_i(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (\text{A.1})$$

Também pode ser escrita na forma da Eq. (4.70), quando  $x > 0$ , tal que:

$$E_i(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (\text{A.2})$$

Utilizando uma expansão em séries de Puiseux, é possível aproximar a função exponencial integral da seguinte forma:

$$E_i(x) = \gamma + \ln|x| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.n!} \quad (\text{A.3})$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni, dada por  $\gamma \approx 0.5772156649$ , e  $x \in \mathbb{R}^*$ . Observa-se que se os termos de ordens superiores da Eq. (A.3) forem desprezados, a função exponencial integral pode ser aproximada pela forma logarítmica, dada por:

$$E_i(x) \approx \ln|x| + \gamma \quad (\text{A.4})$$

A Fig. 21 mostra uma comparação da função exponencial integral e da sua aproximação logarítmica. É possível perceber que para argumentos pequenos, a aproximação logarítmica é satisfatória, conforme a Tabela 1.

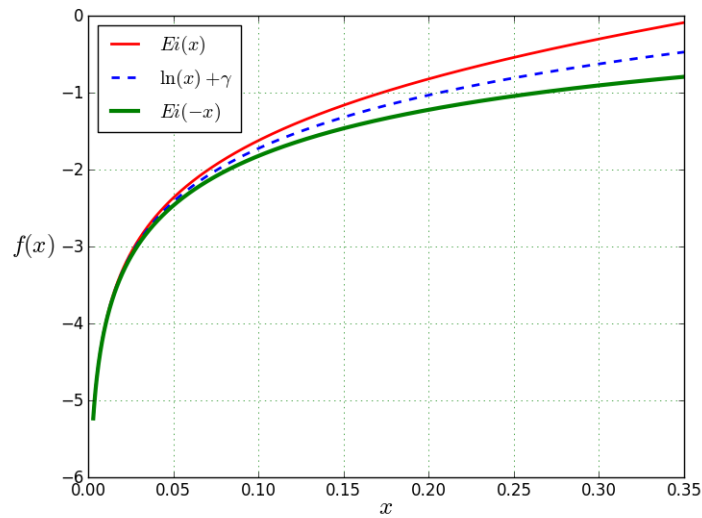


Figura 21: Comparação entre a função exponencial integral com argumento tanto negativo quanto positivo e a aproximação logarítmica da função.

Tabela 1: Erros associados a aproximação da função exponencial integral pela aproximação logarítmica.

$x$	$Ei(x)$	$Ei(-x)$	$\ln(x) + \gamma$	$ \ln(x) + \gamma - Ei(x) $	$ \ln(x) + \gamma - Ei(-x) $
0.05	-2.36788	-2.46790	-2.41852	0.05063	0.04938
0.10	-1.62281	-1.82292	-1.72537	0.10256	0.09755
0.15	-1.16409	-1.46446	-1.31990	0.15582	0.14456
0.20	-0.82176	-1.22265	-1.03222	0.21046	0.19043
0.25	-0.54254	-1.04428	-0.80908	0.26654	0.23520
0.30	-0.30267	-0.90568	-0.62676	0.32409	0.27892
0.35	-0.08943	-0.79422	-0.47261	0.38317	0.32160

## APÊNDICE B – Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma transformada do tipo integral, muito útil para se resolver problemas de equações diferenciais. É definida como:

$$\bar{f}(u) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ut} dt \quad (\text{B.1})$$

onde  $u$  é a variável  $t$  convertida para o campo de Laplace. Para que a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  exista, essa função deve satisfazer duas condições básicas:

- A função  $f(t)$  deve ser contínua, ou possuir descontinuidades pontuais.
- A função  $f(t)$  deve possuir um crescimento no máximo exponencial, ou seja, a função  $\exp(-t)$  deve ir para zero mais rápido que a função  $f(t)$  cresça para o infinito, ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-ut} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Como pode ser visto na Fig. 22, podemos enxergar a transformada de Laplace como uma espécie de função peso (JUNQUEIRA, 2011). Quando o valor de  $u$  tende a zero, a função no campo de Laplace é definida por  $\bar{f}(u) = \int_0^{\infty} f(t) dt$ , ou seja, a função no campo de Laplace depende do comportamento da função  $f(t)$  em todo o domínio. Quando  $u$  tende ao infinito, a função no campo de Laplace só possui influência das porções iniciais da função  $f(t)$ , ou seja, quando  $t$  é pequeno. Dessa forma é possível associar que quanto  $u \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 0$  e quando  $u \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

Uma propriedade muito útil da transformada de Laplace é que ela é um operador linear, ou seja, a transformada satisfaz a seguinte condição:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad (\text{B.3})$$



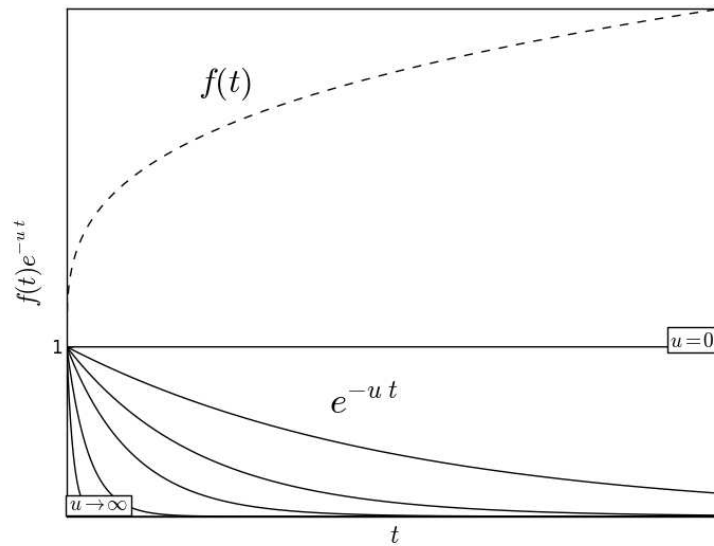


Figura 22: Representação esquemática da transformada de Laplace, como uma função peso.

Existem diversas tabelas de transformação, como a mostrada pela Fig. 23.

Além das transformadas descritas na Fig. 23, vale a pena destacar duas transformadas que são muito úteis:

### 1. Transformada da Função Derivada

A transformada de Laplace de uma função derivada é muito útil pois depende da condição inicial da derivada da função. Essa transformada é definida como:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(t)}{\partial t} e^{-ut} dt = [f(t)e^{-ut}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} u f(t) e^{-ut} dt \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\} = u \mathcal{L} \{ f(t) \} - f(0) \quad (\text{B.5})$$

Observe que a função derivada foi extinta no campo de Laplace e a condição inicial do problema tem que ser levado em consideração.

### 2. Transformada da Função Integral

A transformada da função integral pode ser calculada utilizando a transformada da função derivada. Do teorema fundamental do cálculo, pode-se fazer:

Função Domínio de Laplace	Função Domínio do Tempo
1	$\delta(t)$ Impulso unitário
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$\frac{1}{(s+a)}$	$e^{-at}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{sen}(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$K_0(a\sqrt{u})$	$\frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$

Figura 23: Tabela compacta de transformadas de Laplace. Adaptado de Abramowitz e Stegun (1964).

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t f(t) dt \right) \quad (\text{B.6})$$

Aplicando-se a transformada de Laplace e utilizando-se a transformada da função derivada:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t f(t) dt \right)\right\} = u \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} - \int_0^0 f(t) dt$$

Daí:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{u} \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (\text{B.7})$$

Observa-se que a função integral também foi extinta no campo de Laplace.

## **APÊNDICE C – Funções Modificadas de Bessel**

Segundo Abramowitz e Stegun (1964) as funções modificadas de Bessel são soluções da seguinte equação diferencial ordinária:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0 \quad (\text{C.1})$$

onde  $\nu$  é um número inteiro, conhecido como ordem da função de Bessel. As soluções da Eq. (C.1) são conhecidas como funções de Bessel modificadas, dadas por  $I_\nu(z)$  (função modificada de Bessel do 1º tipo), e  $K_\nu(z)$  (função modificada de Bessel do 2º tipo).

Quando  $\nu \geq 0$  e  $z > 0$  as funções modificadas de Bessel são números reais positivos. A Fig. 24 mostra as funções modificadas de Bessel plotadas no plano real.

### **C.1 Notação $Z_\nu$ das funções modificadas de Bessel**

A notação  $Z_\nu$  representa  $I_\nu$ ,  $e^{\nu\pi i} K_\nu$  ou uma combinação linear dessas duas funções. Essa notação é muito útil para se calcular as funções modificadas de Bessel de ordem superior. Calculando-se a notação  $Z_\nu$  para as funções de Bessel do primeiro tipo:

$$Z_0^I(z) = I_0(z) \quad (\text{C.2})$$

$$Z_1^I(z) = I_1(z) \quad (\text{C.3})$$

Calculando-se para as funções do segundo tipo:

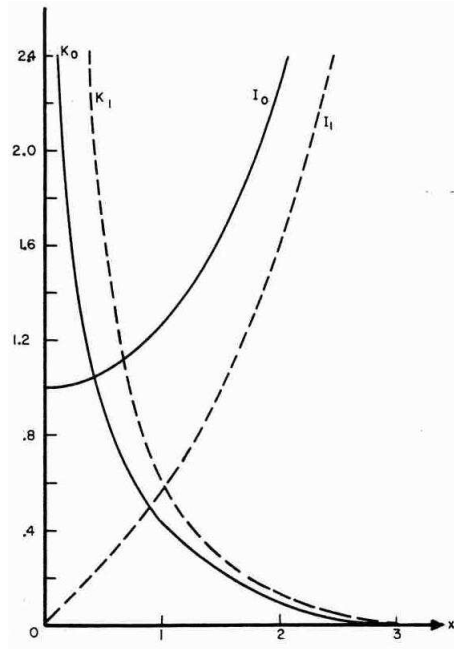


Figura 24: Funções modificadas de Bessel  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $K_0$  e  $K_1$ , plotadas no plano real (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964).

$$Z_0^K(z) = e^{0\pi i} K_0 = K_0 \quad (\text{C.4})$$

$$Z_1^K(z) = e^{\pi i} K_1 = -K_1 \quad (\text{C.5})$$

## C.2 Relações de recorrência

Segundo Abramowitz e Stegun (1964), utilizando-se a notação  $Z_\nu$  é possível se definir as seguintes fórmulas de recorrência:

$$Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} Z_\nu(z) \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial Z_\nu(z)}{\partial z} = Z_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) \quad (\text{C.7})$$

$$Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) = 2 \frac{\partial Z_\nu(z)}{\partial z} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial Z_\nu(z)}{\partial z} = Z_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) \quad (\text{C.9})$$

Combinando as Eqs. (C.2) - (C.9) é possível se deduzir as seguintes relações:

$$\frac{\partial I_0(z)}{\partial z} = I_1(z) \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial I_1(z)}{\partial z} = I_0(z) - \frac{I_1(z)}{z} \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial K_0(z)}{\partial z} = -K_1(z) \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\partial K_1(z)}{\partial z} = -K_0(z) - \frac{K_1(z)}{z} \quad (\text{C.13})$$

### C.3 Derivadas das funções modificadas de Bessel

Utilizando-se a notação  $Z_\nu$ , segundo Abramowitz e Stegun (1964), é possível se escrever as derivadas de qualquer ordem das funções modificadas de Bessel:

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k \{z^\nu Z_\nu(z)\} = z^{\nu-k} Z_{\nu-k}(z) \quad (\text{C.14})$$

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k \{z^{-\nu} Z_\nu(z)\} = z^{-\nu-k} Z_{\nu+k}(z) \quad (\text{C.15})$$

Combinando a Eq. (C.14) com as Eqs. (C.2) - (C.5) é possível se escrever as seguintes relações:

$$\frac{d}{dz} (z \cdot I_1(z)) = z \cdot I_0(z) \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{d}{dz} (z \cdot K_1(z)) = -z \cdot K_0(z) \quad (\text{C.17})$$

Utilizando a regra do produto nas Eqs. (C.16), (C.17) é possível se deduzir as Eqs. (C.11) e (C.13) respectivamente.