Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo

"FLUXO EM REGIME TRANSIENTE"

PMI 1673 - Mecânica de Fluidos Aplicada a Reservatórios

Prof. Eduardo César Sansone

INTRODUÇÃO

As equações de fluxo em meios porosos são baseadas em um conjunto de equações que representam:
- Conservação de massa, momento e energia.
- Comportamento dos fluidos e do meio poroso (equações constitutivas).

Por simplicidade, serão consideradas condições isotérmicas, desta forma não serão necessárias as equações de conservação de energia.

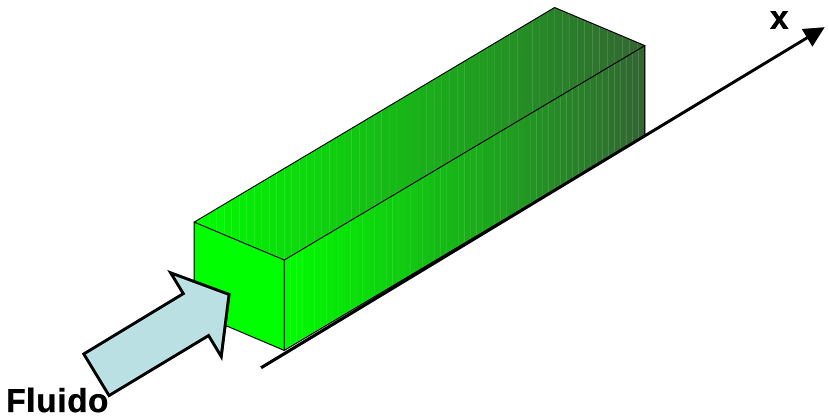
Para os casos de mudança das condições de temperatura do reservatório, tais como no caso da injeção de água resfriada em um reservatório aquecido ou na estimulação térmica, correções deverão ser introduzidas.

As equações são apresentadas para o caso unidimensional linear, mas podem ser estendidas para 2 ou 3 dimensões, bem como para outros sistemas de coordenadas.

CONSERVAÇÃO DE MASSA

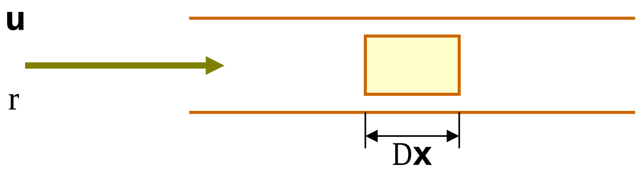
CONSERVAÇÃO DA MASSA

Considere a seguinte fatia unidimensional de material poroso:



CONSERVAÇÃO DA MASSA

A conservação de massa pode ser formulada considerando um elemento de controle da fatia, com um fluido de densidade ρ, fluindo através deste, a uma velocidade u:



O balanço de massa para o elemento de controle é escrito da seguinte forma:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Massa que entra}\\ \text{no elemento em } x\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{Massa que sai do}\\ \text{elemento em } x+\Delta x\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Taxa de mudança de massa}\\ \text{dentro do elemento}\end{matrix}\right\}$$

ou

$$(uA\rho)_x - (uA\rho)_{x+\Delta x} = \frac{\partial}{\partial t}(A\Delta x\,\phi\,\rho)$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$(uA\rho)_x - (uA\rho)_{x+\Delta x} = \frac{\partial}{\partial t}(A\Delta x\,\phi\,\rho)$$

Dividindo a equação acima por Δx, e tomando o limite com Δx tendendo a zero, teremos a equação de conservação de massa ou, equação de continuidade:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(uA\rho) = \frac{\partial}{\partial t}(A\phi\rho)$$

Para uma seção de área constante ao longo do eixo x, a equação de continuidade pode ser simplificada para:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho)$$

Caso não ocorra variação da densidade do fluido com o tempo e ao longo do eixo x, teremos:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

A conservação de momento é governada pela equação de Navier-Stokes, que pode ser simplificada para fluxo a baixas velocidades em materiais porosos, pela equação semi-empírica de Darcy, que para fluxo unidimensional horizontal é dada por:

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Onde:

u = velocidade de Darcy

k = permeabilidade do material poroso

μ = viscosidade do fluido

$\frac{\partial P}{\partial x}$ = variação da pressão ao longo da direção x

Entre as formulações alternativas para a equação de conservação do momento estão a equação de Forchheimer, para fluxo a altas velocidades:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = u\frac{\mu}{k} + \beta u^{n}$$

Onde Muscat propôs valor 2 para o coeficiente n.

E a equação de Brinkman, que é aplicável a fluxo em meios porosos e não porosos:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = u\frac{\mu}{k} - \mu\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}$$

As duas equações se transformam na equação de Darcy para fluxo em meios porosos, quando o último termo é desprezado, e a equação de Brinkman se transforma na equação de Navier-Stokes para fluxo em dutos, quando a parcela característica da lei de Darcy é desprezada.

No equacionamento que segue, será assumida a equação de Darcy como válida para o fluxo em meios porosos.

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA MATERIAIS POROSOS

De forma a caracterizar a dependência da porosidade em relação à pressão, utilizaremos a definição de compressibilidade da rocha:

$$c_r = \left(\frac{\partial \phi / \phi}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial P} \right)_T$$

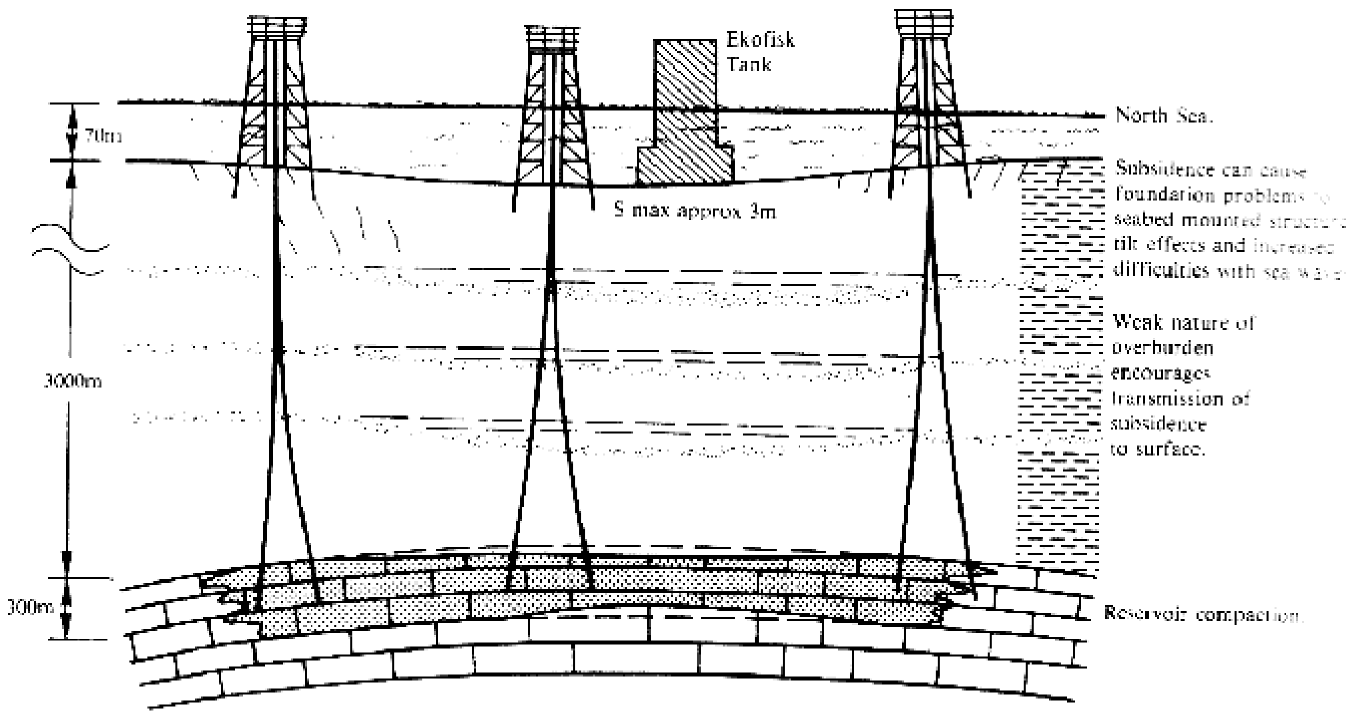
Onde:
ϕ = porosidade

Supondo temperatura constante, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial P} = \phi \, c_r$$

Em alguns casos, pode-se assumir que o volume total do material poroso é constante, isto é, a compressibilidade total é igual a zero. Este não é o caso geral, como demonstram casos de subsidência como o do campo Ekofisk.

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS



Subsidência no campo Ekofisk no Mar do Norte

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA FLUIDOS

A compressibilidade dos fluidos pode ser caracterizada, a temperatura constante, pela seguinte expressão:

$$c_f = \left(\frac{-\partial V / V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Para gases a dependência entre volume e pressão será dada pela Lei Geral dos Gases Reais:

$$PV = nZRT$$

MODELO PARA O ÓLEO

Dois tipos de modelos são utilizados quando se realiza a simulação do fluxo de hidrocarbonetos em reservatórios:

- **Modelo baseado nas propriedades do fluido.**
- **Modelo baseado nas características composicionais do fluido.**

Neste desenvolvimento utilizaremos o modelo baseado nas propriedades do óleo.

As propriedades típicas do óleo incluem o Fator Volume de Formação de cada fluido, B, e a Razão de Solubilidade óleo-gás, R_s, para o gás dissolvido no óleo, também, a Viscosidade e a Densidade de cada fluido.

Um modelo aprimorado pode também incluir o óleo disperso no gás, r_s, e o gás dissolvido na água, R_{sa}.

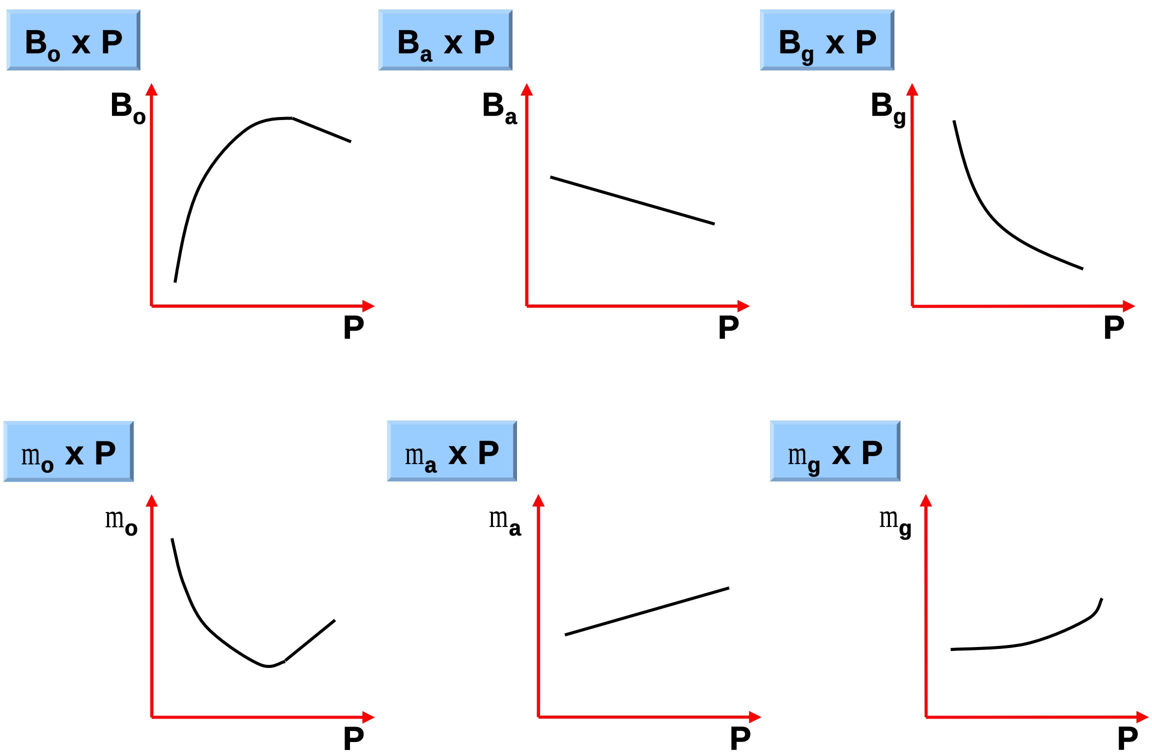
As definições para estas propriedades são:

$$B = \frac{\text{volume nas condições de reservatório}}{\text{volume nas condições padrão}}$$

$$R_s = \frac{\text{volume de gás contido no óleo nas condições padrão}}{\text{volume de óleo nas condições padrão}}$$

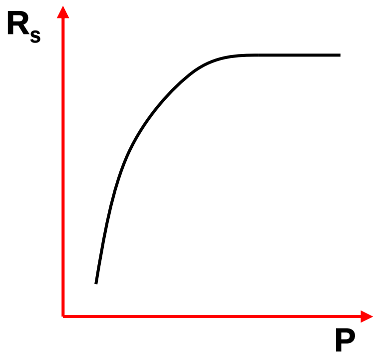
MODELO PARA O ÓLEO

Relações típicas entre as propriedades do óleo e a pressão:



Relação típica entre a razão de solubilidade óleo-gás e a pressão:

R_s x P



MODELO PARA O ÓLEO

EQUAÇÃO DE FLUXO

EQUAÇÃO DE FLUXO

Para o fluxo monofásico em um sistema unidimensional horizontal, assumindo a lei de Darcy como representativa do comportamento e com seção de área constante, a equação de fluxo ficará:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Nas condições padrão (superfície) teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu B}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right)$$

A porosidade ϕ é função da compressibilidade da rocha reservatório e o fator volume de formação B é função da compressibilidade do fluido.

CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

CONDIÇÕES DE CONTORNO

Existem 2 tipos de condições de contorno:

- Condições relativas a pressão: "Condições de Dirichlet".
- Condições relativas a vazão: "Condições de Neumann".

As condições de contorno mais comuns utilizadas em reservatórios são discutidas na seqüência.

CONDIÇÕES DE DIRICHLET

As condições de pressão normalmente conhecidas são as pressões atuantes nas faces do sistema em questão.

Para fluxo monofásico em um sistema unidimensional horizontal, estas condições de contorno podem ser expressas da seguinte maneira:

$$P(x = 0, t > 0) = P_0$$
$$P(x = L, t > 0) = P_L$$

Em um reservatório, uma condição de pressão freqüentemente definida, é a pressão no fundo de um poço de injeção ou produção, locado em certa posição do reservatório.

CONDIÇÃO DE NEUMANN

Também é possível definir vazões nas faces do sistema em questão.

Para fluxo monofásico em um sistema unidimensional horizontal e utilizando a lei de Darcy, estas condições de contorno ficam:

$$Q_0 = -\frac{kA}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=0}$$

$$Q_L = -\frac{kA}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=L}$$

Em um reservatório, uma condição de vazão pode ser definida como a taxa de produção ou injeção de um poço, locado em certa posição do reservatório.

Pode, também, ser definida como nula através de um contato selado, falha ou entre camadas não comunicantes.

CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

CONDIÇÕES INICIAIS

As condições iniciais definem o estado inicial das variáveis básicas do sistema.

Para fluxo monofásico em um sistema unidimensional horizontal, a pressão inicial constante, pode ser definida como:

$$P(x, t = 0) = P_0$$

A pressão inicial pode ser função da posição. Para sistemas não horizontais, o equilíbrio hidrostático de pressões é geralmente computado com base em uma pressão de referência e na densidade do fluido.

$$P(z, t = 0) = P_{ref} + (z - z_{ref})\,\rho\, g$$

FLUXO MULTIFÁSICO, NÃO HORIZONTAL E MULTIDIMENSIONAL

FLUXO MULTIFÁSICO

Uma equação de continuidade pode ser escrita para cada fase fluida componente do fluxo:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i u_i\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \rho_i S_i\right)$$

$i = o, a, g$

As equações de Darcy correspondentes a cada fase serão:

$$u_i = -\frac{k k_{ri}}{\mu_i}\frac{\partial P_i}{\partial x}$$

$i = o, a, g$

Onde:
k_{ri} **= permeabilidade relativa rocha/fluido i**

FLUXO MULTIFÁSICO

Após a substituição da equação de Darcy e das propriedades do óleo, bem como a inclusão de termos relativos à vazão no poço, as equações de fluxo ficam:

Óleo:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right) - q'_o = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$

Gás:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rg}}{\mu_g B_g}\frac{\partial P_g}{\partial x} + R_{so}\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right) - q'_g - R_{so}q'_o = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_g}{B_g} + R_{so}\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$

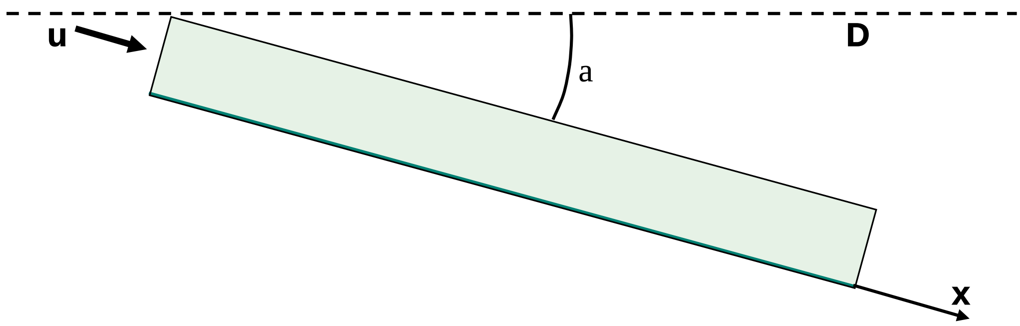
Água:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ra}}{\mu_a B_a}\frac{\partial P_a}{\partial x}\right) - q'_a = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_a}{B_a}\right)$$

Onde:
$$\sum_{i=o,a,g} S_i = 1$$

A equação para o óleo pode ser posteriormente modificada para incluir o óleo disperso no gás, caso ocorra, de maneira similar à inclusão do gás em solução na equação do óleo.

FLUXO NÃO HORIZONTAL

Para fluxo monofásico em um sistema unidimensional inclinado, teremos:



A equação de Darcy fica:
$$u = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \gamma\frac{dD}{dx}\right)$$

Ou, em termos do ângulo de mergulho, α, e do gradiente hidrostático:
$$u = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \gamma\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)$$

Onde $\gamma = \rho g$ é o peso específico ou gradiente hidrostático do fluido.

A equação de continuidade para fluxo monofásico em um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional é:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u_x\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho u_y\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho u_z\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\rho\right)$$

As equações de Darcy correspondentes serão:

$$u_x=-\frac{k_x}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\gamma\frac{\partial D}{\partial x}\right)$$

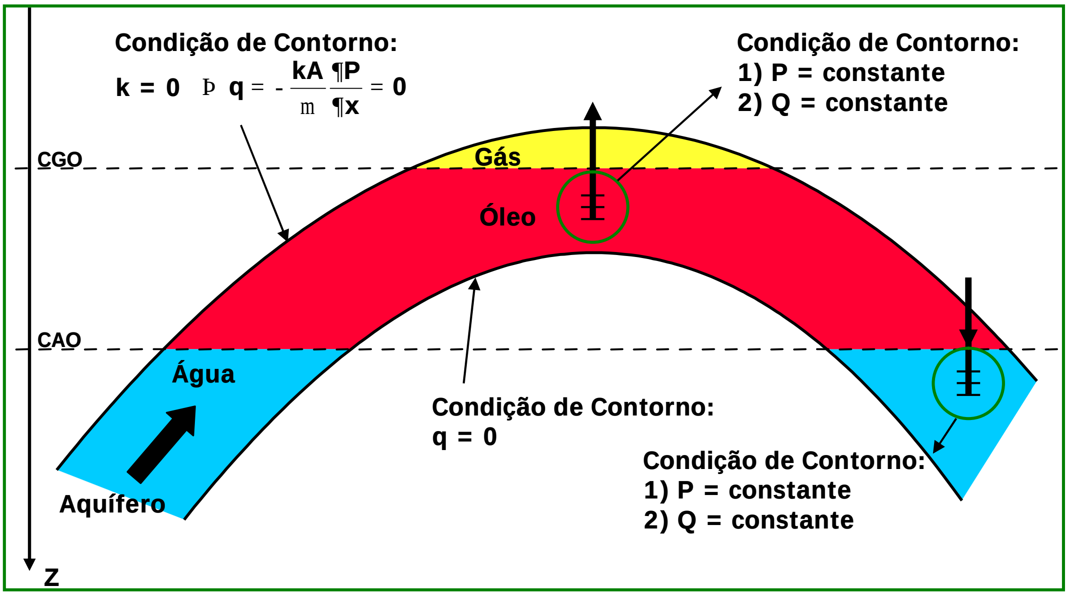
$$u_y=-\frac{k_y}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\gamma\frac{\partial D}{\partial y}\right)$$

$$u_z=-\frac{k_z}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\gamma\frac{\partial D}{\partial z}\right)$$

CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO DE SISTEMAS MULTIFÁSICOS

CONDIÇÕES DE CONTORNO DE SISTEMAS MULTIFÁSICOS

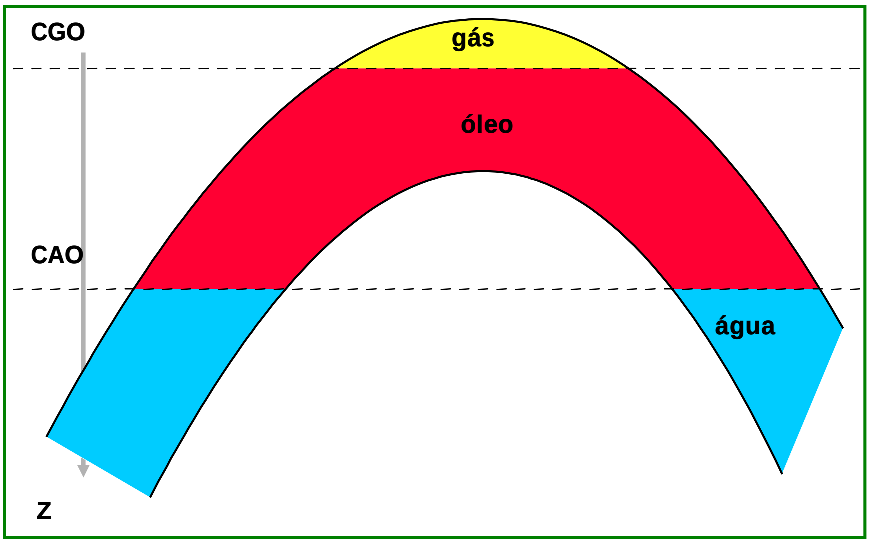
As condições de contorno de pressão e de vazão já discutidas são aplicáveis, também, a sistemas multifásicos. Na análise do fluxo em poços de produção ou de injeção em reservatórios, é importante, também, a definição da taxa de produção de óleo em superfície ou de alimentação de água.



CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO PARA SISTEMAS MULTIFÁSICOS

CONDIÇÕES INICIAIS DE SISTEMAS MULTIFÁSICOS

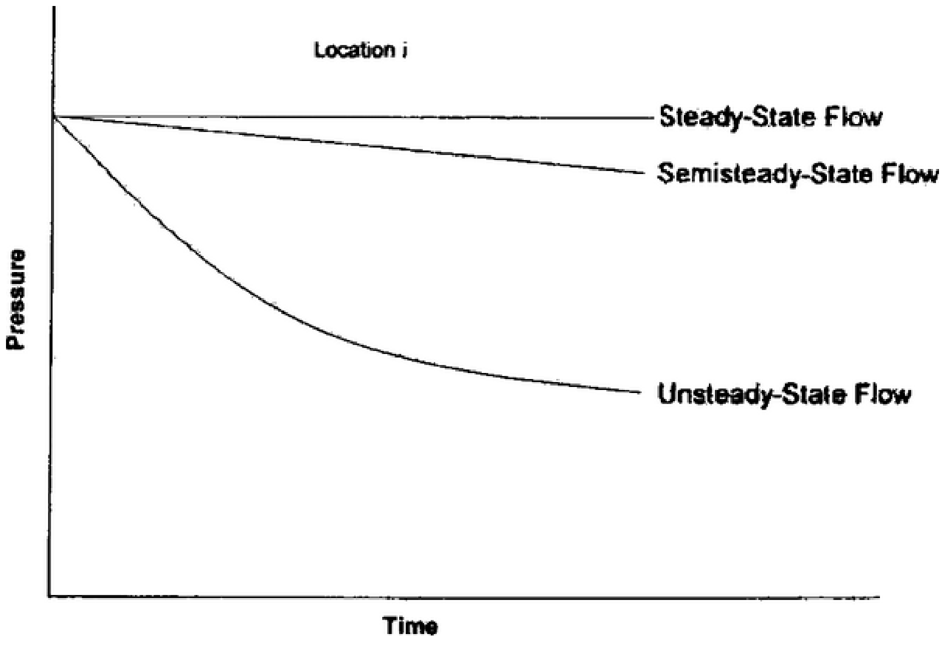
Adicionalmente à definição das pressões iniciais, é necessária a definição das saturações iniciais no sistema multifásico. Isto requer o conhecimento do contato água-óleo (CAO) e do contato gás-óleo (CGO). Assumindo que o reservatório esteja em equilíbrio, pode-se calcular as pressões iniciais de cada fase com base nos níveis dos contatos e das densidades. As saturações inicias podem, também, ser determinadas com base em registros de perfilagem de poços.



REGIMES TRANSIENTE E PERMANENTE

REGIMES DE FLUXO

- Permanente.
- Semi-Permanente.
- Transiente.

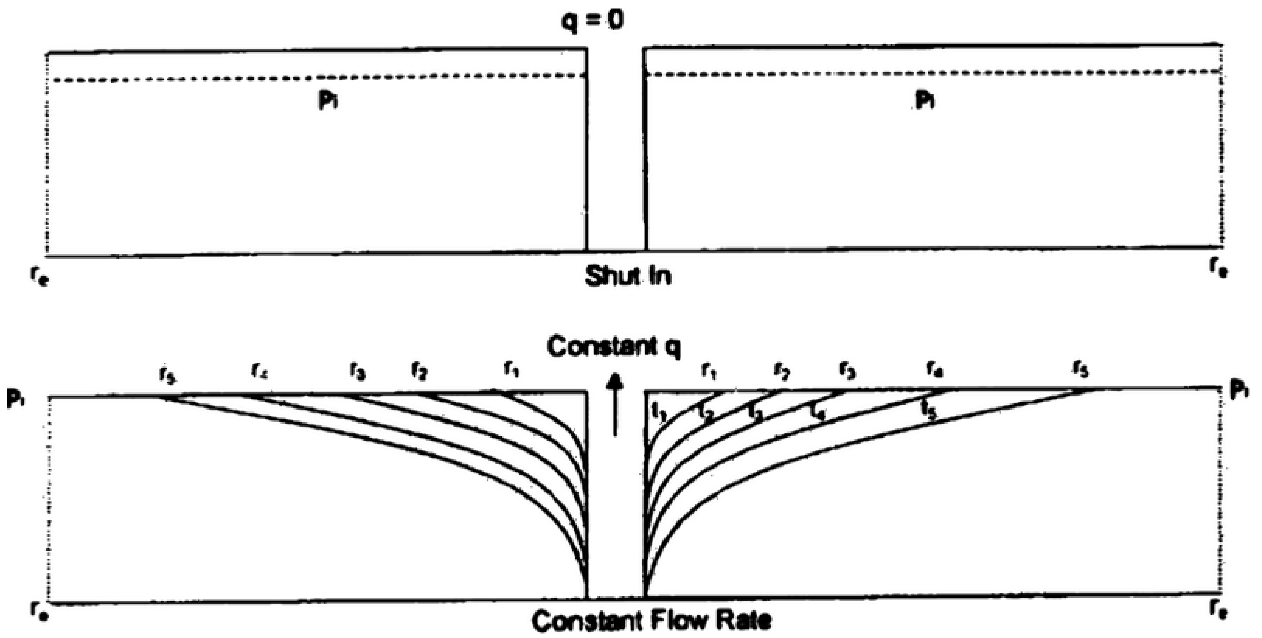


SOLUÇÃO PARA FLUXO RADIAL EM REGIME TRANSIENTE

FLUXO RADIAL EM REGIME TRANSIENTE

Solução proposta por Matthews e Russell em 1967 para as condições de contorno de fluxo radial a partir de um poço e condição de vazão constante.

Hipóteses:
- **Reservatório infinito.**
- **Poço produzindo a vazão constante.**
- **Reservatório inicialmente a pressão constante.**
- **O poço com diâmetro r_w está no centro do reservatório cilíndrico de raio r_e.**
- **Não ocorre fluxo através da fronteira externa do reservatório.**



Variação da pressão ao longo do tempo através do reservatório

FLUXO RADIAL EM REGIME TRANSIENTE

A pressão a uma distância r do centro do poço no instante t em unidades inglesas será dada por:

$$p(r,t) = p_i + 70{,}6\,\frac{q\,\mu\,B_o}{k\,h}\cdot E_i\left(-948\,\frac{\phi\,\mu\,c_t\,r^2}{k\,t}\right)$$

Onde:

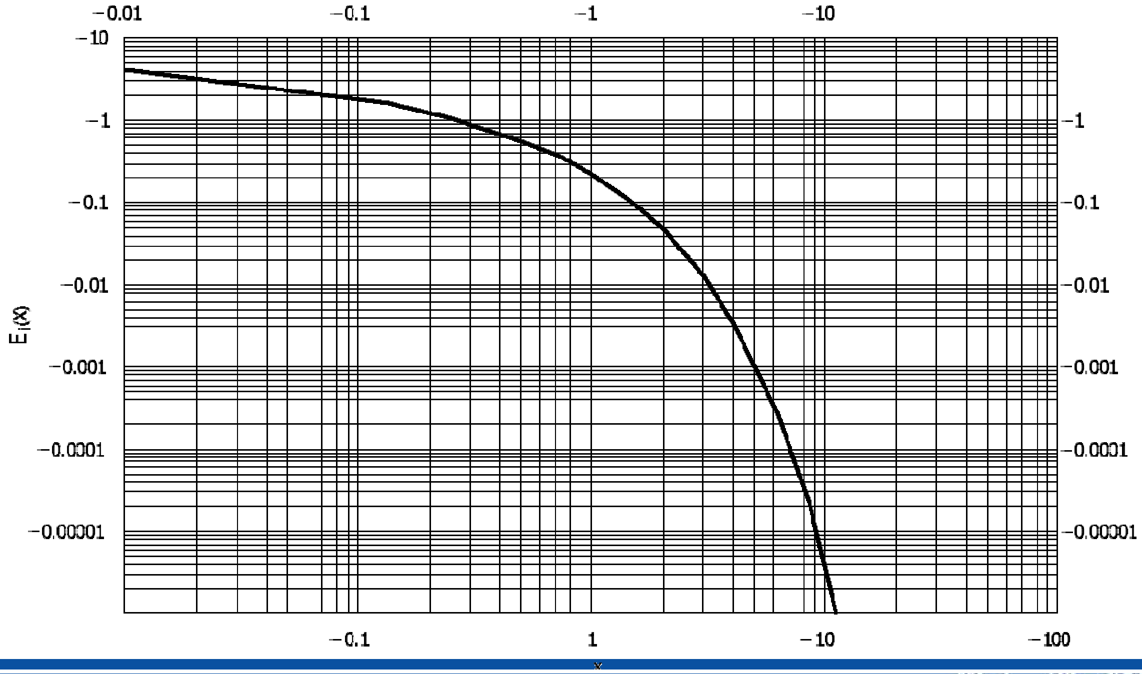
p_i = pressão no reservatório em psi
q = vazão bbl/dia
μ = viscosidade do fluido em cP
B_o = fator volume de formação
k = permeabilidade em mD
h = altura da camada em ft
ϕ = porosidade
c_t = compressibilidade total em psi^{-1}
r = distância do ponto ao centro do poço em ft
t = tempo em h
E_i = função exponencial integral

Função Exponencial Integral:

$$E_i(x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

Pode ser aproximada para x ≥ -0,01 por:

$$E_i(x) = \ln(-1{,}781x)$$



Na vizinhança do poço a pressão no instante t em unidades inglesas será dada por:

$$p_w(t) = p_i + 70{,}6\,\frac{q\,\mu\,B_o}{k\,h} \cdot \ln\left(1688{,}39\,\frac{\phi\,\mu\,c_t\,r_w^2}{k\,t}\right)$$

Onde:

p_i = pressão no reservatório em psi
q = vazão bbl/dia
μ = viscosidade do fluido em cP
B_o = fator volume de formação
k = permeabilidade em mD
h = altura da camada em ft
ϕ = porosidade
c_t = compressibilidade total em psi^{-1}
r_w = raio do poço em ft
t = tempo em h

EXERCÍCIO

Um poço produz óleo em um reservatório em regime transiente. São conhecidas as informações:

Espessura do reservatório	**h = 25 ft**
Permeabilidade do reservatório	**k = 180 mD**
Porosidade do reservatório	**f = 15%**
Compressibilidade total	**c_t = 0,0001 psi^{-1}**
Viscosidade do óleo	**μ = 2,5 cP**
Fator volume de formação	**B_o = 1,25 bbl/STB**
Pressão do reservatório	**p_i = 2500 psi**
Produção	**q = 600 STB/dia**

Determine para as condições de superfície:

a) A curva de queda de pressão na vizinhança do poço (t = {0,0001; 1; 12; 48; 100; 500}).

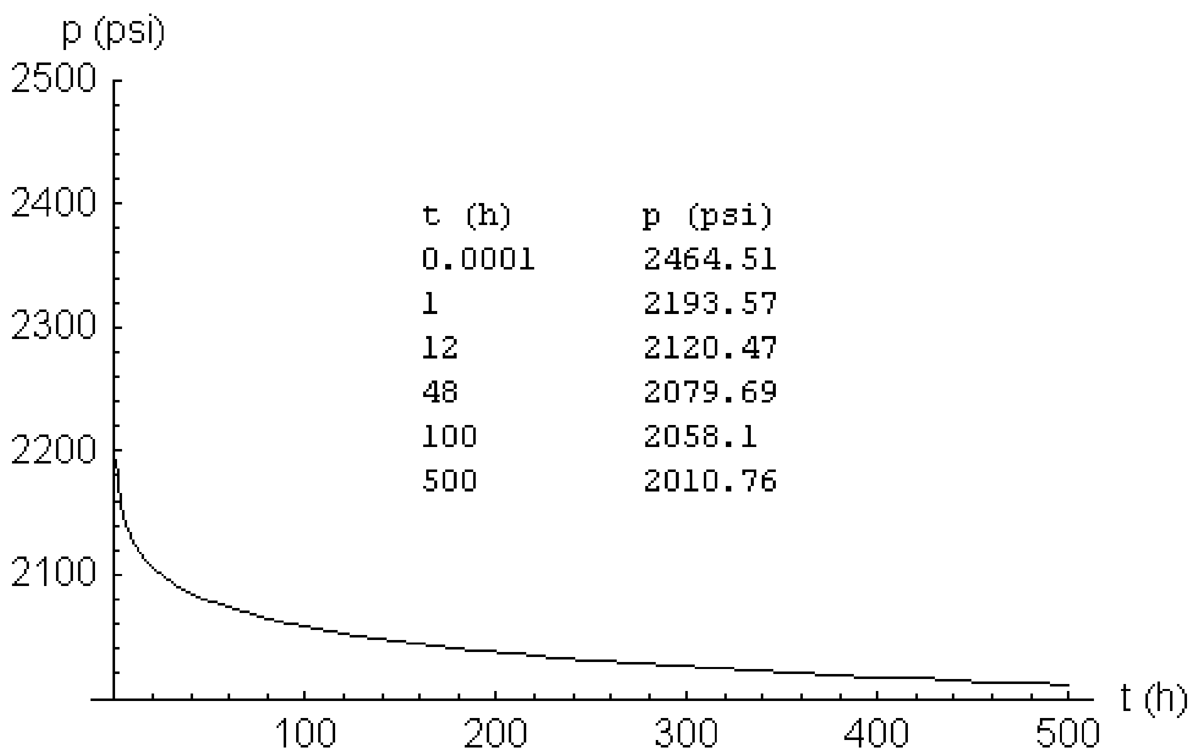
b) O perfil de pressões em t = 1 h (r = {0,3; 5; 10; 50; 100; 200; 1500}).

c) O perfil de pressões em t = 12 h (r = {0,3; 5; 10; 50; 100; 200; 1500}).

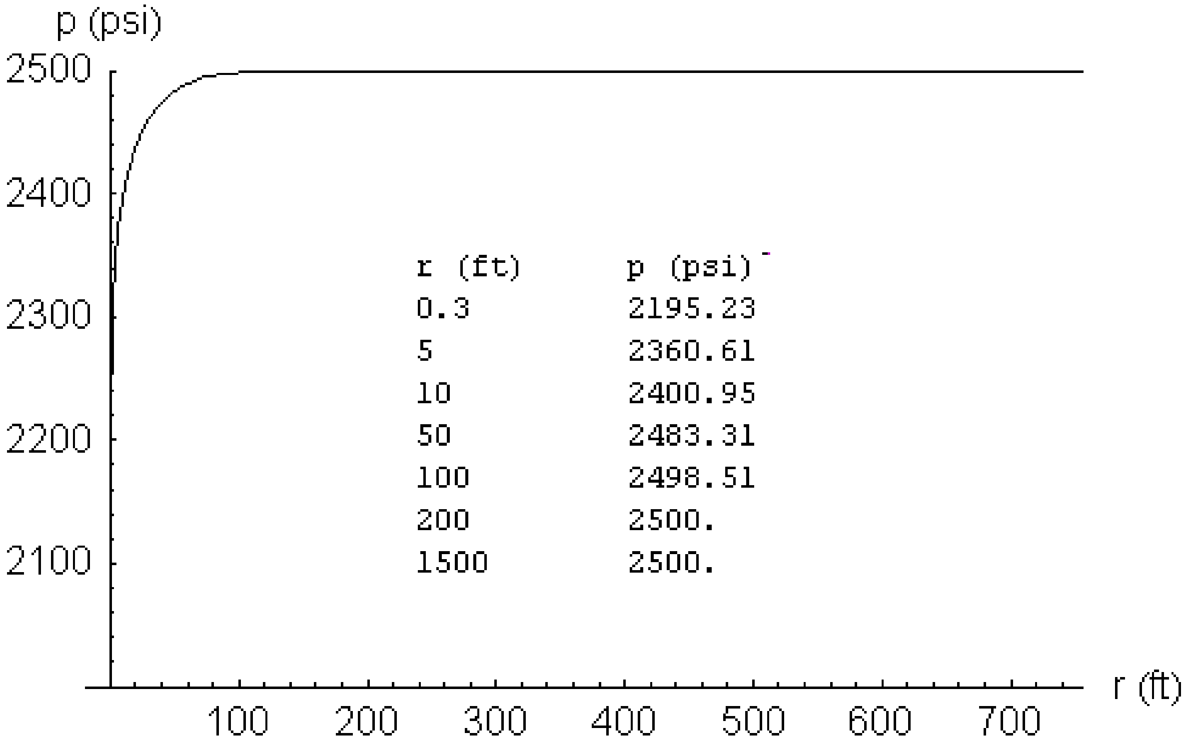
d) O perfil de pressões em t = 24 h (r = {0,3; 5; 10; 50; 100; 200; 1500}).

FLUXO RADIAL EM REGIME TRANSIENTE

Curva de queda de pressão em t = 0,0001; 1; 12; 48; 100 e 500 h na vizinhança do poço.



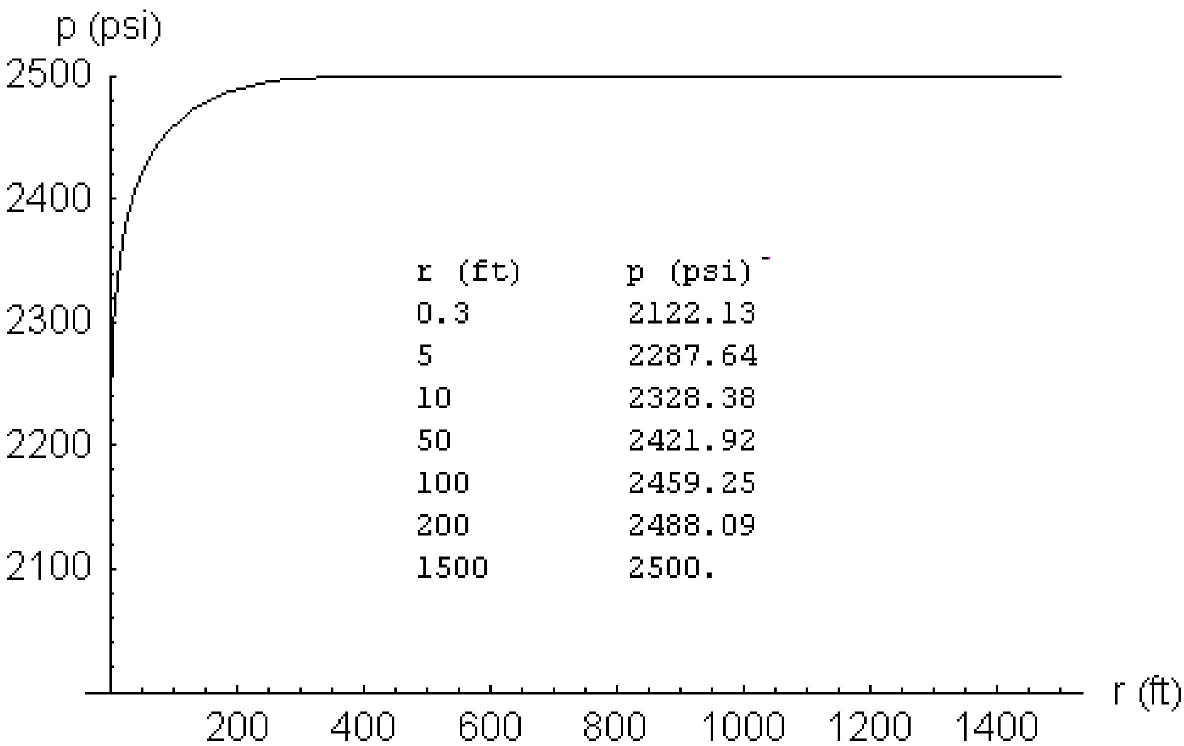
Perfil de pressões em t = 1 h:



r (ft)	p (psi)
0.3	2195.23
5	2360.61
10	2400.95
50	2483.31
100	2498.51
200	2500.
1500	2500.

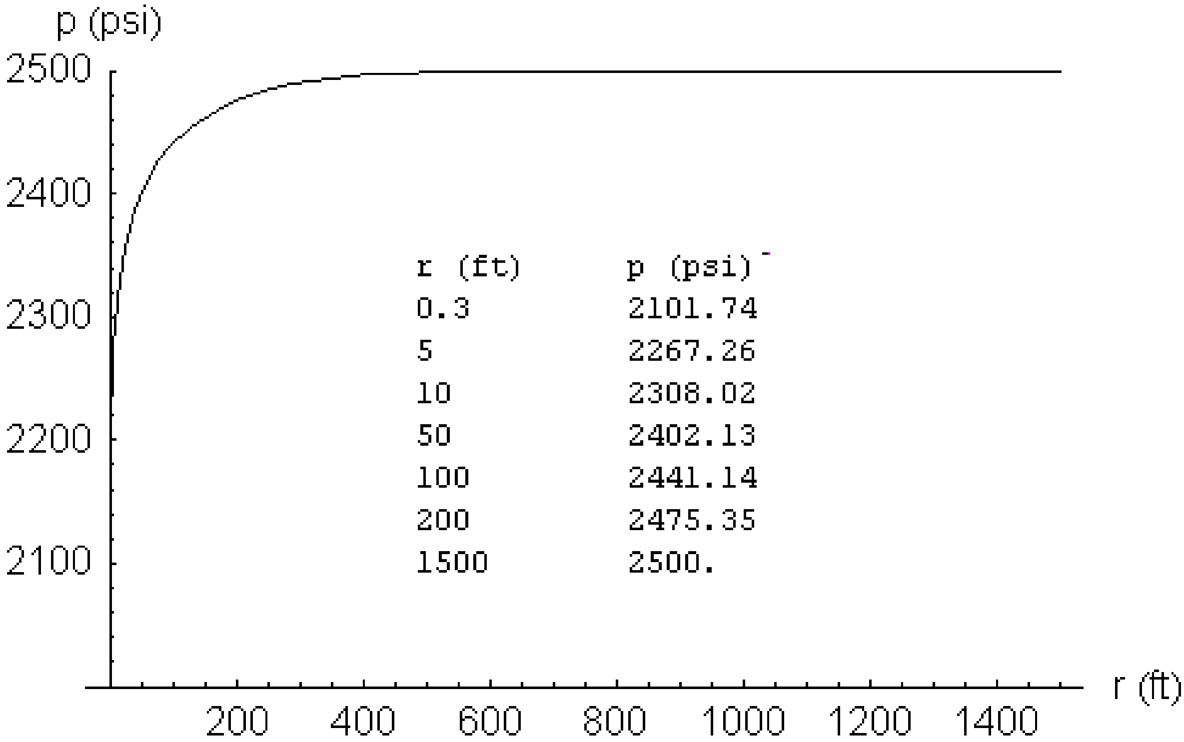
FLUXO RADIAL EM REGIME TRANSIENTE

Perfil de pressões em t = 12 h:



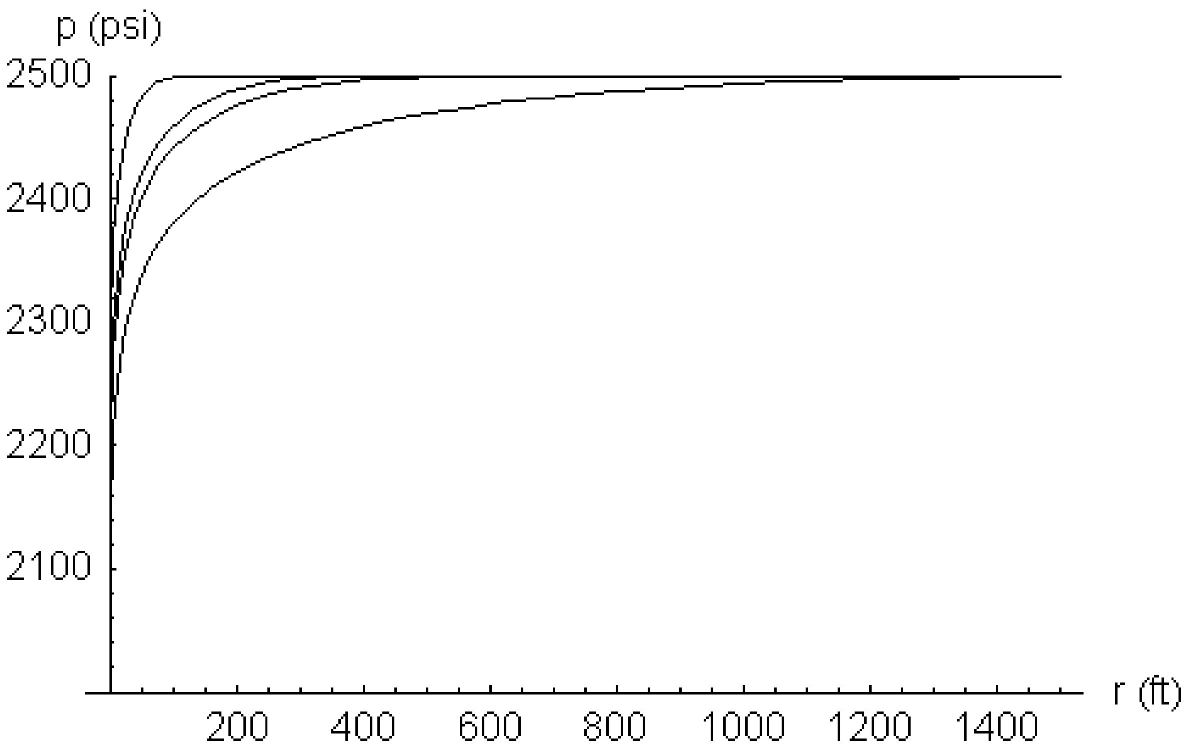
r (ft)	p (psi)
0.3	2122.13
5	2287.64
10	2328.38
50	2421.92
100	2459.25
200	2488.09
1500	2500.

Perfil de pressões em t = 24 h:



FLUXO RADIAL EM REGIME TRANSIENTE

Perfis de pressões em t = 1; 12; 24 h e para o regime permanente.



RESUMO DO TEMA

EQUAÇÕES DE FLUXO EM MEIOS POROSOS
- Conservação de massa e de momento.
- Equações constitutivas.

CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO
- Condições de contorno de Dirichlet e de Neumann.

FLUXO MULTIFÁSICO, NÃO HORIZONTAL E MULTIDIMENSIONAL

REGIMES TRANSIENTE E PERMANENTE
- Fluxo radial em regime transiente.
- Função exponencial integral.

REFERÊNCIAS

BRADLEY, H. B. Petroleum engineering handbook. Society of Petroleum Engineers: Richardson, 2005.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. S.; XAVIER, J. A. D. Engenharia de reservatórios de petróleo. Interciência: Rio de Janeiro, 2006.

TIAB, D.; DONALDSON, E. C. Petrophysics: theory and practice of measuring reservoir rock and fluid transport properties. Boston: Gulf Professional Pub, 2004.