

Signals & Systems for Computer Engineering

Prof.Dr. B.Berk ÜSTÜNDAĞ
Istanbul Technical University
Faculty of Computer Engineering and Informatics

bustundag@itu.edu.tr

BLG354E / CRN: 21560
5th Week Lecture

Response of DT LTI Systems to an Arbitrary Input:

Since the system is linear, the response $y[n]$ of the system to an arbitrary input $x[n]$ can be expressed as

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = \mathbf{T}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

Since the system is time-invariant, $h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

Therefore a discrete-time LTI system is completely characterized by its impulse response $h[n]$

Example:

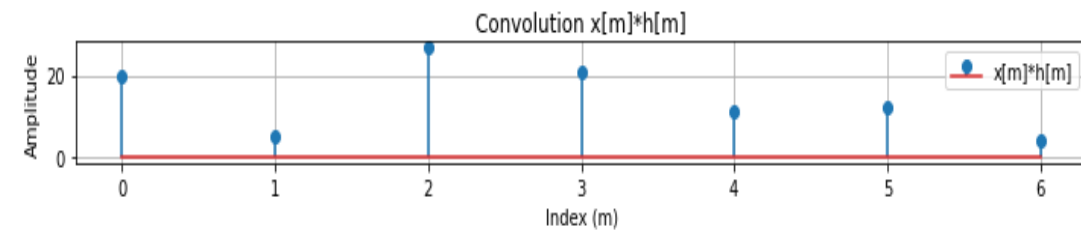
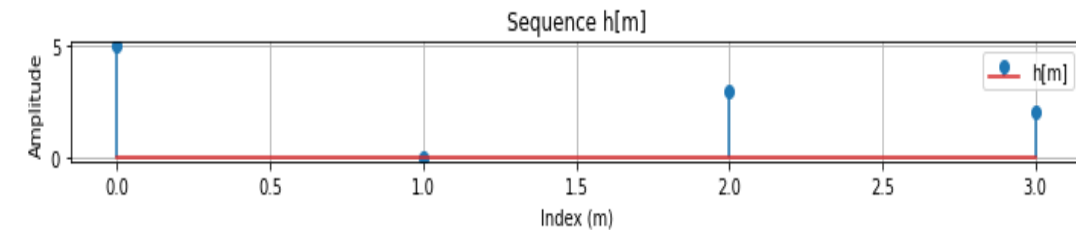
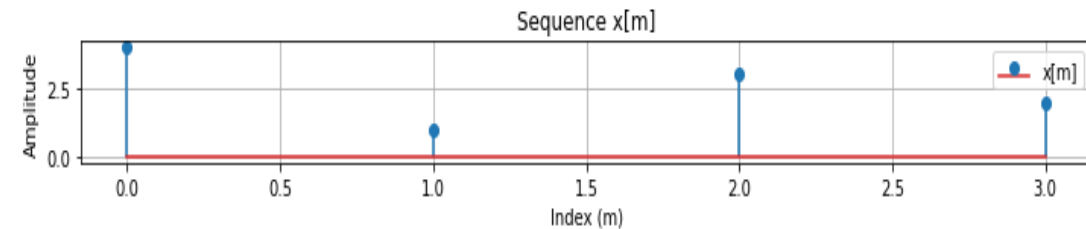
Impulse response of an LTI DT system is given as $h[m]=\{5, 0, 3, 2\}$

Find its output pattern if the signal $x[m]=\{4, 1, 3, 2\}$ is applied as the input.

Output: $y[m]=x[m]*h[m]$

$h(0-m)=\{2, 3, 0, 5\}$ for $m=3, 2, 1, 0$

m																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Example:

The input $x[n]$ and the impulse response $h[n]$ of a discrete-time LTI system are given by

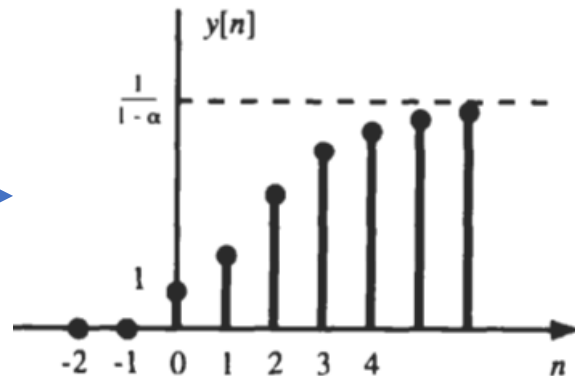
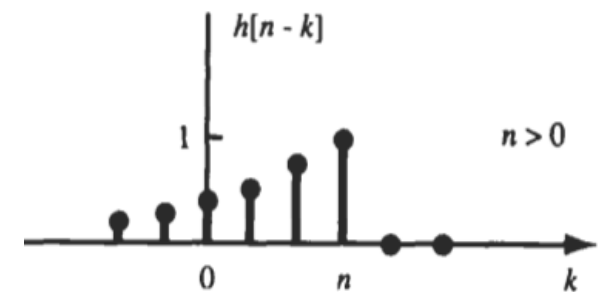
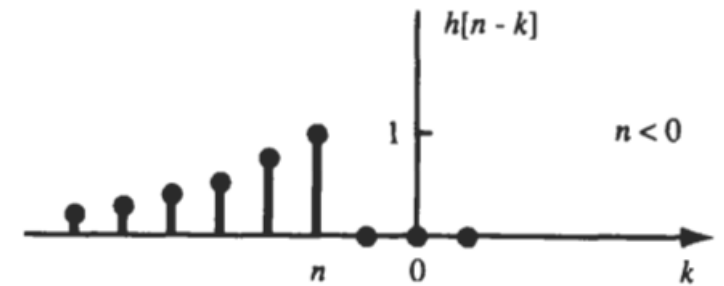
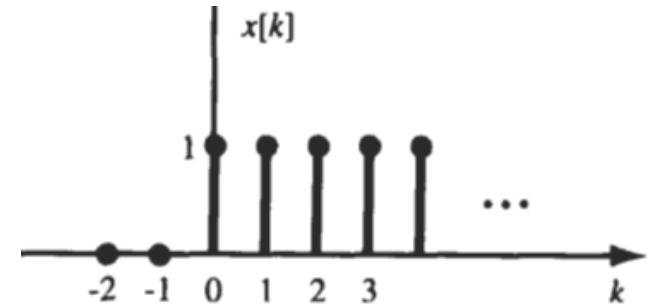
$$\begin{cases} x[n] = u[n] \\ h[n] = \alpha^n u[n] \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

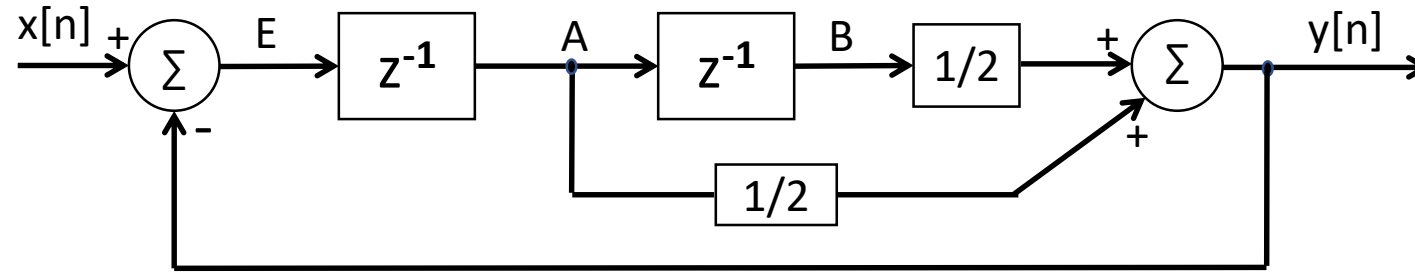
$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k}$$

$$y[n] = \sum_{m=n}^0 \alpha^m = \sum_{m=0}^n \alpha^m = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n] \longrightarrow$$



Example:



- Find the impulse response of the system via simulation
- Find the system response for $x[n]=n(u[n]-u[n-3])$ by simulation
- Find the system response for $x[n]=n(u[n]-u[n-3])$ by convolution for the first 5 values
- Find the impulse response through analytical solution of the transfer function

Pseudo Code:

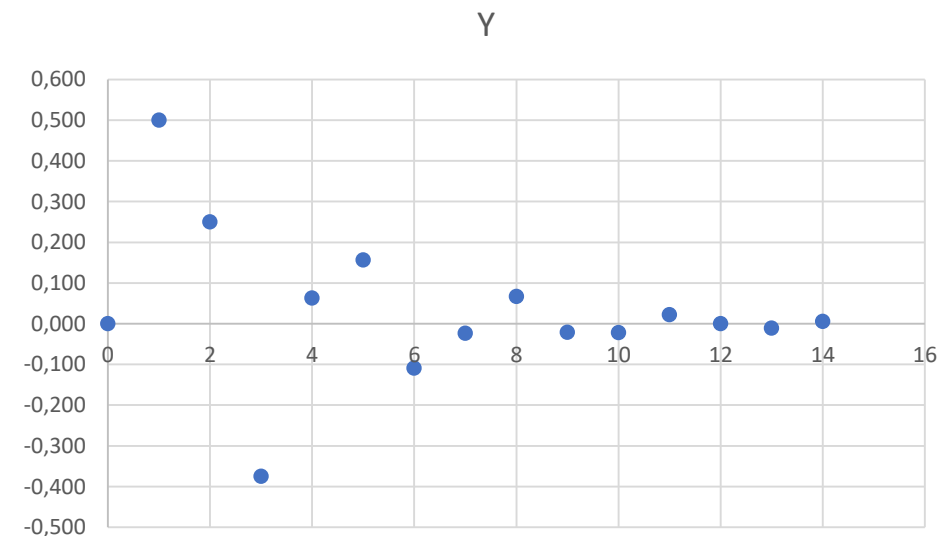
$Y=0.5A+0.5B$

$E=X-Y$

$B=A$

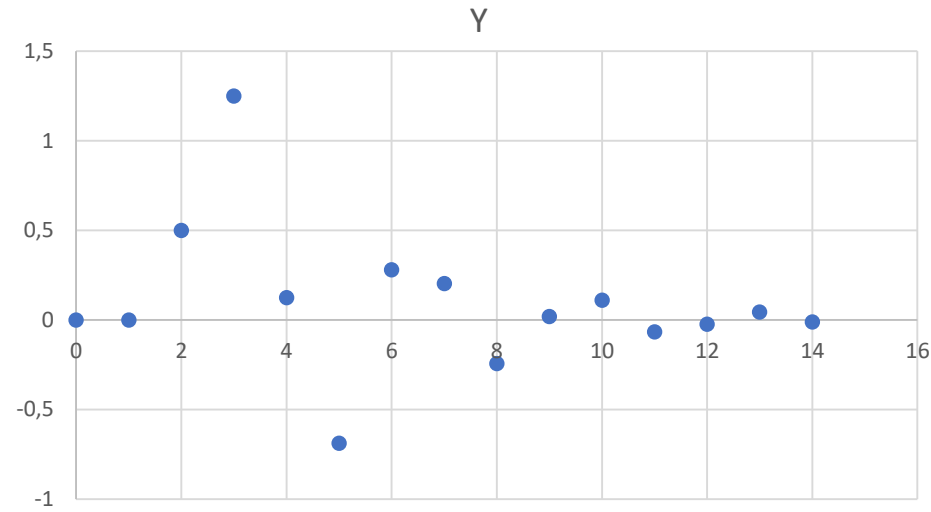
$A=E$

n	X	A	B	E	Y
0	1	0.000	0.000	1.000	0.000
1	0	1.000	0.000	-0.500	0.500
2	0	-0.500	1.000	-0.250	0.250
3	0	-0.250	-0.500	0.375	-0.375
4	0	0.375	-0.250	-0.063	0.063
5	0	-0.063	0.375	-0.156	0.156
6	0	-0.156	-0.063	0.109	-0.109
7	0	0.109	-0.156	0.023	-0.023
8	0	0.023	0.109	-0.066	0.066
9	0	-0.066	0.023	0.021	-0.021
10	0	0.021	-0.066	0.022	-0.022
11	0	0.022	0.021	-0.022	0.022
12	0	-0.022	0.022	0.000	0.000
13	0	0.000	-0.022	0.011	-0.011
14	0	0.011	0.000	-0.005	0.005



b) $x[n] = n(u[n] - u[n-3]) = \{0, 1, 2\}$

n	X	A	B	E	Y
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	1	0.000	0.000	1.000	0.000
2	2	1.000	0.000	1.500	0.500
3	0	1.500	1.000	-1.250	1.250
4	0	-1.250	1.500	-0.125	0.125
5	0	-0.125	-1.250	0.688	-0.688
6	0	0.688	-0.125	-0.281	0.281
7	0	-0.281	0.688	-0.203	0.203
8	0	-0.203	-0.281	0.242	-0.242
9	0	0.242	-0.203	-0.020	0.020
10	0	-0.020	0.242	-0.111	0.111
11	0	-0.111	-0.020	0.065	-0.065
12	0	0.065	-0.111	0.023	-0.023
13	0	0.023	0.065	-0.044	0.044
14	0	-0.044	0.023	0.011	-0.011



c) $h[n] = \{0, 0.5, 0.25, -0.375, 0.063, 0.156\}$

$h[-n] = \{0.156, 0.0625, -0.375, 0.25, 0.5, 0\}$

$Y = X * h$

					x0	x1	x2						
					0	1	2						
8								0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0
7							0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0	
6						0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0		
5					0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0			
4				0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0				
3			0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0					
2		0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0						
1	0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0							
0	0.15625	0.0625	-0.375	0.25	0.5	0							

0 0 0.5 1.25 0.125 -0.6875 0.28125 0.3125
 y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5

$y[n] = \{0, 0, 0.5, 1.25, 0.125, -0.6875, \dots\}$

Convolution of periodic DT signals:

If $x_1[n]$ and $x_2[n]$ are both periodic sequences with common period N , the convolution of $x_1[n]$ and $x_2[n]$ does not converge. In this case, we define the periodic convolution of $x_1[n]$ and $x_2[n]$ as

$$f[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n-k]$$

Proof:

Show that $f[n]$ as convolution two periodic sequences is periodic with period N .

$$x_2[(n-k) + N] = x_2[n-k]$$

$$f[n+N] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n+N-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[(n-k) + N] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n-k] = f[n]$$

$f[n]$ is periodic

DT Systems with or without Memory:

Since the output $y[n]$ of a memoryless system depends on only the present input $x[n]$, then, if the system is also linear and time-invariant, this relationship can only be of the form

$$y[n] = Kx[n]$$

where K is a (gain) constant. Thus, the corresponding impulse response $h[n]$ is simply

$$h[n] = K\delta[n]$$

Therefore, if $h[n_0] \neq 0$ for $n_0 \neq 0$, the discrete-time LTI system has memory.

Stability of DT LTI systems:

A discrete-time LTI system is BIBO stable if its impulse response is absolutely summable $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

Proof:

Let's prove the BIBO stability condition for discrete-time LTI systems.

Assume that the input $x[n]$ of a discrete-time LTI system is bounded $\rightarrow |x[n]| \leq k_1 \quad \forall n$

Due to convolution of impulse response and the input, the output will be:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq k_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

$$|x[n-k]| \leq k_1 \quad \text{if the impulse response is absolutely summable} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = K < \infty$$

$$|y[n]| \leq k_1 K = k_2 < \infty$$

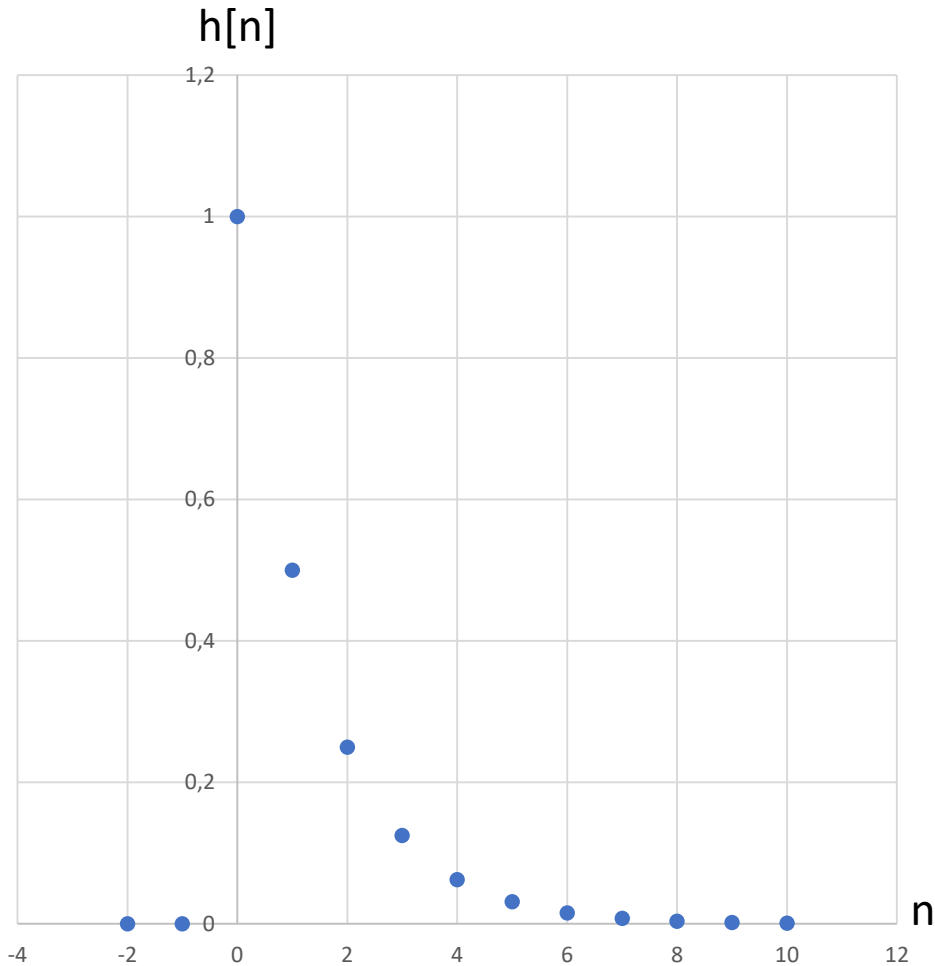
Hence the system is BIBO stable

Example:

Impulse response of a discrete-time LTI system is given by $h[n]=0.5^n u[n]$

a) Is this system causal?

b) Is this system BIBO stable?



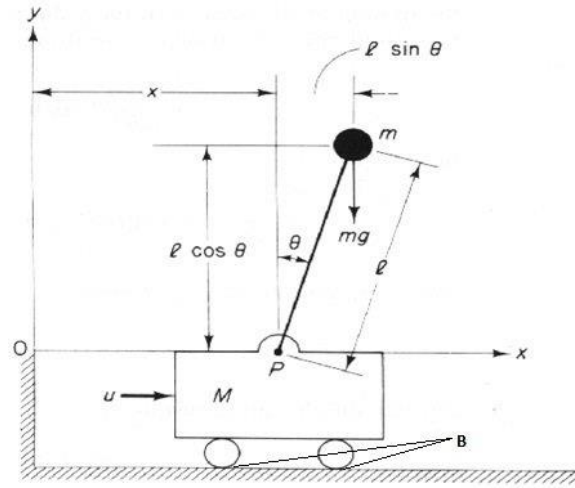
a) The system is causal because $h[n]=0$ for $n<0$

b)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |0.5^k u[k]|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |0.5|^k = \frac{1}{1 - |0.5|} = 2 = C < \infty \rightarrow \text{system is BIBO stable}$$

Modelling and Simulation of the Systems

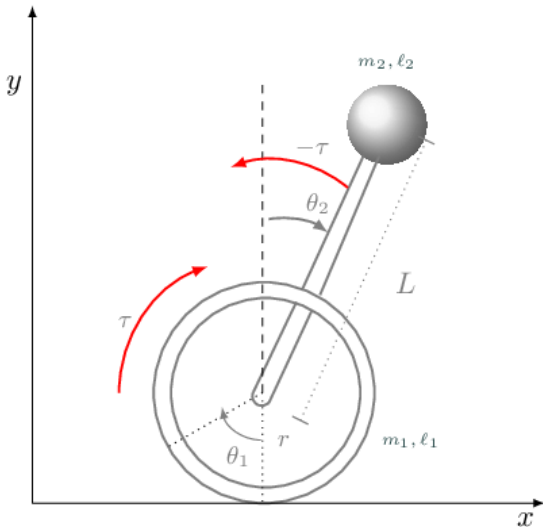


Physical system equation:

$$(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = -ml\ddot{x}\cos\theta$$

Linearization around very small Φ : $\Theta = \pi + \phi$,
 $\cos(\Theta) = -1$, $\sin(\Theta) = -\phi$, and $(d(\Theta)/dt)^2 = 0$



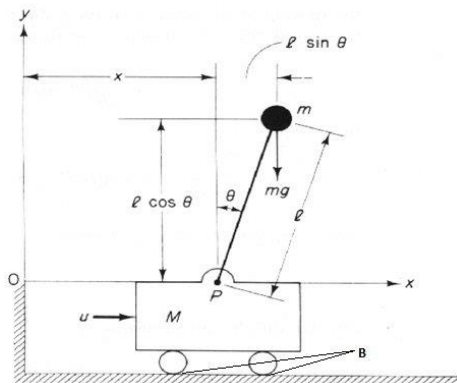
M	mass of the cart	0.5 kg
m	mass of the pendulum	0.5 kg
b	friction of the cart	0.1 N/m/sec
l	length to pendulum center of mass	0.3 m
I	inertia of the pendulum	0.006 kg*m^2
u	step force applied to the cart	
x	cart position coordinate	
phi	pendulum angle from vertical	

$$(I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2$$

$$(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s)$$

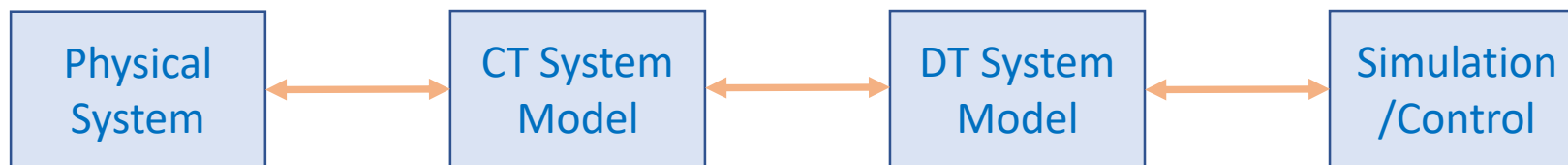
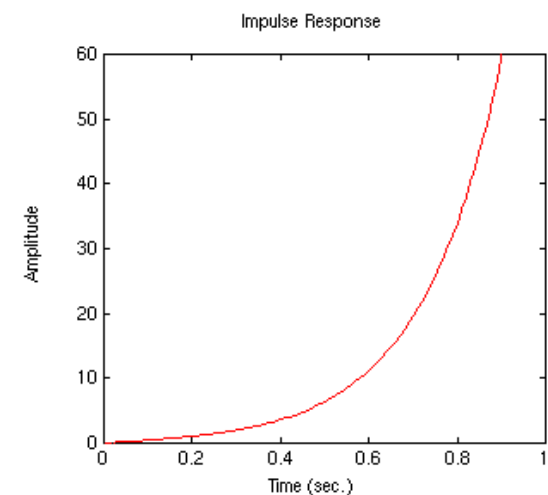
Transfer function:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{b(I + ml^2)}{q}s^2 - \frac{(M + m)mgl}{q}s - \frac{bmgl}{q}}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \\ \dot{\phi}(k) \\ \ddot{\phi}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.9982 & 0.0267 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 1.0016 & 0.01 \\ 0 & -0.0045 & 0.3119 & 1.0016 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-1) \\ \dot{x}(k-1) \\ \phi(k-1) \\ \dot{\phi}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0182 \\ 0.0002 \\ 0.0454 \end{bmatrix} [u(k-1)]$$

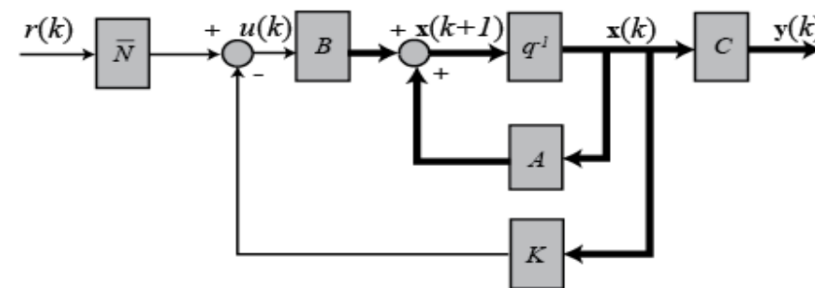
$$y(k-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-1) \\ \dot{x}(k-1) \\ \phi(k-1) \\ \dot{\phi}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(k-1)]$$



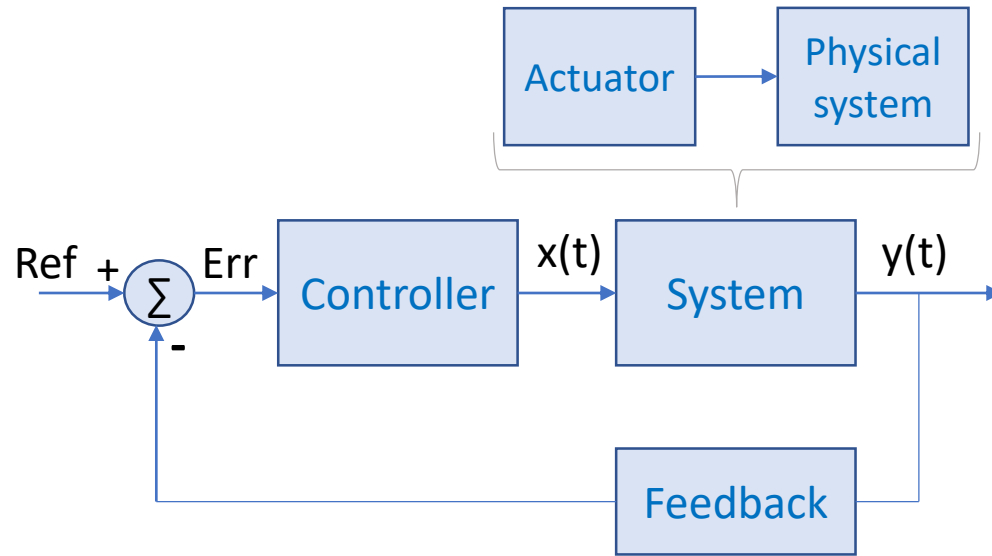
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I(M+m) + Mml^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I(M+m) + Mml^2} & \frac{m^2 gl^2}{I(M+m) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m) + Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m) + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + ml^2}{I(M+m) + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m) + Mml^2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

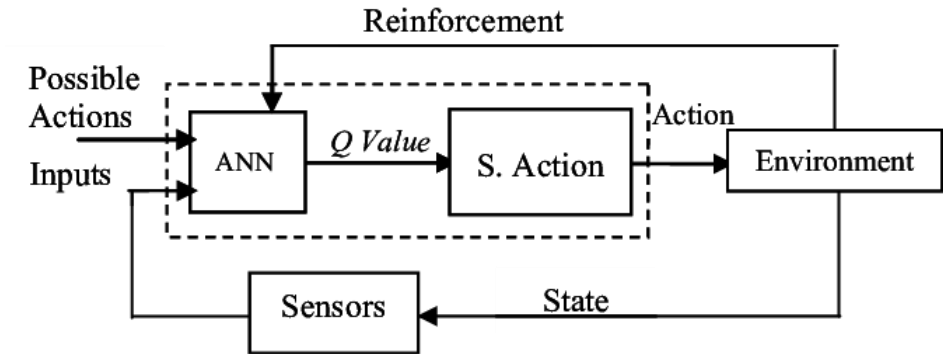
State space model



Feedback Control Systems



ML Approach to control systems:



PID controller example:

