2-SAMMENHENGENDE GRAFER OG STERKT SAMMENHENGENDE KOMPONENTER

IN2010 – ALGORITMER OG DATASTRUKTURER

Lars Tveito

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo
larstvei@ifi.uio.no

Høsten 2022

Oversikt uke 42

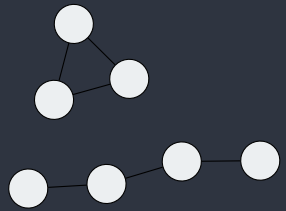
Oversikt uke 42

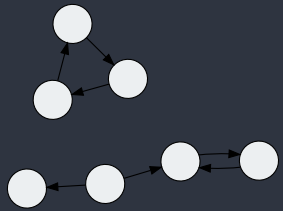
- Siste uke med grafer
- Vi skal lære hva det vil si at en graf er 2-sammenhengende
  - og hvordan vi effektivt sjekker om den er 2-sammenhengende
- Vi skal lære hva de *sterkt sammenhengende komponentene* av en graf er
  - og hvordan vi effektivt finner dem

2-SAMMENHENGENDE GRAFER

Sammenhengende grafer

- En graf er *sammenhengende* hvis det finnes en sti mellom hvert par av noder



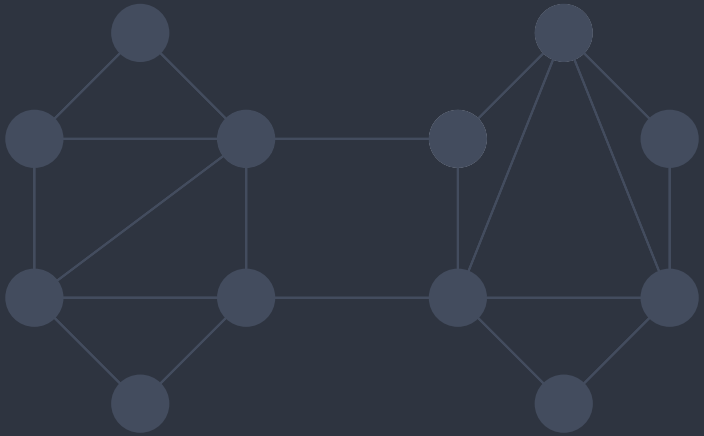


- Vi kan sjekke om en graf er sammenhengende med (for eksempel) DFS
  - Hvis det finnes ubesøkte noder etter `DFSVisit` er ikke grafen sammenhengende
  - Dette er i $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

2-SAMMENHENGENDE GRAFER

- En graf $G = (V, E)$ er 2-sammenhengende hvis G forblir sammenhengende selv hvis en hvilken som helst node $v \in V$ fjernes fra G
  - Sagt annerledes, det finnes to *distinkte* stier mellom hver par av noder
  - To stier mellom *u* og *v* er *distinkte* dersom de ikke deler noen kanter eller noder utenom *u* og *v*
- Mer generelt sier vi at en graf er *k*-sammenhengende dersom grafen forblir sammenhengende hvis man fjerner færre enn *k* noder
- Dette er et nyttig begrep i anvendelser der det er et ønske om redundans
  - I et nettverk betyr det at en hvilken som helst maskin kan gå ned, og pakker vil fremdeles nå frem
  - Hos Ruter kan det bety at det kan være full stans rundt en holdeplass, men at det finnes en alternativ rute for alle reisende

En 2-sammenhengende graf (eksempel)



Er G 2-sammenhengende? (naiv)

- Definisjonen gir opphav til en enkel (men ineffektiv) løsning

Algorithm: Naiv algoritme for å sjekke om en graf er 2-sammenhengende

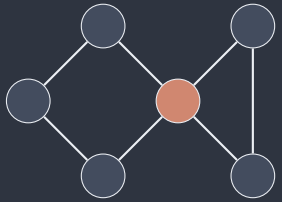
Input: En sammenhengende graf $G = (V, E)$
Output: Gir `true` hvis grafen er 2-sammenhengende, `false` ellers

```
1 Procedure IsBiconnectedNaive(G)
2     for v ∈ V do
3         G' = (V', E') ← G with v removed
4         visited ← empty set
5         u ← any vertex u ∈ V'
6         DFSVisit(G', u, visited)
7         if visited ≠ V' then
8             return false
9     return true
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| + |E|))$
  - som kan forenkles til $\mathcal{O}(|V|^3)$

Separasjonsnoder

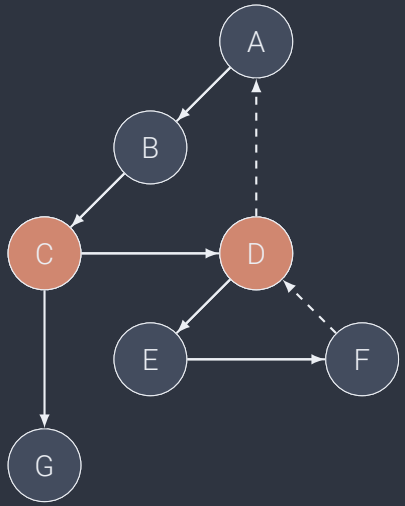
- Intuitivt er en separasjonsnode en node som holder grafen sammenhengende



- Hvis en separasjonsnode fjernes, så får grafen flere komponenter
- Dersom alle stier mellom to noder går gjennom en node $v \in V$, så er v en separasjonsnode
- Vi skal se en algoritme som finner alle separasjonsnoder i $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
  - Da får vi også effektiv algoritme for å sjekke om en graf er 2-sammenhengende

Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre *T*
  - Dersom vi gikk fra *u* til *v* i søket lager vi en kant fra *u* til *v* i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node *u* er en separasjonsnode hvis:
  - *u* er rot i *T* og har mer enn ett barn, eller
  - *u* ikke er roten, og har et barn *v*, slik at ingen etterkommere av *v* (inkludert *v* selv) har en back-edge til en forgjenger av *u*

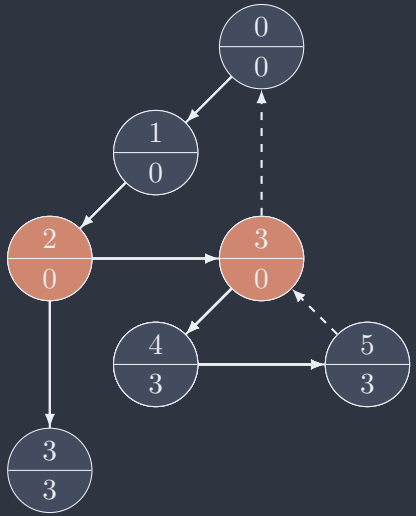


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node *u* noterer vi:

  `depth`[*u*] *dybden* til *u* i *T*

  `low`[*u*] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av *u* og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[*u*] $\leq$ `low`[*v*], der *v* er et barn av *u*, så er *u* en separasjonsnode



Finn separasjonsnoder

Algorithm: Finn alle separasjonsnoder i en sammenhengende graf

Input: En graf sammenhengende $G = (V, E)$
Output: Returnerer alle separasjonsnoder i G

```
1  depth ← empty map
2  low ← empty map
3  seps ← empty set
4  Procedure SeparationVertices(G)
5  |  s ← choose arbitrary vertex from V
6  |  depth[s] ← 0
7  |  low[s] ← 0
8  |  children ← 0
9  |
10 |  for (s, u) ∈ E do
11 |  |  if u ∉ depth then
12 |  |  |  SeparationVerticesRec(G, u, 1)
13 |  |  |  children ← children + 1
14 |
15 |  if children > 1 then
16 |  |  add s to seps
17 |  return seps

18 Procedure SeparationVerticesRec(G, u, d)
19 |  depth[u] ← d
20 |  low[u] ← d
21 |
22 |  for (u, v) ∈ E do
23 |  |  if v ∈ depth then
24 |  |  |  low[u] ← min(low[u], depth[v])
25 |  |  |  continue
26 |  |
27 |  |  SeparationVerticesRec(G, v, d + 1)
28 |  |  low[u] ← min(low[u], low[v])
29 |  |  if d ≤ low[v] then
30 |  |  |  add u to seps
```

Er G 2-sammenhengende?

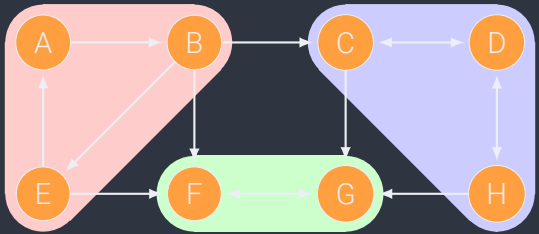
Algorithm: Er grafen 2-sammenhengende?

Input: En sammenhengende graf $G = (V, E)$
Output: Gir **true** hvis grafen er 2-sammenhengende, **false** ellers

```
1 Procedure IsBiconnected(G)
2 |   return SeparationVertices(G) is empty
```

Sterkt sammenhengende komponenter

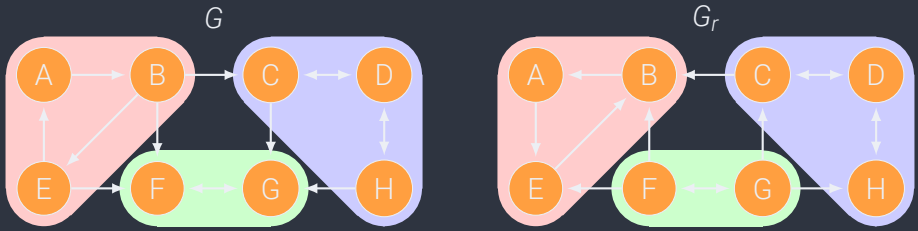
Sterkt sammenhengende komponenter



- En *rettet* graf er *sterkt* sammenhengende dersom det finnes en sti mellom alle par av noder
- En sterkt sammenhengende komponent er en delgraf slik at
  - Det finnes en sti mellom alle par av noder i komponenten
  - Komponenten er *maksimal*
- Intuitivt kan vi tenke på en sterkt sammenhengende komponent som en sykel

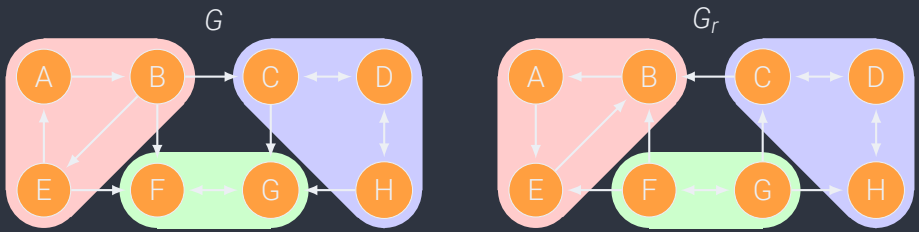
Den reverserte grafen

- Vi sier at den *reverserte* grafen til G er den grafen hvor alle kanter er snudd
  - Hvis $G = (V, E)$ sier vi at $G_r = (V, E_r)$ er den reverserte grafen
  - Hvis $(u, v) \in E$ så er $(v, u) \in E_r$



- Grafen G og dens reverserte graf G_r har alltid de samme sterkt sammenhengende komponentene!

Reverser graf

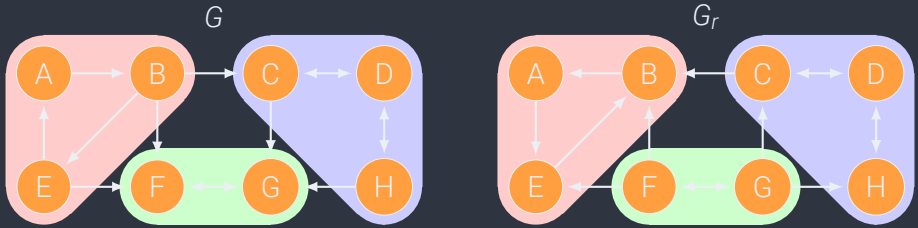


Algorithm: Reverser en gitt graf

Input: En graf $G = (V, E)$
Output: Returner den reverserte grafen $G_r = (V, E_r)$

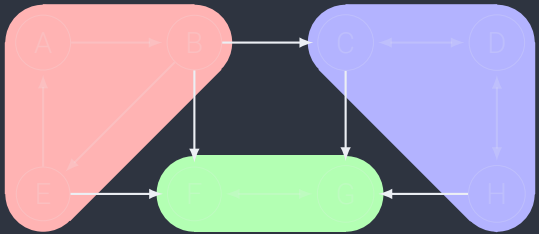
```
1 Procedure ReverseGraph(G)
2     E_r ← empty set
3     for (u, v) ∈ E do
4         add (v, u) to E_r
5     return (V, E_r)
```

Finne sterkt sammenhengende komponenter



- Vi kan finne den sterkt sammenhengende komponenten til en node *v* ved å
  - Finne alle noder som kan nås fra *v* i *G*
  - Finne alle noder som kan nås fra *v* i G_r
  - Nodene som kunne nås i både *G* og G_r utgjør den sterkt sammenhengende komponenten til *v*
- Dette er en algoritme i $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| + |E|))$
  - Vi er en liten innsikt unna å få dette ned til $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Komponentgrafen



- Hvis vi anser hver sterkt sammenhengende komponent som en enkelt node
  - Altså, at vi anser det røde, grønne og lilla områdene i grafen ovenfor som noder
  - Så får vi det vi kaller *komponentgrafen*
- Komponentgrafen er garantert å ikke inneholde noen sykel (er *asyklisk*)
- Observer at noder i den topologisk siste komponenten kan ikke nå noen andre komponenter!

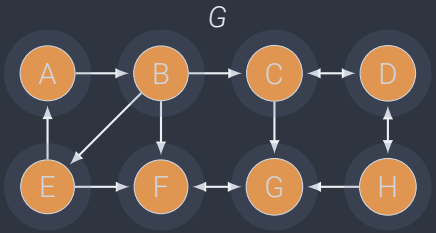
Topologisk ordning av den underliggende komponentgrafen

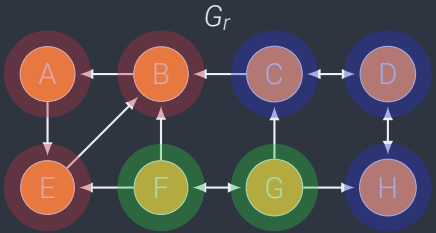
- En graf som inneholder sykler har ingen topologisk ordning
- Hvis vi bruker `DFSTopSort`, får vi nodene i en rekkefølge som respekterer ordningen av den *underliggende komponentgrafen*
- Den siste noden som blir prossesert i et dybde-først søk er topologisk først
- Den topologisk første noden er den topologsik *siste* noden i den *reverserte* grafen
- Ved å utforske noder i den reverserte grafen i topologisk rekkefølge, så er vi garantert å ikke krysse komponentgrenser

Kosaraju

- Algoritmen kan i korte trekk beskrives slik:
  1. Gjør et (fullt) dybde-først søk i en graf G, der hver node legges på en stack etter alle naboer er besøkt (`DFSTopSort`)
  2. Konstruer den reverserte grafen G_r
  3. Gjør et nytt (fullt) dybde-først søk på G_r, der det rekkefølgen i det fulle dybde-først søket er diktert av den topologiske ordningen av G

Kosaraju (eksempel)





A
B
E
C
D
H
G
F

stack

Sterkt sammenhengende komponenter

Algorithm: Finn de sterkt sammenhengende komponenetene av en graf

Input: En rettet graf $G = (V, E)$
Output: Returner de sterkt sammenhengende komponenetene til G

```
1  Procedure StronglyConnectedComponents(G)
2      stack ← DFSTopSort(G)
3      G_r ← ReverseGraph(G)
4      visited ← empty set
5      components ← empty set
6      while stack is not empty do
7          u ← stack.pop()
8          if u ∉ visited then
9              component ← empty set
10             DFSVisit(G_r, u, visited, component)
11             add component to components
12     return components
```