Vektede grafer, korteste stier og minimale spenntrær

IN2010 – Algoritmer og Datastrukturer

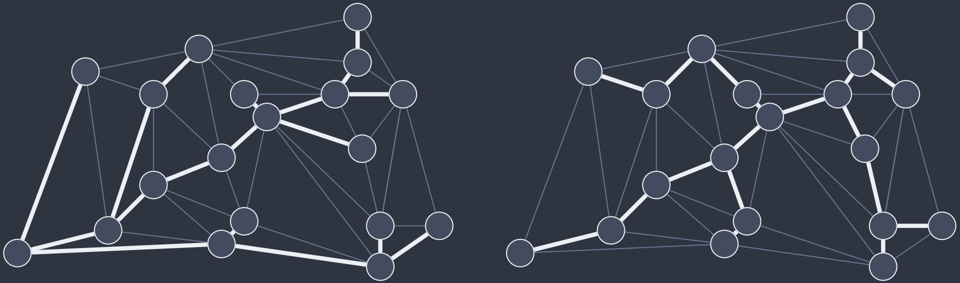
Lars Tveito

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo
larstvei@ifi.uio.no

Høsten 2022

Oversikt uke 40

Oversikt uke 40

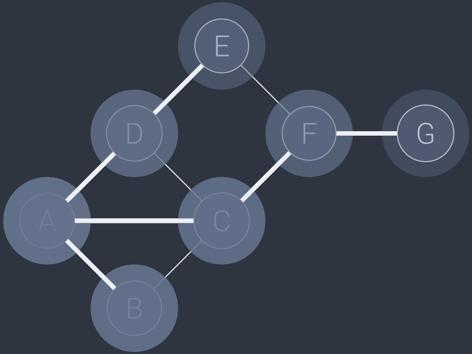


- Denne uken skal vi se på *vektede* grafer
- Hvordan finne den billigste veien fra én node til andre noder?
- Hvordan finne den billigste måten å koble alle noder i en graf?

Korteste stier

KORTESTE STIER

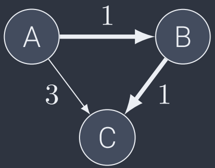
- Vi ønsker å finne den *korteste* stien i en graf fra en gitt node til alle andre
- Hvis grafen er *uvektet* kan bruke bredde-først søk



queue

A
B
C
D
F
E
G

Vektede grafer

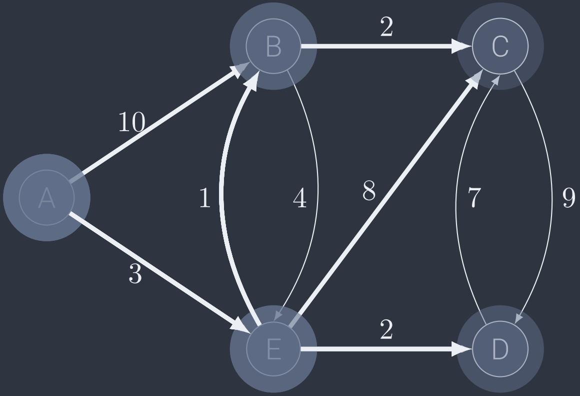


- Bredde-først søk fungerer ikke på *vektede* grafer
- En vektet graf $G = (V, E)$ har en assosiert *vektfunksjon* w
  - For en kant fra u til v i grafen, angir $w(u, v)$ vekten på kanten
- Den *korteste stien* mellom $s \in V$ og $t \in V$ er stien $v_1, v_2, \ldots, v_n$
  - der $v_1 = s$ og $v_n = t$ og $\sum_{i=1}^{n-1} w(v_i, v_{i+1})$ er minimal
- Det vil si den stien som har lavest *akkumulert* vekt
- Vi skal se på to algoritmer for å finne korteste stier i vektede grafer:
  - Dijkstra: dersom vi antar at det ikke finnes kanter med negativ vekt
  - Bellman-Ford: dersom vi har kanter med negativ vekt
- Algoritmene fungerer både for rettede og urettede grafer

Dijkstras algoritme for korteste stier

- Input er en graf G og en startnode s
- Idéen er å modifisere bredde-først søk til å ta høyde for kantenes vekt
  - Vi traverserer grafen fra s med en *prioritetskø*
  - Det er prioritetskøen som sørger for at vi tar høyde for kantenes vekt
  - Vi besøker alltid «nærmeste» ubesøkte noden fra startnoden med hensyn til akkumulert vekt
- Prioritetskøen ordnes etter «korteste avstand vi har sett så langt»
- Initielt har startnoden s har avstand 0, og alle andre noder har avstand ∞
- En node u legger en nabo v på prioritetskøen

Dijkstras algoritme for korteste stier (eksempel)



queue	priority
A	0
B	~~10~~ 4
E	3
D	5
C	~~11~~ 6

Dijkstra (tradisjonell implementasjon)

Algorithm: Dijkstras algoritme for korteste stier (tradisjonell)

Input: En vektet graf $G = (V, E)$ med vektfunksjon w og en startnode s

Output: Et map `dist` som angir korteste vei fra s til alle noder i G

```
Procedure Dijkstra(G, s)
    queue ← empty priority queue
    dist ← empty map
    for v ∈ V do
        dist[v] ← ∞
        Insert(queue, v) with priority ∞
    dist[s] ← 0
    DecreasePriority(queue, s, 0)

    while queue is not empty do
        u ← RemoveMin(queue)
        for (u, v) ∈ E do
            c ← dist[u] + w(u, v)
            if c < dist[v] then
                dist[v] ← c
                DecreasePriority(queue, v, c)
    return dist
```

Dijkstra (kjøretidsanalyse)

- Anta at `DecreasePriority` er logaritmisk
- Hver node poppes av prioritetskøen én gang
- Det koster $\mathcal{O}(|V| \cdot \log(|V|))$ fordi
  - det er $|V|$ noder på prioritetskøen
  - `RemoveMin` er logaritmisk
- Hver kant besøkes nøyaktig én gang
- Det koster $\mathcal{O}(|E| \cdot \log(|V|))$ fordi
  - fra hver kant kaller vi `DecreasePriority`
  - `DecreasePriority` er logaritmisk
- Til sammen har vi $\mathcal{O}((|V| + |E|) \log(|V|))$
- Kan forenkles til $\mathcal{O}(|E| \cdot \log(|V|))$ hvis grafen er sammenhengende

```
Procedure Dijkstra(G, s)
  queue ← empty priority queue
  dist ← empty map
  for v ∈ V do
    dist[v] ← ∞
    Insert(queue, v) with priority ∞
  dist[s] ← 0
  DecreasePriority(queue, s, 0)

  while queue is not empty do
    u ← RemoveMin(queue)
    for (u,v) ∈ E do
      c ← dist[u] + w(u,v)
      if c < dist[v] then
        dist[v] ← c
        DecreasePriority(queue, v, c)
  return dist
```

DIJKSTRA (IMPLEMENTASJON UTEN DecreasePriority)

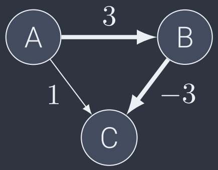
ALGORITHM: DIJKSTRAS ALGORITME FOR KORTESTE STIER

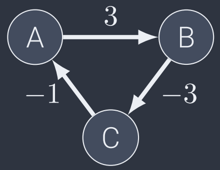
Input: En vektet graf $G = (V, E)$ med vektfunksjon w og en startnode s
Output: Et map `dist` som angir korteste vei fra s til alle noder i G

```
Procedure Dijkstra(G, s)
    visited ← empty set
    dist ← empty map with ∞ as default
    queue ← singleton priority queue containing s with priority 0
    dist[s] ← 0

    while queue is not empty and |visited| < |V| do
        u ← RemoveMin(queue)
        if u ∉ visited then
            add u to visited
            for (u, v) ∈ E do
                c ← dist[u] + w(u, v)
                if c < dist[v] then
                    dist[v] ← c
                    Insert(queue, v) with priority c
    return dist
```

Negative vekter





- Dijkstra kan gi feil svar for grafer med negative vekter fordi den er «grådig»
  - En grådig algoritme går ut i fra at den første løsningen er det beste
- Dersom grafen inneholder negative sykler finnes det ingen korteste sti
  - Fordi det alltid lønner seg å ta en runde til i en negativ sykel
- Bellman-Ford finner korteste sti i grafer med negative vekter
  - eller oppdager negative sykler

Bellman-Ford

- En sti kan ikke inneholde mer enn $|V| - 1$ kanter
  - En vei med $|V|$ kanter må inneholde en sykel
- Algoritmen oppdaterer estimert avstand for alle noder «mange nok» ganger
  - $|V| - 1$ er mange nok ganger!
- Hvis en node får en lavere estimert avstand etter $|V| - 1$ iterasjoner
  - så inneholder G en negativ sykel

Bellman-Ford (implementasjon)

Algorithm: Bellman-Fords algoritme for korteste stier

Input: En vektet graf $G = (V, E)$ med vektfunksjon w og en startnode s

Output: Et map `dist` som angir korteste vei fra s til alle noder i G

```
Procedure BellmanFord(G, s)
    dist ← empty map with ∞ as default
    dist[s] = 0

    repeat |V| − 1 times
        for (u, v) ∈ E do
            c ← dist[u] + w(u, v)
            if c < dist[v] then
                dist[v] ← c

    for (u, v) ∈ E do
        c ← dist[u] + w(u, v)
        if c < dist[v] then
            error G contains a negative cycle
    return dist
```

- Denne går gjennom alle kanter $|V|$ ganger
- Det gir $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$

Korteste stier i DAGs

- Hvis G er en rettet asyklisk graf (DAG), kan vi finne korteste stier i $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Dette gjør vi ved hjelp av en topologisk sortering

Algorithm: Korteste stier i en DAG

Input: En vektet, asyklisk graf $G = (V, E)$ med vektfunksjon w og en startnode s

Output: Et map `dist` som angir korteste vei fra s til alle noder i G

```
Procedure DAGShortestPaths(G, s)
    dist ← empty map with ∞ as default
    dist[s] = 0

    for u ∈ TopSort(G) do
        for (u, v) ∈ E do
            c ← dist[u] + w(u, v)
            if c < dist[v] then
                dist[v] ← c
    return dist
```

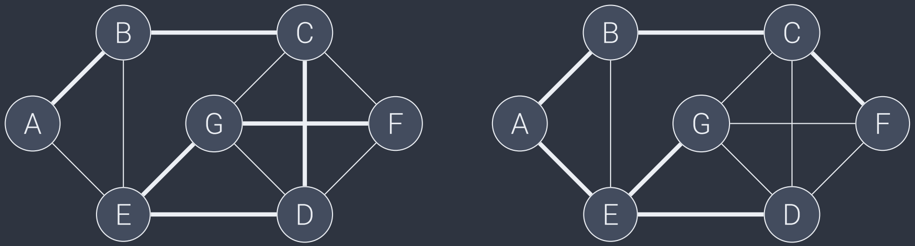
Minimale spenntrær

Trær

- Alle trær er grafer, men ikke alle grafer er trær
- En *sammenhengende*, *urettet* og *asyklisk* graf $G = (V, E)$ er et tre
  - Et slik tre har nøyaktig $|V| - 1$ kanter
  - Å legge til en kant i et tre vil føre til en sykel
- En enkel graf der hver komponent er et tre kalles en skog

Spenntrær

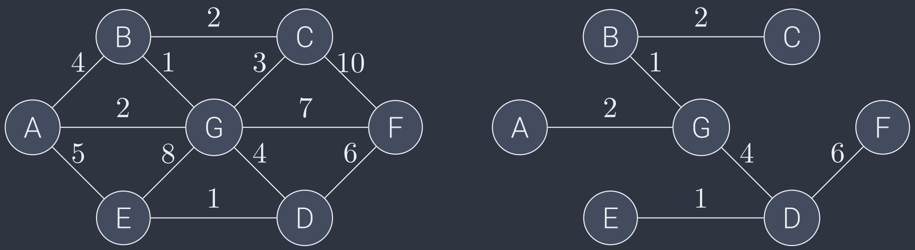
- Et *spenntre* av en sammenhengende og urettet graf $G = (V_G, E_G)$ er et tre $T = (V_T, E_T)$, der $V_T = V_G$ og $E_T \subseteq E_T$



- Det vil si et tre som består av *de samme nodene* og et *utvalg* av kantene
- Vi har sett spenntrær fra bredde-først søk og Dijkstra allerede

Minimale spenntrær

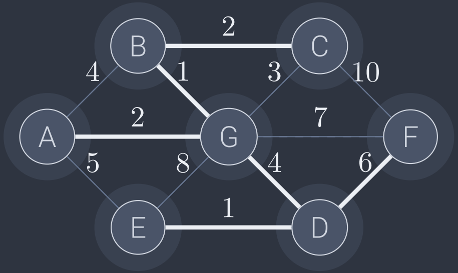
- Når *G* er vektet er vi ofte interessert i å finne *minimale* spenntrær
- Et eksempel er å koble sammen hustander med nettverkskabler billigst mulig

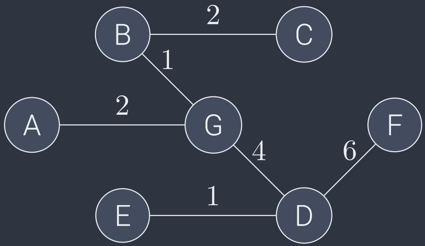


- Gitt en graf *G* er *T* et minimalt spenntre for *G* hvis ingen andre spenntrær for *G* har mindre total vekt
  - Legg merke til at det kan finnes flere minimale spenntrær for samme graf
  - (For eksempel hvis alle kantene har samme vekt)

Prims algoritme for minimale spenntrær

- Prims algoritme bygger opp et minimalt spenntre *T* grådig
- Vi velger vi en vilkårlig startnode til å være det uferdige spenntreet *T*
- Vi velger neste kant til å være den kanten med minst vekt
  - som sammenkobler en node fra *T* og en node som *ikke* er i *T*
- I likhet med Dijkstra bruker vi en prioritetskø
- Her prioriterer vi nodene etter vekten på kanten
  - snarere enn den akkumulerte vekten av stien så langt (som vi gjorde for Dijkstra)





PRIMS ALGORITME FOR MINIMALE SPENNTRÆR (IMPLEMENTASJON)

ALGORITHM: PRIMS ALGORITME FOR MINIMALE SPENNTRÆR

Input: En sammenhengende, vektet, urettet graf $G = (V, E)$ med vektfunksjon w

Output: Et minimalt spenntre for G

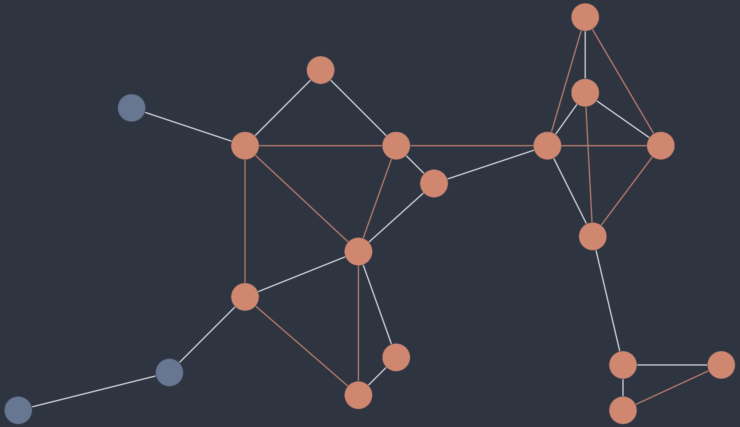
```
Procedure Prim(G)
    queue ← empty priority queue
    parents ← empty map
    Insert(queue, (null, s)) with priority 0, for some arbitrary s ∈ V
    while queue is not empty do
        (p, u) ← RemoveMin(queue)
        if u ∉ parents then
            parents[u] ← p
            for (u, v) ∈ E do
                Insert(queue, (u, v)) with priority w(u, v)
    return parents
```

- Kjøretidskompleksiteten er den samme som Dijkstra: $\mathcal{O}(|E| \cdot \log(|V|))$

KRUSKALS ALGORITME FOR MINIMALE SPENNTRÆR

- Kruskals algoritme for minimale spenntrær er i grådig, i likhet med Prim
- I motsetning til Prim bygger ikke Kruskal opp ett spenntre, men en spennskog
    - En spennskog er mange flere trær (eller en mengde med trær)
- Hvis *G* er sammenhengende vil Kruskal returnere ett spenntre
- hvis *G* består av flere komponenter returnerer Kruskal ett spenntre for hver komponent

Kruskals algoritme for minimale spenntrær (illustrasjon)



Borůvkas

- En siste algoritme for minimale spenntrær er Borůvkas
- I likhet med Kruskal gir den et minimalt spenntre for hver komponent i grafen G
- Den går ut på å anse hver node i grafen som et tre (som kun består av den noden)
  - Disse trærene utgjør en skog
- Iterativt gå over alle trærene velg den billigste kanten som forbinder treet med et annet
- Algoritmen terminerer når det ikke lenger finnes kanter som forbinder forskjellige trær

Borůvkas (eksempel)