Hashing

IN2010 – Algoritmer og Datastrukturer

Lars Tveito

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo
larstvei@ifi.uio.no

Høsten 2022

Oversikt uke 43

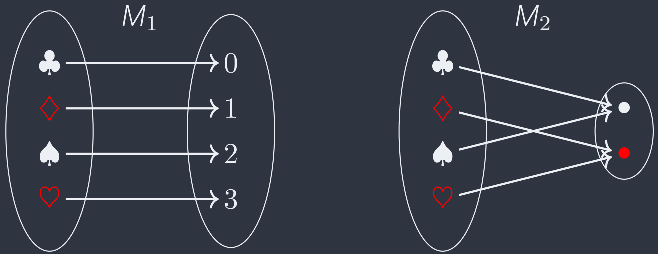
OVERSIKT UKE 43

- Vi skal lære om *hashing*
- Dette er den underliggende teknikken som gir oss hash maps og hash set
  - Svært effektive ordbøker og mengder
- Vi ønsker å bruke *arrayer* som underliggende datastruktur
- Hashing kan brytes opp i tre problemer
  1. gjøre en vilkårlig verdi om til et tall som brukes som en indeks
  2. hvordan håndtere to verdier som får samme indeks
  3. opprettholde en ideell størrelse på arrayet
- Målet er å få effektiv innsetting, oppslag og sletting

Map

Map

- Et map, helt generelt, assosierer en nøkkel med nøyaktig én verdi



- Den abstrakte datatypen for maps krever at vi kan
  - sette inn: $M_2.\texttt{put}(\square, \bullet)$
  - slå opp: $M_2.\texttt{get}(\square) \mapsto \bullet$
  - slette: $M_2.\texttt{remove}(\square)$
    - $M_2.\texttt{get}(\square) \mapsto ?$

Hashmap

- Et hashmap er en måte å materialisere den abstrakte datatypen map
- Vi bruker kun et enkelt array $\mathtt{A}$, sammen med en *hashfunksjon h*
- Hashfunksjonen konverterer en nøkkel *k* til et tall *i* der $0 \leq i < |\mathtt{A}|$
  - Vi kaller denne konverteringen for «å hashe»
- Som regel finnes det utrolig mange *mulige* nøkler
  - Det finnes for eksempel uendelig mange forskjellige strenger
- Det er umulig å koke uendelig mange ting ned til $|\mathtt{A}|$ tall
  - uansett hva størrelsen på $\mathtt{A}$ er
- Derfor vil vi få *kollisjoner*
  - Altså at to ulike nøkler blir konvertert til det samme tallet *i*
- Vi skal se på to måter å håndtere kollisjoner på

Hashfunksjoner

Hashfunksjoner

- En *funksjon* returner samme output for et gitt input *hver gang*
  - Altså er mange prosedyrer og metoder *ikke funksjoner*
- En *hashfunksjon h*
  - får en nøkkel *k* og et positivt heltall *N* som input
  - og returnerer et positivt heltall slik at $0 \leq h(k, N) < N$
- Den må være *konsistent* (altså være en *funksjon*)
  - Samme input gir *alltid* samme output
- Den må gi få *kollisjoner* (altså være godt distribuert)
  - Ulike input bør hashe til ulike output så ofte som mulig
- Ulike datatyper krever ulike hashfunksjoner

Hashfunksjoner – Eksempler på dårlige hashfunksjoner

Algorithm: En inkonsistent hashfunksjon

```
Input: En nøkkel k og et positivt heltall N
Output: Et heltall i slik at 0 ≤ i < N
Procedure Inconsistent(k, N)
    return Random(0, N − 1)
```

- Tilfeldige verdier er ideelt for å unngå kollisjoner, men dette er ikke en funksjon!

Algorithm: En dårlig distribuert hashfunksjon

```
Input: En nøkkel k og et positivt heltall N
Output: Et heltall i slik at 0 ≤ i < N
Procedure Collider(k, N)
    return 0
```

- Denne hashfunksjonen er konsistent, men alt kolliderer med alt!
- Vi ønsker funksjoner som ikke lider av noen av disse problemene

Distribusjon: strenger

- For å hashe en streng kan vi se på hver bokstav som et tall

Algorithm: En litt dårlig hashfunksjon på strenger

Input: En streng s og et positivt heltall N
Output: Et heltall h slik at $0 \leq h < N$

```
Procedure HashStringBad(s, N)
    h ← 0
    for every letter c in s do
        h ← h + charToInt(c)
    return h mod N
```

- Her summerer vi alle tallverdiene for bokstavene
- Til slutt returnerer vi denne summen *modulo N*
- Denne er konsistent og kan distribuere greit
  - Hvorfor er den allikevel ikke god i praksis?
  - Hint: $a + b = b + a$

Distribusjon: strenger

- Vi fortsetter med samme idé, men introduserer litt mer kaos!

Algorithm: En god hashfunksjon på strenger

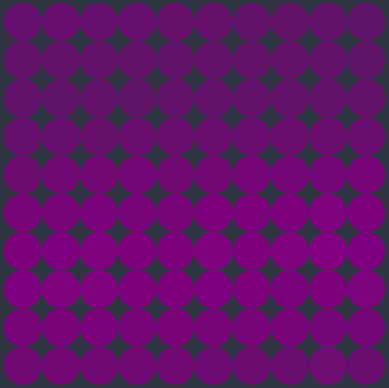
```
Input: En streng s og et positivt heltall N
Output: Et heltall h slik at 0 ≤ h < N
Procedure HashString(s, N)
    h ← 0
    for every letter c in s do
        h ← 31 · h + charToInt(c)
    return h mod N
```

- Denne er konsistent og distribuerer ganske godt!
  - Det er hashfunksjonen som brukes i Java

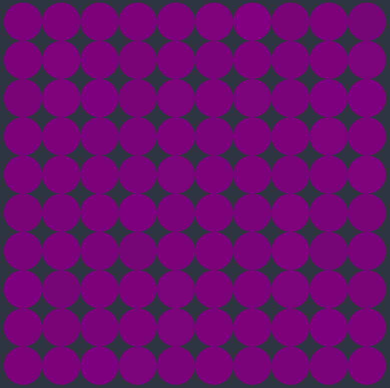
DISTRIBUSJON: `HashStringBad` VS `HashString`

- La oss hashe alle ordene i en ordbok
  - (den som ligger her på mange maskiner: `/usr/share/dict/words`)
- Den inneholder 235886 ord
- Vi kan teste hvor mange kollisjoner vi får for ulike verdier av N
- Hvis vi lar $N = 235886$ så får vi at
  - `HashStringBad`(”*algorithm*”, N) hasher til 967, med 577 kollisjoner
  - `HashString`(”*algorithm*”, N) hasher til 184369, med 1 kollisjon

DISTRIBUSJON: `HashStringBad` VS `HashString` (N=100)

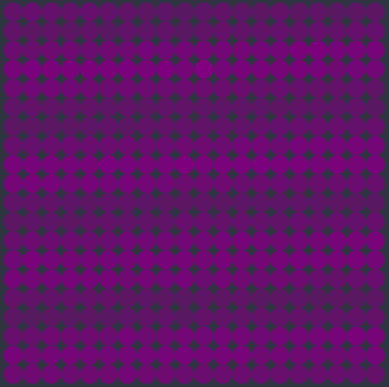


`HashStringBad`

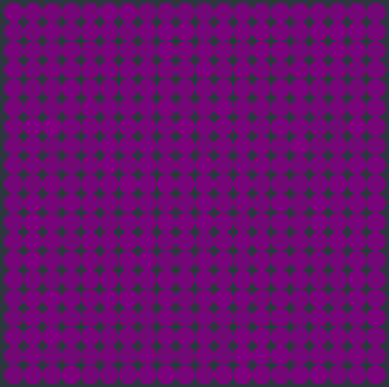


`HashString`

DISTRIBUSJON: `HashStringBad` VS `HashString` (N=400)



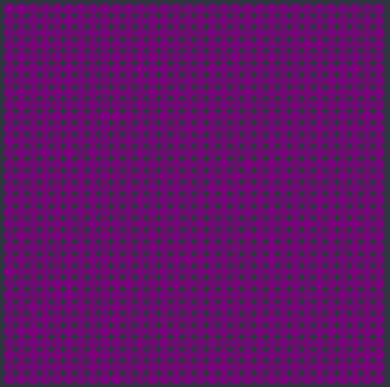
`HashStringBad`



`HashString`

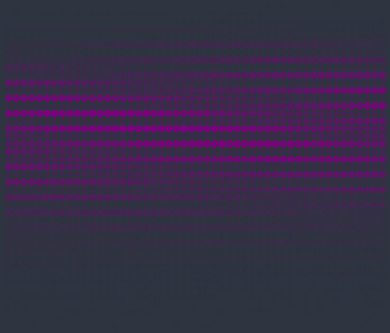
DISTRIBUSJON: `HashStringBad` VS `HashString` (N=1024)

`HashStringBad`

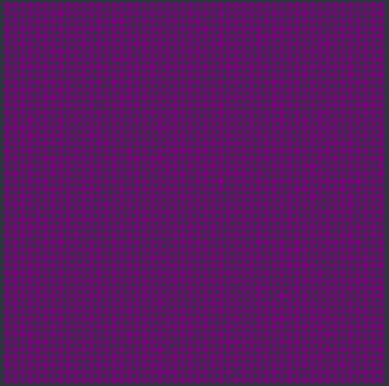


`HashString`

DISTRIBUSJON: HashStringBad VS HashString (N=2500)



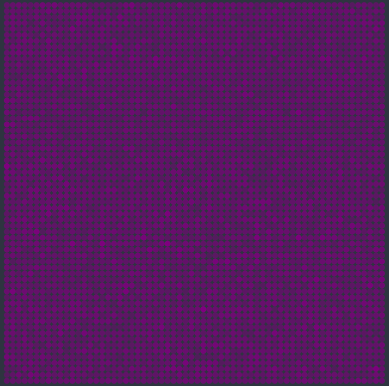
HashStringBad



HashString

DISTRIBUSJON: `HashStringBad` VS `HashString` (N=4096)

`HashStringBad`



`HashString`

Kollisjonshåndtering

KOLLISJONSHÅNDTERING

- Ved «Separate chaining» lar vi hver plass i arrayet peke til en «bøtte»
    - Vi tar utgangspunkt i at hver bøtte være en *lenket liste*
    - (Man kan for eksempel heller bruke binære søketrær)
- Ved «Linear probing» bruker vi kun arrayet
    - Ved kollisjoner ser vi etter neste ledige plass i arrayet
    - Dette er enkelt, men ved sletting må vi tenke oss litt om
- I denne seksjonen antar vi at vi har et array A med størrelse *N*, som inneholder mindre enn *N* elementer

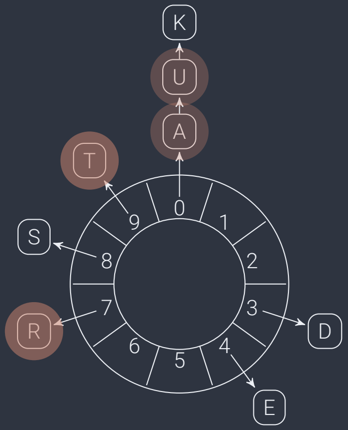
KOLLISJONSHÅNDTERING – SEPARATE CHAINING

- Innsetting: gitt en nøkkel k som hasher til i, og en verdi v
  1. La `B` $\leftarrow$ `A[i]`
  2. Hvis `B` er **`null`**, opprett en liste og sett inn (k, v)
  3. Ellers settes (k, v) inn på slutten av `B`
     - Hvis det finnes en node med nøkkel k på veien, erstattes verdien med v
- Oppslag: gitt en nøkkel k som hasher til i
  1. La `B` $\leftarrow$ `A[i]`
  2. Hvis B er **`null`**, returner **`null`**
  3. Hvis ikke, slå opp på nøkkelen k i B
- Sletting: gitt en nøkkel k som hasher til i
  1. La `B` $\leftarrow$ `A[i]`
  2. Hvis B er **`null`**, returner
  3. Hvis ikke, slett noden med nøkkelen k i B

KOLLISJONSHÅNDTERING – SEPARATE CHAINING (EKSEMPEL)

k	$h(k, 10)$
A	0
B	1
C	2
D	3
E	4
F	5
G	6
H	7
I	8
J	9
K	0
L	1
M	2
N	3
O	4
P	5
Q	6
R	7
S	8
T	9
U	0
V	1
W	2
X	3
Y	4
Z	5

Sett inn bokstavene fra ordet «datastrukturer»



Kollisjonshåndtering – Linear probing

- Innsetting: gitt en nøkkel k som hasher til i, og en verdi v
  1. Hvis `A[i]` er **`null`**, sett inn (k, v) på plass i og returner
  2. Hvis nøkkelen til `A[i]` er k, sett inn (k, v) på plass i og returner
  3. Gå til neste plass ($i \leftarrow i + 1 \bmod N$) og gå til steg 1
- Oppslag: gitt en nøkkel k som hasher til i
  1. Hvis `A[i]` er **`null`**, returner **`null`**
  2. Hvis nøkkelen til `A[i]` er k, returner verdien på `A[i]`
  3. Gå til neste plass ($i \leftarrow i + 1 \bmod N$) og gå til steg 1
- Sletting: gitt en nøkkel k som hasher til i
  1. Hvis `A[i]` er **`null`**, returner **`null`**
  2. Hvis nøkkelen på `A[i]` er ulik k, gå til steg 1 med ($i \leftarrow i + 1 \bmod N$)
  3. Hvis nøkkelen på `A[i]` er lik k, sett `A[i]` til **`null`**
  4. *Tett hullet*

Kollisjonshåndtering – Linear probing (tett hullet)

- Etter fjerning må vi passe på at vi tetter eventuelle hull
- Husk at alle algoritmene for linear probing terminerer ved tomme plasser
  - Derfor kan vi miste elementer hvis vi ikke tetter hullet
- Vi har to strategier:
  1. Markér plassen som slettet
     - Ved søk vil vi ikke stoppe på markerte felter
     - Ved innsetting vil vi anse markerte felter som ledig
     - Flaggene forsvinner ved neste rehash (se neste seksjon)
  2. Hvis hullet er på plass *i*, tett hullet (uten juks)
     - Søk etter en nøkkel som hasher til *i* eller tidligere
     - Hvis treffer en `null`, kan vi avslutte
     - Finner vi en slik nøkkel flyttes den (sammen med verdien) til plass *i*
     - Så må vi tette det nye hullet på samme måte

Effektivitet

Effektivitet – Load factor

- For at et hashmap skal være effektivt må vi velge en god størrelse på arrayet
- Dersom arrayet er lite (i forhold til antall elementer) vil vi kunne
  - for separate chaining få lange lister, som bruker lineær tid på alle operasjoner
  - for linear probing få lange segmenter uten hull, som igjen gir lineær tid
- Dersom arrayet er for stort, sløser vi med plass
- Load factor angir forholdet mellom antall elementer n i hashmappen og størrelsen på arrayet N
  - altså er load factor gitt ved $\frac{n}{N}$
- Å finne en ideell load factor bør avgjøres eksperimentelt
  - men antageligvis ligger den mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{4}$
  - altså kan hashmappen bare være litt mer en halvfull

Effektivitet – Rehashing

- Dersom arrayet blir for fullt (altså for høy load factor) gjør vi rehashing
- Det betyr å:
    1. lage et større array
    2. sette inn alle elementene fra det forrige arrayet
- Det samme kan man gjøre dersom hashmappen blir for tomt
    - Ofte gjør man ikke det i praksis

En uformell kjøretidsanalyse

- Ved å gjøre en ordinær kjøretidsanalyse vil vi se på hvor mange steg algoritmene vil bruke i *verste tilfelle*
- For hashmap gir en slik analyse lineær tid på alle operasjoner
  - Det holder å anta at alle nøkler hasher til samme tall
  - Separate chaining oppfører seg da som lenkede lister
  - Linear probing oppfører seg som uordnede arrayer
- Alikevel påstår vi at hashmaps er *svært effektive*
  - Dette er en indikasjon på at en verste tilfelle $\mathcal{O}$-analyse ikke gir et godt bilde av effektiviteten av hashmaps
- For hashmaps bruker vi noe som kalles *forventet amortisert* kjøretidsanalyse
  - Å gjøre forventet amortisert kjøretidsanalyse er ikke pensum i IN2010
  - Men vi skal vite hva det betyr i konteksten av hashmaps

En uformell (forventet) kjøretidsanalyse

- La oss anta at vi har en god hashfunksjon som gir en uniformt tilfeldig fordeling
- Vi ønsker å vise at sjansen er forsvinnende liten for at *mange* elementer hasher til samme posisjon
- Sjansen for at en nøkkel *k* hasher til *i* er $\frac{1}{N}$
- Sjansen for at vi har mange nøkler $k_1, k_2, \ldots, k_m$ som alle hasher til *i* blir

$$\overbrace{\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} \cdots \frac{1}{N}}^{m} = (\frac{1}{N})^m$$

  - Dette tallet blir forsvinnende lite når *m* vokser
- Generelt er sjansen for kollisjoner liten så lenge det er god plass i arrayet
  - ethvert som arrayet fylles opp, så øker sjansen for kollisjoner
  - men sjansen for at kollisjonene oppstår på de samme posisjonene er fremdeles liten
- Oppslag og sletting er *forventet* $\mathcal{O}(1)$
  - Innsetting er *forventet amortisert* $\mathcal{O}(1)$

En uformell (amortisert) kjøretidsanalyse

- Når arrayet blir for fullt gjør vi en rehash
  - Altså, konstruerer et nytt array og setter inn alle elementene på nytt
  - Dette er definitivt lineær tid!
- Innsettingen som forårsaker en rehash er lineær tid
  - Dette kan ses på som verste tilfelle
- I amortisert kjøretidsanalyse ser vi heller på *alle innsettingene som ledet opp til en rehash* under ett
- Anta at en rehash skjer etter n innsettinger
  - der hver innsetting frem til rehashen bruker $\mathcal{O}(1)$ steg
- Anta videre at en rehash bruker $c \cdot n$ steg, der c er en konstant
- Vi kan nå *fordele* kostnaden av rehashen på *alle innsettingene*
  - Altså kan vi si at hver innsetting gjorde c ekstra steg
  - Hver innsetting bruker fremdeles konstant tid, siden $\mathcal{O}(1 + c) = \mathcal{O}(1)$
- Merk at innsetting i hashmaps vil være inneffektiv en sjelden gang
  - Dette kan være en viktig å være klar over for sanntidsapplikasjoner

Effektivitet

- Hash maps er utrolig raske i praksis, og ekstremt anvendelige
- I en verste tilfelle analyse har de $\mathcal{O}(n)$ på alle operasjoner
- Men dersom man antar en god hashfunksjon får vi *forventet amortisert* $\mathcal{O}(1)$
- Rehashing tar $\mathcal{O}(n)$ tid, men det skjer sjeldent