pirates-problem

Ерофей Башунов

15 сентября 2022

Условие

Пираты захватили судно с экипажем из $n = 2^m - 1$ человека. Отчаявшись получить выкуп, они приняли решение избавиться от заложников. Главарь пиратов сгенерировал n независимых двоичных равномерно распределенных случайных значений x_i. Заложники размещаются в одиночных камерах. Главарь сообщает i-ому заложнику значения x_j,$j \neq i$ вместе с их номерами j и предлагает угадать значение x_i. Заложник может дать ответы 0, 1 и "не знаю". В том случае, если все заложники дают ответ "не знаю"или любой из них оглашает неправильное значение x_i, всех заложников казнят. В противном случае все заложники будут освобождены. После оглашения условий этой игры, но до распределения заложников по камерам и выдачи значений x_j, заложникам разрешается встретиться и выработать стратегию действий.

Необходимо:

- Предложить стратегию действий заложников, максимизирующую вероятность их спасения.
- Оценить кровожадность пиратов, т.е. вероятность казни заложников при использовании ими предложенной стратегии.

Решение

Рассуждение

Для начала разберёмся, что от нас вообще просят. Поскольку заложники не могут общаться друг с другом после того, как узнают числа, наша стратегия будет зависеть только от известных чисел, и больше ни от чего другого. А следовательно, для любого вектора x стратегия должна выдавать либо успех, либо проигрыш. В таком случае, наша стратегия должна уметь выдавать успех для k возможных вариантов вектора x (где $k \leq 2^n$), причём k для каждого n должно быть максимальным.

Поскольку из всего вектора x каждому заложнику неизвестен лишь один элемент, все возможные варианты, которые могут выбрать заложники, находятся внутри шара Хэмминга радиуса 1 от искомого значения, причём все неверные варианты имеют расстояние Хэмминга друг с другом 2.

Тогда давайте в нашей стратегии попытаемся исходно декомпозировать пространство всех возможных векторов x в множество s попарно непересекающихся шаров Хэмминга радиуса 1. В таком случае, искомое значение вектора будет находиться либо в центре какого-то шара, либо на его границе. В первой ситуации каждый заложник будет знать, что оба допустимых для него значения x будут находиться внутри конкретного шара. Во второй ситуации лишь единственный заложник будет знать, что оба допустимых для него значения x будут находиться внутри конкретного шара, в то время как для остальных заложников оба возможных значения будут находиться в разных шарах.

Тогда давайте использовать такую стратегию, при которой каждый заложник в ситуации, когда оба возможных его значения x находятся внутри одного шара из нашей декомпозиции, будет выбирать из этих значений то, которое не является центром этого шара. В ином случае заложник выдавать ответ не будет. Тогда у нас будет s ситуаций, когда все n заложников ошибутся, и $k = 2^n - s$ ситуаций, когда ровно 1 сможет выдать верный ответ. Заметим, что при минимальном возможном значении s такая стратегия является оптимальной, т.к. успешный ответ выдаёт минимально возможное количество заложников (при большем количестве вероятность угадывания будет снижаться), а проигрышный ответ выдают сразу все заложники.

Решение

Теперь для полноценного конструирования стратегии осталось предъявить такой алгоритм декомпозиции пространства двоичных векторов длины n на минимально возможное количество шаров Хэмминга радиуса 1. Тогда в качестве центров этих шаров возьмём вектора без ошибок в коде Хэмминга длины n (здесь нам и пригодится знание о том, что $n = 2^m - 1$).

Оценка

Так как каждый шар Хэмминга из нашей декомпозиции содержит 1 центровую точку и n точек на границе (так как в векторе длины n всего можно допустить n ошибок), то на каждое проигрышное решение приходится n выигрышных: $k = n \cdot s$.

Итоговая оценка кровожданости пиратов равна:

$$\frac{k}{k+s} = \frac{ns}{(n+1)s} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^m - 1 + 1} = 1 - 2^{-m}$$