ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1
по курсу "Численные методы"

3 курс, весенний семестр, 2020 г.

1. Исследовать произвольно придуманное уравнение вида $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n \geq 5$, имеющее хотя бы один вещественный корень. Локализовать вещественные корни и найти их численно методом простых итераций или методом Ньютона с относительной погрешностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

2. Исследовать поведение итерационной последовательности при решении уравнения $x = rx(1-x)$ (x – искомое неизвестное, $r>0$ – параметр) методом простых итераций: $x^{(i+1)} = r\, x^{(i)}\left(1 - x^{(i)}\right)$ [1].

Показать численно, что при $0<r<1$ итерационная последовательность монотонно сходится к корню $x_1=0$, а при $1<r<3$ – к корню $x_2 = 1-1/r$, причем при $1<r<2$ – монотонно, а при $2<r<3$ – колебательно. Интерпретировать результаты с точки зрения теоремы о сходимости метода простых итераций.

Показать численно, что в диапазонах $3<r<r_1$, $r_1<r<r_2$, $r_2<r<r_3$, …, $r_n<r<r_{n+1}$, …, где $r_n = r_\infty - 1/\delta^n$, $r_\infty = 3.5699456\ldots, \delta = 4.66920116\ldots$ (т.н. константы Фейгенбаума) итерационная последовательность распадается соответственно на 2, 4, 8, …, 2^n , … подпоследовательностей, каждая из которых имеет свой предел, отличный от корней уравнения (т.н. каскад бифуркаций удвоения периода).

Показать численно, что в диапазоне $r_\infty < r < 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на случайное (т.н. детерминированный хаос). Пронаблюдать, что в зависимости от величинах параметра r из этого диапазона «квазислучайное» поведение итерационной последовательности существенно меняется. В частности, при некоторых значениях r имеются области сгущения и разрежения итерационной последовательности, а в окрестности $r=4$ ее поведение становится похожим на белый шум.

Для представления результатов нарисовать графики $i \to x^{(i)}$, $x^{(i)} \to r\, x^{(i)}\left(1-x^{(i)}\right)$ (вместе с $x \to y = x$ - т.н. траектория сходимости), $r \to$ пределы итерационной последовательности или соответствующих подпоследовательностей (т.н. бифуркационная диаграмма).

3. Исследовать поведение итерационной последовательности при решении уравнения $z^3 - 1 = 0$ в комплексной плоскости методом Ньютона. В качестве начального приближения использовать точки, находящиеся в квадрате $-2 \leq \Re(z) \leq 2, -2 \leq \Im(z) \leq 2$ с разрешением, соответствующим одному пикселу на экране компьютера. В зависимости от того, к какому из трех корней уравнения сойдется итерационная последовательность, присвоить начальной точке один из трех выбранных цветов, если последовательность не сойдется, то присвоить начальной точке четвертый цвет. Убедиться, что области притяжения трех

---

[1] Это соотношение можно интерпретировать как «логистическое отображение», которое описывает, например, динамику вклада в банке при законодательном ограничении процентов или динамику численности популяции животных при ограничении кормовой базы.

корней уравнения (т.н. бассейны) имеют фрактальную границу. Нарисовать траектории сходимости для произвольно выбранных начальных приближений.