

# **IML** でも **CML** でもない 直観主義様相論理について

---

佐藤雄太

第 60 回 MLG 数理論理学研究集会 (神戸大学, 2025/12/20)

神戸大学大学院 システム情報学研究科 情報数理研究室

直観主義様相論理の分野は、それぞれの研究者が「直観主義の様相論理」に求める要素の違いから、IML (Intuitionistic Modal Logic) と CML (Constructive Modal Logic) という二つの勢力に分かれている。

現在、直観主義様相論理の分野全体の状況を俯瞰するようなサーベイを行っている。その過程で遭遇した、どちらの勢力にも属さないような論理について発表する。

# スライドの PDF

[cannorin.net/math/mlg60.pdf](http://cannorin.net/math/mlg60.pdf)



# 目次

---

古典様相論理 **K** と直観主義論理 **Int**

Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic

IML でも CML でもない論理

# 古典様相論理 $K$ と直観主義論理 $\text{Int}$

---

# 記法

- 命題変数全体の集合  $\text{PropVar} = \{p, q, \dots\}$
- 命題論理の言語  $\mathcal{L}_p := \text{PropVar} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$
- 様相論理の言語  $\mathcal{L}_{\Box\Diamond} := \mathcal{L}_p \cup \{\Box, \Diamond\}$
- $\top$  は  $\perp \rightarrow \perp$  の略記,  $\neg\varphi$  は  $\varphi \rightarrow \perp$  の略記,  
 $\varphi \leftrightarrow \psi$  は  $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$  の略記とする

# K と Int

- CI を古典命題論理とする
- 直観主義命題論理 Int は CI から排中律を除いて得られる
- 様相論理 K は CI に  $M_{\Box}$ ,  $N_{\Box}$ ,  $C_{\Box}$ ,  $Dual_{\Box}$  を加えて得られる
  - これらの代わりに  $M_{\Diamond}$ ,  $N_{\Diamond}$ ,  $C_{\Diamond}$ ,  $Dual_{\Diamond}$  を加えてよい

$M_{\Box}$	$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Box\varphi \rightarrow \Box\psi}$	$M_{\Diamond}$	$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi}$
$N_{\Box}$	$\Box T$	$N_{\Diamond}$	$\neg\Diamond\perp$
$C_{\Box}$	$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$	$C_{\Diamond}$	$\Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$
$Dual_{\Box}$	$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$	$Dual_{\Diamond}$	$\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

(後の都合で, K 公理・Nec 規則ではなく上記を使う)

**K** も **Int** も Kripke 意味論をもつ:

## Definition

- $\mathfrak{F} = (W, R)$  は Kripke フレーム  
 $\iff W \neq \emptyset, R \subseteq W \times W$
- $\mathfrak{M} = (W, R, V)$  は Kripke モデル  
 $\iff (W, R)$  が Kripke フレーム,  $V : \text{PropVar} \rightarrow \mathcal{P}(W)$

**K** と **Int** では  $R$  と  $V$  に関する条件が異なり, 充足可能性も異なるものを用いる (次頁).

# K の Kripke 意味論

K では  $R$  を任意の関係  $\sqsubset$  とし,  $V$  にも特に条件を課さない.

## Definition (K-Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \sqsubset, V)$  に対し,  $\Vdash_{\mathfrak{M}}^K$  を以下で定める:

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K p : \iff x \in V(p)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi \wedge \psi : \iff x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi \ \& \ x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \psi$
- ...
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \Box \varphi : \iff \forall y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \Diamond \varphi : \iff \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi)$

# Int の Kripke 意味論

Int では  $R$  を任意の推移的・反射的な関係  $\leq$  とする。

また  $V$  に以下の条件を課す:

$$x \leq x' \ \& \ x \in V(p) \implies x' \in V(p)$$

## Definition

上を満たすものを 直観主義フレーム・モデル と呼ぶことにする

## Definition (Int-Satisfaction Relation)

直観主義モデル  $\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$  に対し,  $\Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}}$  を以下で定める:

$$x \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \rightarrow \psi : \iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \psi)$$

## Fact (Persistency)

$$x \leq x' \ \& \ x \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \implies x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi.$$

# $\mathbf{K}$ と $\mathbf{Int}$ の完全性

## Definition (Validity)

- $\mathfrak{M} \vDash^\bullet \varphi : \iff \forall x \in W (x \Vdash_{\mathfrak{M}}^\bullet \varphi)$
- $\mathfrak{F} \vDash^\bullet \varphi : \iff \forall V ((\mathfrak{F}, V) \vDash^\bullet \varphi)$
- Kripke フレームのクラス  $\mathcal{C}$  に対して,

$$\mathcal{V}(\Vdash^\bullet, \mathcal{C}) := \{\varphi \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C} (\mathfrak{F} \vDash^\bullet \varphi)\}$$

## Fact (Completeness)

- $\mathbf{K} = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathbf{K}}, \mathcal{C}_{\mathbf{K}})$ .  $\mathcal{C}_{\mathbf{K}}$  は Kripke フレーム全体のクラス.
- $\mathbf{Int} = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathbf{Int}}, \mathcal{C}_{\mathbf{Int}})$ .  $\mathcal{C}_{\mathbf{Int}}$  は直観主義フレーム全体のクラス.

# **Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic**

---

# Fusion モデル

$\mathbf{K}$  の直観主義版を考えたい。そのモデルは Kripke モデルと直観主義モデルの fusion となるだろう。

## Definition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$  が以下を満たすとき Fusion モデル と呼ぶ：

- $(W, \leq, V)$  が直観主義モデル、すなわち  $\leq$  は推移的かつ反射的で、 $x \leq x' \ \& \ x \in V(p) \Rightarrow x' \in V(p)$ .
- $(W, \sqsubset, V)$  が Kripke モデル.

Fusion フレームについても同様に定める。

これに対しても充足可能性を定めたい。

# Extrinsic Satisfaction Relation (1/2)

まず素朴に  $\Vdash^K$  と  $\Vdash^{\text{Int}}$  を組み合わせたものを考えよう.

## Definition (Extrinsic Satisfaction Relation)

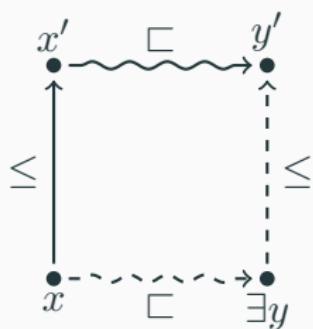
$\mathfrak{M} = (W, \leq, \Box, V)$  を Fusion モデルとする.

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi \rightarrow \psi : \iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \Box \varphi : \iff \forall y \Box x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \Diamond \varphi : \iff \exists y \Box x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi)$

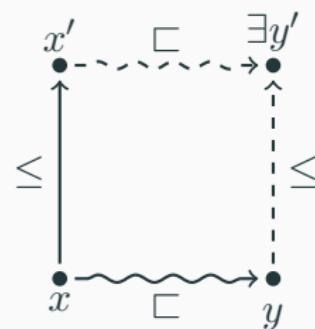
$\Vdash^e$  は必ずしも persistency を持たず、別途  $\mathfrak{M}$  にフレーム条件を加えてやる必要がある（次頁）. persistency をフレーム条件で外付けするので 外部的充足可能性 (extrinsic-) と呼ぶことにする.

## Extrinsic Satisfaction Relation (2/2)

$\Vdash^e$  は必ずしも persistency を持たず、別途  $\mathfrak{M}$  にフレーム条件を加えてやる必要がある。



$\Box$ -p 条件



$\Diamond$ -p 条件

$\Box$ -p 条件が  $\Box\varphi$  の形の論理式の persistency を、  
 $\Diamond$ -p 条件が  $\Diamond\varphi$  の形の論理式の persistency を保証する。

# Intrinsic Satisfaction Relation

フレーム条件で外付けするのではなく，充足可能性の定義 자체を  
変えることで persistency を内蔵するアプローチもあり，これを  
内部的充足可能性 (intrinsic-) と呼ぶことにする.

## Definition (Intrinsic Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsupset, V)$  を Fusion モデルとする.

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi \rightarrow \psi : \iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \Box \varphi : \iff \forall x' \geq x \forall y' \sqsupset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \Diamond \varphi : \iff \forall x' \geq x \exists y' \sqsupset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi)$

$\Box/\Diamond$  でも直観主義側の到達可能関係  $\leq$  を見ることによって，  
何もフレーム条件を加えなくても persistency が保証される.

# Intrinsic vs. Extrinsic

$\Vdash^e$  と  $\Vdash^i$  がそれぞれ妥当とする論理式の集合は 一致しない.

## Definition

- $\mathcal{C}_f$ : Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathcal{C}_{\text{box}-p}$ :  $\Box-p$  条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathcal{C}_{\text{dia}-p}$ :  $\Diamond-p$  条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.

## Proposition

$$\mathcal{V}(\Vdash^i, \mathcal{C}_f) \subsetneq \mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box}-p} \cap \mathcal{C}_{\text{dia}-p}).$$

例えば以下の論理式が右辺に含まれ、また左辺に含まれない:

- $C_\Diamond : \Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$
- $\neg\neg\Box\perp \rightarrow \Box\perp$  (Das and Marin 2023)

# Constructive Modal Logic

Wijesekera, Mendler & de Paiva らは構成主義の観点から  $C_\Diamond$  自体を疑問視し, Constructive Modal Logic (CML) を作った.  
代表的な CML として **CK** (今回は触れない) や **WK** がある:

## Definition (WK)

$$\mathbf{WK} := \mathbf{Int} + M_{\Box} + N_{\Box} + C_{\Box} + M_{\Diamond} + N_{\Diamond} + \mathbf{FS1}.$$

ここで  $\mathbf{FS1} := \Diamond(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Diamond\psi).$

彼らは  $\Vdash^i$  を充足可能性として採用した.

## Fact (Wijesekera 1990)

$$\mathbf{WK} = \mathcal{V}(\Vdash^i, \mathcal{C}_f).$$

## Simpson の 6 条件

一方 Fischer Servi, Ewald, Plotkin & Stirling, Simpson らは「真の直観主義版  $\mathbf{K}$ 」といえるものを追い求めた。

Simpson は特に直観主義一階述語論理 (iFOL) との対応を重視し,  $\Box$  には  $\forall$  的な,  $\Diamond$  には  $\exists$  的な性質を求めた。

- $\Box$  と  $\Diamond$  が独立 (not interdefinable) であるべきで, つまり  $\text{Dual}_{\Box}$  も  $\text{Dual}_{\Diamond}$  も定理として持つべきでない。
- 排中律を加えると古典版の  $\mathbf{K}$  が得られるべき。
- 標準翻訳で iFOL とぴったり対応するべきで, 少なくとも  $\Box \neg \varphi \leftrightarrow \neg \Diamond \varphi$  と  $\Diamond \neg \varphi \rightarrow \neg \Box \varphi$  を定理として持つべき。

さらに 3 つの条件 \* を加えたものを Simpson の 6 条件 と呼ぶ。

---

\*今回登場する論理は全て満たすので特に触れない

# Intuitionistic Modal Logic (1/3)

Simpson は以下の理由から 「WK は真の直観主義版 K とはいえない」と批判した:

- $\mathbf{WK} \not\vdash \neg\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$  である.
- WK に排中律を加えても古典版の K が得られない.

一方 Simpson の 6 条件をすべて満たす論理として IK がある:

## Definition

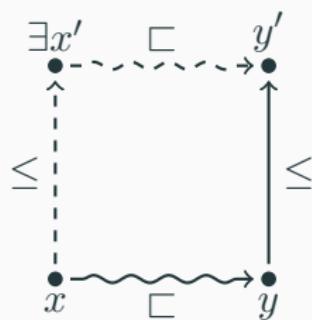
$$\mathbf{IK} := \mathbf{WK} + C_{\Diamond} + \text{FS2}.$$

ここで  $\text{FS2} := (\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi).$

IK やその拡張は Intuitionistic Modal Logic (IML) と呼ばれる.

## Intuitionistic Modal Logic (2/3)

FS2 :  $(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$  がまさに  $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$  に必要な公理で、これは以下のフレーム条件に対応する。



### Definition

$\mathcal{C}_{fs2}$ : 上を満たす Fusion フレーム全体のクラス.

# Intuitionistic Modal Logic (3/3)

そして彼らは  $\Box$  については persistency を内蔵し,  
 $\Diamond$  についてはフレーム条件で persistency を外付けする,  
 $\Vdash^i$  と  $\Vdash^e$  のハイブリッドのような充足可能性を用いた.

## Definition (Hybrid Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$  を Fusion モデルとする.

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \rightarrow \psi : \iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \Box \varphi : \iff \forall x' \geq x \forall y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \Diamond \varphi : \iff \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi)$

## Fact (Fischer Servi 1984, Simpson 1994)

$$\mathbf{IK} = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{fs2} \cap \mathcal{C}_{dia-p}).$$

	WK	IK
充足可能性	$\Vdash^i$	$\Vdash^h$
フレームのクラス	$\mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_{fs2} \cap \mathcal{C}_{dia-p}$
$C_\diamond$ を	もたない	もつ
$\Box$ と $\Diamond$ が $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ が 排中律で $K$ に	独立 示せない ならない	独立 示せる なる

- 構成主義の観点から公理  $C_\diamond$  を疑問視する  $\rightarrow$  CML
- 標準翻訳で iFOL と対応することを重視する  $\rightarrow$  IML
- 両者の要求は両立しない
- 一般に IML は CML の拡張になる (e.g.  $WK \subsetneq IK$ )

# 疑問

直観主義様相論理の状況を見た上で、以下の疑問が浮かぶ：

## Problem

古典様相論理に慣れていると、 $\Vdash^e$  ではなぜダメなのかと思う。  
論理  $\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  は実際どうなっていて、  
本当に Simpson の 6 条件を満たさないのか？

## Problem

$\Vdash^h$  の persistency には  $\Diamond\text{-}p$  条件だけあればよいはず。  
論理  $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  は実際どうなっているのか？

これらの論理を調べると、IML とも CML とも言いたいことが分かった。

# IML でも CML でもない論理

---

# $\Vdash^h$ と $\Vdash^e$ が同値になる条件

実は  $\Box\text{-p}$  条件を満たすフレーム下では  $\Vdash^h$  と  $\Vdash^e$  が同値になる:

## Proposition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$  が  $\Box\text{-p}$  と  $\Diamond\text{-p}$  を満たすならば,  
任意の  $x \in W$ ,  $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\Diamond}$  で  $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \iff x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi$ .

## Corollary

$$\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}) = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

よってまず  $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  を公理化し, カノニカルモデルを与えて議論してから, そこに何か公理を足すことで, カノニカルモデルに  $\Box\text{-p}$  条件を強制できないか考えることにした.

# FIK (1/2)

**IK** から公理 FS2 を取り除いて得られる論理  $\mathbf{IK}^- := \mathbf{WK} + C_\Diamond$  が  
いかにも  $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  の公理化になっていそうだが,  
実はそうではないことが最近 Balbiani et al. によって示された.

## Definition

$$\mathbf{FIK} := \mathbf{IK}^- + \text{wCD}.$$

ここで  $\text{wCD} := \Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\Diamond \varphi \rightarrow \Box \psi) \rightarrow \Box \psi).$

## Theorem (Balbiani et al. 2024)

$$\mathbf{FIK} = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

## Proof.

( $\subseteq$ ) 簡単. ( $\supseteq$ ) カノニカルモデルを与える.

□

## FIK (2/2)

FIK は IK より真に弱い論理になる:

**Proposition (Balbiani et al. 2024)**

$$\text{FIK} \subsetneq \text{IK}.$$

公理 wCD は公理 FS2 を弱めたものといえる。

さらに以下が成立する。

**Proposition (Balbiani et al. 2024)**

FIK に排中律を加えると K が得られる。

**Proposition (S.)**

$$\text{FIK} \not\vdash \neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi.$$

よって FIK は標準翻訳で iFOL と対応しないことになる。

# eIK<sup>-</sup> (1/2)

Balbiani らの **FIK** と、そのカノニカルモデルの構成を元にして、  
 $\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  の公理化を得ることができた。

## Definition

$$\mathbf{eIK}^- := \mathbf{IK}^- + \text{CD}.$$

ここで  $\text{CD} := \Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond \varphi \vee \Box \psi)$ .

## Theorem (S.)

$$\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

## Proof.

まずカノニカルモデルを用いて  $\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$  を示す。  
そして  $\Box$ -p を満たすモデルで  $\Vdash^h$  と  $\Vdash^e$  が一致することを使う。 □

## eIK<sup>-</sup> (2/2)

公理 CD:  $\square(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \square\psi)$  は明らかに公理 wCD:  
 $\square(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\Diamond\varphi \rightarrow \square\psi) \rightarrow \square\psi)$  の強化で、以下が示せる。

### Proposition (S.)

$$\text{FIK} \subsetneq \text{eIK}^-.$$

しかし公理 FS2 :  $(\Diamond\varphi \rightarrow \square\varphi) \rightarrow \square(\varphi \rightarrow \psi)$  とは比較不能。

### Proposition (S.)

$$\text{eIK}^- \subseteq \text{IK} \text{ でも } \text{IK} \subseteq \text{eIK}^- \text{ でもない.}$$

その他の性質については、概ね FIK と同様になっている。

### Proposition (S.)

- $\text{eIK}^-$  に排中律を加えると  $\text{K}$  が得られる。
- $\text{eIK}^- \not\vdash \neg\neg\Diamond\varphi \rightarrow \square\neg\varphi$ .

## 結論 (1/2)

	WK	FIK	IK	eIK <sup>-</sup>
充足可能性 フレームのクラス	$\Vdash^i$ $\mathcal{C}_f$	$\Vdash^h$ $\mathcal{C}_{dia-p}$	$\Vdash^h$ $\mathcal{C}_{fs2} \cap \mathcal{C}_{dia-p}$	$\Vdash^e$ $\mathcal{C}_{box-p} \cap \mathcal{C}_{dia-p}$
$C_\diamond$ を	もたない	もつ	もつ	もつ
$\Box$ と $\Diamond$ が $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ が 排中律で K に	独立 示せない ならない	独立 示せない なる	独立 示せる なる	独立 示せない なる

FIK と eIK<sup>-</sup> は  $C_\diamond$  をもつという意味で CML とは言えない。  
 一方  $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$  が示せず、よって標準翻訳で iFOL と対応しないので、その意味で IML とも言えない。

## 結論 (2/2)

- CML の要求も IML の条件も満たさない論理 **FIK** が、ちょうど **WK** と **IK** の間に割って入るようにして存在する。
- $\Box$  と  $\Diamond$  を古典様相論理と同様に  $\Box$  のみで評価すると、**IK** と比較不能な **FIK** の拡張である  $eIK^-$  が得られ、同様に CML の要求も IML の条件も満たさない。
- Simpson の 6 条件では「排中律を加えて **K** が得られる」と「標準翻訳で iFOL と対応する」が分けられているが、実際に前者のみしか満たさない non-artificial な例が取れた。

ありがとうございました

cannorin.net/math/mlg60.pdf



## 補遺・参考文献

---

## Definition

述語  $\sqsubset$  と述語  $V_p$  ( $p \in \text{PropVar}$ ) を持つ一階言語  $\mathcal{L}_{\text{ST}}$  を考える。  
 $\varphi \in \mathcal{L}_{\square\diamond}$  と自由変数  $x$  に対して  $\text{ST}_x(\varphi) \in \mathcal{L}_{\text{ST}}$  を以下で定める。

- $\text{ST}_x(\perp) = \perp, \text{ST}_x(p) = V_p(x)$
- $\text{ST}_x(\psi_1 \odot \psi_2) = \text{ST}_x(\psi_1) \odot \text{ST}_x(\psi_2)$  ( $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ )
- $\text{ST}_x(\square\psi) = \forall y (x \sqsubset y \rightarrow \text{ST}_y(\psi))$  ( $y$ : fresh)
- $\text{ST}_x(\diamond\psi) = \exists y (x \sqsubset y \wedge \text{ST}_y(\psi))$  ( $y$ : fresh)

## Fact

$\mathbf{K} \vdash \varphi \iff$  全ての古典  $\mathcal{L}_{\text{ST}}$ -構造で  $\forall x \text{ST}_x(\varphi)$  が妥当

Simpson はこれと同様な対応を IML と iFOL の間に求めた。

# 参考文献

今回の発表は、未発表のサーベイ論文を元にしている。

- Gisèle Fischer Servi. Axiomatizations for some intuitionistic modal logics. *Rendiconti del Seminario Matematico*, 42(3):179–194, 1984.
- Duminda Wijesekera. Constructive modal logics I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 50(3):271–301, 1990.
- Alex K. Simpson. The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.
- Michael Mendler and Valeria de Paiva. Constructive CK for Contexts. *Context Representation and Reasoning*, 13, 2005.
- Anupam Das and Sonia Marin. On Intuitionistic Diamonds (and Lack Thereof). *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, 14278:283–301, 2023.
- Philippe Balbiani, Han Gao, Çigdem Gencer, and Nicola Olivetti. A Natural Intuitionistic Modal Logic: Axiomatization and Bi-Nested Calculus. *LIPICS*, 88:13:1–13:21, 2024.