

IML でも CML でもない 直観主義様相論理について

佐藤雄太

第 60 回 MLG 数理論理学研究集会

神戸大学, 2025/12/20

神戸大学大学院 システム情報学研究科 情報数理研究室

直観主義様相論理の分野は、それぞれの研究者が「直観主義の様相論理」に求める要素の違いから、IML (Intuitionistic Modal Logic) と CML (Constructive Modal Logic) という二つの勢力に分かれている。

現在、直観主義様相論理の分野全体の状況を俯瞰するようなサーベイを行っている。その過程で遭遇した、どちらの勢力にも属さないような論理について発表する。

スライドの PDF

cannorin.net/math/mlg60.pdf



目次

古典様相論理 **K** と直観主義論理 **Int**

Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic

IML でも CML でもない論理

古典様相論理 K と直観主義論理 Int

記法

- PropVar: 命題変数全体の集合
- $\mathcal{L}_p = \text{PropVar} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$
- $\mathcal{L}_{\Box\Diamond} = \mathcal{L}_p \cup \{\Box, \Diamond\}$
- \top は $\perp \rightarrow \perp$ の略記, $\neg\varphi$ は $\varphi \rightarrow \perp$ の略記,
 $\varphi \leftrightarrow \psi$ は $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ の略記とする

K と Int

- CI を古典命題論理とする
- 直観主義命題論理 Int は CI から排中律を除いて得られる
- 様相論理 K は CI に M_{\Box} , N_{\Box} , C_{\Box} , $Dual_{\Box}$ を加えて得られる
 - これらの代わりに M_{\Diamond} , N_{\Diamond} , C_{\Diamond} , $Dual_{\Diamond}$ を加えてよい

M_{\Box}	$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Box\varphi \rightarrow \Box\psi}$	M_{\Diamond}	$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi}$
N_{\Box}	$\Box\top$	N_{\Diamond}	$\neg\Diamond\perp$
C_{\Box}	$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$	C_{\Diamond}	$\Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$
$Dual_{\Box}$	$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$	$Dual_{\Diamond}$	$\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

(後の都合で, K 公理・Nec 規則ではなく上記を使う)

K も **Int** も Kripke 意味論をもつ:

Definition

- $\mathfrak{F} = (W, R)$ は Kripke フレーム
 $\iff W \neq \emptyset, R \subseteq W \times W$
- $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ は Kripke モデル
 $\iff (W, R)$ が Kripke フレーム, $V : \text{PropVar} \rightarrow \mathcal{P}(W)$

K と **Int** では R と V に関する条件が異なり, 充足可能性も異なるものを用いる (次頁).

K の Kripke 意味論

K では R を任意の関係 \sqsubset とし, V にも特に条件を課さない.

Definition (K-Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \sqsubset, V)$ に対し, $\Vdash_{\mathfrak{M}}^K$ を以下で定める:

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K p : \iff p \in V(x)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi \wedge \psi : \iff x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi \ \& \ x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \psi$
- ...
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \Box \varphi : \iff \forall y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \Diamond \varphi : \iff \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^K \varphi)$

Int の Kripke 意味論

Int では R を任意の推移的・反射的な関係 \leq とする。

また V に以下の条件を課す:

$$x \leq x' \ \& \ x \in V(p) \implies x' \in V(p)$$

Definition

上を満たすものを 直観主義フレーム・モデル と呼ぶことにする

Definition (Int-Satisfaction Relation)

直観主義モデル $\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$ に対し, $\Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}}$ を以下で定める:

$$x \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \rightarrow \psi : \iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \psi)$$

Fact (Persistency)

$$x \leq x' \ \& \ x \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi \implies x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^{\text{Int}} \varphi.$$

K と **Int** の完全性

Definition (Validity)

- $\mathfrak{M} \vDash^\bullet \varphi : \iff \forall x \in W (x \Vdash_{\mathfrak{M}}^\bullet \varphi)$
- $\mathfrak{F} \vDash^\bullet \varphi : \iff \forall V ((\mathfrak{F}, V) \vDash^\bullet \varphi)$
- Kripke フレームのクラス \mathcal{C} に対して,

$$\mathcal{V}(\vDash^\bullet, \mathcal{C}) := \{\varphi \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C} (\mathfrak{F} \vDash^\bullet \varphi)\}$$

Fact (Completeness)

- $\mathbf{K} = \mathcal{V}(\vDash^K, \mathcal{C}_K)$. \mathcal{C}_K は Kripke フレーム全体のクラス.
- $\mathbf{Int} = \mathcal{V}(\vDash^{\text{Int}}, \mathcal{C}_{\text{Int}})$. \mathcal{C}_{Int} は直観主義フレーム全体のクラス.

Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic

Fusion モデル

\mathbf{K} の直観主義版を考えたい。そのモデルは Kripke モデルと直観主義モデルの fusion となるだろう。

Definition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ が以下を満たすとき Fusion モデル と呼ぶ：

- (W, \leq, V) が直観主義モデル、すなわち \leq は推移的かつ反射的で、 $x \leq x' \ \& \ x \in V(p) \Rightarrow x' \in V(p)$.
- (W, \sqsubset, V) が Kripke モデル.

Fusion フレームについても同様に定める。

これに対しても充足可能性を定めたい。

Extrinsic Satisfaction Relation (1/2)

まず素朴に \Vdash^K と \Vdash^{Int} を組み合わせたものを考えよう.

Definition (Extrinsic Satisfaction Relation)

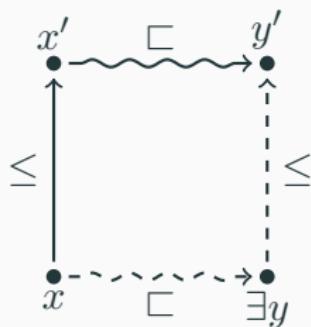
$\mathfrak{M} = (W, \leq, \Box, V)$ を Fusion モデルとする.

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi \rightarrow \psi : \iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \Box \varphi : \iff \forall y \Box x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \Diamond \varphi : \iff \exists y \Box x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi)$

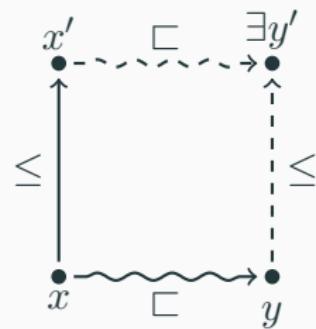
\Vdash^e は必ずしも persistency を持たず、別途 \mathfrak{M} にフレーム条件を加えてやる必要がある（次頁）. persistency をフレーム条件で外付けするので 外部的充足可能性 (extrinsic-) と呼ぶことにする.

Extrinsic Satisfaction Relation (2/2)

\Vdash^e は必ずしも persistency を持たず、別途 \mathfrak{M} にフレーム条件を加えてやる必要がある。



□-p 条件



◊-p 条件

□-p 条件が □-論理式 の persistency を、
◊-p 条件が ◊-論理式 の persistency を保証する。

Intrinsic Satisfaction Relation

フレーム条件で外付けするのではなく，充足可能性の定義 자체を
変えることで persistency を内蔵するアプローチもあり，これを
内部的充足可能性 (intrinsic-) と呼ぶことにする.

Definition (Intrinsic Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ を Fusion モデルとする.

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi \rightarrow \psi : \iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \Box \varphi : \iff \forall x' \geq x \forall y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \Diamond \varphi : \iff \forall x' \geq x \exists y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^i \varphi)$

\Box/\Diamond でも直観主義側の到達可能関係 \leq を見ることによって，何
もフレーム条件を加えなくても persistency が保証される.

Intrinsic vs. Extrinsic

\Vdash^e と \Vdash^i がそれぞれ妥当とする論理式の集合は 一致しない.

Definition

- \mathcal{C}_f : Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathcal{C}_{\text{box}-p}$: $\Box-p$ 条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathcal{C}_{\text{dia}-p}$: $\Diamond-p$ 条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.

Proposition

$$\mathcal{V}(\Vdash^i, \mathcal{C}_f) \subsetneq \mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box}-p} \cap \mathcal{C}_{\text{dia}-p}).$$

Proof.

例えば以下の論理式が右辺に含まれ、また左辺に含まれない.

$$C_{\Diamond} : \Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$$

□

Constructive Modal Logic

Wijesekera, Mendler & de Paiva らは構成主義の観点から C_\diamond 自体を疑問視し, Constructive Modal Logic (CML) を作った. 代表的な CML として **CK** (今回は触れない) や **WK** がある:

Definition (WK)

$$\mathbf{WK} := \mathbf{Int} + M_{\Box} + N_{\Box} + C_{\Box} + M_{\Diamond} + N_{\Diamond} + \text{FS1}.$$

$$\text{ここで FS1} := \Diamond(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Diamond\psi).$$

彼らは \Vdash^i を充足可能性として採用した.

Fact (Wijesekera 1990)

$$\mathbf{WK} = \mathcal{V}(\Vdash^i, \mathcal{C}_f).$$

Simpson の 6 条件

一方 Fischer Servi, Ewald, Plotkin & Stirling, Simpson らは「真の直観主義版 **K**」を追い求めた。

Simpson は特に直観主義一階述語論理 (iFOL) との対応を重視し, \Box には \forall 的な, \Diamond には \exists 的な性質を求めた。

- \Box と \Diamond が独立 (not interdefinable) であるべきで, つまり Dual_{\Box} も Dual_{\Diamond} も定理として持つべきでない。
- 排中律を加えると古典版の **K** が得られるべき。
- 標準翻訳で iFOL とぴったり対応するべきで, 少なくとも $\Box \neg \varphi \leftrightarrow \neg \Diamond \varphi$ と $\Diamond \neg \varphi \rightarrow \neg \Box \varphi$ を定理として持つべき。

さらに 3 つの条件 * を加えたものを Simpson の 6 条件 と呼ぶ。

*今回登場する論理は全て満たすので特に触れない

Intuitionistic Modal Logic (1/3)

Simpson は以下の理由から 「WK は真の直観主義版 K とはいえない」と批判した:

- $\mathbf{WK} \not\vdash \neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ である.
- WK に排中律を加えても古典版の K が得られない.

一方 Simpson の 6 条件をすべて満たす論理として IK がある:

Definition

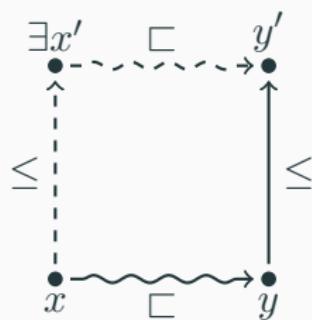
$$\mathbf{IK} := \mathbf{WK} + C_\Diamond + \text{FS2}.$$

ここで $\text{FS2} := (\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi).$

IK やその拡張は Intuitionistic Modal Logic (IML) と呼ばれる.

Intuitionistic Modal Logic (2/3)

FS2 : $(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ がまさに $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ に必要な公理で、これは以下のフレーム条件に対応する。



Definition

\mathcal{C}_{fs2} : 上を満たす Fusion フレーム全体のクラス。

Intuitionistic Modal Logic (3/3)

そして彼らは \Box -論理式については persistency を内蔵し, \Diamond -論理式についてはフレーム条件で persistency を外付けする, \Vdash^i と \Vdash^e のハイブリッドのような充足可能性を用いた.

Definition (Hybrid Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ を Fusion モデルとする.

- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \rightarrow \psi : \iff \forall x' \geq x (x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \Rightarrow x' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \psi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \Box \varphi : \iff \forall x' \geq x \forall y' \sqsubset x' (y' \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \Diamond \varphi : \iff \exists y \sqsubset x (y \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi)$

Fact (Fischer Servi 1984, Simpson 1994)

$$\mathbf{IK} = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{fs2} \cap \mathcal{C}_{dia-p}).$$

状況

	WK	IK
充足可能性 フレームのクラス	\Vdash^i \mathcal{C}_f	\Vdash^h $\mathcal{C}_{fs2} \cap \mathcal{C}_{dia-p}$
C_\diamond を	もたない	もつ
\Box と \Diamond が $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ が 排中律で K に	独立 示せない ならない	独立 示せる なる

- 構成主義の観点から公理 C_\diamond を疑問視する \Rightarrow CML
- 標準翻訳で iFOL と対応することを重視する \Rightarrow IML

疑問

直観主義様相論理の状況を見た上で、以下の疑問が浮かぶ：

Problem

古典様相論理に慣れていると、 \Vdash^e ではなぜダメなのかと思う。
論理 $\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box}-p} \cap \mathcal{C}_{\text{dia}-p})$ は実際どうなっていて、
なぜ Simpson の 6 条件を満たさないのか？

Problem

\Vdash^h の persistency には $\Diamond-p$ 条件だけあればよいはず。
論理 $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia}-p})$ はどうなっているのか？

これらの論理を調べると、IML とも CML とも言いたいことが分かった。

IML でも CML でもない論理

\Vdash^h と \Vdash^e が同値になる条件

実は $\Box\text{-p}$ 条件を課せば \Vdash^h と \Vdash^e が同値になる:

Proposition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ が $\Box\text{-p}$ と $\Diamond\text{-p}$ を満たすならば,
任意の $x \in W$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ で $x \Vdash_{\mathfrak{M}}^h \varphi \iff x \Vdash_{\mathfrak{M}}^e \varphi$.

Corollary

$$\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}) = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

よって $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ のカノニカルモデルを与えて議論してから,
そのカノニカルモデルに何か公理を足して $\Box\text{-p}$ 条件を強制できないか考えることにした.

FIK (1/2)

IK から公理 FS2 を取り除いて得られる論理 $\mathbf{IK}^- := \mathbf{WK} + C_\Diamond$ がいかにも $\mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ に対応しそうだが、実はそうではないことが最近 Balbiani et al. によって示された。

Definition

$$\mathbf{FIK} := \mathbf{IK}^- + \text{wCD}.$$

ここで $\text{wCD} := \Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\Diamond \varphi \rightarrow \Box \psi) \rightarrow \Box \psi).$

Theorem (Balbiani et al. 2024)

$$\mathbf{FIK} = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

Proof.

(\subseteq) 簡単. (\supseteq) カノニカルモデルを与える. □

FIK (2/2)

FIK は IK より真に弱い論理になる:

Proposition (Balbiani et al. 2024)

$$\text{FIK} \subsetneq \text{IK}.$$

公理 wCD は公理 FS2 を弱めたものといえる。

さらに以下が成立する。

Proposition (Balbiani et al. 2024)

FIK に排中律を加えると K が得られる。

Proposition (S.)

$$\text{FIK} \not\vdash \neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi.$$

よって FIK は標準翻訳で iFOL と対応しないことになる。

eIK⁻ (1/2)

Balbiani らのカノニカルモデルの構成手法を元にして,
 $\mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ の公理化を得ることができた.

Definition

$$\mathbf{eIK}^- := \mathbf{IK}^- + \text{CD}.$$

ここで $\text{CD} := \Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond \varphi \vee \Box \psi)$.

Theorem (S.)

$$\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^e, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}}).$$

Proof.

まずカノニカルモデルを用いて $\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^h, \mathcal{C}_{\text{box-p}} \cap \mathcal{C}_{\text{dia-p}})$ を示す.
そして \Box -p を満たすモデルで \Vdash^h と \Vdash^e が一致することを使う. □

eIK⁻ (2/2)

公理 CD: $\square(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \square\psi)$ は明らかに公理 wCD:
 $\square(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\Diamond\varphi \rightarrow \square\psi) \rightarrow \square\psi)$ の強化で、以下が示せる。

Proposition (S.)

$$\text{FIK} \subsetneq \text{eIK}^-.$$

しかし公理 FS2 : $(\Diamond\varphi \rightarrow \square\varphi) \rightarrow \square(\varphi \rightarrow \psi)$ とは比較不能。

Proposition (S.)

$$\text{eIK}^- \subseteq \text{IK} \text{ でも } \text{IK} \subseteq \text{eIK}^- \text{ でもない.}$$

その他の性質については、概ね FIK と同様になっている。

Proposition (S.)

- eIK^- に排中律を加えると K が得られる。
- $\text{eIK}^- \not\vdash \neg\neg\Diamond\varphi \rightarrow \square\neg\varphi$.

結論 (1/2)

	WK	FIK	IK	eIK ⁻
充足可能性 フレームのクラス	\Vdash^i \mathcal{C}_f	\Vdash^h \mathcal{C}_{dia-p}	\Vdash^h $\mathcal{C}_{fs2} \cap \mathcal{C}_{dia-p}$	\Vdash^e $\mathcal{C}_{box-p} \cap \mathcal{C}_{dia-p}$
C_\diamond を	もたない	もつ	もつ	もつ
\Box と \Diamond が $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ が 排中律で K に	独立 示せない ならない	独立 示せない なる	独立 示せる なる	独立 示せない なる

FIK と eIK⁻ は C_\diamond をもつという意味で CML とは言えない。
 一方 $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \Box\neg\varphi$ が示せず、よって標準翻訳で iFOL と対応しないので、その意味で IML とも言えない。

結論 (2/2)

- Simpson の 6 条件のうち「排中律を加えて K が得られる」と「標準翻訳で iFOL と対応する」は独立した条件である。
- CML の要求も IML の条件も満たさない論理 FIK が、ちょうど WK と IK の間に割って入るようにして存在する。
- \Box と \Diamond を古典様相論理と同様に \Box のみで評価すると、 IK と比較不能な FIK の拡張である eIK^- が得られる。
 - $WK \subsetneq FIK \subsetneq IK$ をメインストリートと捉えると、 FIK から横に生えた脇道に eIK^- がいる。
 - eIK^- も同様に CML の要求も IML の条件も満たさない。

ありがとうございました

cannorin.net/math/mlg60.pdf



補遺・参考文献

Definition

述語 \sqsubset と述語 V_p ($p \in \text{PropVar}$) を持つ一階言語 \mathcal{L}_{ST} を考える。
 $\varphi \in \mathcal{L}_{\square\diamond}$ と自由変数 x に対して $\text{ST}_x(\varphi) \in \mathcal{L}_{\text{ST}}$ を以下で定める。

- $\text{ST}_x(\perp) = \perp, \text{ST}_x(p) = V_p(x)$
- $\text{ST}_x(\psi_1 \odot \psi_2) = \text{ST}_x(\psi_1) \odot \text{ST}_x(\psi_2)$ ($\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$)
- $\text{ST}_x(\square\psi) = \forall y (x \sqsubset y \rightarrow \text{ST}_y(\psi))$ (y : fresh)
- $\text{ST}_x(\diamond\psi) = \exists y (x \sqsubset y \wedge \text{ST}_y(\psi))$ (y : fresh)

Fact

$\mathbf{K} \vdash \varphi \iff$ 全ての古典 \mathcal{L}_{ST} -構造で $\forall x \text{ST}_x(\varphi)$ が妥当

Simpson はこれと同様な対応を IML と iFOL の間に求めた。

参考文献

今回の発表は、未発表のサーベイ論文を元にしている。

- Gisèle Fischer Servi. Axiomatizations for some intuitionistic modal logics. *Rendiconti del Seminario Matematico*, 42(3):179–194, 1984.
- Duminda Wijesekera. Constructive modal logics I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 50(3):271–301, 1990.
- Alex K. Simpson. The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.
- Michael Mendler and Valeria de Paiva. Constructive CK for Contexts. *Context Representation and Reasoning*, 13, 2005.
- Philippe Balbiani, Han Gao, Çiğdem Gencer, and Nicola Olivetti. A Natural Intuitionistic Modal Logic: Axiomatization and Bi-Nested Calculus. *LIPICS*, 88:13:1–13:21, 2024.