Álgebra y Geometría Analítica

1. Recuerde, ¿qué es un vector? Seleccione y marque la opción correcta. Un vector es:
    a) Dos puntos en el plano xy
    b) Un segmento de recta entre dos puntos.
    c) Un segmento de recta dirigido que tiene módulo, dirección y sentido.

2. Graficar los siguientes puntos en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ según corresponda. Para ello dibuje los ejes correspondientes $(x,\ y)$ o $(x,\ y,\ z)$.
    $A = (3, 4)$, $B = (0, -2)$, $C = (-1, -5)$, $D = (2, 3, 4)$, $E = (-2, -3, 5)$, $F = (-2, 3, -4)$

3. A partir del concepto de vector de posición (o localización), grafique los vectores de posición correspondientes a los puntos del apartado anterior.

4. Haciendo uso de GeoGebra, grafique los puntos mencionados en el apartado 2) y sus correspondientes vectores de posición mencionados en el apartado 3).

5. Dados los siguientes vectores $\vec{u}_1 = (-1, 8)$, $\vec{u}_2 = (2, 7)$ y $\vec{v} = (2, -5)$, represéntelos gráficamente. Luego obtenga los siguientes vectores:
    a) $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$
    b) $\vec{u}_1 + \vec{v}$
    c) $\vec{u}_2 + \vec{v} + \vec{w}$
    d) $-\vec{u}_1$
    e) $\vec{v}$ - $\vec{u}_2$
    f) $\vec{u}_2$ - $\vec{v}$

6. Dados los siguientes vectores $\vec{u} = (6, -4, 6)$, $\vec{v} = (1, 5, 4)$ y $\vec{w} = (3, 2, 5)$, represéntelos gráficamente. Luego obtenga los siguientes vectores:
    a) $\vec{u} + \vec{v}$
    b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
    c) $-\vec{u}$
    d) $\vec{v}$ - $\vec{u}$
    e) $\vec{u}$ - $\vec{v}$

7. Dados los siguientes vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$ y el escalar $k = -2$, encontrar los siguientes módulos:
    a) $\|\vec{u}\|$
    b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ y compárelo con $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
    c) $\|k * \vec{u}\|$ y compárelo con $|k| * \|\vec{u}\|$

8. ¿Cuál es la característica principal de un vector unitario? ¿Qué otro nombre recibe? ¿Cómo convertimos un vector en un vector unitario? Encuentra el versor o vector unitario de los siguientes vectores:

   a) $\vec{u} = (-2, 5, 4)$
   b) $\vec{v} = (0, -6, 0)$
   c) $\vec{w} = (2, 2, 2)$

9. ¿Cómo se escribirían los versores $\check{i}$, $\check{j}$ y $\check{k}$ en función de sus componentes? Dados los siguientes vectores $\vec{u} = 2\check{i} - \check{j} + 3\check{k}$ y $\vec{v} = 3\check{j} + 2\check{k}$, realice las siguientes operaciones y grafique los resultados:

   a) $2\vec{u} + \vec{v}$
   b) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

10. Dados los puntos $P = (1, -1, 5)$ y $Q = (-3, 1, 3)$. Encuentre los vectores de posición de los puntos P y Q y el vector $\vec{PQ}$.

11. ¿Qué son los ángulos directores de un vector? ¿Cuál es la relación fundamental? Encuentre los ángulos directores de los siguientes vectores $\vec{u} = (1, 3, 4)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (2, 3, 0)$, $\vec{t} = (0, 5, 2)$. Verifique la relación fundamental para los ángulos directores encontrados anteriormente.

12. Dados los siguientes vectores, $\vec{u} = (-1, 3, 4)$, $\vec{v} = -2\check{j} + 5\check{k}$ y $\vec{w} = (3, 0, 4)$, realice los siguientes productos escalares:

    a) $\vec{u} * \vec{v}$
    b) $\vec{v} * \vec{u}$
    c) $(\vec{u} + \vec{v}) * \vec{w}$
    d) $(\vec{u} * \vec{w}) + (\vec{v} * \vec{w})$

13. Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ del punto anterior.

14. A partir de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del inciso 12) y recordando las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre vectores, verifique cuál de las siguientes condiciones cumplirían:

    a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.
    b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.
    c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos ni ortogonales.

15. Encuentre un vector ortogonal al vector $\vec{t} = (-1, 4, 3)$. ¿Cuántos vectores ortogonales podrían encontrarse para el vector $\vec{t}$?

16. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 2, 4)$ y $\vec{v} = (2, -1, 5)$ encuentre el vector proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$. Calcule el módulo de la proyección.

17. Dados los siguientes pares de vectores, realice los productos vectoriales correspondientes:

    a) $\vec{u} = (1, -1, 7)$ y $\vec{v} = (2, -3, 0)$
    b) $\vec{u} = (2, -1, 3)$ y $\vec{v} = (4, -2, 6)$
    c) Entre los versores $\check{i}$ y $\check{j}$

d) Entre los versores $-\check{j}$ y $\check{k}$

18. Calcule el siguiente producto mixto:

    a) $\check{i} * (\check{j} \times \check{k})$
    b) $(1,1,1) * ((-2,3,5) \times (-1,4,2))$

19. Investigue en la bibliografía recomendada sobre el producto mixto entre vectores, y a continuación conteste las siguientes preguntas:

    a) ¿Qué operaciones y en qué orden deben efectuarse para calcular un producto mixto entre vectores?
    b) ¿Cuál es la expresión de cálculo del producto mixto entre vectores?
    c) Escriba y ejemplifique las propiedades del producto mixto entre vectores.
    d) ¿Cómo se establece si tres vectores del espacio tridimensional son coplanares?
    e) ¿Qué interpretación geométrica admite el valor absoluto del producto mixto entre vectores? Definición, propiedades e interpretación geométrica.

20. Debate con tus compañeros la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Para que tu respuesta sea válida debes justificarla adecuadamente, por lo cual puedes emplear definiciones, ejemplos, gráficos, cálculos.

    1) El vector $\vec{u} = (1,1,1)$ es un versor.
    2) Los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (0,1,0)$ son paralelos.
    3) Los vectores $\vec{u} = (1,2,-1)$ y $\vec{v} = (-2,-4,2)$ son perpendiculares.
    4) Los ángulos que forma el versor fundamental $\check{i}$ en $\mathbb{R}^3$ con los ejes coordenados (x, y, z) valen $0°$, $90°$ y $180°$ respectivamente.
    5) Un versor determina una y solo una dirección en el espacio.
    6) Las componentes de un versor son los ángulos directores de su dirección.
    7) Una dirección se establece unívocamente mediante un versor o su opuesto.
    8) Todo versor es vector y todo vector es versor.
    9) La distancia entre dos puntos del plano o del espacio es igual al módulo del vector que los tiene por origen y extremo respectivamente.
    10) Módulo, longitud, magnitud son vocablos sinónimos.
    11) Un vector en el plano se define por sus dos componentes, o mediante su módulo y su argumento.
    12) Para establecer una dirección en el plano se requiere conocer sus dos ángulos directores.
    13) El vector nulo de $\mathbb{R}^2$ es perpendicular a cualquier otro vector del plano.
    14) Un punto del plano o del espacio puede ubicarse mediante sus coordenadas cartesianas o mediante su vector posición.
    15) Un vector perpendicular al eje z es paralelo a cualquier vector del plano xy.
    16) Si un vector es paralelo al eje y, también es paralelo al eje z.
    17) Numéricamente, las coordenadas cartesianas de un punto (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) son iguales a las componentes del vector posición del punto.
    18) Cuando normalizamos un vector estamos hallando un versor paralelo al vector dado.

19) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{v} \times \vec{u}\|$

20) El producto escalar no es conmutativo.

21) Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \parallel \vec{v}$

22) La distancia entre cualquier punto (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) al origen es igual al módulo de su vector posición.

23) Si $\vec{u} = k\vec{v}$, (donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y k un número real) entonces $\|\vec{u}\| > \|\vec{v}\|$

24) Si un vector es múltiplo de otro entonces ambos son perpendiculares.

25) Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$, entonces ambos son perpendiculares.

26) El módulo del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

27) Si $\vec{u} = (u_1, 1, 3)$ y $\|u\|^2 = 11$ entonces $u_1 = 1$ o $u_1 = -1$

28) Todos los vectores del plano o del espacio, que tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo, pero que difieren en su punto origen, pertenecen a una misma familia. Se dice que son equivalentes.

29) El vector nulo (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) no tiene dirección ni sentido y su módulo vale cero.

30) El vector nulo (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) se representa geométricamente por el punto origen del sistema de coordenadas cartesianas.