Álgebra y Geometría Analítica

1. Hallar las ecuaciones de la recta en su forma simétrica, paramétrica vectorial y paramétrica escalar para los siguientes elementos geométricos dados:

   a) Los puntos $P_1 = (-1, 3)$ y $S = (2, 5)$

   b) El punto $P_2 = (-1, 4)$ y su dirección paralela al vector $\vec{d} = (4, -1)$

2. Hallar las ecuaciones de la recta en su forma simétrica, paramétrica vectorial y paramétrica escalar para los siguientes elementos geométricos dados:

   a) Los puntos $P_1 = (-3, 2, 1)$ y $P_2 = (1, 5, 4)$

   b) Los puntos $Q_1 = (1, 1, 0)$ y $Q_2 = (1, -3, 2)$

   c) El punto $P_2 = (1, 4, 2)$ y su dirección paralela al vector $\vec{d} = (-2, 2, 3)$

   d) El punto $A_1 = (3, -2, 1)$ y el vector director $\vec{s} = (5, 0, 2)$

   e) El punto $B_1 = (3, 2, 4)$ y con dirección perpendicular al vector $\vec{d} = \check{i} + 2\check{j} + \check{k}$

3. Haciendo uso de GeoGebra resuelva los puntos 1) y 2) anteriores.

4. Encontrar puntos que pertenezcan a las siguientes rectas:

   a) $(x, y, z) = (1, -3, 2) + k(1, 1, 4)$

   b) $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -2 + 3k \\ z = 4 + 2k \end{cases}$

   c) $\frac{x+1}{3} = y + 1 = z$

   d) $\frac{x+2}{4} = y - 2 = z + 3$

5. Dados los siguientes puntos $P = (1, -1, 2)$ y $Q = (0, 2, 3)$. ¿A cuál o cuáles de las siguientes rectas pertenecen?

   a) $(x, y, z) = (2, 3, 4) + k(1, -4, 2)$

b) $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 4 - 2k \\ z = 3 + k \end{cases}$

c) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{2}$

6. Haciendo uso de GeoGebra resuelva el punto 5).

7. Hallar la ecuación normal y general del plano dados los siguientes elementos:

   a) El punto $P_1 = (1, 1, 3)$ y el vector normal $\vec{n} = (-1, 4, 3)$

   b) El punto $P_2 = (-1, 4, 5)$ y el vector normal $\vec{n} = 2\check{i} + \check{j}$

8. Encontrar la ecuación paramétrica vectorial y escalar del plano que pasa por tres puntos:

   a) $P_1 = (1, 1, 2)$, $P_2 = (5, 4, 3)$ y $P_3 = (4, 2, 1)$

9. Encontrar la ecuación normal del plano a partir de los puntos $P_1 = (1, 1, 2)$, $P_2 = (-1, 0, 5)$ y $P_3 = (2, 6, -1)$

10. Dados los siguientes puntos $P = (1, -1, 2)$ y $Q = (3, 2, 5)$. ¿A cuál o cuáles de los siguientes planos pertenecen?

    a) $(x - 2, y + 3, z - 1) * (1, 4, 2) = 0$

    b) $2x - 3y + 5z = 2$

    c) $x + 3y = 0$

11. Dados los siguientes planos encontrar puntos que pertenezcan a ellos:

    a) $2x + y - 5z = 4$

    b) $-y + z = 2$

    c) $x + 3z = 0$

    d) $(x - 1, y + 3, z - 2) * (-1, 0, 5) = 0$

12. Dado el plano $-x + y = 0$ y la recta $(x, y, z) = (1, -1, 0) + k(2, 1, 3)$ indicar si son:

    a) Paralelos

    b) Perpendiculares

    c) Ni paralelos ni perpendiculares

13. Dados los siguientes planos $2x + 3y - z = 1$ y $4z = -1$, indicar si son:

a) Paralelos

b) Perpendiculares

c) Ni paralelos ni perpendiculares

14. Dados los siguientes planos encontrar el ángulo entre ellos:

a) $\begin{cases} \pi\colon x - y + 2z = 2 \\ \alpha\colon\ -x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \pi\colon x + 2y = 0 \\ \alpha\colon\ -3y + 4z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \pi\colon x = 0 \\ \alpha\colon y - 2z = 1 \end{cases}$

15. Dadas las siguientes rectas encontrar el ángulo entre ellas:

a) $\begin{cases} (x, y, z) = (1, -1, 3) + k(2, 0, -1) \\ \frac{x+3}{2} = y = \frac{z-1}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = k \\ z = 2 + 2k \end{cases} \\ \frac{x-1}{2} = 2y = z + 1 \end{cases}$

16. Dados los siguientes planos y rectas encontrar el ángulo entre ellos:

a) $\begin{cases} -2x + y - z = 2 \\ (x, y, z) = (1, 1, 5) + k(1, 3, 1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + 1 = \frac{y-3}{8} = z \end{cases}$

17. Encontrar la distancia del punto $P = (2, 5, 3)$ al plano $-2x + y + 3z = 0$

18. Encontrar la distancia entre la recta $(x, y, z) = (1, 1, 5) + k(-2, 1, 3)$ y el punto $P = (4, 3, 2)$

19. Encontrar las distancias entre los siguientes entes geométricos:

a) El plano $-3x+2y+z = 1$ y la recta $(x, y, z) = (1, -5, 1)+k(2, 2, 2)$

b) El plano $-x + 2y - z = 4$ y el plano $-2x + 4y - 2z = 0$

c) La recta $(x,y,z) = (3,-2,1) + k(2,1,3)$ y la recta $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{6}$

d) El plano $-2x + y = 0$ y el plano $-4x + 3y = 1$

20. Debate con tus compañeros sobre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Para que tu respuesta sea válida debes justificarla adecuadamente, por lo cual puedes emplear definiciones, ejemplos, gráficos, cálculos, etc.

a) El vector director de una recta (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) que pasa por dos puntos conocidos A y B, puede hallarse como $A - B$.

b) Si $(x,y,z) = (1, x+2, -y)$ entonces $x = 1, y = 3$ y $z = -3$

c) El punto $P = (5,3,1)$ no pertenece a la recta $(x,y,z) = (3,1,-2) + k(2,1,3)$

d) Las rectas $y = 3x - 2$ y $(x,y) = (1,2) + k(-1,3)$ son paralelas.

e) Las rectas $\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y-1)}{2} = \frac{(z-1)}{1}$ y $(x,y,z) = (1,1,1)+k(-1,0,3)$ son perpendiculares.

f) Siempre puede escribirse la ecuación simétrica de la recta (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$).

g) La recta $\frac{(x+3)}{3} = \frac{(y-2)}{2} = \frac{(z-1)}{1}$ corta al plano yz en el punto $(0,2,4)$, al plano xz en $(-6,0,0)$ y al plano xy en $(0,0,1)$.

h) Un plano queda completamente determinado por dos de sus puntos y un vector paralelo a él.

i) Un plano queda completamente determinado por tres cualesquiera de sus puntos.

j) Un plano queda completamente determinado por uno de sus puntos y un vector perpendicular a él.

k) Si nos dan las ecuaciones de dos rectas que se cortan, podemos hallar sin inconvenientes la ecuación del plano que determinan.

l) Si nos dan las ecuaciones de dos rectas paralelas, tenemos elementos suficientes como para hallar las ecuaciones del plano que determinan.

m) Si nos dan las ecuaciones de dos rectas cualesquiera en el espacio, podemos hallar sin inconvenientes la ecuación del plano que determinan.

n) Un plano es paralelo a una recta cuando cualquier vector normal al plano es paralelo al vector director de la recta.

o) Dos planos paralelos tienen vectores normales que son uno múltiplo escalar del otro.

p) Dos planos perpendiculares tienen vectores normales paralelos.

q) Una recta es perpendicular a un plano cuando su vector director es paralelo al plano.

r) Si una recta es perpendicular a un plano, entonces cualquier vector paralelo a la recta es perpendicular a cualquier vector paralelo al plano.

s) Dos vectores no colineales determinan una familia de planos.

t) Dos vectores cualesquiera determinan una familia de planos.

u) El ángulo entre dos rectas puede calcularse mediante el ángulo entre los vectores directores de las rectas.