

计算物理学作业 2

- 完成所有题目。作业截止日期课上宣布。
- 请提交一个 PDF 格式的作业解答, 其中可以描述相应的解题步骤, 必要的图表等 (建议用 LaTeX 进行排版)
- 请提交程序的源文件 (格式:python/c), 并请提交一个源文件的说明文档 (任意可读格式), 主要说明源程序如何编译、输入输出格式等方面的事宜。请保证它们能够顺利编译通过, 同时运行后产生你的解答中的结果。
- 所有文件打包后发送到课程的公邮。压缩包的文件名和邮件题目请取为“学号 + 姓名 + 作业 2”

1. 多项式插值

- 在区间 $[0, \pi/2]$ 上用 5 个等距节点对函数 $\sin x$ 进行插值, 并估计最大可能的误差。
- 在 $[0, \pi/2]$ 上另选取 5 个点, 比较函数值和插值多项式的值, 验证是否小于误差最大值。
- 如果希望最大误差为 10^{-8} , 需要多少个插值节点?

2. Runge 效应

考虑 Runge 函数 $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ 在区间 $[-1, +1]$ 上的行为。本题中将分别利用等间距的多项式内插、Chebyshev 内插以及三次样条函数来近似 $f(x)$ 的数值 (请提供三种内插相应的程序代码)。

- 考虑 $x \in [-1, +1]$ 之间 21 个均匀分布的节点 (包括端点, 相隔 0.1 一个点) 的 20 阶多项式 $P_{20}(x)$ 之内插。给出一个表分别列出 $x, f(x), P_{20}(x)$ 以及两者差的绝对值。为了看出两者的区别请在这 21 个点分成的每个小段的中点也取一个数据点并一起列出 (因此共有 41 个点), 同时画图显示之。
- 现在选取 $n = 20$ 并将上问中均匀分布的节点换为标准的 Chebyshev 节点:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k + 1/2)}{20}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 19. \quad (1)$$

然后构造 $f(x)$ 在 $[-1, +1]$ 上的近似式,

$$f(x) \approx C(x) \equiv -\frac{c_0}{2} + \sum_{k=0}^{20} c_k T_k(x). \quad (2)$$

其中在各个 Chebyshev 的节点处我们要求它严格等于 $f(x)$ 。同样列出上问的表并画图, 与上问结果比较。

- 仍然考虑第一问中均匀分布的 21 个节点的内插。但这次利用 21 点的三次样条函数。重复上面的列表、画图并比较。

3. 样条函数在计算机绘图中的运用

本题中我们考虑 Cubic spline 在计算机绘图中的广泛运用。我们将尝试用三次样条函数平滑地连接若干个二维空间中已知的点。考虑二维空间的一系列点 (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ 。我们现在希

望按照顺序 (由 0 到 n) 将它们平滑地连接起来。一个方便的办法是引入一个连续参数 $t \in [0, n]$, 取节点为 $t_i = 0, 1, \dots, n$ 然后分别建立两个样条函数: $S_\Delta(X; t)$ 和 $S_\Delta(Y; t)$ 它们分别满足

$$S_\Delta(X; t_i) = x_i, \quad S_\Delta(Y; t_i) = y_i. \quad (3)$$

这两个样条函数可以看做是 $(x(t), y(t))$ 的内插近似。因此绘制参数曲线 $(x(t), y(t))$ 的问题就化为求出两个样条函数并将它们画出的问题。我们考虑的函数是著名的心形线 (cardioid)。它的极坐标方程是

$$r(\phi) = 2a(1 - \cos \phi) = 1(1 - \cos \phi) \quad (4)$$

为了方便起见我们取了 $2a = 1$ 。(请利用上一题中关于样条函数内插的相应代码来处理本题)

- (a) 选取 $\phi = t\pi/4$, $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 这九个点, 给出 $x_t = r(\phi) \cos \phi$ 和 $y_t = r(\phi) \sin(\phi)$ 的数值。将这些数值作为精确的数值列在一个表里。
- (b) 给出过这 8 个点的两个三次样条函数 $S_\Delta(X; t)$ 和 $S_\Delta(Y; t)$
- (c) 画出参数形式的曲线 $(x_t, y_t) = (S_\Delta(X; t), S_\Delta(Y; t))$, 同时画出它所内插的严格的曲线进行比较, 请标出相应的节点。
- (d) 简要说明为什么这个算法可以平滑地连接所有的点 (这实际上是很多画图软件中 spline 曲线所采用的算法)。

4. 计算积分

已知积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) \cos x = \sqrt{\pi} \exp(-\frac{1}{4}) \quad (5)$$

- 利用梯形法和外推积分方法, 计算积分。通过选取不同的积分区间和步长, 考察极限情况, 并与精确积分值作比较
- 利用高斯积分法。首先判断上述积分应该采用何种高斯求积分公式, 然后查找不同阶 (积分节点数为 5, 10, 15, 20) 下的积分节点和权重系数, 给出积分结果。