Théorie des langages et Compilation : Analyse Lexicale

Didier Lime

École Centrale de Nantes – LS2N

Année 2019 – 2020

Plan

Analyse lexicale

- Le but de l'analyse lexicale est de transformer une suite de caractères en mots (lexèmes ou *tokens*).
- L'analyse syntaxique vient ensuite examiner l'agencement des mots
- L'analyseur syntaxique est strictement plus puissant que l'analyseur lexical
- La passe « analyse lexicale » est faite par commodité

Première idée

Exemple

```
void readIdentifier(char* token, char * s) {
    int i = 0;
    char c;
    while ((c = getc()) != EOF && c >= 'a' && c <= 'z') {
        s[i] = c;
        i++;
    }
    if (!contains(keyword_table, s))
       strcpy(token, IDENTIFIER);
    else
       strcpy(token, KEYWORD);
}
void readInteger(char* token, char * id) { ... }
```

(Inspiré de l'exemple du cours de Compilation de J. Ferber, Montpellier)

Première idée

- Chaque fonction reconnaît assez bien les mots composés par la répétition C^* de caractères d'une même classe C
- Pour des constructions plus compliquées les fonctions deviennent lourdes
- Quelle fonction appeler ?
- Nécessité d'une approche **globale** et donc **générique**

Langages Formels

Lettres et mots :

- Soit un ensemble fini Σ. On l'appelle **alphabet** ;
- Les éléments de Σ sont appelés **lettres** ;
- Les **mots** sont des séquences de lettres $a_1 \dots a_N$;
- On note Σ^* l'ensemble des mots sur Σ
- On note uv le mot obtenu par **concaténation** de deux mots u et v ;
- La concaténation est associative ;
- On note son élément neutre ϵ, appelé **mot vide** ;

Langages :

- Un **langage** sur Σ est un sous-ensemble de Σ^* ;
- Soient U et V deux langages sur Σ, $UV = \{uv | u \in U, v \in V\}$;
- $U^* = \{u_0 \dots u_n | n \geq 0, \forall i, u_i \in U\}$;

Langages Réguliers

- On veut **reconnaître** des langages ;
- Le problème est a priori **indécidable** ;
- On doit donc se contenter de langages particuliers ;
- On veut en plus que l'analyse soit **efficace** : on choisit les **langages réguliers**.

Définition (Langages réguliers)

Un langage est dit **régulier** s'il est **reconnu** par un **automate fini**.

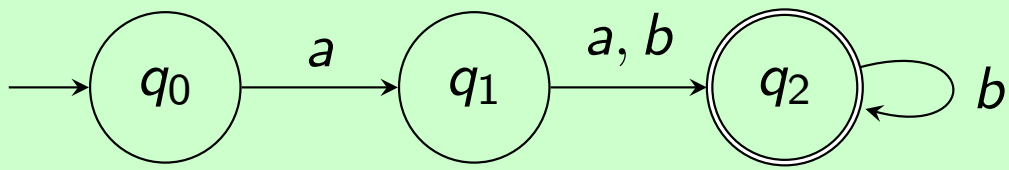
Automates Finis Déterministes (DFA)

Définition (DFA)

Un automate fini déterministe (DFA) est un quintuplet $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ où :

- Q est un ensemble fini d'**états** ;
- Σ est un **alphabet** fini ;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est une fonction partielle appelée **fonction de transition** ;
- $q_0 \in Q$ est l'**état initial** ;
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des **états accepteurs** (ou terminaux).

Exemple



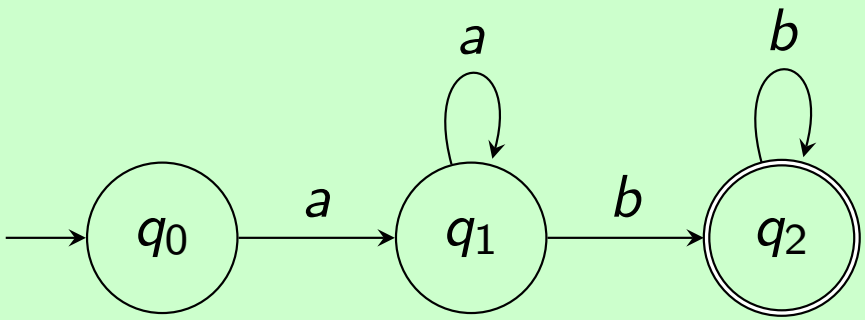
Langage reconnu par un DFA

Soit un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- δ peut être étendu sur $Q \times \Sigma^*$:
  $\forall w \in \Sigma^*$ t.q. $|w| \geq 2, \exists a \in \Sigma, w' \in \Sigma^*$ t.q. $w = aw'$.
  Alors, $\delta(q, w) = \delta(\delta(q, a), w')$;
- Un mot $w \in \Sigma^*$ est **accepté** (ou reconnu) par $\mathcal{A}$ si $\delta(q_0, w) \in F$.
- Le **langage** $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{A}$.

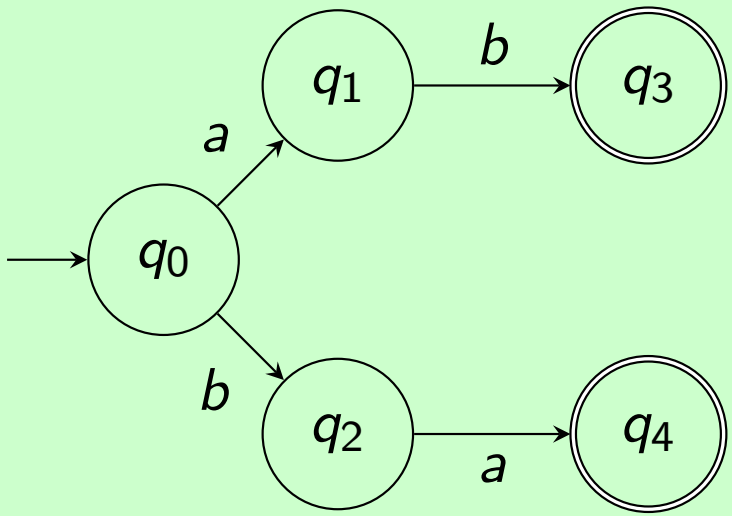
Langage reconnu par un DFA

Exemple



$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{a^m b^n | m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Exemple



$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{ab\} \cup \{ba\} = \{ab, ba\}$$

Expressions Régulières

Pour décrire les langages, on utilise le formalisme des expressions régulières (aussi appelées rationnelles).

Définition (Expressions Régulières (RE))

Les **expressions régulières** sont définies inductivement par :

- $\emptyset$ est une expression régulière
- ϵ est une expression régulière
- $\forall a \in \Sigma, a$ est un expression régulière
- Pour toutes expressions régulières r et s, rs et $r|s$ sont des expressions régulières
- Pour toute expression régulière r, r^* est une expression régulière

Expressions Régulières

À chaque RE, on associe un langage :

Définition (Langage associé aux RE)

Le langage $\mathcal{L}(r)$ d'une RE r est défini par :

- $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$;
- $\mathcal{L}(\epsilon) = \{\epsilon\}$;
- $\forall a \in \Sigma, \mathcal{L}(a) = \{a\}$;
- Pour toutes RE r et s, $\mathcal{L}(rs) = \mathcal{L}(r)\mathcal{L}(s)$ et $\mathcal{L}(r|s) = \mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(s)$;
- Pour toute RE r, $\mathcal{L}(r^*) = \mathcal{L}(r)^*$.

L'**union**, la **concaténation** et l'**étoile** sont les opérations dites **régulières** sur les langages.

Expressions Régulières et Langages Réguliers

Théorème (Théorème de Kleene 1)

Pour toute expression régulière r, son langage $\mathcal{L}(r)$ est régulier.

Théorème (Théorème de Kleene 2)

Pour tout langage régulier $\mathcal{L}$, il existe une expression régulière r telle que $\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}$.

Expressions Régulières Étendues

À partir des expressions précédentes, on peut définir les **raccourcis** suivants :

- $[abc] = a|b|c$;
- Si Σ est ordonné, $[a_1 - a_2] = \{b \in \Sigma | a_1 \leq b \leq a_2\}$;
- $r? = r|\epsilon$;
- $r^+ = rr^*$;
- $[\hat{}abc] = \Sigma \setminus \{a, b, c\}$;
- $[\hat{}a_1 - a_2] = \Sigma \setminus [a_1 - a_2]$;
- $. = \Sigma$ et $* = \Sigma^*$.

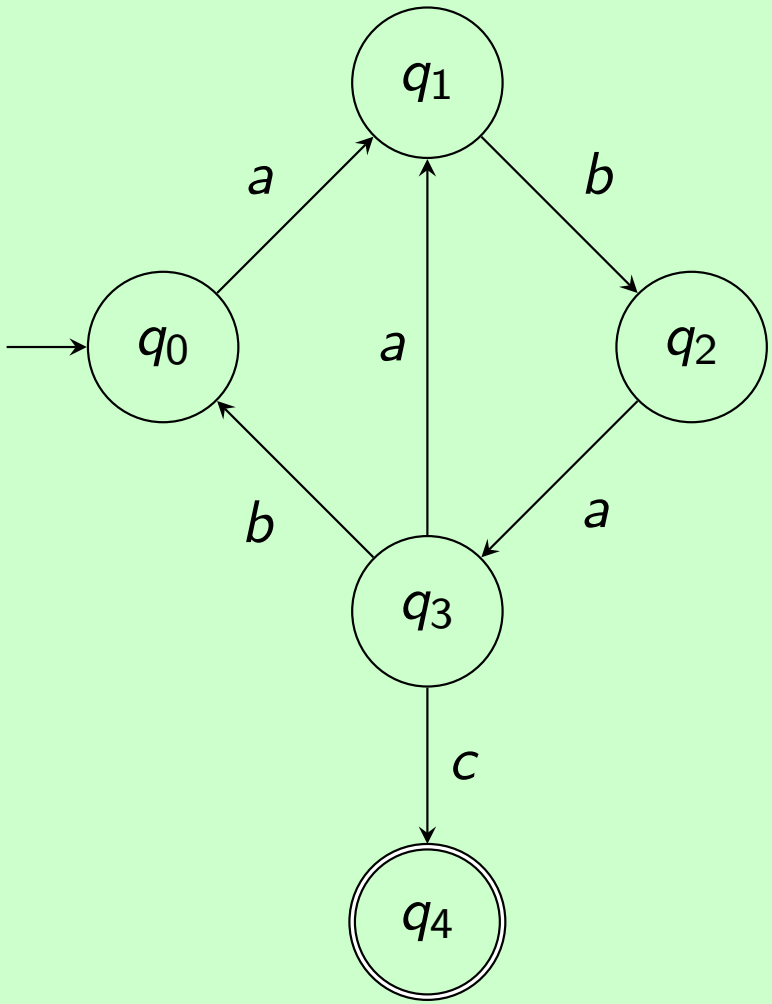
Calcul du Langage d'un DFA

Soit un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

- On note $\mathcal{L}_{ij}$ le langage de $\mathcal{A}$ obtenu entre l'état q_i et l'état q_j ;
- Si $F = \{q_N, \ldots, q_{N+k}\}$ alors $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_{0N} | \cdots | \mathcal{L}_{0N+k}$;
- Si $q_{i+1}, \ldots, q_{i+k}$ sont les sucesseurs de q_i alors $\mathcal{L}_{ij} = \mathcal{L}_{ii+1}\mathcal{L}_{i+1j} | \cdots | \mathcal{L}_{ii+k}\mathcal{L}_{i+kj}$;
- S'il existe $a_1, \ldots, a_k$ tels que $\delta(q_i, a_1) = \cdots = \delta(q_i, a_k) = q_j$ alors $\mathcal{L}_{ij} = a_1 | \cdots | a_k$;
- **Si** $\mathcal{L}_{ij} = r\mathcal{L}_{ij} | s$ **alors** $\mathcal{L}_{ij} = r^* s$;
- Si q_i n'a pas de boucle ($a \in \Sigma$ t.q. $\delta(q_i, a) = q_i$) alors $\mathcal{L}_{ii} = \epsilon$.

Calcul du Langage d'un DFA

Exemple

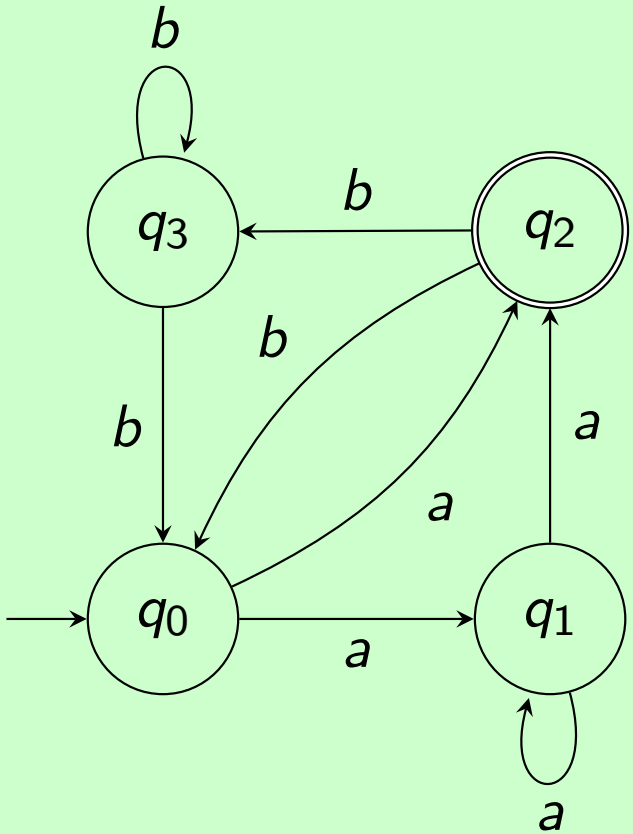


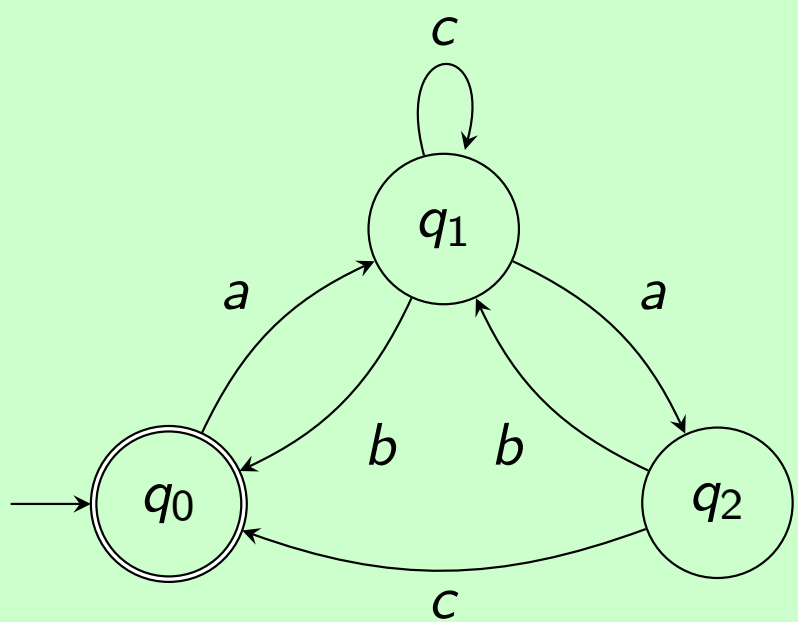
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_{04}$$
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = a\mathcal{L}_{14}$$
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = ab\mathcal{L}_{24}$$
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = aba\mathcal{L}_{34}$$
$$\mathcal{L}_{34} = c\mathcal{L}_{44}|a\mathcal{L}_{14}|b\mathcal{L}_{04}$$
$$\mathcal{L}_{34} = c\epsilon|a\mathcal{L}_{14}|ba\mathcal{L}_{14}$$
$$\mathcal{L}_{34} = c|(\epsilon|b)a\mathcal{L}_{14}$$
$$\mathcal{L}_{34} = c|(\epsilon|b)aba\mathcal{L}_{34}$$
$$\mathcal{L}_{34} = ((\epsilon|b)aba)^*c$$
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = aba((\epsilon|b)aba)^*c$$

Calcul du Langage : Exercice

Exercice

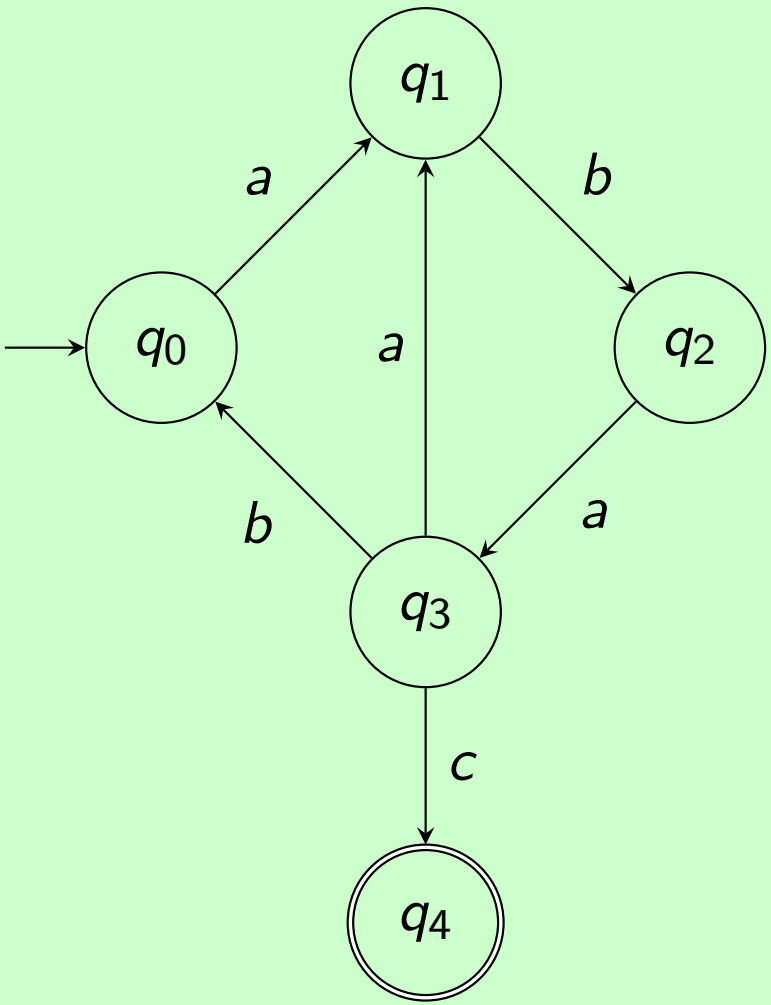
Calculez des expressions rationnelles représentant les langages des automates (non déterministe pour celui de gauche) suivants :





Implémentation d'un DFA

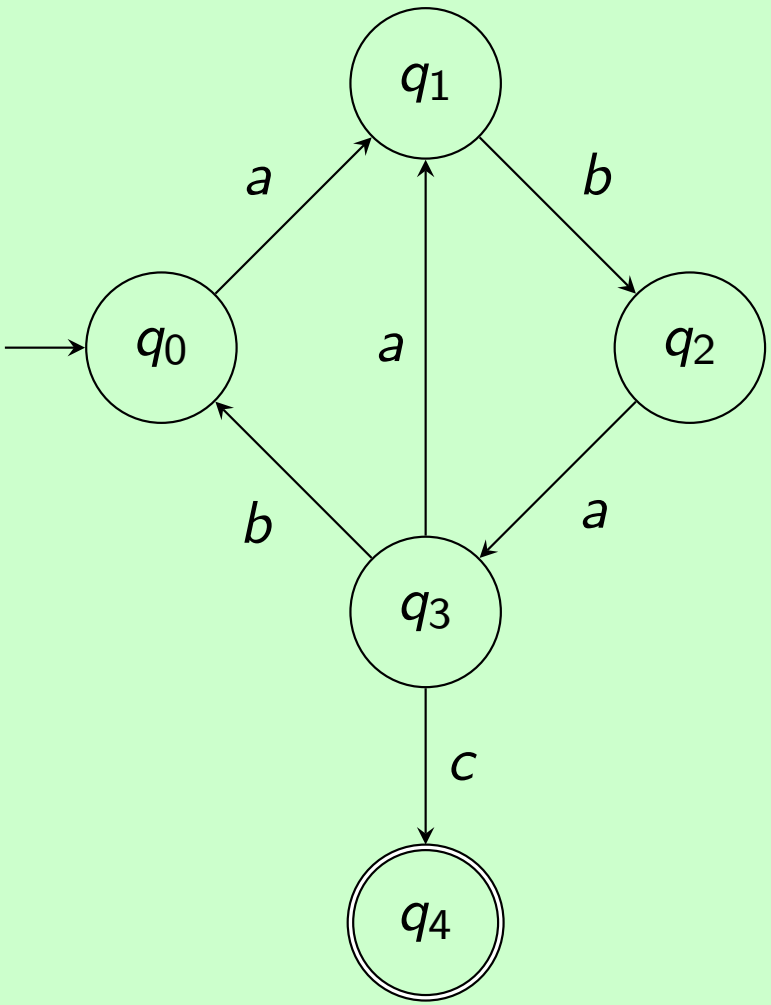
Exemple




```
int etat = 0; char t;
scanf("%c", &t);
while (t<='z' && t >='a') {
    switch (etat) {
        case 3:
            switch (t) {
                case 'a': etat=1; break;
                case 'b': etat=0; break;
                case 'c': etat=4; break;
                default: printf("erreur");
            } break;
        ...
        case 0:
            switch (t) { ... } break;
    }
    scanf("%c", &t);
}
if (etat == 4) printf("reconnu !");
```

Implémentation d'un DFA

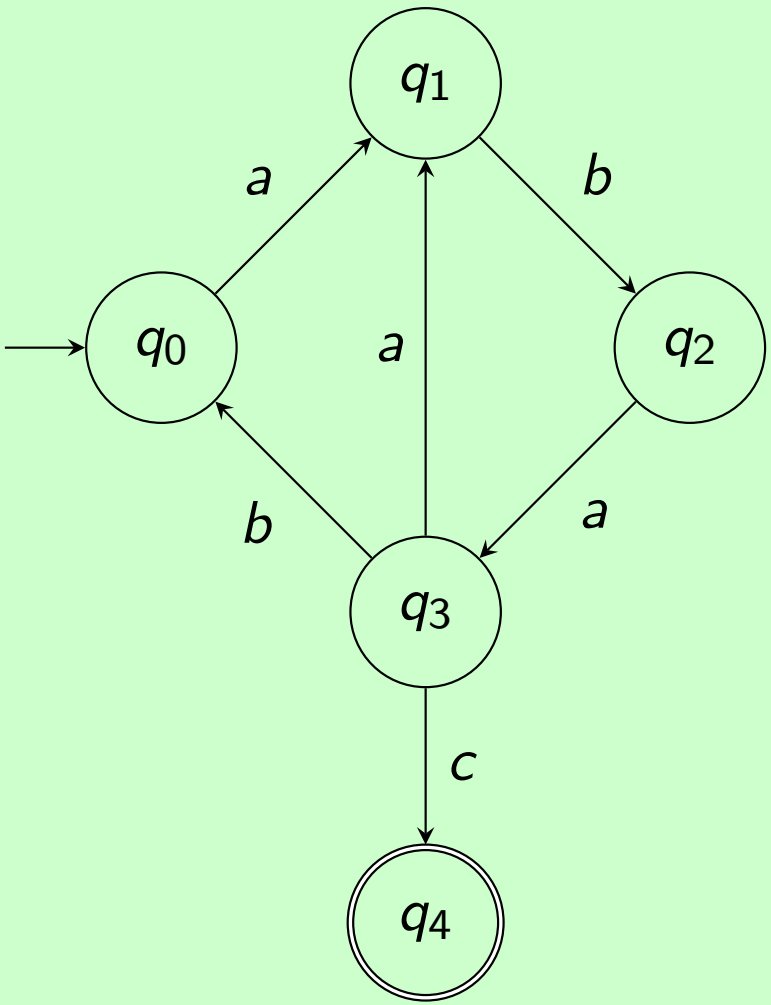
Exemple




```
int etat = 0; char t;
scanf("%c", &t);
while (t<='z' && t >='a') {
    switch (t) {
        case 'a':
            switch (etat) {
                case '0': etat=1; break;
                case '2': etat=3; break;
                case '3': etat=1; break;
                default: printf("erreur");
            } break;
        ...
        case 'c':
            switch (t) { ... } break;
    }
    scanf("%c", &t);
}
if (etat == 4) printf("reconnu !");
```

Implémentation d'un DFA

Exemple




```
const int delta[5][3] = {
    { 1,-1,-1},
    {-1, 2,-1},
    { 3,-1,-1},
    { 1, 0, 4},
    {-1,-1,-1}};
int etat = 0;
char t;
scanf("%c", &t);
while (t<='z' && t >='a') {
    etat = delta[etat][t-'a'];
    if (etat == -1) printf("erreur!");
    scanf("%c", &t);
}
if (etat == 4) printf("reconnu !");
```

Complétion d'un DFA

Définition (Complétude)

Un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ est dit **complet** si δ est définie pour tout $q \in Q$ et tout $a \in \Sigma$ (δ est une fonction totale).

- Pour rendre un automate complet, une méthode est de rajouter un état « erreur » q_{err} qui prend en compte les comportements imprévus ;
- Si, pour $q \in Q$ et $a \in \Sigma$, $\delta(q, a)$ n'est pas défini alors on définit $\delta(q, a) = q_{err}$;
- C'est fait implicitement dans les implémentations précédentes.

Premier Bilan

- On sait qu'un langage régulier peut-être reconnu par un DFA ;
- On sait implémenter un DFA ;
- On sait exprimer un langage régulier par une expression régulière ;
- Étant donné un DFA, on sait calculer son langage

Reste :

- Comment savoir si un langage donné est régulier ?
- Comment construire l'automate reconnaissant une RE particulière ?

Prouver qu'un langage est régulier

Pour prouver qu'un langage $\mathcal{L}$ est régulier :

- Exprimer $\mathcal{L}$ comme le résultat d'opérations régulières sur des langages réguliers
- Construire l'automate qui reconnaît $\mathcal{L}$ (preuve constructive)

Exercice

- Montrer que $\mathcal{L} = \{a^m b^n | m, n \in \mathbb{N}\}$ est régulier ;
- Montrer que tout langage fini est régulier ;
- Montrer que si $\mathcal{L}$ est un langage régulier alors son inverse (l'ensemble de ses éléments inversés) est un langage régulier (p.ex. l'inverse de abc est cba) ;
- Idem pour son complémentaire.

Prouver qu'un langage n'est pas régulier

Lemme (Lemme de l'étoile (Pumping Lemma))

Pour tout langage régulier $\mathcal{L}$, il existe un entier n tel que pour tout mot w de longueur $|w|$ supérieure à n, il existe des mots x, u et y de Σ^* tels que $u \neq \epsilon$, $|xu| \leq n$, $w = xuy$ et $\forall k \geq 0, xu^k y \in \mathcal{L}$.

Exercice

Prouver que $\{a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier

Exercice

1. Prouver avec le lemme de l'étoile que $\{a^m b^n, m > n\}$ n'est pas régulier ;
2. Prouver avec le lemme de l'étoile que $\{a^m b^n, m \neq n\}$ n'est pas régulier ;
3. Prouver que si L_1 et L_2 sont réguliers alors $L_1 \cap L_2$ aussi ;
4. En déduire une autre preuve que $\{a^m b^n, m \neq n\}$ n'est pas régulier.

Traduire une RE en un DFA

Théorème (Theorème de Kleene (rappel))

Les expressions régulières décrivent exactement les langages réguliers.

Définition (Langages réguliers (rappel))

Un langage est dit **régulier** s'il est **reconnu** par un **automate fini**.

Traduire une RE en DFA n'est pas pratique : on va passer par les **automates finis non déterministes**.

Automates Finis Non Déterministes (NFA)

Définition (NFA)

Un automate fini non déterministe (NFA) est un quintuplet $(Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ où :

- Q est un ensemble fini d'**états** ;
- Σ est un **alphabet** fini ;
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \rightarrow \mathbf{2^Q}$ est une fonction partielle appelée **fonction de transition** ;
- $Q_0 \subseteq Q$ est l'**ensemble des états initiaux** ;
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des **états accepteurs** (ou terminaux).

Différences avec les DFA :

- On peut avoir plusieurs états initiaux et plusieurs transitions avec la même étiquette sortant d'un même état ;
- Les transitions ϵ ne changent pas le mot qui est reconnu

Langage d'un NFA

- La relation de transition d'un NFA est :

$$\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \rightarrow \mathbf{2^Q}$$

- Et on a un ensemble d'états initiaux :

$$Q_0 \subseteq Q$$

- En exécutant l'automate sur un mot w on obtient donc un **ensemble** d'états :

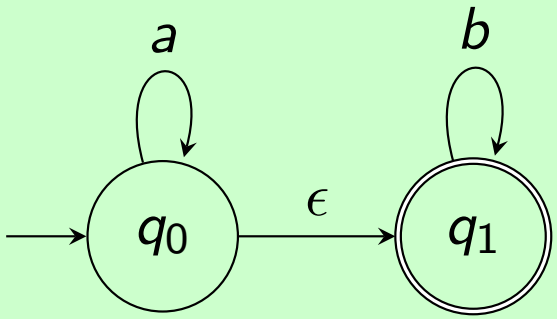
$$\delta(Q_0, w) \in 2^Q$$

- Le mot est accepté si **au moins** l'un de ces états est final :

$$\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$$

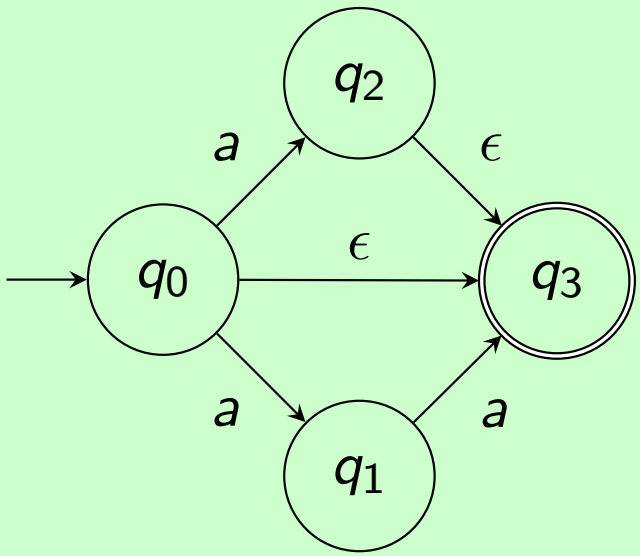
Automates Finis Non Déterministes (NFA)

Exemple



$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = a^* b^*$$

Exemple

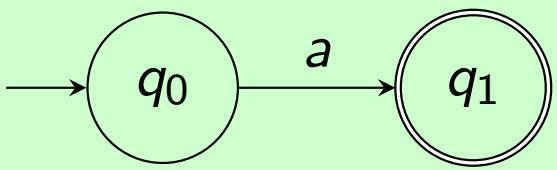


$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \epsilon | a | aa$$

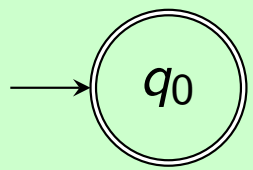
Des RE vers les NFA

- Les **atomes** des RE se codent aisément avec les DFA et donc les NFA :

Exemple



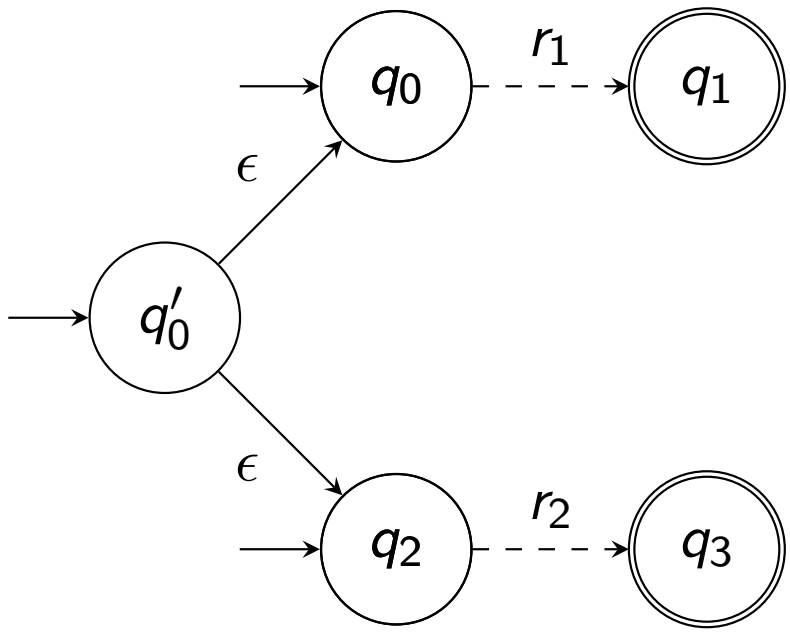
$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = a$



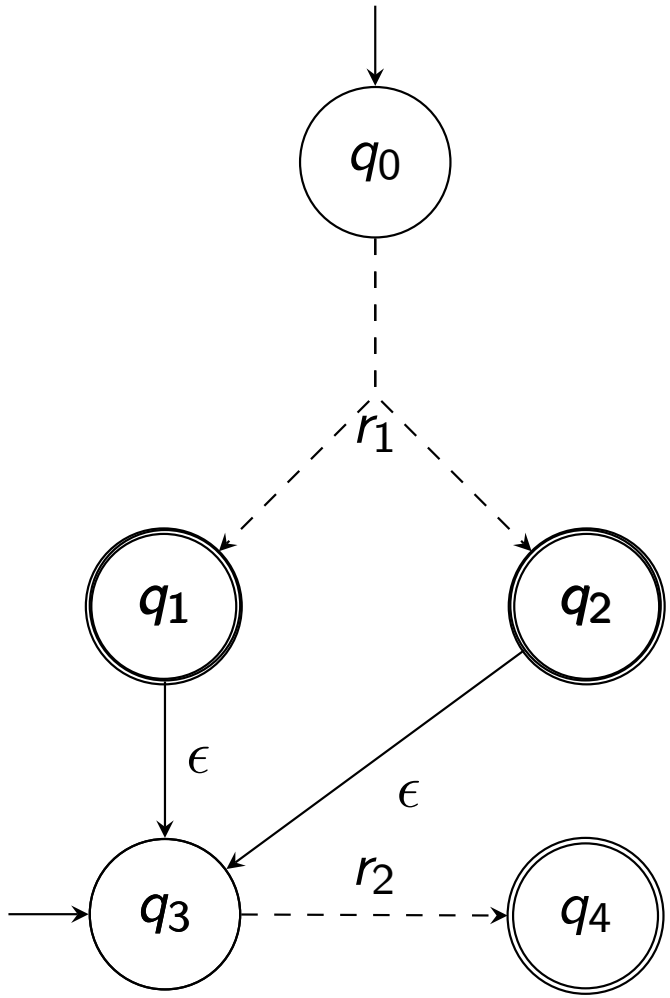
$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \epsilon$

- Restent à coder : les **opérations régulières**

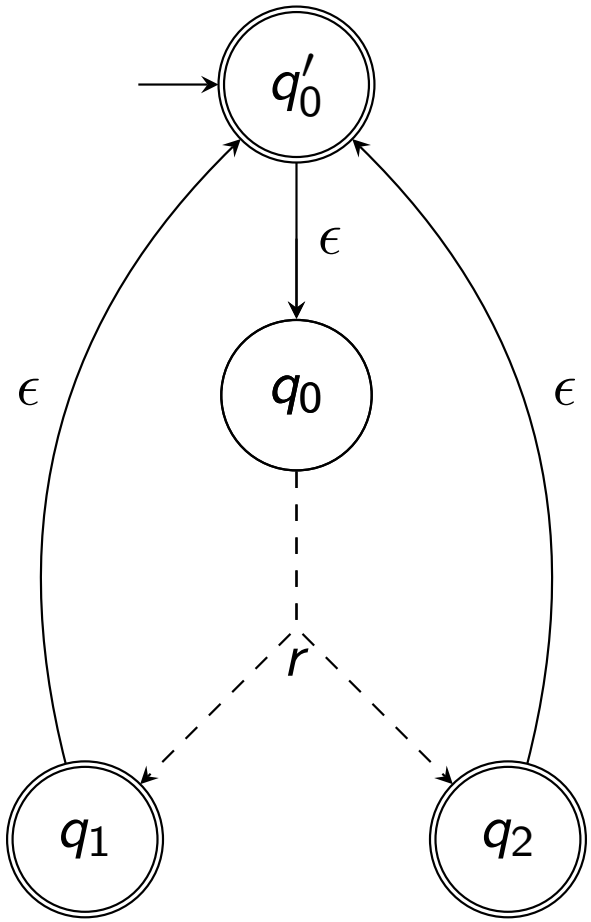
Union : $r_1|r_2$



Concaténation : $r_1 r_2$

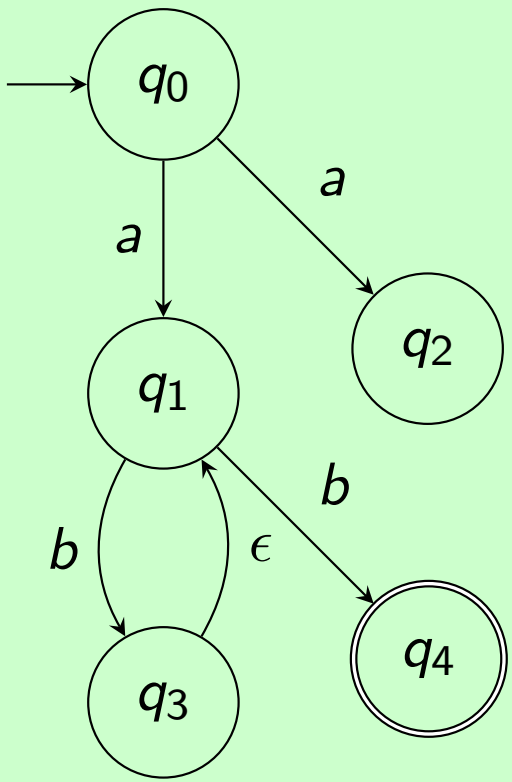


Fermeture (Étoile) de Kleene : r^*



Implémentation d'un NFA

Exemple




```
list<int> T[5][3], E, nE;
list<int>::iterator i; char t;
E.push_back(0);
T[0][0].push_back(1); // q0 -a-> q1
T[0][0].push_back(2); // q0 -a-> q2
T[1][1].push_back(3); // q1 -b-> q3
T[1][1].push_back(4); // q1 -b-> q4
T[3][2].push_back(1); // q3 -ϵ-> q1
cin >> t;
while (t<='z' && t >='a') {
    for (i=E.begin(); i != E.end(); i++) {
       nE.append(T[*i][t-'a']); // mais append
       epsilon-fermeture(nE); // n'existe pas :-(
    }
    E = nE; nE.clear();
    cin >> t;
}
if (find(E.begin(), E.end(), 4) != E.end())
    cout << "reconnu" << endl;
```

Équivalence NFA - DFA

Théorème

Pour tout automate fini non déterministe $\mathcal{A}$, il existe un automate fini déterministe $\Delta(\mathcal{A})$ qui reconnaît le même langage que $\mathcal{A}$.

Calculer $\Delta(\mathcal{A})$ est appelé « Déterminisation de $\mathcal{A}$ ».

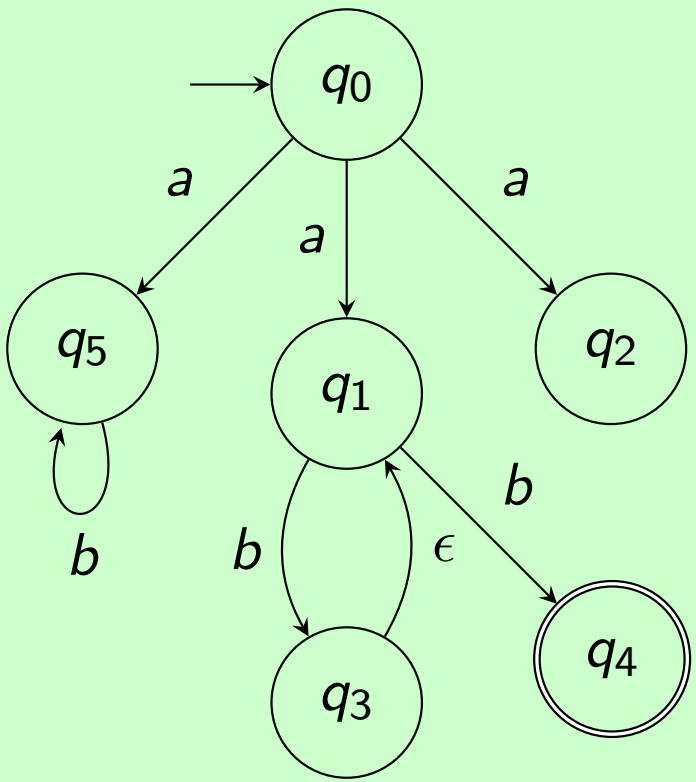
Déterminisation d'un NFA

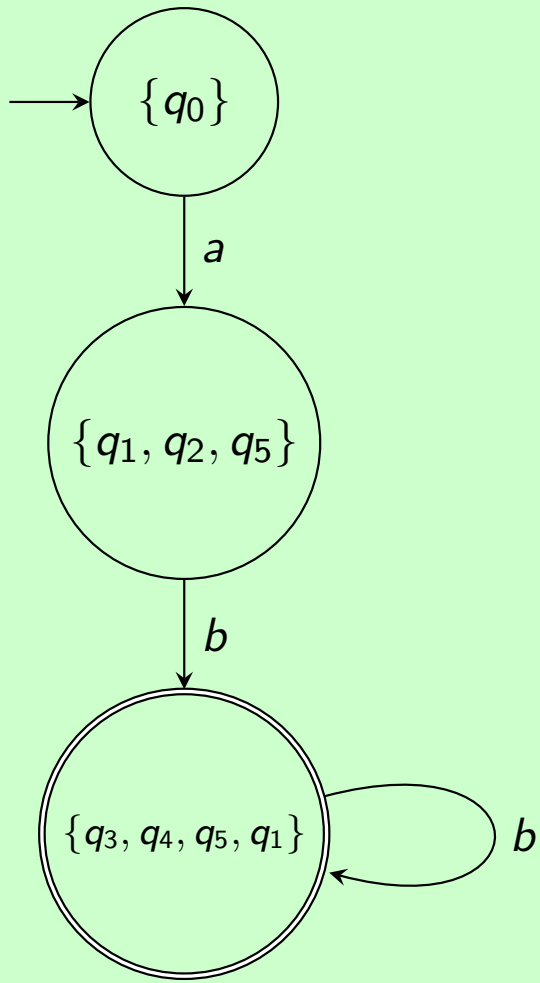
Le principe est le même que celui utilisé pour l'implémentation précédente. Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$. On définit $\Delta(\mathcal{A}) = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$

- $Q' = 2^Q$;
- $q'_0 = Q_0$;
- $F' = \{S \in 2^Q \mid F \cap S \neq \emptyset\}$;
- $\forall q' \in Q', \forall a \in \Sigma, \delta'(q') = \epsilon - \mathcal{F}(\bigcup_{q \in q'} \delta(q, a))$ où $\epsilon - \mathcal{F}$ est le point fixe de la fonction $S \mapsto S \cup \{q | \exists q', q \in \delta(q', \epsilon)\}$.

Déterminisation d'un NFA : Exemple

Exemple

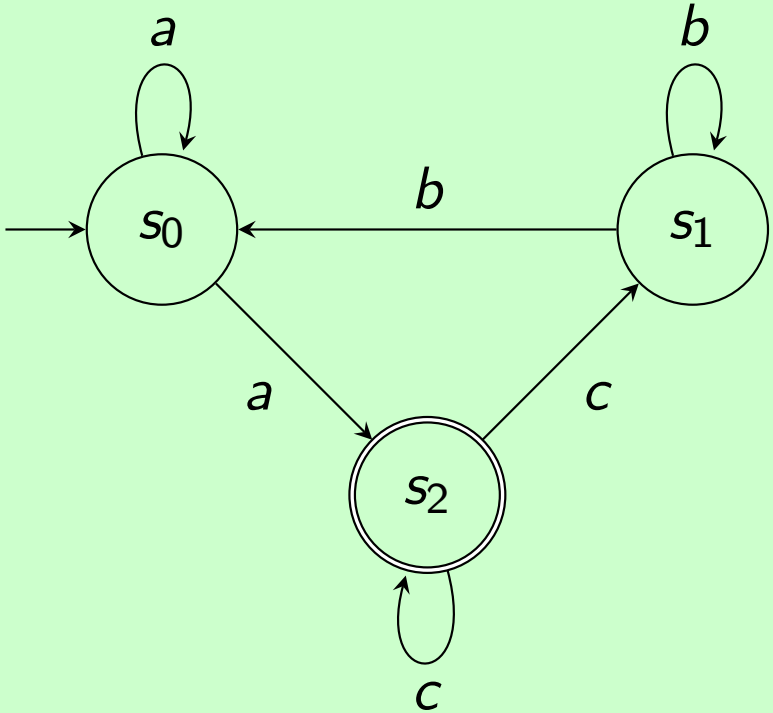


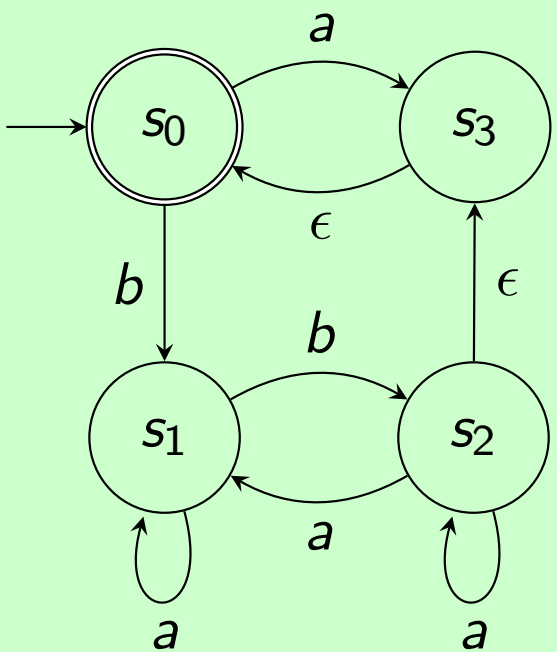


Déterminisation d'un NFA : Exercice

Exercice

Déterminisez les automates suivants :





Exercices

Exercice

Construisez un automate fini déterministe et complet qui reconnaît le langage $(a\Sigma^* b\Sigma^* a)^*$ pour $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice

1. Construisez un NFA sur $\Sigma = \{a\}$ qui reconnaît le langage $\{(aaa)^m(aaaa)^n \mid m, n \geq 0\}$;
2. Construisez un DFA qui reconnaît son complémentaire ;
3. Déduisez-en l'ensemble des nombres qui ne s'écrivent pas $3m + 4n$ avec m, n entiers naturels.

Minimisation d'un DFA

- La déterminisation fournit des automates potentiellement très gros ;
- On définit une **relation d'équivalence** entre les états de l'automate ;

Définition (relation $\equiv$)

On dit que deux états q et q' de $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sont équivalents si $\forall w \in \Sigma^*, \delta(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta(q', w) \in F$. On note alors $q \equiv q'$.

- Les états d'une même classe d'équivalence pourront être confondus.
- Pour construire les classes d'équivalence de $\equiv$, on définit $\equiv_n$:

Définition (relation $\equiv_n$)

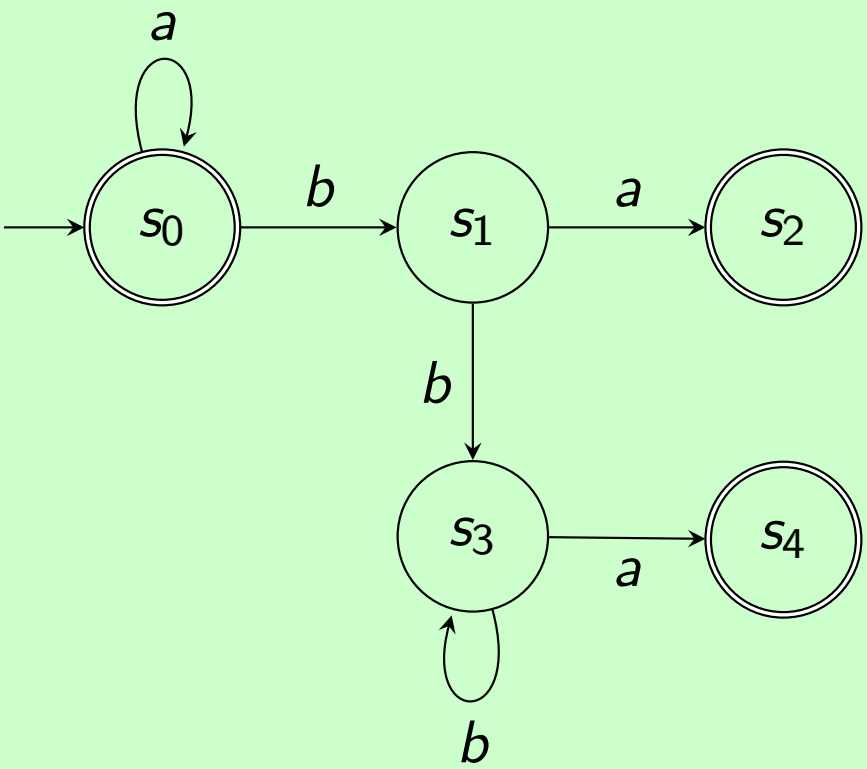
On dit que deux états q et q' de $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sont n-équivalents si $\forall w \in \Sigma^*$ t.q. $|w| \leq n$, $\delta(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta(q', w) \in F$. On note alors $q \equiv_n q'$.

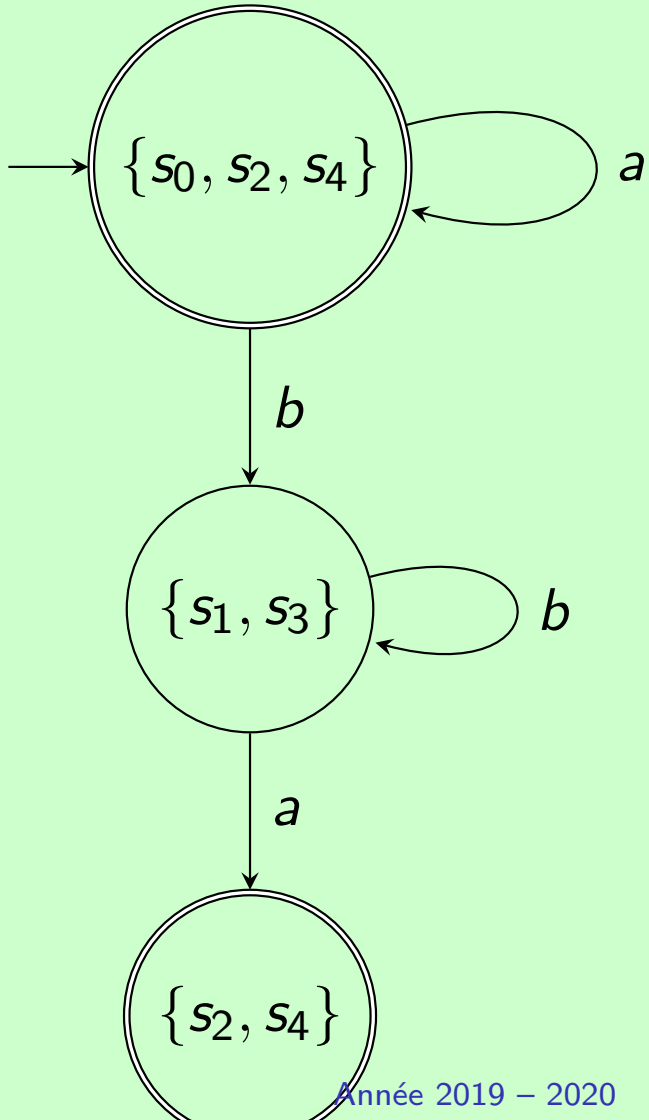
Minimisation d'un DFA

- De façon assez immédiate, la partition de Q induite par $\equiv_0$ est $\{F, Q \setminus F\}$;
- Supposons qu'on a une partition $\mathcal{P}_n$ pour $\equiv_n$. Soit $P, P' \in \mathcal{P}_n$. Alors $\forall a \in \Sigma, \{q \in P | \delta(q, a) \in P'\}$ définit un élément de $\mathcal{P}_{n+1}$;
- Le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_{n+1}$ est supérieur ou égal à celui de $\mathcal{P}_n$;
- Le nombre de façons de partitionner Q est fini, donc $\exists k$ t.q. $\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}_k$. Alors $\equiv_k = \equiv$.

Minimisation d'un DFA

Exemple

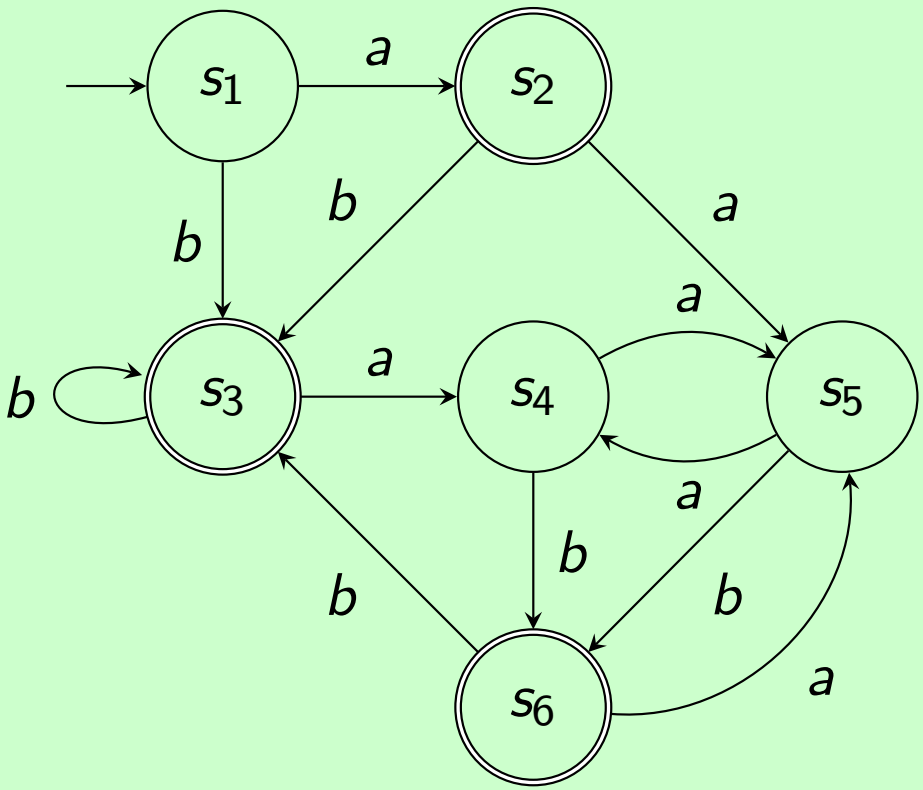


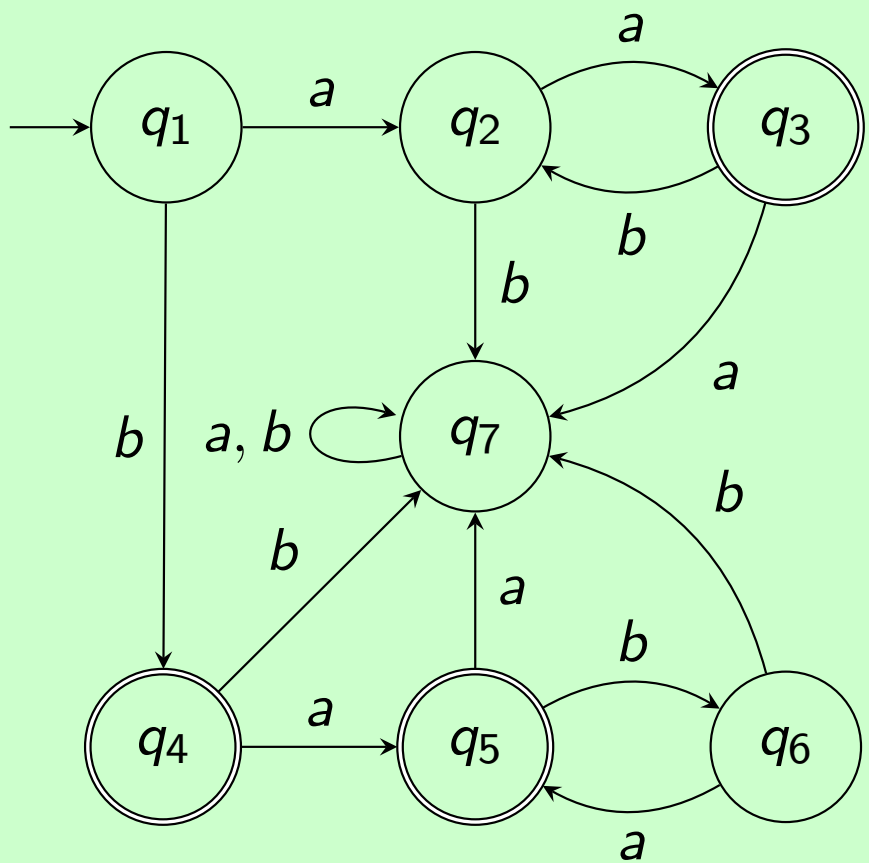


Minimisation d'un DFA : Exercice

Exercice

Minimisez les automates suivants :





Un constructeur d'analyseur lexical : Lex

- **lex** est un constructeur d'analyseur lexical pour Unix ;
- Il génère un **automate fini déterministe** ;
- Un outil ayant ses fonctionalités fait partie du standard **POSIX** ;
- En pratique, on en utilise souvent une implémentation *open source* : **flex**.

Syntaxe du fichier de définition :

```
Définitions
%%
Règles (Expressions régulières)
%%
Code C
```

Lex – Exemple : eval.l

```
%{
#include "..."
%}
BLANC [ \n\t]
%%
[0-9]+          yylval = atoi(yytext); return NOMBRE;
[-+*/=]         return yytext[0]; /* car. unités lexicales *
{BLANC}+        ;
.               fprintf(stderr, "Erreur"); /* tout le reste *
```

Conclusion

- Les expressions rationelles fournissent un bon **compromis** entre :
  - puissance d'expression ;
  - et efficacité.
- On peut en dériver **automatiquement** un DFA qui s'implémente facilement et efficacement ;
- Il existe des outils pour créer ces analyseurs lexicaux ;
- Les automates finis sont également très utilisés pour modéliser ou analyser des **systèmes à événements discrets** :
  - programmes ;
  - systèmes biologiques ;
  - systèmes de production ;
  - scénarios (de jeux) ;
  - ...