Week 5: EDP

February 27, 2017

20 de Febrero

Aproximaciones de ecuaciones diferenciales parciales por diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos.

- U es Función de x y del tiempo
- U se discretiza
- i para x. n para t

$$
\begin{aligned}
U(x) &= U_i \\
U(x + \Delta x) &= U_{i+1} \\
x_i &= x_o + i\Delta x
\end{aligned}
$$

Ecuación de advección 1, la salida es la misma entrada, desplazada por un corrimiento dependiente de la "velocidad" a.

$$
\frac{\partial U}{\partial t} + a\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{1}
$$

Al resolver con Forward Time Forward Space (FTFS) si la velocidad es positiva, diverge la solución. Sin embargo, si la solución es negativa sí da el resultado esperado. Esto es por la causalidad del problema, ya que está tomando datos futuros para un dato actual.

$$
C = a\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{2}
$$

La Ecuación 2 muestra la condición de estabilidad donde la simulación será estable sólo si $|C| \leq 1$ para Centered Space solutions.

Velocidad No lineal

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

$$F = \frac{U^2}{2} \tag{4}$$

Hay tres métodos para resolverlo:

Lax

$$U_i^{n+1} = (U_{i+1}^n + U_{i-1}^n)/2 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[F_{i+1}^n - F_{i-1}^n\right] \tag{5}$$

Mac Cormack

$$U_i^* = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1}^n - F_i^n) \tag{6}$$

$$U_i^{n+1} = \left[U_i^n + U_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x}F_i^* - F_{i-1}^*\right]/2 \tag{7}$$

24 de Febrero

Ecuaciones de Euler para moviminetos de fluidos.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\rho) = 0 \\
\frac{\partial (\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{u}(\rho\vec{u})] + \nabla p = 0 \\
\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}e) + \nabla \cdot (p\vec{u}) = 0 \\
p = (\gamma - 1)(e - \frac{1}{2}\rho u^2)
\end{aligned}$$

En una dimensión se convierten en 3 con,

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} u\rho \\ \rho u^2 + p \\ u(e+p) \end{pmatrix}$$