# 2025 年量子信息导论（量子信息）习题参考答案

## 第一次作业

2.2、(矩阵表示例子)设 V 是以$|0\rangle$和$|1\rangle$为基向量的向量空间，A 是从 V 到 V 的线性算子，使$A|0\rangle=|1\rangle, A|1\rangle=|0\rangle$，给出 A 相对于输入基$|0\rangle,|1\rangle$和输出基$|0\rangle,|1\rangle$的矩阵表示，找出使 A 具有不同矩阵表示的输入输出基。

**解：**

已知$|0\rangle$和$|1\rangle$的向量表示为：

$$|0\rangle \equiv \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, |1\rangle \equiv \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

设$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，根据题意有：

$$A|0\rangle=|1\rangle \rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$A|1\rangle=|0\rangle \rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

四个方程四个未知量，解方程得到$a=0,c=1,b=1,d=0$，即 A 相对于输入基$|0\rangle,|1\rangle$和输出基$|0\rangle,|1\rangle$的矩阵表示为：$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$。

考虑使用$|+\rangle$和$|-\rangle$作为输出基，即存在$A|0\rangle=|+\rangle, A|1\rangle=|-\rangle$，已知$|+\rangle$和$|-\rangle$可以用基$|0\rangle,|1\rangle$表示为：

$$|+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$
$$|-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

则有：

$$A|0\rangle=|+\rangle \rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$
$$A|1\rangle=|-\rangle \rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

解方程得到：$a=\frac{1}{\sqrt{2}},c=\frac{1}{\sqrt{2}},b=\frac{1}{\sqrt{2}},d=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，因此 A 相对于输入基$|0\rangle,|1\rangle$和输出基$|+\rangle$，

$|-\rangle$ 的另一种矩阵表示为：$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$。

注：线性算子的矩阵表示依赖于所选的输入基和输出基。通过改变基，可以得到不同的矩阵表示。

2.11、（Pauli 矩阵的特征分解）找出 Pauli 矩阵 X,Y 和 Z 的特征向量、特征值和对角表示。

**解：**

（1）、Pauli-X 矩阵为 $X=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，先求它的特征值，根据公式 $\det(X-\lambda I)=|X-\lambda I|=0$ 得到：

$$X-\lambda I=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}$$

$$\lambda^2-1=0\rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

先求 $\lambda_1=1$ 的特征向量，根据公式 $(X-\lambda_1 I)|\upsilon_1\rangle=0$ 得到：

$$\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-1\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow x_1=x_2$$

令 $x_1=1$，再归一化得到：

$$|\upsilon_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)=|+\rangle$$

同理求得 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $|\upsilon_2\rangle$ 满足 $x_1=-x_2$，令 $x_1=1$，再归一化得到：

$$|\upsilon_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)=|-\rangle$$

所以 Pauli-X 矩阵的对角表示为：

$$\begin{aligned}X&=\lambda_1|\upsilon_1\rangle\langle\upsilon_1|+\lambda_2|\upsilon_2\rangle\langle\upsilon_2|\\ &=|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|\end{aligned}$$

或写成矩阵形式：

$$X=PDP^{\dagger},P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

（2）、Pauli-Y 矩阵为 $Y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}$，先求它的特征值，根据公式 $\det(Y-\lambda I)=|Y-\lambda I|=0$

得到：

$$\mathrm{Y}-\lambda\mathrm{I}=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & -i\\ i & -\lambda\end{bmatrix}$$

$$\lambda^2-1=0\rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

先求 $\lambda_1=1$ 的特征向量，根据公式 $(\mathrm{Y}-\lambda_1\mathrm{I})|\upsilon_1\rangle=0$ 得到：

$$\left(\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}-1\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -i\\ i & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow y_2=iy_1$$

令 $y_1=1$，再归一化得到：

$$|\upsilon_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$$

同理求得 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $|\upsilon_2\rangle$ 满足 $y_2=-iy_1$，令 $y_1=1$，再归一化得到：

$$|\upsilon_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

所以 Pauli-Y 矩阵的对角表示为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}&=\lambda_1|\upsilon_1\rangle\langle\upsilon_1|+\lambda_2|\upsilon_2\rangle\langle\upsilon_2|\\ &=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\end{bmatrix}+(-1)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & i\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

或写成矩阵形式：

$$Y=QDQ^{\dagger},Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

（3）、Pauli-Z 矩阵为 $\mathrm{Z}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，先求它的特征值，根据公式 $\det(\mathrm{Z}-\lambda\mathrm{I})=|\mathrm{Z}-\lambda\mathrm{I}|=0$ 得到：

$$\mathrm{Z}-\lambda\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2=0\rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

先求 $\lambda_1=1$ 的特征向量，根据公式 $(Z-\lambda_1\mathrm{I})|\upsilon_1\rangle=0$ 得到：

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} - 1\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow z_2 = 0$$

令 $z_1 = 1$，再归一化得到：

$$|\upsilon_1\rangle = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = |0\rangle$$

同理求得 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量 $|\upsilon_2\rangle$ 满足 $z_1 = 0$，令 $z_2 = 1$，再归一化得到：

$$|\upsilon_2\rangle = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = |1\rangle$$

所以 Pauli-Z 矩阵的对角表示为：

$$\begin{aligned} Z &= \lambda_1|\upsilon_1\rangle\langle\upsilon_1| + \lambda_2|\upsilon_2\rangle\langle\upsilon_2| \\ &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

Z 本身已经是对角矩阵：

$$Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

2.20、（更换基）设 $\mathrm{A}'$ 和 $\mathrm{A}''$ 是向量空间 V 上的一个算子 A 对两个不同的标准正交基 $|\upsilon_i\rangle, |\omega_i\rangle$ 的矩阵表示，则 $\mathrm{A}'$ 和 $\mathrm{A}''$ 的元素分别为 $\mathrm{A}'_{ij} = \langle\upsilon_i|\mathrm{A}|\upsilon_j\rangle$ 和 $\mathrm{A}''_{ij} = \langle\omega_i|\mathrm{A}|\omega_j\rangle$，刻画 $\mathrm{A}'$ 和 $\mathrm{A}''$ 之间的关系。

**解：**

根据题意，$|\upsilon_i\rangle, |\omega_i\rangle$ 是向量空间 V 上的两组标准正交基，则它们可以互相表示：

$$|\omega_i\rangle = \sum_m p_{im}|\upsilon_m\rangle$$

$$|\omega_j\rangle = \sum_n p_{jn}|\upsilon_n\rangle$$

显然有 $p_{im} = \langle\upsilon_m|\omega_i\rangle, p_{jn} = \langle\upsilon_n|\omega_j\rangle$。根据题目条件有：

$$\begin{aligned} \mathrm{A}''_{ij} &= \langle\omega_i|\mathrm{A}|\omega_j\rangle \\ &= \sum_m p_{im}\langle\upsilon_m|\cdot\mathrm{A}\cdot\sum_n p_{jn}|\upsilon_n\rangle \\ &= \sum_{n,m}\langle\omega_i|\upsilon_m\rangle\langle\upsilon_m|\mathrm{A}|\upsilon_n\rangle\langle\upsilon_n|\omega_j\rangle \\ &= \sum_{n,m}\langle\omega_i|\upsilon_m\rangle\mathrm{A}'_{nm}\langle\upsilon_n|\omega_j\rangle \end{aligned}$$

因此，从 $\mathrm{A}''_{ij} = \sum_{n,m}\langle\omega_i|\upsilon_m\rangle\mathrm{A}'_{nm}\langle\upsilon_n|\omega_j\rangle$ 可以看出，$[\mathrm{A}''_{ij}]$ 和 $[\mathrm{A}'_{mn}]$ 存在一个初等矩阵 P，它的

元素为 $\mathrm{P}_{ij}=\langle \upsilon_j|\omega_i\rangle$，使得 $\mathrm{A}''=\mathrm{P}^{\dagger}\mathrm{A}'\mathrm{P}$ 的关系成立，接着上式可以接着写作：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}''_{ij} &= \sum_{n,m}\langle \omega_i|\upsilon_m\rangle \mathrm{A}'_{nm}\langle \upsilon_n|\omega_j\rangle \\
&= \sum_{n,m}\mathrm{P}^*_{im}\mathrm{A}'_{nm}\mathrm{P}_{nj} \\
\mathrm{A}'' &= \mathrm{P}^{\dagger}\mathrm{A}'\mathrm{P}
\end{aligned}
$$

2.26、令 $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$，以 $|0\rangle|1\rangle$ 的张量积形式，并采用 Kronecker 积，具体写出 $|\psi\rangle^{\otimes 2},|\psi\rangle^{\otimes 3}$。

**解：**

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle^{\otimes 2} &= |\psi\rangle\otimes|\psi\rangle=\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[|0\rangle\otimes(|0\rangle+|1\rangle)+|1\rangle\otimes(|0\rangle+|1\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle\otimes|0\rangle+|0\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|0\rangle+|1\rangle\otimes|1\rangle)=\frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

同理可得：

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle^{\otimes 2} &= |\psi\rangle\otimes|\psi\rangle\otimes|\psi\rangle \\
&= |\psi\rangle^{\otimes 2}\otimes|\psi\rangle \\
&= \frac{|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle}{2}\otimes\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle)\otimes|0\rangle+(|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle)\otimes|1\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|1\rangle|0\rangle+|1\rangle|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle|0\rangle+|0\rangle|0\rangle|1\rangle+|0\rangle|1\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|1\rangle|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2.40、（泡利矩阵的对易关系）验证下面的对易关系：

$$[X,Y]=XY-YX=2iZ$$
$$[Y,Z]=YZ-ZY=2iX$$
$$[Z,X]=ZX-XZ=2iY$$

他还有一种优雅的书写方式，使用有三个指标的反对称张量 $\varepsilon_{jkl}$，其中除了 $\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$ 和 $\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=-1$，其余的 $\varepsilon_{jkl}=0$：

$$\left[\sigma_j,\sigma_k\right]=2i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

**解：**

验证：

$$[X,Y]=XY-YX=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=2i\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=2iZ$$
$$[Y,Z]=YZ-ZY=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}=2i\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=2iX$$
$$[Z,X]=ZX-XZ=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=2i\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}=2iY$$

根据题意，令 $X=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 标记为 1，$Y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}$ 标记为 2，$Z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 标记为 3，以上验证的 3 个等式可验证通项式 $\left[\sigma_j,\sigma_k\right]=2i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{jkl}\sigma_l$ 成立，即 $\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$。

再者：

$$[Y,X]=YX-XY=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}=-2i\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-2iZ$$
$$[Z,Y]=ZY-YZ=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-2i\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=-2iX$$
$$[X,Z]=XZ-ZX=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=-2i\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}=-2iY$$

验证了 $\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=-1$。

另外：$\{1,2,3\}$ 的全排序中，除去以上六种排序，不存在其他排序，所以结论成立。

# 第二次作业

1、请利用布洛赫球表示以下量子态

$$(1).|\psi\rangle=\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$(2).|\psi\rangle=\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$(3).|\psi\rangle=\frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$(4).|\psi\rangle=\frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

**解：**

对于 1 个纯态$|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$，可以等价表示为

$$|\psi\rangle=\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle+e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle,\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$$

此时，通过 2 个实参数$\theta,\varphi$就可以确定 1 个唯一的 qubit 状态。

其对应的点为$(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)$，其中$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$

（1）$|\psi\rangle=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$

则有$|\psi\rangle=\cos\frac{\pi/2}{2}|0\rangle+e^{i0}\sin\frac{\pi/2}{2}|1\rangle$，故$\theta=\pi/2,\varphi=0$，**其对应的点为**$(1,0,0)$。

（2）$|\psi\rangle=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$

则有$|\psi\rangle=\cos\frac{\pi/2}{2}|0\rangle+e^{i\pi}\sin\frac{\pi/2}{2}|1\rangle$，故$\theta=\pi/2,\varphi=\pi$，**其对应的点为**$(-1,0,0)$。

（3）$|\psi\rangle=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\right)+\left(i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$

则有$|\psi\rangle=\cos\frac{\pi/2}{2}|0\rangle+e^{i\pi/2}\sin\frac{\pi/2}{2}|1\rangle$，故$\theta=\pi/2,\varphi=\pi/2$，**其对应的点为**$(0,1,0)$。

（4）$|\psi\rangle=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\right)+\left(-i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$

则有$|\psi\rangle=\cos\frac{\pi/2}{2}|0\rangle+e^{i3\pi/2}\sin\frac{\pi/2}{2}|1\rangle$，故$\theta=\pi/2,\varphi=3\pi/2$，**其对应的点为**$(0,-1,0)$。

# 第三次作业

1、用$\{|0\rangle,|1\rangle\}$基测量量子态$|+\rangle$，会得到什么结果？其中$|0\rangle$发生的概率是多少？

**解：**

首先，用基$\{|0\rangle,|1\rangle\}$测量任何量子态都只能出现两种结果：$|0\rangle$或$|1\rangle$。

其次，概率用公式$p(u_i)=\langle\phi|P_i|\phi\rangle$计算。先将量子态$|+\rangle$用基$|0\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},|1\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$展开：

$$|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

基$\{|0\rangle,|1\rangle\}$对应的测量矩阵分别为：

$$P_0=|0\rangle\langle 0|=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$
$$P_1=|1\rangle\langle 1|=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

那么，$|0\rangle$发生的概率为：

$$p(0)=\langle +|P_0|+\rangle=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}$$

同理可得$|1\rangle$发生的概率为：

$$p(1)=\langle +|P_1|+\rangle=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}$$

2、如图 1，在施特恩-格拉赫实验中，对由高温炉产生的银原子施加 Z 方向的不均匀磁场，对这个银原子进行测量，测量结果是自旋向上的概率是$p_1=a$，结果是自旋向下的概率是$p_2=b$。

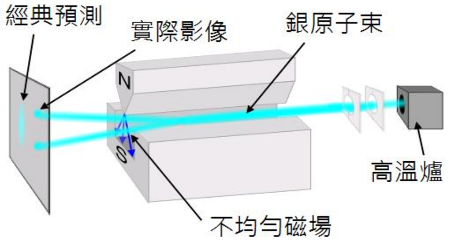



图 1 施特恩-格拉赫实验示意图

（1）请写出高温炉射出的银原子的自旋状态$|\varphi\rangle$。

**解：**

提示：（可写成$|0\rangle$和$|1\rangle$的叠加态）

$$|\varphi\rangle=\sqrt{a}|0\rangle+\sqrt{b}|1\rangle$$

其中自旋向上态为$|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，自旋向下态为$|1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$。

（2）在施特恩-格拉赫实验中，沿 Z 方向施加磁场，对应的可观测算子是泡利矩阵$Z$，请计算自旋状态为$|\varphi\rangle$系统的可观测算子$Z$的测量不确定度（标准偏差）。

**解：**

（提示 1：不确定度也就是标准差，可用公式$\Delta\hat{\sigma}_Z^2=\langle\varphi|\left(Z-\bar{Z}\right)^2|\varphi\rangle$计算）

（提示 2：期待值即平均值，可用公式$\bar{Z}=\langle\varphi|Z|\varphi\rangle$计算）

首先，泡利矩阵 Z 为$Z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，满足本征方程$Z|0\rangle=|0\rangle$和$Z|1\rangle=-|1\rangle$。

不确定度的计算公式可以展开为：

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\sigma}_Z^2&=\langle\varphi|\left(Z-\bar{Z}\right)^2|\varphi\rangle\\&=\langle\varphi|\left[Z^2+\bar{Z}^2-2Z\bar{Z}\right]|\varphi\rangle\\&=\langle\varphi|Z|\varphi\rangle+\langle\varphi|\bar{Z}^2|\varphi\rangle-2\langle\varphi|Z\bar{Z}|\varphi\rangle\\&=\overline{Z^2}-\left(\bar{Z}\right)^2\end{aligned}$$

其中$\overline{Z^2}$是平方的均值，$\left(\bar{Z}\right)^2$是均值的平方。先计算均值：

$$\begin{aligned}\bar{Z}&=\langle\varphi|Z|\varphi\rangle\\&=\left(\sqrt{a}\langle 0|+\sqrt{b}\langle 1|\right)Z\left(\sqrt{a}|0\rangle+\sqrt{b}|1\rangle\right)\\&=\sqrt{a}\langle 0|Z\sqrt{a}|0\rangle+\sqrt{b}\langle 1|Z\sqrt{a}|0\rangle+\sqrt{a}\langle 0|Z\sqrt{b}|1\rangle+\sqrt{b}\langle 1|Z\sqrt{b}|1\rangle\\&=a\langle 0|0\rangle+\sqrt{ab}\langle 1|0\rangle-\sqrt{ab}\langle 0|1\rangle-b\langle 1|1\rangle\\&=a-b\end{aligned}$$

其中$\langle 0|1\rangle,\langle 1|0\rangle$为零，因为它们是正交的。因此均值的平方为：

$$\left(\bar{Z}\right)^2=\left(a-b\right)^2$$

因为泡利 Z 矩阵$Z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$的平方为单位矩阵$Z^2=I$，所以平方的均值为 1：

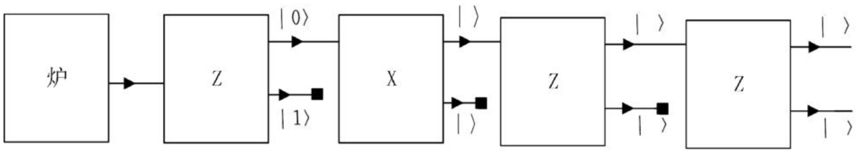
$$\overline{Z^2}=\langle\varphi|Z^2|\varphi\rangle=\langle\varphi|\varphi\rangle=1$$

因此不确定度为：

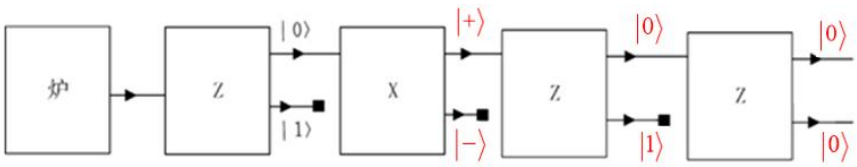
$$\begin{aligned}\vartriangle\hat{\sigma}_Z^2&=\overline{Z^2}-\left(\bar{Z}\right)^2\\&=1-\left(a-b\right)^2\\&=1-\left(a+b\right)^2+4ab\\&=4ab\end{aligned}$$

其中，上式最后一个等号利用了量子态的概率和为 1，即 $a+b=1$。

3、如图所示施特恩-格拉赫实验，填出每次测量塌缩到的量子态，并给出详细计算过程。



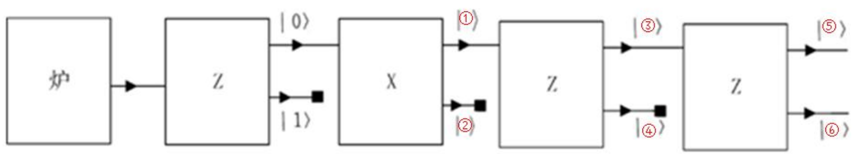

**解：答案如下**




**过程如下：**

（提示：用矩阵 A 测量，A 可以是泡利 X,Y,Z 矩阵或其他测量矩阵，得到的结果只会是 A 的特征值，量子态只会坍缩到 A 的本征态上）

首先将几个空标记为：




①、②：泡利 X 矩阵 $X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 满足特征方程：

$$X|+\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=|+\rangle$$

$$X|-\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=-|-\rangle$$

所以用泡利 X 矩阵测量任何量子态都只会坍缩到它的本征态中的一个，即结果只能是 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$。具体来说，图中输入泡利 X 矩阵的为态 $|0\rangle$，经过泡利 X 矩阵的测量，出现的结

果必然是$|+\rangle$或$|-\rangle$，所以①、②中可以分别填写$|+\rangle$和$|-\rangle$，顺序都可以，但是我们一般习惯上面填写$|+\rangle$，下面填写$|-\rangle$。

【拓展】坍缩到$|+\rangle$或$|-\rangle$的概率有两种计算方法：

方法一、测量矩阵$P_+=|+\rangle\langle+|,P_-=|-\rangle\langle-|$，然后利用公式$p(+)=\langle0|P_+|0\rangle,p(-)=\langle0|P_-|0\rangle$。

方法二、将量子态$|0\rangle$用$|+\rangle$和$|-\rangle$展开，前面的系数的模平方就是坍缩的概率。

这里我们使用方法二(后面将会展示使用方法一计算的过程)，把$|0\rangle$用$|+\rangle$和$|-\rangle$展开：

$$|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

观察展开后的系数，我们得到$|0\rangle$用泡利 X 矩阵测量后，有$\frac{1}{2}$的概率坍缩到$|+\rangle$，有$\frac{1}{2}$的概率坍缩到$|-\rangle$。

③、④：泡利 Z 矩阵为$Z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，满足本征方程：

$$Z|0\rangle=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=|0\rangle$$
$$Z|1\rangle=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=-|1\rangle$$

所以用泡利 Z 矩阵测量任何量子态都只会坍缩到它的本征态中的一个，即结果只能是$|0\rangle$或$|1\rangle$。具体来说，图中第一个泡利 Z 矩阵的输入态$|+\rangle$，经过泡利 Z 矩阵的测量，出现的结果必然是$|0\rangle$或$|1\rangle$，所以③、④中可以分别填写$|0\rangle$或$|1\rangle$，顺序都可以，但是我们一般习惯上面填写$|0\rangle$，下面填写$|1\rangle$。

这里我们使用方法一展示坍缩到$|0\rangle$或$|1\rangle$的概率，两个测量矩阵为测量矩阵$P_0=|0\rangle\langle0|,P_1=|1\rangle\langle1|$，因此$|+\rangle$坍缩的概率为：

$$p(0)=\langle +|P_0|+\rangle=\langle +|(|0\rangle\langle 0|)|+\rangle=\langle +|0\rangle\langle 0|+\rangle=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$p(1)=\langle +|P_1|+\rangle=\langle +|(|1\rangle\langle 1|)|+\rangle=\langle +|1\rangle\langle 1|+\rangle=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}$$

因此有$\frac{1}{2}$的概率坍缩到$|0\rangle$，有$\frac{1}{2}$的概率坍缩到$|1\rangle$。

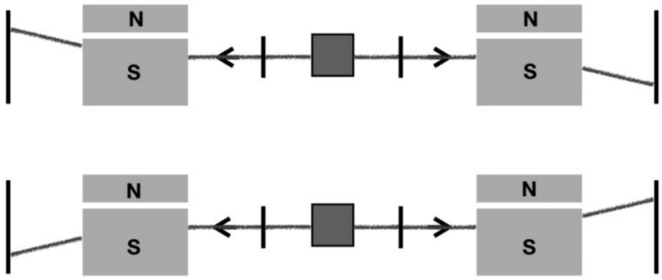
⑤、⑥：$|0\rangle$经过第二个泡利 Z 矩阵的测量，会坍缩到$|0\rangle$或$|1\rangle$上，概率分别为：

$$p(0)=\langle 0|P_0|0\rangle=\langle 0|(|0\rangle\langle 0|)|0\rangle=\langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle=1$$
$$p(1)=\langle 0|P_1|0\rangle=\langle 0|(|1\rangle\langle 1|)|0\rangle=\langle 0|1\rangle\langle 1|0\rangle=0$$

因此$|0\rangle$经过第二个泡利 Z 矩阵的测量，必然坍缩到$|0\rangle$上。所以，⑤、⑥两个空都填$|0\rangle$。

# 第四次作业

1、如图为比特施特恩-格拉赫实验，蒸发炉能够产生一对一对的自旋，两个自旋具有相反的动量，图中示意地描绘了仅有的两种可能观测结果，即如果自旋 1 处于向上的状态那么自旋 2 处于向下的状态；如果自旋 1 处于向下的状态那么自旋 2 处于向上的状态。




（1）、请写出该双自旋量子态$\left|\varphi\right\rangle$的表达式，并说明该态是否为纠缠态，为什么？

**解：**

首先设自旋向上为$|0\rangle$，自旋向下为$|1\rangle$

$$\begin{aligned}|\varphi\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_1\rangle\otimes|1_2\rangle+|1_1\rangle\otimes|0_2\rangle\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle\right)\end{aligned}$$

第一行中的下标$1,2$代表属于第 1 个或第 2 个粒子。第二行是一种简记的符号。或者$\left|\varphi\right\rangle$也可以写为：

$$|\varphi\rangle=a|0\rangle|1\rangle+b|1\rangle|0\rangle,a^2+b^2=1$$

这个态是纠缠态，**因为它不能分解为两个单粒子态的直积**。后续题目为了计算方便都用$|\varphi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle+|10\rangle\right)$。

（2）、测量的是沿 Z 方向的自旋，对应的可观测算符是泡利矩阵$Z_1Z_2$，请计算状态$\left|\varphi\right\rangle$系统可观测量$Z_1Z_2$的平均值。

**解：**

泡利 Z 矩阵的本征态为：

$$Z|0\rangle=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=|0\rangle$$

$$Z|1\rangle=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=-|1\rangle$$

可以不需要知道上述矩阵形式的本征方程，只要知道真值表，知道泡利 Z 矩阵的作用为 $\begin{cases} Z|0\rangle \to |0\rangle \\ Z|1\rangle \to -|1\rangle \end{cases}$ 即可，因此均值为：

$$\begin{aligned}
\overline{Z_1Z_2} &= \langle\varphi|Z_1Z_2|\varphi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 01|+\langle 10|\right)\cdot Z_1Z_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle+|10\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle 01|Z_1Z_2|01\rangle+\langle 01|Z_1Z_2|10\rangle+\langle 10|Z_1Z_2|01\rangle+\langle 10|Z_1Z_2|10\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle 0|Z_1|0\rangle\langle 1|Z_2|1\rangle+\langle 0|Z_1|1\rangle\langle 1|Z_2|0\rangle+\langle 1|Z_1|0\rangle\langle 0|Z_2|1\rangle+\langle 1|Z_1|1\rangle\langle 0|Z_2|0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\langle 0|0\rangle\langle 1|1\rangle-\langle 0|1\rangle\langle 1|0\rangle-\langle 1|0\rangle\langle 0|1\rangle-\langle 1|1\rangle\langle 0|0\rangle\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

（3）、计算 $|\varphi\rangle$ 的密度算子，并判断它是否为纯态。

**解：**

（提示 1：任何量子态只要能用向量形式即 $|\varphi\rangle$ 描述的都是纯态）

（提示 2：如果一个量子态用密度算子形式即 $\hat{\rho}$ 描述，如果 $Tr\{\hat{\rho}^2\}=1$ 就是纯态，如果 $Tr\{\hat{\rho}^2\}<1$ 就是混态）

本题的量子态已经用向量形式 $|\varphi\rangle$ 描述，根据提示 1，$|\varphi\rangle$ 显然是纯态，但我们也可以用提示 2 的密度算子判断方法进行判断，下面我们把简记的形式展开，方便大家查看计算过程。

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= |\varphi\rangle\langle\varphi| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_1\rangle\otimes|1_2\rangle+|1_1\rangle\otimes|0_2\rangle\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0_1|\otimes\langle 1_2|+\langle 1_1|\otimes\langle 0_2|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|0_1\rangle\otimes|1_2\rangle+|1_1\rangle\otimes|0_2\rangle\right)\left(\langle 0_1|\otimes\langle 1_2|\right)+\frac{1}{2}\left(|0_1\rangle\otimes|1_2\rangle+|1_1\rangle\otimes|0_2\rangle\right)\left(\langle 1_1|\otimes\langle 0_2|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(|0_1\rangle\otimes|1_2\rangle\right)\left(\langle 0_1|\otimes\langle 1_2|\right)+\left(|1_1\rangle\otimes|0_2\rangle\right)\left(\langle 0_1|\otimes\langle 1_2|\right)+\left(|0_1\rangle\otimes|1_2\rangle\right)\left(\langle 1_1|\otimes\langle 0_2|\right)+\left(|1_1\rangle\otimes|0_2\rangle\right)\left(\langle 1_1|\otimes\langle 0_2|\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(|0_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\left(|1_2\rangle\langle 1_2|\right)+\left(|1_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\left(|0_2\rangle\langle 1_2|\right)+\left(|0_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\left(|1_2\rangle\langle 0_2|\right)+\left(|1_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\left(|0_2\rangle\langle 0_2|\right)\right]
\end{aligned}$$

最后我们再变回简记的形式：

$$\hat{\rho}=\frac{1}{2}\left[\left(|0\rangle\langle 0|\right)\otimes\left(|1\rangle\langle 1|\right)+\left(|1\rangle\langle 0|\right)\otimes\left(|0\rangle\langle 1|\right)+\left(|0\rangle\langle 1|\right)\otimes\left(|1\rangle\langle 0|\right)+\left(|1\rangle\langle 1|\right)\otimes\left(|0\rangle\langle 0|\right)\right]$$

矩阵表示为：

$$\hat{\rho}=\frac{1}{2}\left[\left(|0\rangle\langle 0|\right)\otimes\left(|1\rangle\langle 1|\right)+\left(|1\rangle\langle 0|\right)\otimes\left(|0\rangle\langle 1|\right)+\left(|0\rangle\langle 1|\right)\otimes\left(|1\rangle\langle 0|\right)+\left(|1\rangle\langle 1|\right)\otimes\left(|0\rangle\langle 0|\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

密度算子的平方为：

$$\hat{\rho}^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&2&0\\0&2&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因为：

$$Tr\left(\hat{\rho}^2\right)=\frac{1}{4}\times(2+2)=1$$

所以它是纯态。

（4）、计算对第一个量子比特的约化密度算子（对第二量子比特取迹），并判断第一个量子比特是否为纯态。

**解：**

（**提示 1：**（求迹的方法）在已知量子态的矩阵形式时可以直接通过主对角线上的元素相加求迹，在不知道量子态的矩阵形式时，可以通过将量子态投影在该空间的各个基上，然后将这些值求和就可以得到迹，例如由$\{|0\rangle,|1\rangle\}$张成的空间，存在一个量子态$\hat{\rho}$，量子态$\hat{\rho}$在基$\{|0\rangle,|1\rangle\}$上的投影为$\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle$和$\langle 1|\hat{\rho}|1\rangle$，迹就是两个投影的和$Tr\{\hat{\rho}\}=\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle+\langle 1|\hat{\rho}|1\rangle$）

（**提示 2：**（求偏迹的方法）量子态$\hat{\rho}$由两个约化量子态$\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2$张量得到，即$\hat{\rho}=\hat{\rho}_1\otimes\hat{\rho}_2$，想要得到其中一个约化量子态的密度算子，可以使用偏迹$\hat{\rho}_1=Tr_2\{\hat{\rho}\},\hat{\rho}_2=Tr_1\{\hat{\rho}\}$，偏迹就是在对应子空间进行投影求和，例如$\hat{\rho}_1=Tr_2\{\hat{\rho}\}={}_2\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle_2+{}_2\langle 1|\hat{\rho}|1\rangle_2$，其中$\{|0\rangle_2,|1\rangle_2\}$就是第二个约化密算子$\hat{\rho}_2$子空间的基）

对第二个比特求迹，就是：

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1&=Tr_2\{\hat{\rho}\}\\&=\langle 0_2|\hat{\rho}|0_2\rangle+\langle 1_2|\hat{\rho}|1_2\rangle\\&=\frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|\right)\end{aligned}$$

代入$\hat{\rho}=\frac{1}{2}\left[\left(|0_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\left(|1_2\rangle\langle 1_2|\right)+\left(|1_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\left(|0_2\rangle\langle 1_2|\right)+\left(|0_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\left(|1_2\rangle\langle 0_2|\right)+\left(|1_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\left(|0_2\rangle\langle 0_2|\right)\right]$：

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \langle 0_2|\left[\left(|0_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\left(|1_2\rangle\langle 1_2|\right)+\left(|1_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\left(|0_2\rangle\langle 1_2|\right)+\left(|0_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\left(|1_2\rangle\langle 0_2|\right)+\left(|1_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\left(|0_2\rangle\langle 0_2|\right)\right]|0_2\rangle \\ +\langle 1_2|\left[\left(|0_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\left(|1_2\rangle\langle 1_2|\right)+\left(|1_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\left(|0_2\rangle\langle 1_2|\right)+\left(|0_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\left(|1_2\rangle\langle 0_2|\right)+\left(|1_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\left(|0_2\rangle\langle 0_2|\right)\right]|1_2\rangle \end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \left[\left(|0_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\langle 0_2|\left(|1_2\rangle\langle 1_2|\right)|0_2\rangle+\left(|1_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\langle 0_2|\left(|0_2\rangle\langle 1_2|\right)|0_2\rangle+\left(|0_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\langle 0_2|\left(|1_2\rangle\langle 0_2|\right)|0_2\rangle+\left(|1_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\langle 0_2|\left(|0_2\rangle\langle 0_2|\right)|0_2\rangle\right] \\ +\left[\left(|0_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\langle 1_2|\left(|1_2\rangle\langle 1_2|\right)|1_2\rangle+\left(|1_1\rangle\langle 0_1|\right)\otimes\langle 1_2|\left(|0_2\rangle\langle 1_2|\right)|1_2\rangle+\left(|0_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\langle 1_2|\left(|1_2\rangle\langle 0_2|\right)|1_2\rangle+\left(|1_1\rangle\langle 1_1|\right)\otimes\langle 1_2|\left(|0_2\rangle\langle 0_2|\right)|1_2\rangle\right] \end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(|1_1\rangle\langle 1_1|+|0_1\rangle\langle 0_1|\right)
\end{aligned}
$$

再回到简记表达式：

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1|+|0\rangle\langle 0|\right)$$

矩阵表示为：

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1|+|0\rangle\langle 0|\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$$

密度算子的平方为：

$$\hat{\rho}_1^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$$

纯度为：

$$Tr\left\{\hat{\rho}_1^2\right\} = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2} < 1$$

所以第一个量子比特不是纯态。

【结论】尽管第一个量子比特和第二个量子比特作为一个整体时，是纠缠的纯态，但是对第二个两只比特偏迹后，得到的只是一个混态，这是量子纠缠的典型特征之一。

# 第五次作业

一、判断下列量子比特态是否为纠缠态，并说明理由

1. $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

2. $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$

3. $|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle$

解答

纠缠态的判定标准：量子态无法表示为两个单量子比特态的直积（即不能写成 $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$，其中 $|a\rangle, |b\rangle$ 为单量子比特态），则为纠缠态；否则为直积态。

（1）是纠缠态。理由：假设 $|\psi_1\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle, |a\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, |b\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$，直积展开为 $\alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$。对比 $|\psi_1\rangle$，需满足 $\alpha\delta = \beta\gamma = 0$ 且 $\alpha\gamma = \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$，但 $\alpha\delta = 0$ 会导致 $\alpha\gamma = 0$ 或 $\beta\delta = 0$，与要求矛盾，故无法分解为直积态，是纠缠态。

（2）不是纠缠态。理由：可分解为直积态 $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle$，其中 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$。因此是直积态，非纠缠态。

（3）是纠缠态。理由：假设 $|\psi_3\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$，直积展开后需满足 $\alpha\delta = \beta\gamma = 0$ 且 $\alpha\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}, \beta\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$，但 $\alpha\delta = 0$ 会导致 $\alpha\gamma = 0$ 或 $\beta\delta = 0$，与要求矛盾，故无法分解为直积态，是纠缠态。

二、已知四个贝尔态（Bell states）为：

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

若 Alice 和 Bob 共享一对处于 $|\Phi^+\rangle$ 的纠缠粒子，Alice 对她的量子比特在计算基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 下测量得到 $|0\rangle$。

1. Bob 手中的量子比特状态是什么？
2. 若 Alice 测量得到 $|1\rangle$，Bob 的量子比特状态如何？
3. 若 Alice 改为在基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}, |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ 下测量，得到 $|+\rangle$，Bob 的量子比特状态是什么？

解答

（1）Bob 的量子比特状态为$|0\rangle$。理由：$|\Phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B+|1\rangle_A|1\rangle_B)$，当 Alice 测到$|0\rangle_A$，态坍缩到$|0\rangle_A|0\rangle_B$，故 Bob 的态为$|0\rangle_B$。

（2）Bob 的量子比特状态为$|1\rangle$。理由：当 Alice 测到$|1\rangle_A$，态坍缩到$|1\rangle_A|1\rangle_B$，故 Bob 的态为$|1\rangle_B$。

（3）Bob 的量子比特状态为$|+\rangle$。理由：先将$|\Phi^+\rangle$用$\{|+\rangle,|-\rangle\}$展开：

$|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle),|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle-|-\rangle)$，代入得：

$|\Phi^+\rangle=\frac{1}{2}\left[(|+\rangle_A+|-\rangle_A)|0\rangle_B+(|+\rangle_A-|-\rangle_A)|1\rangle_B\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A|+\rangle_B+|-\rangle_A|-\rangle_B)$。当 Alice 测到$|+\rangle_A$，态坍缩到$|+\rangle_A|+\rangle_B$，故 Bob 的态为$|+\rangle_B$。

三、超密编码允许 Alice 通过发送一个量子比特给 Bob，传递两个经典比特的信息，前提是双方预先共享一对纠缠粒子（如$|\Phi^+\rangle$）。

1. 写出超密编码的详细步骤，包括：
- Alice 共享的纠缠态
- Alice 根据要发送的两位经典信息（00, 01, 10, 11）如何操作她手中的量子比特（列出对应的酉变换）
- Alice 将操作后的量子比特发送给 Bob 后，Bob 如何进行联合测量以解码信息

2. 验证当 Alice 要发送 “11” 时，她对手中的量子比特施加$i\sigma^y$（即$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$）后，两量子比特的整体状态变为$|\Psi^-\rangle$。

解答

1. 超密编码的详细步骤：

Alice 共享的纠缠态：预先与 Bob 共享$|\Phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$（Alice 持有第 1 个比特，Bob 持有第 2 个比特）。

Alice 的酉变换操作：对自己手中的量子比特施加以下酉变换（单量子比特门）：

发送“00”：施加恒等操作$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，整体态仍为$|\Phi^+\rangle$；

发送“01”：施加$\sigma^x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，整体态变为$|\Psi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)$；

发送“10”：施加$\sigma^z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，整体态变为$|\Phi^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|11\rangle)$；

发送“11”：施加$i\sigma^y=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，整体态变为$|\Psi^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)$。

Bob 的联合测量解码：Alice 将操作后的量子比特发送给 Bob，Bob 对两个量子比特进行贝尔基测量，测量结果对应 Alice 发送的经典信息：

测量到$|\Phi^+\rangle$ → 解码信息为“00”；

测量到$|\Psi^{+}\rangle$ → 解码信息为 “01”；

测量到$|\Phi^{-}\rangle$ → 解码信息为 “10”；

测量到$|\Psi^{-}\rangle$ → 解码信息为 “11”。

# 第六次作业

1、（线路恒等式）能以熟知的恒等式来简化量子线路非常有用，证明如下三个恒等式：

（1） $HXH=Z$，（2） $HYH=-Y$，（3） $HZH=X$

其中 H 为 Hadamard 门，X,Y,Z 分别为 Pauli X,Y,Z 门

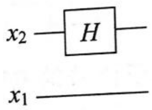
**解：**

$$HX=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$ZH=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=HX$$
$$HY=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i&-i\\-i&-i\end{pmatrix}$$
$$YH=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i&i\\i&i\end{pmatrix}=-HY$$

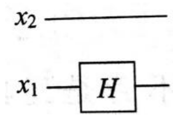
又因为 $H^2=I$，所以有：

$$HXH=HHZ=Z$$
$$HYH=H(-HY)=-Y$$
$$HZH=HHX=X$$

2、（多量子比特门的矩阵表示）如下图线路（a）的 4X4 酉矩阵是什么？线路（b）的 4X4 酉矩阵是什么？




（a）



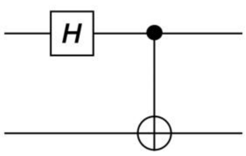

（b）

**解：**

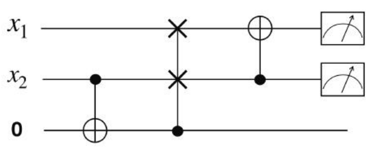
$H|x_2\rangle\otimes|x_1\rangle=(H\otimes I)(|x_2\rangle\otimes|x_1\rangle)$，所以(a)的酉矩阵为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}I&I\\I&-I\end{bmatrix}$

$|x_2\rangle\otimes H|x_1\rangle=(I\otimes H)(|x_2\rangle\otimes|x_1\rangle)$，所以(b)的酉矩阵为 $\begin{bmatrix}H&0\\0&H\end{bmatrix}$

3、分析以下两个量子线路各实现什么功能，并给出分析验证过程。




（a）

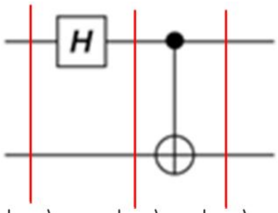



（b）

**解：**

**(a)、这个量子线路实现贝尔态的产生。**

分析验证过程：先设中间态如下：




$|\psi_0\rangle$ $|\psi_1\rangle$ $|\psi_2\rangle$

设输入态为$|\psi_0\rangle = |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle$，其中$|0_1\rangle, |0_2\rangle$分别为第一条和第二条量子线路的输入，第一条量子线路经过 Hadamard 门，Hadamard 门的效果为：$\begin{cases} H|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ H|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{cases}$，因此$|0_1\rangle$被转化为$H|0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle + |1_1\rangle)$，得到：

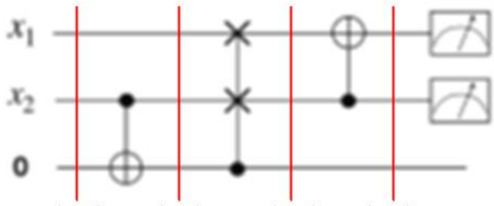
$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= H|\psi_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle + |1_1\rangle) \otimes |0_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle) \end{aligned}$$

然后经过一个 CNOT 门，效果为：若控制比特为$|0\rangle$，则受控比特不变，若控制比特为$|1\rangle$，则受控比特翻转。

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= U_{CNOT}|\psi_1\rangle \\ &= U_{CNOT}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle) \end{aligned}$$

输入态为$|\psi_{in}\rangle = |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$时同理。因此这个量子线路实现了 Bell 态的产生。

**（b）、这个量子线路实现了两个二进制个位数的加法(模 2 加法)**




$|\psi_0\rangle$ $|\psi_1\rangle$ $|\psi_2\rangle$ $|\psi_3\rangle$

设输入态为$|\psi_0\rangle = |x_3x_2x_1\rangle = |0_3\rangle \otimes |1_2\rangle \otimes |1_1\rangle$，其中$x_1 = x_2 = |1\rangle$，$x_3 = |0\rangle$为辅助位。

步骤 1：$x_2$和$x_3$经过 CNOT 门，效果为：若控制比特为$|0\rangle$，则受控比特不变，若控制

比特为$|1\rangle$，则受控比特翻转，$x_2$ 作为控制比特：

$$|\psi_1\rangle = U_{CNOT}|\psi_0\rangle = |1_3\rangle \otimes |1_2\rangle \otimes |1_1\rangle$$

此时量子态可以简记为$|111\rangle$。

步骤 2：$x_1$、$x_2$ 和 $x_3$ 利用弗睿得金门，弗睿得金门的效果为：如果控制比特是 0，其它两个比特不变，如果控制比特是 1，其它两个比特相互交换。因此，$x_3$ 作为控制比特，经过弗睿得金门后：

$$|\psi_2\rangle = F|\psi_1\rangle = |1_3\rangle \otimes |1_2\rangle \otimes |1_1\rangle$$

此时量子态可以简记为$|111\rangle$。

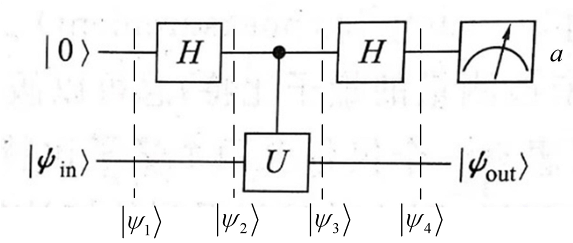
步骤 3：$x_1$、$x_2$ 再经过 CNOT 门，$x_2$ 作为控制比特：

$$|\psi_3\rangle = U_{CNOT}|\psi_2\rangle = |1_3\rangle \otimes |1_2\rangle \otimes |0_1\rangle$$

此时量子态可以简记为$|110\rangle$。因此，输入量子态$|011\rangle$经过量子线路变为$|110\rangle$，即实现了 $01+01=10$。

输入为其它情况时，同理。

4、设有一个具有特征值 $\pm 1$ 的单量子比特上的算子 U，U 既是 Hermite 的又是酉的，故可以看作既是一个可观测量，又是一个量子门。假设我们希望测量可观测量 U，即我们希望获得指示两个特征值之一的测量结果，并将测量后的状态带到相应的特征向量。证明下面的线路可实现 U 的一个测量。




**解：**

线路的起始是两个量子比特在状态$|0\rangle$和$|\psi_{in}\rangle$，$|\psi_1\rangle = |0\rangle \otimes |\psi_{in}\rangle$；经过 Hadamard 门后，第一个量子比特进入叠加状态：$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{in}\rangle$；然后，我们应用受控 U 门。这意味着当第一个量子比特是$|1\rangle$时，我们将在第二个量子比特上应用 U，$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |\psi_{in}\rangle + |1\rangle \otimes U|\psi_{in}\rangle)$；再次应用 Hadamard 门到第一个量子比特，我们得到：

$\left|\psi_4\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\otimes\left|\psi_{in}\right\rangle + \left(|0\rangle - |1\rangle\right)\otimes U\left|\psi_{in}\right\rangle\right]$，可以将其分解为：

$$\begin{aligned}\left|\psi_4\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle\otimes\left(\left|\psi_{in}\right\rangle + U\left|\psi_{in}\right\rangle\right) + |1\rangle\otimes\left(\left|\psi_{in}\right\rangle - U\left|\psi_{in}\right\rangle\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\otimes\left(I+U\right)\left|\psi_{\mathrm{in}}\right\rangle + |1\rangle\otimes\left(I-U\right)\left|\psi_{\mathrm{in}}\right\rangle\right)\end{aligned}$$

那么若测量第一个量子比特；

得到$|0\rangle$，那么$\left|\psi_{out}\right\rangle$在不考虑归一化时，等于$\left(I+U\right)\left|\psi_{\mathrm{in}}\right\rangle$；

得到$|1\rangle$，那么$\left|\psi_{out}\right\rangle$在不考虑归一化时，等于$\left(I-U\right)\left|\psi_{\mathrm{in}}\right\rangle$。

我们令算符 U 的两个本征态是$|a\rangle$与$|b\rangle$，根据题意，令它们分别对应的本征值为$\lambda_a = 1, \lambda_b = -1$；那么对于任意$\left|\psi_{in}\right\rangle$，总可以写为这两个线性无关本征态的线性叠加$\left|\psi_{in}\right\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$，因此：

$$\begin{aligned}\left(I+U\right)\left|\psi_{in}\right\rangle &= \left|\psi_{in}\right\rangle + U\left|\psi_{in}\right\rangle \\ &= \left(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle\right) + \left(\alpha U|a\rangle + \beta U|b\rangle\right) \\ &= \alpha\left(1+\lambda_a\right)|a\rangle + \beta\left(1+\lambda_b\right)|b\rangle \\ &= 2\alpha|a\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(I-U\right)\left|\psi_{in}\right\rangle &= \left|\psi_{in}\right\rangle - U\left|\psi_{in}\right\rangle \\ &= \left(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle\right) - \left(\alpha U|a\rangle + \beta U|b\rangle\right) \\ &= \alpha\left(1-\lambda_a\right)|a\rangle + \beta\left(1-\lambda_b\right)|b\rangle \\ &= 2\beta|b\rangle\end{aligned}$$

这意味着，考虑归一化后，测量第一个量子比特：

若得到$|0\rangle$，那么$\left|\psi_{out}\right\rangle = |a\rangle$；

若到$|1\rangle$，那么$\left|\psi_{out}\right\rangle = |b\rangle$。

这相当于对第二个线路的算符进行了“测量”。

# 第七次作业

1、列举两种主流量子计算体系(如超导芯片、离子阱等)，分别简述其核心工作原理及主要优缺点。

**解：**

（1）超导量子计算利用在极低温下呈现量子效应的超导电路来构造人工原子（即量子比特），其核心是约瑟夫森结。量子比特的$|0\rangle$态和$|1\rangle$态对应电路的两个最低量子化能级。

其主要的优点包括：集成度高、操控速度快、读取效率高等。

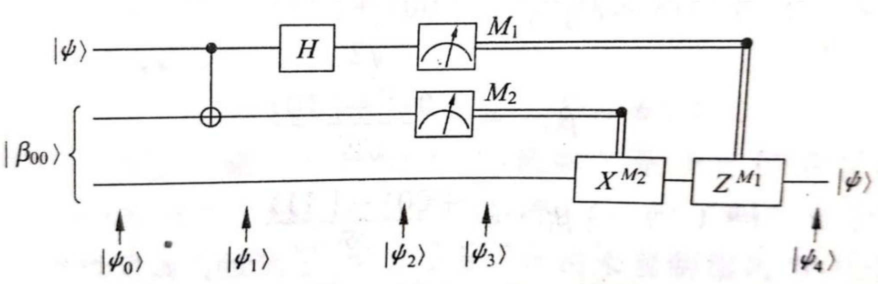
主要的缺点包括：相干时间短、运行成本高（需依赖极低温制冷系统）、扩展性挑战等。

（2）离子阱量子计算使用被电磁场囚禁在超高真空中的单个带电原子（离子）作为量子比特，常用镱、钙等元素的离子。

主要优点：量子比特质量极高、逻辑门与测量保真度高、相干时间极长、可支持更多量子门操作和复杂算法。

主要缺点：扩展性面临挑战（随着离子数量增加，离子阱的加工和调试难度增大）、运算速度较慢、系统复杂庞大等。

2、下图是量子隐形传态的线路图，假设待传量子态$|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$，纠缠态$|\beta_{00}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)$，请给出过程中$|\psi_0\rangle,|\psi_1\rangle,|\psi_2\rangle,|\psi_3\rangle,|\psi_4\rangle$结果，并阐述量子隐形传态的过程。




**解：**

步骤 1：$|\psi_0\rangle$直接张量：

$$
\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |\psi\rangle\otimes|\beta_{00}\rangle \\
&= (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|001\rangle+\alpha|010\rangle+\beta|101\rangle+\beta|110\rangle)
\end{aligned}
$$

步骤 2：受控非门$U_{CNOT}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$作用后得到(第一个比特位控制比特，若为 0，另一个比特不变，若为 1，另一个比特翻转)：

$$|\psi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|001\rangle+\alpha|010\rangle+\beta|111\rangle+\beta|100\rangle\right)$$

步骤 3：经过哈达玛门$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$后得到（$H|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right),H|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$）：

$$\begin{aligned}|\psi_2\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|01\rangle+\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|10\rangle\\ +\beta\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)|11\rangle+\beta\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)|00\rangle\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\left(\alpha\left(|001\rangle+|101\rangle\right)+\alpha\left(|010\rangle+|110\rangle\right)+\beta\left(|011\rangle-|111\rangle\right)+\beta\left(|000\rangle-|100\rangle\right)\right)\end{aligned}$$

步骤 4：对前两个比特进行测量，得到经典比特$M_1,M_2\in\{0,1\}$，然后第三个比特坍缩为：

$$|\psi_3\rangle=\begin{cases}\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle,M_1=0,M_2=0\\ \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle,M_1=0,M_2=1\\ \alpha|1\rangle-\beta|0\rangle,M_1=1,M_2=0\\ \alpha|0\rangle-\beta|1\rangle,M_1=1,M_2=1\end{cases}$$

步骤 5：修正过程，根据测量结果$M_1,M_2$分别对第三个量子比特进行修正：

若$M_2=0$就对第三个量子比特施加泡利 X 门($|0\rangle,|1\rangle\to|1\rangle,|0\rangle$比特翻转)，若$M_1=1$就对第三个量子比特施加泡利 Z 门(改变相位$|1\rangle\to-|1\rangle$)：

$$|\psi_4\rangle=\begin{cases}\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle,M_1=0,M_2=0\\ \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle,M_1=0,M_2=1\\ \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle,M_1=1,M_2=0\\ \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle,M_1=1,M_2=1\end{cases}$$

也就是我们最终恢复得到传递的态$|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$。

量子隐形传态的过程：

（1）、初态为待传态态$|\psi\rangle$与纠缠对$|\beta_{00}\rangle$。

（2）、对待传态比特和共享纠缠态的一半进行 CNOT 和 H 操作，并对这两个比特进行测量（贝尔基测量）。

（3）、测量结果通过经典信道发送给远端。

（4）、远端根据经典信息有选择地对处于纠缠对另一半的量子比特施加 X 或 Z 门纠正操作。

（5）、最终远端第三比特的状态即为原初待传态量子态$|\psi\rangle$。