量子信息导论：作业解答

Contents

1 量子信息

1.1 1

练习 2.2（矩阵表示例子）

题目： 设 V 是以 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 为基向量的向量空间, A 是从 V 到 V 的线性算子, 使 $A|0\rangle = |1\rangle$, $A|1\rangle = |0\rangle$。给出 A 相对于输入基 $|0\rangle, |1\rangle$ 和输出基 $|0\rangle, |1\rangle$ 的矩阵表示。找出使 A 具有不同矩阵表示的输入输出基。

解： 题意是给出线性映射 A 在指定输入/输出基下的矩阵表示（第 j 列是 $A|j\rangle$ 在输出基中的坐标），不必先写出算符再做基变换。

(1) 输入基与输出基同为 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$： 按 3.4 节的记号，矩阵元

$$A^{(0,1)}_{ij} = \langle i|A|j\rangle$$

且第 j 列是 $A|j\rangle$ 在基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 下的展开系数。由

$$A|0\rangle = |1\rangle, \quad A|1\rangle = |0\rangle$$

得到

$$A^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 取不同基得到不同矩阵表示： 例如取输入基仍为 $E = \{|0\rangle, |1\rangle\}$，输出基改为 $F = \{|1\rangle, |0\rangle\}$（交换顺序）。相对于原基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$，两组基的基变换矩阵（按 2.7 节定义 $U_{ij} = \langle e_i|f_j\rangle$）分别为

$$U_{\text{in}} = I, \qquad U_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

按矩阵表示的定义直接计算：$A|0\rangle = |1\rangle$ 是输出基第一向量，$A|1\rangle = |0\rangle$ 是输出基第二向量，因此

$$A^{(F\leftarrow E)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

与 $A^{(0,1)}$ 不同。

练习 2.11（Pauli 矩阵的特征分解）

题目： 找出 Pauli 矩阵 X, Y, Z 的特征向量、特征值和对角表示。

解：

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) X **的特征分解**　解特征方程 $\det(X - \lambda I) = 0$：

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当 $\lambda = +1$ 时，解 $(X - I)\vec{v} = 0$：

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = b.$$

取归一化向量

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = +1).$$

当 $\lambda = -1$ 时，解 $(X + I)\vec{v} = 0$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = -b.$$

取归一化向量

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = -1).$$

因此在基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 下，

$$X \sim \mathrm{diag}(1, -1).$$

具体计算如下：令

$$U = \big(|+\rangle \ |-\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = U.$$

则

$$U^\dagger X U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Y **的特征分解**　解特征方程 $\det(Y - \lambda I) = 0$：

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当 $\lambda = +1$ 时，解 $(Y - I)\vec{v} = 0$：

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -a - ib = 0 \Rightarrow a = -ib.$$

取 $b = 1$，归一化为

$$|y_+\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = +1).$$

当 $\lambda=-1$ 时，解 $(Y+I)\vec{v}=0$：

$$\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0\Rightarrow a=ib.$$

取 $b=1$，归一化为

$$|y_-\rangle=\frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}\quad(\lambda=-1).$$

因此在基 $\{|y_+\rangle,|y_-\rangle\}$ 下，

$$Y\sim\mathrm{diag}(1,-1).$$

具体计算如下：令

$$U=\big(|y_+\rangle\ |y_-\rangle\big)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix},\quad U^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}.$$

则

$$U^\dagger YU=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(3) Z 的特征分解 解特征方程 $\det(Z-\lambda I)=0$：

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(-1-\lambda)=\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=\pm1.$$

当 $\lambda=+1$ 时，解 $(Z-I)\vec{v}=0$：

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0\Rightarrow b=0,$$

取归一化向量 $|0\rangle$。当 $\lambda=-1$ 时，解 $(Z+I)\vec{v}=0$：

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0\Rightarrow a=0,$$

取归一化向量 $|1\rangle$。因此在基 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 下，

$$Z\sim\mathrm{diag}(1,-1).$$

具体计算如下：令

$$U=\big(|0\rangle\ |1\rangle\big)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I,\quad U^\dagger=I.$$

则

$$U^\dagger ZU=Z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

练习 2.20（更换基）

题目： 设 A' 和 A'' 是向量空间 V 上一个算子 A 对两个不同的标准正交基 $\{|v_i\rangle\}$ 和 $\{|w_i\rangle\}$ 的矩阵表示，则

$$A'_{ij}=\langle v_i|A|v_j\rangle,\quad A''_{ij}=\langle w_i|A|w_j\rangle$$

刻画 A' 和 A'' 之间的关系。

解： 设基变换矩阵 U 的元素为

$$U_{ij} = \langle v_i | w_j \rangle$$

则 U 为酉矩阵，并有

$$|w_j\rangle = \sum_i |v_i\rangle U_{ij}$$

代入可得

$$A'' = U^\dagger A' U$$

因此两者相似（酉相似），对应同一线性算子的不同基表示。

练习 2.26

题目： 令 $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$，以 $|0\rangle, |1\rangle$ 的张量积形式，并采用 Kronecker 积，具体写出 $|\psi\rangle^{\otimes 2}$ 和 $|\psi\rangle^{\otimes 3}$。

解：

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

其中列向量顺序为 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$。

同理

$$|\psi\rangle^{\otimes 3} = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即

$$|\psi\rangle^{\otimes 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{b \in \{0,1\}^3} |b\rangle$$

列向量顺序为 $|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle$。

1.2 2

请利用布洛赫球表示以下量子态

布洛赫球表示中，单量子比特纯态可写为

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

其中 $\theta \in [0, \pi]$ 为极角，$\phi \in [0, 2\pi)$ 为方位角。

(1)　题目：利用布洛赫球表示量子态 $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$。

解：$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$

比较系数：

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到 $\theta = \pi/2$，$\phi = 0$。

布洛赫球坐标为 $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$，即赤道上 $+x$ 方向。

(2)　题目：利用布洛赫球表示量子态 $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$。

解：$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle$

比较系数：

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到 $\theta = \pi/2$，$\phi = \pi$。

布洛赫球坐标为 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi)$，即赤道上 $-x$ 方向。

(3)　题目：利用布洛赫球表示量子态 $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$。

解：比较系数：

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到 $\theta = \pi/2$，$\phi = \pi/2$。

布洛赫球坐标为 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi/2)$，即赤道上 $+y$ 方向。

(4)　题目：利用布洛赫球表示量子态 $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$。

解：比较系数：

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i3\pi/2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到 $\theta = \pi/2$，$\phi = 3\pi/2$。

布洛赫球坐标为 $(\theta, \phi) = (\pi/2, 3\pi/2)$，即赤道上 $-y$ 方向。

1.3　3

施特恩-格拉赫实验与量子测量

题目 1　用 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基测量量子态 $|+\rangle$，会得到什么结果？其中 $|0\rangle$ 发生的概率是多少？

解：$|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基下测量，测量结果为 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$。

$$P(|0\rangle) = |\langle 0|+\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(|1\rangle) = |\langle 1|+\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

因此测量结果为 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$，各以 $1/2$ 的概率出现。

题目 2 在施特恩-格拉赫实验中，对由高温炉产生的银原子施加 Z 方向的不均匀磁场，对这个银原子进行测量，测量结果是自旋向上的概率是 $p_1 = a$，结果是自旋向下的概率是 $p_2 = b$。

(1) 请写出高温炉射出的银原子的自旋状态 $|\varphi\rangle$。

(2) 在施特恩-格拉赫实验中，沿 Z 方向施加磁场，对应的可观测算子是泡利矩阵 Z，请计算自旋状态为 $|\varphi\rangle$ 系统的可观测算子 Z 的测量不确定度（标准偏差）。

解:

(1) 由题意，测量 Z 方向自旋，向上（$|0\rangle$）的概率为 a，向下（$|1\rangle$）的概率为 b，且 $a + b = 1$。

因此初态为

$$|\varphi\rangle = \sqrt{a}|0\rangle + \sqrt{b}|1\rangle$$

（取实数系数，全局相位任意）。

(2) 泡利矩阵 $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$，特征值为 ± 1。

期望值:

$$\langle Z\rangle = \langle\varphi|Z|\varphi\rangle = a\cdot(+1) + b\cdot(-1) = a - b$$

期望的平方:

$$\langle Z^2\rangle = \langle\varphi|Z^2|\varphi\rangle = \langle\varphi|I|\varphi\rangle = 1$$

方差:

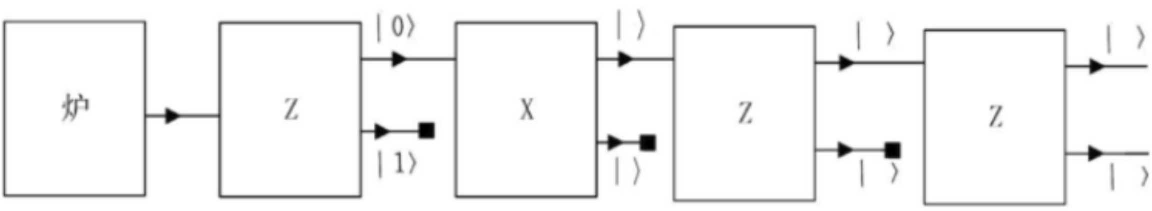
$$\Delta Z^2 = \langle Z^2\rangle - \langle Z\rangle^2 = 1 - (a-b)^2$$

标准偏差（测量不确定度）:

$$\Delta Z = \sqrt{1-(a-b)^2} = \sqrt{1-(a-b)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$$

其中用到了 $a + b = 1$。

题目 3 如图所示施特恩-格拉赫实验，请填出每次测量坍缩到的量子态，并给出详细计算过程。图示为：初态 $|0\rangle$ 依次经过 Z 测量、X 测量、Z 测量、Z 测量的量子线路。



解: 量子线路的演化过程:

第一次 Z 测量后得到 $|0\rangle$（上方输出）。从 $|0\rangle$ 开始后续测量。

步骤 1: X 测量

X 的本征态为 $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$（本征值 $+1$）和 $|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$（本征值 -1）。

将 $|0\rangle$ 投影到 X 基:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

测量后，以各 1/2 概率坍缩到 $|+\rangle$（上方输出）或 $|-\rangle$（下方输出）。

步骤 2: 第一次 Z 测量

(a) 若 X 测量得到 $|+\rangle$:

将 $|+\rangle$ 投影到 Z 基:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

测量后，以各 1/2 概率坍缩到 $|0\rangle$（上方输出）或 $|1\rangle$（下方输出）。

(b) 若 X 测量得到 $|-\rangle$：

将 $|-\rangle$ 投影到 Z 基：

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

测量后，以各 1/2 概率坍缩到 $|0\rangle$（上方输出）或 $|1\rangle$（下方输出）。

步骤 3： 第二次 Z 测量

无论前面路径如何，经过第一次 Z 测量后得到的是 Z 的本征态 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$。对 Z 的本征态再次进行 Z 测量，结果确定不变。

从图中可以看出，只有从 $|0\rangle$ 路径继续进行第二次 Z 测量，输出确定为 $|0\rangle$。

图中 6 个空白处应填写的量子态：

图中标记的空白 $|\quad\rangle$ 应填写为：

1. X 测量上方输出：$|+\rangle$
2. X 测量下方输出：$|-\rangle$
3. 第一次 Z 测量上方输出（从 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$ 路径）：$|0\rangle$
4. 第一次 Z 测量下方输出（从 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$ 路径）：$|1\rangle$
5. 第二次 Z 测量输出（从 $|0\rangle$ 路径）：$|0\rangle$
6. （图中此处若有标记）从 $|1\rangle$ 路径的输出：$|1\rangle$（或不填写，因为测量本征态结果确定）

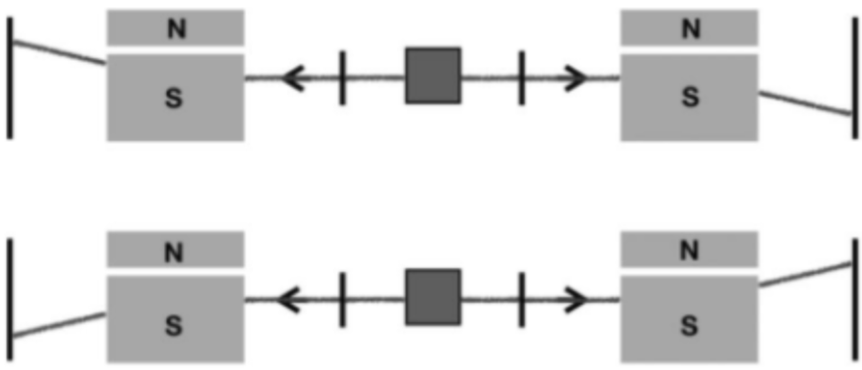
说明：

- 对 Z 的本征态进行 Z 测量，结果确定，不产生新的分支
- $|0\rangle$ 经 Z 测量仍为 $|0\rangle$（本征值 $+1$）
- $|1\rangle$ 经 Z 测量仍为 $|1\rangle$（本征值 -1）
- 图中最后的测量主要追踪从 $|0\rangle$ 路径的演化

1.4 4

双自旋纠缠态

题目 如图为比特施特恩-格拉赫实验，蒸发炉能够产生一对一对的自旋，两个自旋具有相反的动量，图中示意地描绘了仅有的两种可能观测结果，即如果自旋 1 处于向上的状态那么自旋 2 处于向下的状态；如果自旋 1 处于向下的状态那么自旋 2 处于向上的状态。



(1) 请写出该双自旋量子态 $|\varphi\rangle$ 的表达式。
(2) 测量的是沿 Z 方向的自旋，对应的可观测算子是泡利矩阵 Z_1Z_2，请计算状态 $|\varphi\rangle$ 系统可观测量 Z_1Z_2 的平均值。
(3) 计算 $|\varphi\rangle$ 的密度算子，并判断它是否为纯态。
(4) 计算对第一个量子比特的约化密度算子（对第二量子比特取迹），并判断第一个量子比特是否为纯态。

解:

(1) 根据题意，两个自旋反关联：自旋 1 向上则自旋 2 向下，反之亦然。

这意味着量子态只在 $|01\rangle$ 和 $|10\rangle$ 两个基态上有振幅，可以写为：

$$|\varphi\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$$

其中 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$（归一化条件）。

从图中可以看出，两种测量结果（自旋 1 上/自旋 2 下或自旋 1 下/自旋 2 上）出现的概率相等，因此 $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$，即 $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

最一般的形式为：

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + e^{i\phi}|10\rangle)$$

其中 ϕ 是相对相位。

特殊情况：如果该态是**单态**（singlet state，总自旋为 0 的态），则相对相位 $\phi = \pi$，得到：

$$|\varphi\rangle_{\text{singlet}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 - |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2)$$

注：仅从" 反关联" 这一条件无法唯一确定相对相位。物理上，单态是最常见的自旋反关联态，因此通常默认为单态。后续计算我们采用单态形式。

(2) 可观测算子 $Z_1Z_2 = Z \otimes Z$，其中

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

因此

$$Z_1Z_2 = (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$$

计算期望值：

$$\langle Z_1Z_2\rangle = \langle\varphi|Z_1Z_2|\varphi\rangle$$

注意到

$$Z_1Z_2|01\rangle = (Z|0\rangle) \otimes (Z|1\rangle) = (+|0\rangle) \otimes (-|1\rangle) = -|01\rangle$$

$$Z_1Z_2|10\rangle = (Z|1\rangle) \otimes (Z|0\rangle) = (-|1\rangle) \otimes (+|0\rangle) = -|10\rangle$$

因此

$$Z_1Z_2|\varphi\rangle = \frac{-|01\rangle - (-|10\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{-|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = -|\varphi\rangle$$

所以

$$\langle Z_1Z_2\rangle = \langle\varphi|(-|\varphi\rangle) = -1$$

(3) 密度算子为

$$\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{2}(|01\rangle - |10\rangle)(\langle 01| - \langle 10|)$$

$$= \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

计算 ρ^2：

$$\rho^2 = |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \rho$$

因为 $\mathrm{Tr}(\rho^2) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1$，且 $\rho^2 = \rho$，所以 $|\varphi\rangle$ 是纯态。

(4) 对第二个量子比特取迹，得到第一个量子比特的约化密度算子：

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2(\rho) = \sum_{i\in\{0,1\}} \langle i|_2 \rho |i\rangle_2$$

计算:

$$\langle 0|_2\rho|0\rangle_2 = \frac{1}{2}\langle 0|_2(|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)|0\rangle_2$$

注意到 $\langle 0|_2|01\rangle = |0\rangle_1$，$\langle 0|_2|10\rangle = 0$，所以

$$\langle 0|_2\rho|0\rangle_2 = \frac{1}{2}|0\rangle_1\langle 0|_1$$

类似地

$$\langle 1|_2\rho|1\rangle_2 = \frac{1}{2}|1\rangle_1\langle 1|_1$$

因此

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{I}{2}$$

这是最大混合态。计算 $\mathrm{Tr}(\rho_1^2)$:

$$\rho_1^2 = \frac{I}{4}, \quad \mathrm{Tr}(\rho_1^2) = \frac{1}{2} < 1$$

因此第一个量子比特不是纯态，而是混合态。这表明纠缠态的子系统总是混合态。

1.5 5

Bell 态与纠缠判断

量子态 $|\psi\rangle_{AB}$ 是纠缠态当且仅当它不能写成张量积形式 $|\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$。

题目 1 判断 $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ 是否为纠缠态，并说明理由。

解: 假设 $|\psi_1\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$，则

$$|\psi_1\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

比较系数: $ac = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$ad = 0$，$bc = 0$，$bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

由 $ad = 0$ 得 $a = 0$ 或 $d = 0$；由 $bc = 0$ 得 $b = 0$ 或 $c = 0$。若 $a = 0$，则 $ac = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$，矛盾。若 $d = 0$，则 $bd = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$，矛盾。

因此 $|\psi_1\rangle$ 不能分解为张量积，是纠缠态（Bell 态 $|\Phi^+\rangle$）。

题目 2 判断 $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ 是否为纠缠态，并说明理由。

解: 判断纠缠态的方法是尝试将其分解为张量积形式 $|\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$。

观察与尝试:

注意到 $|\psi_2\rangle$ 包含了所有四个计算基态，且系数相等。我们尝试将其写成两个单量子比特态的张量积。

定义 $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$（Hadamard 基）。

考虑张量积 $|+\rangle \otimes |+\rangle$，利用**张量积的双线性性**（对加法的分配律）展开:

第 1 步: 对第一个量子比特的态展开

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |+\rangle &= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned}$$

第 2 步： 应用张量积对第一个因子的分配律

$$(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) + |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$$

第 3 步： 对每一项再应用张量积对第二个因子的分配律
对第一项:

$$|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle = |00\rangle + |01\rangle$$

对第二项:

$$|1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle = |10\rangle + |11\rangle$$

第 4 步： 合并结果

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |+\rangle &= \frac{1}{2}[(|00\rangle + |01\rangle) + (|10\rangle + |11\rangle)] \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \end{aligned}$$

结论:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

因此 $|\psi_2\rangle$ 可以分解为张量积形式，**不是纠缠态**（是可分离态/积态）。
使用的关键性质： 张量积的双线性性（bilinearity）:

- $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$
- $|a\rangle \otimes (|b\rangle + |c\rangle) = |a\rangle \otimes |b\rangle + |a\rangle \otimes |c\rangle$

题目 3 判断 $|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle$ 是否为纠缠态，并说明理由。

解： 假设 $|\psi_3\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$，则

$$|\psi_3\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

比较系数：$ac = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$ad = 0$，$bc = 0$，$bd = \sqrt{\frac{2}{3}}$。

由 $ad = 0$ 得 $a = 0$ 或 $d = 0$；由 $bc = 0$ 得 $b = 0$ 或 $c = 0$。若 $a = 0$，则 $ac = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$，矛盾。若 $d = 0$，则 $bd = 0 \neq \sqrt{\frac{2}{3}}$，矛盾。

因此 $|\psi_3\rangle$ 不能分解为张量积，是纠缠态。

Bell 态测量

已知四个贝尔态（Bell states）为:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

若 Alice 和 Bob 共享一对处于 $|\Phi^+\rangle$ 的纠缠粒子，Alice 对她手中的量子比特在计算基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 下进行测量。

题目 1 Alice 测量得到结果 $|0\rangle$，Bob 手中的量子比特立即处于什么状态?

解: 初态为 $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Alice 在计算基下测量，投影算子为 $P_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes I$，$P_1 = |1\rangle\langle 1| \otimes I$。

测量后态为

$$P_0|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0||0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle\langle 0||1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle$$

归一化后

$$|\psi'\rangle = \frac{|00\rangle}{\||00\rangle\|} = |00\rangle = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$$

因此 Bob 手中的量子比特处于 $|0\rangle$ 状态。

题目 2 若 Alice 测量得到 $|1\rangle$，Bob 的量子比特状态如何?

解:

$$P_1|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

归一化后

$$|\psi'\rangle = |11\rangle = |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

因此 Bob 手中的量子比特处于 $|1\rangle$ 状态。

题目 3 若 Alice 改为在基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 下测量，得到 $|+\rangle$，问 Bob 的量子比特状态是什么?

解: 先将 $|\Phi^+\rangle$ 用 Hadamard 基表示。注意到

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |1\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

代入:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[(|+\rangle + |-\rangle) \otimes (|+\rangle + |-\rangle) + (|+\rangle - |-\rangle) \otimes (|+\rangle - |-\rangle)\Big]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle + |++\rangle - |+-\rangle - |-+\rangle + |--\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2(|++\rangle + |--\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$$

若 Alice 测量得到 $|+\rangle$，投影后态为

$$(|+\rangle\langle +| \otimes I)|\Phi^+\rangle \propto |+\rangle \otimes |+\rangle$$

因此 Bob 的量子比特处于 $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ 状态。

超密编码

题目 1 写出超密编码的详细步骤，包括：初始共享的纠缠态、Alice 根据她要发送的两位经典信息（00, 01, 10, 11）如何操作她手中的量子比特（列出对应的酉变换）、Alice 将操作后的量子比特发送给 Bob 后，Bob 如何进行联合测量以解码信息。

解：超密编码协议详细步骤：

初始态： Alice 和 Bob 共享 Bell 态

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

其中 Alice 持有第一个量子比特，Bob 持有第二个。

编码： Alice 根据要发送的两位经典信息，对她的量子比特进行如下酉操作：

- 发送"00"：不做操作（I），态保持为 $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- 发送"01"：施加 Z 门，态变为 $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

  详细计算：

$$\begin{aligned}(Z \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (Z \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(Z \otimes I)|00\rangle + (Z \otimes I)|11\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[Z|0\rangle \otimes I|0\rangle + Z|1\rangle \otimes I|1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(+1)|0\rangle \otimes |0\rangle + (-1)|1\rangle \otimes |1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\Phi^-\rangle\end{aligned}$$

  其中用到了 $Z|0\rangle = |0\rangle$（本征值 $+1$），$Z|1\rangle = -|1\rangle$（本征值 -1）。

- 发送"10"：施加 X 门，态变为 $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$

  详细计算：

$$\begin{aligned}(X \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (X \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(X \otimes I)|00\rangle + (X \otimes I)|11\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[X|0\rangle \otimes I|0\rangle + X|1\rangle \otimes I|1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) = |\Psi^+\rangle\end{aligned}$$

  其中用到了 $X|0\rangle = |1\rangle$，$X|1\rangle = |0\rangle$。

- 发送"11"：施加 $XZ = iY$ 门，态变为 $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

详细计算：先施加 Z 再施加 X：

$$\begin{aligned}(X\otimes I)(Z\otimes I)|\Phi^+\rangle &= (X\otimes I)|\Phi^-\rangle \\ &= (X\otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[X|0\rangle\otimes|0\rangle - X|1\rangle\otimes|1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle\otimes|0\rangle - |0\rangle\otimes|1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle) = -|\Psi^-\rangle\end{aligned}$$

相差全局相位 -1，物理上等价于 $|\Psi^-\rangle$。

传输：Alice 将她的量子比特发送给 Bob。

解码：Bob 持有两个量子比特后，需要进行 Bell 基测量来区分四个 Bell 态。

Bell 基测量的线路实现：

Bell 基测量不能通过简单的计算基测量完成，需要先通过量子门将 Bell 基转换到计算基，然后再测量。标准的 Bell 基测量线路包含以下步骤：

1. 对两个量子比特施加 CNOT 门（第 1 个比特为控制位，第 2 个比特为目标位）
2. 对第 1 个比特施加 Hadamard 门 H
3. 在计算基下测量两个比特，得到 (M_1, M_2)

数学推导：验证四个 Bell 态如何被映射到计算基

情况 1：初态为 $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$（Alice 发送了"00"）

步骤 1：施加 CNOT 门（第 1 比特控制第 2 比特）

回顾 CNOT 的作用：$|a,b\rangle \to |a, a\oplus b\rangle$

$$\begin{aligned}\mathrm{CNOT}\cdot|\Phi^+\rangle &= \mathrm{CNOT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{CNOT}|00\rangle + \mathrm{CNOT}|11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\oplus 0\rangle + |1, 1\oplus 1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)\end{aligned}$$

步骤 2：对第 1 比特施加 Hadamard 门

回顾 H 的作用：$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$，$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

$$\begin{aligned}(H\otimes I)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle\otimes|0\rangle + H|1\rangle\otimes|0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes|0\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes|0\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle)\otimes|0\rangle + (|0\rangle - |1\rangle)\otimes|0\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle + |00\rangle - |10\rangle] \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2|00\rangle = |00\rangle\end{aligned}$$

步骤 3：测量得到 $(M_1, M_2) = (0, 0)$，Bob 解码为"00" ✓

情况 2： 初态为 $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$（Alice 发送了"01"）
步骤 1： 施加 CNOT 门

$$\begin{aligned}\text{CNOT} \cdot |\Phi^-\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|00\rangle - \text{CNOT}|11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)\end{aligned}$$

步骤 2： 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned}(H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |0\rangle - H|1\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle - \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle - (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle - |00\rangle + |10\rangle] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2|10\rangle = |10\rangle\end{aligned}$$

步骤 3： 测量得到 $(M_1, M_2) = (1, 0)$，Bob 解码为"01" ✓
情况 3： 初态为 $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$（Alice 发送了"10"）
步骤 1： 施加 CNOT 门

$$\begin{aligned}\text{CNOT} \cdot |\Psi^+\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|01\rangle + \text{CNOT}|10\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0 \oplus 1\rangle + |1, 1 \oplus 0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)\end{aligned}$$

步骤 2： 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned}(H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |1\rangle + H|1\rangle \otimes |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle + (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[|01\rangle + |11\rangle + |01\rangle - |11\rangle] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2|01\rangle = |01\rangle\end{aligned}$$

步骤 3： 测量得到 $(M_1, M_2) = (0, 1)$，Bob 解码为"10" ✓
情况 4： 初态为 $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$（Alice 发送了"11"）

步骤 1： 施加 CNOT 门

$$\begin{aligned}\text{CNOT}\cdot|\Psi^-\rangle &= \text{CNOT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|01\rangle-\text{CNOT}|10\rangle)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|11\rangle)\end{aligned}$$

步骤 2： 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned}(H\otimes I)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|11\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle\otimes|1\rangle-H|1\rangle\otimes|1\rangle)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes|1\rangle-\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes|1\rangle\right)\\ &= \frac{1}{2}[(|0\rangle+|1\rangle)\otimes|1\rangle-(|0\rangle-|1\rangle)\otimes|1\rangle]\\ &= \frac{1}{2}[|01\rangle+|11\rangle-|01\rangle+|11\rangle]\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2|11\rangle=|11\rangle\end{aligned}$$

步骤 3： 测量得到 $(M_1, M_2) = (1,1)$，Bob 解码为”11” ✓

Bell 基测量映射总结：

Bell 态	$\xrightarrow{\text{CNOT}}$	$\xrightarrow{H\otimes I}$	测量结果
$\|\Phi^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle+\|10\rangle)$	$\|00\rangle$	$(0,0)\to$ ”00”
$\|\Phi^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle-\|10\rangle)$	$\|10\rangle$	$(1,0)\to$ ”01”
$\|\Psi^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|01\rangle+\|11\rangle)$	$\|01\rangle$	$(0,1)\to$ ”10”
$\|\Psi^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|01\rangle-\|11\rangle)$	$\|11\rangle$	$(1,1)\to$ ”11”

因此，Bob 通过 CNOT + H + 计算基测量，可以**确定性地区分**四个 Bell 态，从而完美解码 Alice 发送的 2 比特经典信息。

题目 2 验证当 Alice 要发送”11” 时，她对手中的量子比特施加 $i\sigma_y$（即 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$）后，两量子比特的整体状态变为 $|\Psi^-\rangle$。

解： 初态为 $|\Phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$

Alice 对第一个量子比特施加 $i\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$。注意到

$$i\sigma_y|0\rangle=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=|1\rangle$$

$$i\sigma_y|1\rangle=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-|0\rangle$$

因此

$$(i\sigma_y\otimes I)|\Phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(i\sigma_y|0\rangle\otimes|0\rangle+i\sigma_y|1\rangle\otimes|1\rangle)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|0\rangle-|0\rangle\otimes|1\rangle)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle-|01\rangle)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = -|\Psi^-\rangle$$

相差一个全局相位 -1，物理上等价于 $|\Psi^-\rangle$。验证完毕。

1.6 6

题目 1 （线路恒等式）能以熟知的恒等式来简化量子线路并常有用，证明如下三个恒等式:

(1) $HXH = Z$
(2) $HYH = -Y$
(3) $HZH = X$

其中 H 为 Hadamard 门，X,Y,Z 分别为 Pauli X,Y,Z 门。

解:

我们先回顾各个门的矩阵表示:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明 $HXH = Z$：

首先计算 XH:

$$XH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

再计算 HXH:

$$HXH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$$

(2) 证明 $HYH = -Y$：

首先计算 YH:

$$YH = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}$$

再计算 HYH:

$$HYH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -Y$$

(3) 证明 $HZH = X$：

首先计算 ZH:

$$ZH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

再计算 HZH:

$$HZH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X$$

三个恒等式均得证。

（a）　　　　　　　（b）

题目 2　（多量子比特门的矩阵表示）如下图线路（a）的 4×4 酉矩阵是什么？线路（b）的 4×4 酉矩阵是什么？

解：

线路 (a)： 线路中在 x_2 上施加 Hadamard 门，x_1 不变。对应的 4×4 矩阵为：

$$U_a = I \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

线路 (b)： 线路中在 x_1 上施加 Hadamard 门，x_2 不变。对应的 4×4 矩阵为：

$$U_b = H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

题目 3　分析以下两个量子线路各实现什么功能，并给出分析验证过程。

解：

基本门介绍：

1. CNOT 门：

CNOT（Controlled-NOT）门是一个双量子比特门，也称为受控非门。它有一个控制位（control qubit）和一个目标位（target qubit）：

- 当控制位为 $|0\rangle$ 时，目标位保持不变
- 当控制位为 $|1\rangle$ 时，对目标位施加 X 门（比特翻转）

线路图表示： 在量子线路图中，CNOT 门用以下符号表示：

- **实心圆点（•）：** 标记控制位所在的量子比特线
- **带圈加号（$\oplus$）：** 标记目标位所在的量子比特线
- **竖线：** 连接控制位和目标位

CNOT 门的作用规则：

$$\text{CNOT}|00\rangle = |00\rangle, \quad \text{CNOT}|01\rangle = |01\rangle, \quad \text{CNOT}|10\rangle = |11\rangle, \quad \text{CNOT}|11\rangle = |10\rangle$$

2. SWAP 门：

SWAP 门用于交换两个量子比特的状态，在线路图中用 × 符号表示：

$$\text{SWAP}|ab\rangle = |ba\rangle$$

例如：$\text{SWAP}|01\rangle = |10\rangle$，$\text{SWAP}|10\rangle = |01\rangle$

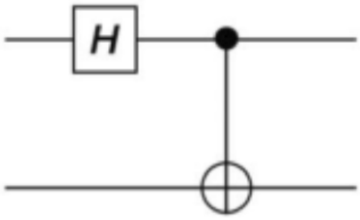
3. 测量：

仪表盘符号表示测量操作，对量子比特进行投影测量，得到经典比特结果（0 或 1），并使量子态塌缩到相应的本征态。

—

线路 (a)： 该线路实现 Bell 态制备功能。

分析过程：



（a）

这个线路由 Hadamard 门和 CNOT 门组成，可以从不同的输入态制备出不同的 Bell 态。我们分析所有可能的输入：

情况 1：输入 $|00\rangle$

1. 第一个量子比特经过 Hadamard 门：

$$(H\otimes I)|00\rangle = |+\rangle\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|10\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门（控制位为第一个量子比特，目标位为第二个）：

$$\text{CNOT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle) = |\Phi^+\rangle$$

情况 2：输入 $|01\rangle$

1. 经过 Hadamard 门：

$$(H\otimes I)|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|11\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

$$\text{CNOT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle) = |\Psi^+\rangle$$

情况 3：输入 $|10\rangle$

1. 经过 Hadamard 门：

$$(H\otimes I)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|10\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

$$\text{CNOT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|11\rangle) = |\Phi^-\rangle$$

情况 4：输入 $|11\rangle$

1. 经过 Hadamard 门：

$$(H\otimes I)|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\otimes|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|11\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

$$\text{CNOT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle) = |\Psi^-\rangle$$

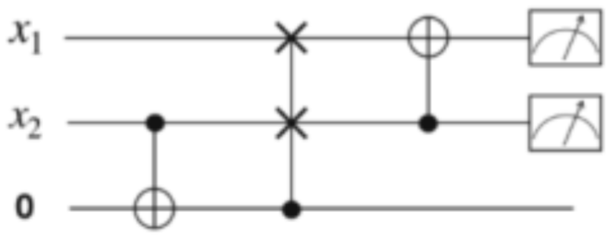
总结：线路 (a) 从不同的计算基态输入可以制备出所有四个 Bell 态：

输入态	输出 Bell 态
$\|00\rangle$	$\|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle + \|11\rangle)$
$\|01\rangle$	$\|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|01\rangle + \|10\rangle)$
$\|10\rangle$	$\|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle - \|11\rangle)$
$\|11\rangle$	$\|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|01\rangle - \|10\rangle)$

因此，线路 (a) 是一个通用的 Bell 态制备线路，通过选择不同的输入计算基态，可以制备出任意一个 Bell 态。

—

线路 (b)：这个量子线路实现两个 1 位二进制数的加法（半加器）。



（b）

分析过程：

设输入态为计算基态

$$|\psi_i\rangle = |x_1x_2x_3\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |0\rangle, \quad x_1, x_2 \in \{0,1\},$$

其中 x_3 为辅助位。此处输入仅是经典比特 0/1，不涉及 Bell 态或纠缠态。

步骤 1：对 $x_2 \to x_3$ 施加 CNOT，得到

$$|x_1x_2x_3\rangle \longrightarrow |x_1x_2x_2\rangle,$$

即 $x_3 = x_2$。

步骤 2：以 x_3 为控制的 C-SWAP（Fredkin）门：当 $x_3 = 1$（即 $x_2 = 1$）时交换 x_1 与 x_2；当 $x_3 = 0$ 时不交换。

步骤 3：对 $x_2 \to x_1$ 施加 CNOT，得到输出位

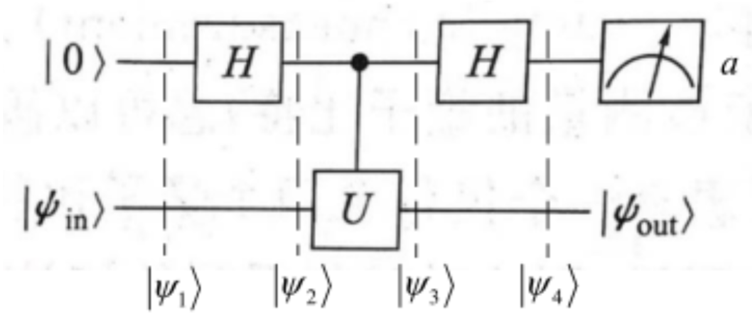
$$x_1' = x_1 \oplus x_2, \qquad x_2' = x_1x_2.$$

因此测量输出中：**上路 x_1' 是“结果/和”，中路 x_2' 是“进位”**。

所有可能输入与输出：

输入 x_1	输入 x_2	输出 x_1'（结果/和）	输出 x_2'（进位）
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

因此该线路等价于经典半加器：**结果位为 $x_1 \oplus x_2$，进位为** x_1x_2。



题目 4 设有一个具有特征值 ±1 的单量子比特门上的算子 U，U 既是 Hermite 的又是酉的，故可以作此门是一个可观测量，又是一个幺正门。假设我们希望测量量子观测量 U，即我们希望获得指示两个特征值之一的测量结果，并将测量后的状态带到相应的特征向量。证明下面的线路可实现 U 的一个测量。

解：

我们逐步分析这个线路在各个阶段的量子态演化：

记号说明：

- 初态：第一个量子比特为 $|0\rangle$，第二个量子比特为待测态 $|\psi_{\text{in}}\rangle$
- U 是 Hermite 算符且幺正，因此可以写为 $U = |u_+\rangle\langle u_+| - |u_-\rangle\langle u_-|$，其中 $|u_\pm\rangle$ 是特征值 ±1 对应的本征态

态演化分析：

阶段 $|\psi_1\rangle$： 初态

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle$$

阶段 $|\psi_2\rangle$： 第一个量子比特经过 Hadamard 门

$$|\psi_2\rangle = (H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle)$$

使用的张量积运算规则：

第 1 步： $(H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle$

使用了**算符张量积的作用规则**：

$$(A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = A|a\rangle \otimes B|b\rangle$$

应用到本题：

$$\begin{aligned}(H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) &= H|0\rangle \otimes I|\psi_{\text{in}}\rangle \\ &= H|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{因为 } I|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{in}}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \quad \left(\text{因为 } H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right)\end{aligned}$$

第 2 步： $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle)$

使用了**张量积的双线性性**（对加法的分配律）：

$$(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$$

应用到本题：

$$\begin{aligned}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle &= |0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \\ &= |0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{简化记号：} |a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |a\rangle|b\rangle)\end{aligned}$$

再结合**标量可交换性**:

$$c(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (c|a\rangle) \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes (c|b\rangle)$$

因此:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle$$

关键运算规则总结:

1. **算符张量积的作用**: $(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = A|\psi\rangle \otimes B|\phi\rangle$
2. **张量积的双线性性(分配律)**: $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$
3. **标量提取**: $c(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (c|a\rangle) \otimes |b\rangle$

阶段 $|\psi_3\rangle$: 经过 Controlled-U 门

Controlled-U 门的作用是:当控制位(第一个量子比特)为 $|1\rangle$ 时,对目标位施加 U 门;控制位为 $|0\rangle$ 时不作用。因此:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle U|\psi_{\text{in}}\rangle)$$

将 $|\psi_{\text{in}}\rangle$ 按照 U 的本征态展开:$|\psi_{\text{in}}\rangle = c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle$,其中 $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$。

关键步骤:利用特征值 ± 1

由于 $|u_+\rangle$ 和 $|u_-\rangle$ 是 U 的本征态,满足:

$$U|u_+\rangle = (+1)|u_+\rangle = |u_+\rangle, \quad U|u_-\rangle = (-1)|u_-\rangle = -|u_-\rangle$$

因此:

$$U|\psi_{\text{in}}\rangle = U(c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle) = c_+U|u_+\rangle + c_-U|u_-\rangle = c_+|u_+\rangle - c_-|u_-\rangle$$

注意这里出现了负号!这正是特征值 -1 的作用。

代入得:

$$\begin{aligned}|\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle(c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle) + |1\rangle(c_+|u_+\rangle - c_-|u_-\rangle)] \\ &= \frac{c_+}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|u_+\rangle + \frac{c_-}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|u_-\rangle \\ &= c_+|+\rangle|u_+\rangle + c_-|-\rangle|u_-\rangle\end{aligned}$$

阶段 $|\psi_4\rangle$: 第一个量子比特经过第二个 Hadamard 门

应用 $H \otimes I$:

$$\begin{aligned}|\psi_4\rangle &= c_+(H|+\rangle)|u_+\rangle + c_-(H|-\rangle)|u_-\rangle \\ &= c_+|0\rangle|u_+\rangle + c_-|1\rangle|u_-\rangle\end{aligned}$$

其中利用了 $H|+\rangle = |0\rangle$,$H|-\rangle = |1\rangle$。

测量结果:

对第一个量子比特(标记为 a)进行测量:

- 测得 $a = 0$,概率为 $|c_+|^2$,第二个量子比特塌缩到 $|u_+\rangle$(对应本征值 $+1$)
- 测得 $a = 1$,概率为 $|c_-|^2$,第二个量子比特塌缩到 $|u_-\rangle$(对应本征值 -1)

因此,该线路通过测量辅助量子比特 a 的值(0 或 1),间接实现了对 U 的本征值测量($+1$ 或 -1),并将第二个量子比特投影到相应的本征态上。证毕。

1.7 7

题目 1 列举两种主流量子计算体系（如超导芯片、离子阱等），分别简述其核心工作原理及主要优缺点。

解:

1. 超导量子计算（Superconducting Quantum Computing）

核心工作原理:

- 利用超导电路中的约瑟夫森结（Josephson Junction）构造人造原子（如超导量子比特）
- 在极低温（~10-20 mK）下工作，使电路进入超导态，消除电阻损耗
- 通过微波脉冲控制量子比特的状态和相互作用
- 常见的超导量子比特类型包括 Transmon、Flux qubit 等

主要优点:

- 可利用成熟的半导体制造工艺进行芯片制造，具有良好的可扩展性
- 量子门操作速度快（纳秒量级）
- 可通过微波控制实现高保真度的单比特和双比特门
- 目前已有商业化的超导量子计算机（如 IBM、Google）

主要缺点:

- 相干时间较短（微秒到毫秒量级），需要复杂的量子纠错
- 需要极低温环境（稀释制冷机），系统复杂且成本高
- 量子比特之间的串扰（crosstalk）问题需要精细调控
- 对电磁噪声敏感

2. 离子阱量子计算（Ion Trap Quantum Computing）

核心工作原理:

- 利用电磁场将单个离子（如 $^{171}Yb^+$、$^{40}Ca^+$ 等）因禁在真空中
- 量子信息编码在离子的内部电子能级或运动状态上
- 通过激光脉冲实现量子比特的初始化、操控和读出
- 离子之间通过共同的声学振动模式实现耦合，从而实现双比特门

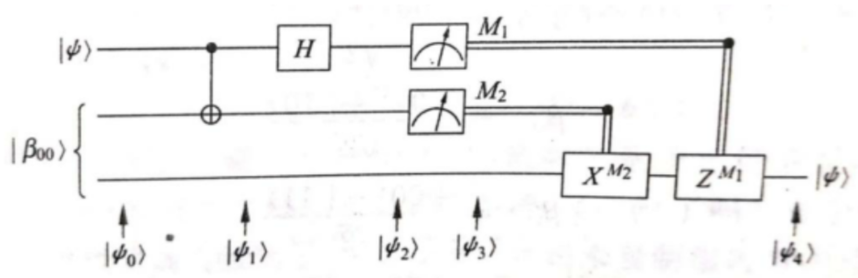
主要优点:

- 相干时间长（秒到分钟量级），量子比特质量高
- 量子门保真度高（单比特门 $> 99.9\%$，双比特门 $> 99\%$）
- 所有离子都是相同的（天然的量子比特一致性）
- 可实现全连接拓扑（任意两个离子都可以相互作用）

主要缺点:

- 量子门操作速度慢（微秒到毫秒量级）
- 可扩展性受限：单个离子阱中离子数增加时，控制复杂度急剧上升
- 需要复杂的激光系统和真空系统，集成度较低
- 量子比特数量的扩展面临技术挑战

题目 2 下图是量子隐形传态的线路图，假设待传输量子态为 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$，纠缠态为 $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$，请给出此程中 $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$ 结果，并简述量子隐形传态的过程。



解：

态演化分析：

$|\psi_0\rangle$**：** 初态

整体初态为待传输态 $|\psi\rangle$ 与纠缠态 $|\beta_{00}\rangle$ 的张量积：

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) + \beta|1\rangle(|01\rangle + |10\rangle)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|001\rangle + \alpha|010\rangle + \beta|101\rangle + \beta|110\rangle)$$

$|\psi_1\rangle$**：** 第一个和第二个量子比特经过 CNOT 门

CNOT 门作用在前两个量子比特上（第一个为控制位，第二个为目标位）：

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|001\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|111\rangle + \beta|100\rangle)$$

$|\psi_2\rangle$**：** 第一个量子比特经过 Hadamard 门

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)|01\rangle + \alpha(|0\rangle + |1\rangle)|11\rangle + \beta(|0\rangle - |1\rangle)|11\rangle + \beta(|0\rangle - |1\rangle)|00\rangle]$$

整理得：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)]$$

更简洁的形式：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |01\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |10\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |11\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)]$$

$|\psi_3\rangle$**：** 测量前两个量子比特（M_1, M_2）

测量后，根据测量结果 (M_1, M_2)，第三个量子比特塌缩到以下四种状态之一：

- $M_1M_2 = 00$：第三个量子比特为 $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1M_2 = 01$：第三个量子比特为 $-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1M_2 = 10$：第三个量子比特为 $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1M_2 = 11$：第三个量子比特为 $-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$

注意：这里需要根据测量结果确定具体哪种情况，因此 $|\psi_3\rangle$ 是上述四种之一（概率各为 1/4）。

$|\psi_4\rangle$**：** 根据测量结果施加修正操作

根据测量结果 (M_1, M_2)，对第三个量子比特施加修正操作：

- 若 $M_2 = 1$：施加 X 门（翻转 $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$）
- 若 $M_1 = 1$：施加 Z 门（相位翻转 $|1\rangle \to -|1\rangle$）

修正后，无论测量结果如何，最终态都恢复为：

$$|\psi_4\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi\rangle$$

量子隐形传态过程总结：

1. **准备阶段：** Alice 持有待传输态 $|\psi\rangle$，Alice 和 Bob 共享纠缠态 $|\beta_{00}\rangle$（Alice 持有第二个量子比特，Bob 持有第三个）

2. **Bell 基测量：**Alice 对手中的两个量子比特（待传输态和纠缠对的一半）进行 Bell 基测量，得到两个经典比特 (M_1, M_2)
3. **经典通信：**Alice 将测量结果 (M_1, M_2) 通过经典信道发送给 Bob
4. **修正操作：**Bob 根据收到的测量结果，对自己手中的量子比特施加相应的幺正操作（X 和 Z 门的组合）
5. **完成传输：**Bob 手中的量子比特最终恢复为原始态 $|\psi\rangle$，而 Alice 手中的量子态已被测量破坏

关键点：

- 量子隐形传态不违反不可克隆定理：原始态被测量破坏
- 需要经典信道传输测量结果，因此不能超光速通信
- 利用量子纠缠和经典通信实现量子态的传输