

# 量子信息导论：作业解答

## Contents

<b>1 量子信息</b>	<b>1</b>
1.1 1 . . . . .	1
1.2 2 . . . . .	5
1.3 3 . . . . .	5
1.4 4 . . . . .	7
1.5 5 . . . . .	9
1.6 6 . . . . .	16
1.7 7 . . . . .	25

## 1 量子信息

### 1.1 1

#### 练习 2.2 (矩阵表示例子)

**题目：**设  $V$  是以  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  为基向量的向量空间,  $A$  是从  $V$  到  $V$  的线性算子, 使  $A|0\rangle = |1\rangle$ ,  $A|1\rangle = |0\rangle$ 。给出  $A$  相对于输入基  $|0\rangle, |1\rangle$  和输出基  $|0\rangle, |1\rangle$  的矩阵表示。找出使  $A$  具有不同矩阵表示的输入输出基。

**解：**先写出算符本身（与基无关）的表达式。由

$$A|0\rangle = |1\rangle, \quad A|1\rangle = |0\rangle$$

并利用完备关系  $I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ ,

$$A = AI = A|0\rangle\langle 0| + A|1\rangle\langle 1| = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$$

这就是 Pauli- $X$  算符。

(1) 输入基与输出基同为  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ : 按 3.4 节的记号, 矩阵元

$$A_{ij}^{(0,1)} = \langle i|A|j\rangle$$

且第  $j$  列是  $A|j\rangle$  在基  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  下的展开系数。由

$$A|0\rangle = |1\rangle, \quad A|1\rangle = |0\rangle$$

得到

$$A^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 取不同基得到不同矩阵表示: 令新基为 Hadamard 基

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

基变换矩阵（按 2.7 节定义）为

$$U_{ij} = \langle e_i | f_j \rangle, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

于是算符在新基下的矩阵表示为

$$A^{(+,-)} = U^\dagger A^{(0,1)} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

与  $A^{(0,1)}$  不同。

### 练习 2.11 (Pauli 矩阵的特征分解)

**题目：**找出 Pauli 矩阵  $X, Y, Z$  的特征向量、特征值和对角表示。

**解：**

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)  $X$  的特征分解 解特征方程  $\det(X - \lambda I) = 0$ :

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当  $\lambda = +1$  时, 解  $(X - I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = b.$$

取归一化向量

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = +1).$$

当  $\lambda = -1$  时, 解  $(X + I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = -b.$$

取归一化向量

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = -1).$$

因此在基  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  下,

$$X \sim \text{diag}(1, -1).$$

具体计算如下: 令

$$U = (|+\rangle \ |-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = U.$$

则

$$U^\dagger X U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2)  $Y$  的特征分解 解特征方程  $\det(Y - \lambda I) = 0$ :

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当  $\lambda = +1$  时, 解  $(Y - I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -a - ib = 0 \Rightarrow a = -ib.$$

取  $b = 1$ , 归一化为

$$|y_+\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = +1).$$

当  $\lambda = -1$  时, 解  $(Y + I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = ib.$$

取  $b = 1$ , 归一化为

$$|y_-\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = -1).$$

因此在基  $\{|y_+\rangle, |y_-\rangle\}$  下,

$$Y \sim \text{diag}(1, -1).$$

具体计算如下: 令

$$U = (|y_+\rangle |y_-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

则

$$U^\dagger Y U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)  $Z$  的特征分解 解特征方程  $\det(Z - \lambda I) = 0$ :

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当  $\lambda = +1$  时, 解  $(Z - I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b = 0,$$

取归一化向量  $|0\rangle$ 。当  $\lambda = -1$  时, 解  $(Z + I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = 0,$$

取归一化向量  $|1\rangle$ 。因此在基  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  下,

$$Z \sim \text{diag}(1, -1).$$

具体计算如下: 令

$$U = (|0\rangle |1\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad U^\dagger = I.$$

则

$$U^\dagger Z U = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 练习 2.20 (更换基)

**题目:** 设  $A'$  和  $A''$  是向量空间  $V$  上一个算子  $A$  对两个不同的标准正交基  $\{|v_i\rangle\}$  和  $\{|w_i\rangle\}$  的矩阵表示, 则

$$A'_{ij} = \langle v_i | A | v_j \rangle, \quad A''_{ij} = \langle w_i | A | w_j \rangle$$

刻画  $A'$  和  $A''$  之间的关系。

**解:** 设基变换矩阵  $U$  的元素为

$$U_{ij} = \langle v_i | w_j \rangle$$

则  $U$  为酉矩阵, 并有

$$|w_j\rangle = \sum_i |v_i\rangle U_{ij}$$

代入可得

$$A'' = U^\dagger A' U$$

因此两者相似 (酉相似), 对应同一线性算子的不同基表示。

### 练习 2.26

**题目:** 令  $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ , 以  $|0\rangle, |1\rangle$  的张量积形式, 并采用 Kronecker 积, 具体写出  $|\psi\rangle^{\otimes 2}$  和  $|\psi\rangle^{\otimes 3}$ 。

**解:**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

其中列向量顺序为  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ 。

同理

$$|\psi\rangle^{\otimes 3} = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即

$$|\psi\rangle^{\otimes 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{b \in \{0,1\}^3} |b\rangle$$

列向量顺序为  $|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle$ 。

## 1.2 2

请利用布洛赫球表示以下量子态

布洛赫球表示中，单量子比特纯态可写为

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

其中  $\theta \in [0, \pi]$  为极角， $\phi \in [0, 2\pi]$  为方位角。

(1) 题目：利用布洛赫球表示量子态  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。

解： $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$

比较系数：

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到  $\theta = \pi/2, \phi = 0$ 。

布洛赫球坐标为  $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ ，即赤道上  $+x$  方向。

(2) 题目：利用布洛赫球表示量子态  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。

解： $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle$

比较系数：

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到  $\theta = \pi/2, \phi = \pi$ 。

布洛赫球坐标为  $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi)$ ，即赤道上  $-x$  方向。

(3) 题目：利用布洛赫球表示量子态  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。

解：比较系数：

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到  $\theta = \pi/2, \phi = \pi/2$ 。

布洛赫球坐标为  $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi/2)$ ，即赤道上  $+y$  方向。

(4) 题目：利用布洛赫球表示量子态  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。

解：比较系数：

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i3\pi/2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到  $\theta = \pi/2, \phi = 3\pi/2$ 。

布洛赫球坐标为  $(\theta, \phi) = (\pi/2, 3\pi/2)$ ，即赤道上  $-y$  方向。

## 1.3 3

施特恩-格拉赫实验与量子测量

题目 1 用  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  基测量量子态  $|+\rangle$ ，会得到什么结果？其中  $|0\rangle$  发生的概率是多少？

解： $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

在  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  基下测量，测量结果为  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ 。

$$P(|0\rangle) = |\langle 0|+\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(|1\rangle) = |\langle 1|+\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

因此测量结果为  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ ，各以  $1/2$  的概率出现。

**题目 2** 在施特恩-格拉赫实验中，对由高温炉产生的银原子施加 Z 方向的不均匀磁场，对这个银原子进行测量，测量结果是自旋向上的概率是  $p_1 = a$ ，结果是自旋向下的概率是  $p_2 = b$ 。

- (1) 请写出高温炉射出的银原子的自旋状态  $|\varphi\rangle$ 。
- (2) 在施特恩-格拉赫实验中，沿 Z 方向施加磁场，对应的可观测算子是泡利矩阵 Z，请计算自旋状态为  $|\varphi\rangle$  系统的可观测算子 Z 的测量不确定度（标准偏差）。

解：

(1) 由题意，测量 Z 方向自旋，向上 ( $|0\rangle$ ) 的概率为  $a$ ，向下 ( $|1\rangle$ ) 的概率为  $b$ ，且  $a + b = 1$ 。

因此初态为

$$|\varphi\rangle = \sqrt{a}|0\rangle + \sqrt{b}|1\rangle$$

(取实数系数，全局相位任意)。

(2) 泡利矩阵  $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ ，特征值为  $\pm 1$ 。

期望值：

$$\langle Z \rangle = \langle \varphi | Z | \varphi \rangle = a \cdot (+1) + b \cdot (-1) = a - b$$

期望的平方：

$$\langle Z^2 \rangle = \langle \varphi | Z^2 | \varphi \rangle = \langle \varphi | I | \varphi \rangle = 1$$

方差：

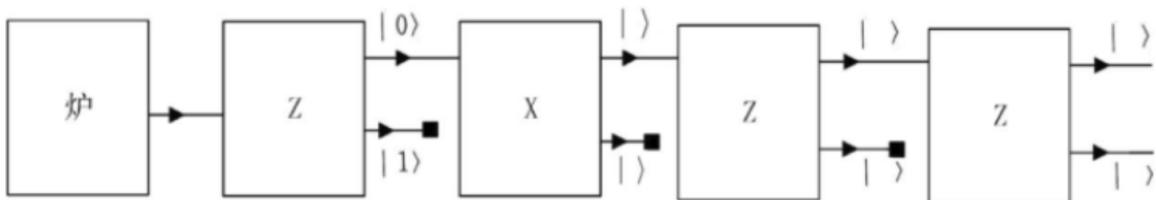
$$\Delta Z^2 = \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2 = 1 - (a - b)^2$$

标准偏差（测量不确定度）：

$$\Delta Z = \sqrt{1 - (a - b)^2} = \sqrt{1 - (a - b)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$$

其中用到了  $a + b = 1$ 。

**题目 3** 如图所示施特恩-格拉赫实验，请填出每次测量坍缩到的量子态，并给出详细计算过程。图示为：初态  $|0\rangle$  依次经过 Z 测量、X 测量、Z 测量、Z 测量的量子线路。



解：量子线路的演化过程：

第一次 Z 测量后得到  $|0\rangle$ （上方输出）。从  $|0\rangle$  开始后续测量。

步骤 1：X 测量

X 的本征态为  $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$  (本征值 +1) 和  $|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$  (本征值 -1)。

将  $|0\rangle$  投影到 X 基:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

测量后, 以各  $1/2$  概率坍缩到  $|+\rangle$  (上方输出) 或  $|-\rangle$  (下方输出)。

**步骤 2:** 第一次 Z 测量

(a) 若 X 测量得到  $|+\rangle$ :

将  $|+\rangle$  投影到 Z 基:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

测量后, 以各  $1/2$  概率坍缩到  $|0\rangle$  (上方输出) 或  $|1\rangle$  (下方输出)。

(b) 若 X 测量得到  $|-\rangle$ :

将  $|-\rangle$  投影到 Z 基:

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

测量后, 以各  $1/2$  概率坍缩到  $|0\rangle$  (上方输出) 或  $|1\rangle$  (下方输出)。

**步骤 3:** 第二次 Z 测量

无论前面路径如何, 经过第一次 Z 测量后得到的是 Z 的本征态  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ 。对 Z 的本征态再次进行 Z 测量, 结果确定不变。

从图中可以看出, 只有从  $|0\rangle$  路径继续进行第二次 Z 测量, 输出确定为  $|0\rangle$ 。

**图中 6 个空白处应填写的量子态:**

图中标记的空白  $| \rangle$  应填写为:

1. X 测量上方输出:  $|+\rangle$
2. X 测量下方输出:  $|-\rangle$
3. 第一次 Z 测量上方输出 (从  $|+\rangle$  或  $|-\rangle$  路径):  $|0\rangle$
4. 第一次 Z 测量下方输出 (从  $|+\rangle$  或  $|-\rangle$  路径):  $|1\rangle$
5. 第二次 Z 测量输出 (从  $|0\rangle$  路径):  $|0\rangle$
6. (图中此处若有标记) 从  $|1\rangle$  路径的输出:  $|1\rangle$  (或不填写, 因为测量本征态结果确定)

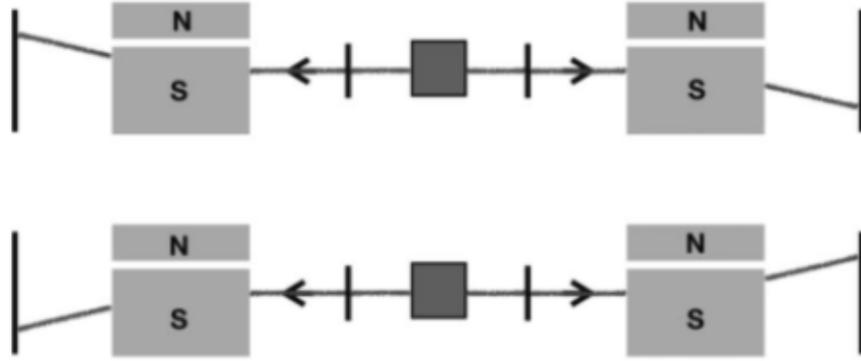
**说明:**

- 对 Z 的本征态进行 Z 测量, 结果确定, 不产生新的分支
- $|0\rangle$  经 Z 测量仍为  $|0\rangle$  (本征值 +1)
- $|1\rangle$  经 Z 测量仍为  $|1\rangle$  (本征值 -1)
- 图中最后的测量主要追踪从  $|0\rangle$  路径的演化

## 1.4 4

### 双自旋纠缠态

**题目** 如图为比特施特恩-格拉赫实验, 蒸发炉能够产生一对一对的自旋, 两个自旋具有相反的动量, 图中示意地描绘了仅有的两种可能观测结果, 即如果自旋 1 处于向上的状态那么自旋 2 处于向下的状态; 如果自旋 1 处于向下的状态那么自旋 2 处于向上的状态。



- (1) 请写出该双自旋量子态  $|\varphi\rangle$  的表达式。
- (2) 测量的是沿 Z 方向的自旋，对应的可观测算子是泡利矩阵  $Z_1 Z_2$ ，请计算状态  $|\varphi\rangle$  系统可观测量  $Z_1 Z_2$  的平均值。
- (3) 计算  $|\varphi\rangle$  的密度算子，并判断它是否为纯态。
- (4) 计算对第一个量子比特的约化密度算子（对第二量子比特取迹），并判断第一个量子比特是否为纯态。

解：

(1) 根据题意，两个自旋反关联：自旋 1 向上则自旋 2 向下，反之亦然。这意味着量子态只在  $|01\rangle$  和  $|10\rangle$  两个基态上有振幅，可以写为：

$$|\varphi\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$$

其中  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  (归一化条件)。

从图中可以看出，两种测量结果（自旋 1 上/自旋 2 下或自旋 1 下/自旋 2 上）出现的概率相等，因此  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$ ，即  $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

最一般的形式为：

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + e^{i\phi}|10\rangle)$$

其中  $\phi$  是相对相位。

**特殊情况：**如果该态是单态 (singlet state, 总自旋为 0 的态)，则相对相位  $\phi = \pi$ ，得到：

$$|\varphi\rangle_{\text{singlet}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 - |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2)$$

**注：**仅从“反关联”这一条件无法唯一确定相对相位。物理上，单态是最常见的自旋反关联态，因此通常默认为单态。后续计算我们采用单态形式。

(2) 可观测算子  $Z_1 Z_2 = Z \otimes Z$ ，其中

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

因此

$$Z_1 Z_2 = (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$$

计算期望值：

$$\langle Z_1 Z_2 \rangle = \langle \varphi | Z_1 Z_2 | \varphi \rangle$$

注意到

$$Z_1 Z_2 |01\rangle = (Z|0\rangle) \otimes (Z|1\rangle) = (+|0\rangle) \otimes (-|1\rangle) = -|01\rangle$$

$$Z_1 Z_2 |10\rangle = (Z|1\rangle) \otimes (Z|0\rangle) = (-|1\rangle) \otimes (+|0\rangle) = -|10\rangle$$

因此

$$Z_1 Z_2 |\varphi\rangle = \frac{-|01\rangle - (-|10\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{-|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = -|\varphi\rangle$$

所以

$$\langle Z_1 Z_2 \rangle = \langle \varphi | (-|\varphi\rangle) = -1$$

(3) 密度算子为

$$\begin{aligned}\rho &= |\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{2}(|01\rangle - |10\rangle)(\langle 01| - \langle 10|) \\ &= \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)\end{aligned}$$

计算  $\rho^2$ :

$$\rho^2 = |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \rho$$

因为  $\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$ , 且  $\rho^2 = \rho$ , 所以  $|\varphi\rangle$  是纯态。

(4) 对第二个量子比特取迹, 得到第一个量子比特的约化密度算子:

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho) = \sum_{i \in \{0,1\}} \langle i|_2 \rho |i\rangle_2$$

计算:

$$\langle 0|_2 \rho |0\rangle_2 = \frac{1}{2} \langle 0|_2 (|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) |0\rangle_2$$

注意到  $\langle 0|_2 |01\rangle = |0\rangle_1$ ,  $\langle 0|_2 |10\rangle = 0$ , 所以

$$\langle 0|_2 \rho |0\rangle_2 = \frac{1}{2} |0\rangle_1 \langle 0|_1$$

类似地

$$\langle 1|_2 \rho |1\rangle_2 = \frac{1}{2} |1\rangle_1 \langle 1|_1$$

因此

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{I}{2}$$

这是最大混合态。计算  $\text{Tr}(\rho_1^2)$ :

$$\rho_1^2 = \frac{I}{4}, \quad \text{Tr}(\rho_1^2) = \frac{1}{2} < 1$$

因此第一个量子比特不是纯态, 而是混合态。这表明纠缠态的子系统总是混合态。

## 1.5 5

### Bell 态与纠缠判断

量子态  $|\psi\rangle_{AB}$  是纠缠态当且仅当它不能写成张量积形式  $|\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$ 。

**题目 1** 判断  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  是否为纠缠态, 并说明理由。

**解:** 假设  $|\psi_1\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$ , 则

$$|\psi_1\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

比较系数:  $ac = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $ad = 0$ ,  $bc = 0$ ,  $bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

由  $ad = 0$  得  $a = 0$  或  $d = 0$ ; 由  $bc = 0$  得  $b = 0$  或  $c = 0$ 。若  $a = 0$ , 则  $ac = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 矛盾。若  $d = 0$ , 则  $bd = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 矛盾。

因此  $|\psi_1\rangle$  不能分解为张量积, 是纠缠态 (Bell 态  $|\Phi^+\rangle$ )。

**题目 2** 判断  $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$  是否为纠缠态，并说明理由。

解：判断纠缠态的方法是尝试将其分解为张量积形式  $|\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$ 。

观察与尝试：

注意到  $|\psi_2\rangle$  包含了所有四个计算基态，且系数相等。我们尝试将其写成两个单量子比特态的张量积。

定义  $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  (Hadamard 基)。

考虑张量积  $|+\rangle \otimes |+\rangle$ ，利用张量积的双线性性（对加法的分配律）展开：

第 1 步：对第一个量子比特的态展开

$$\begin{aligned}|+\rangle \otimes |+\rangle &= \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\&= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\end{aligned}$$

第 2 步：应用张量积对第一个因子的分配律

$$(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) + |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$$

第 3 步：对每一项再应用张量积对第二个因子的分配律

对第一项：

$$|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle = |00\rangle + |01\rangle$$

对第二项：

$$|1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle = |10\rangle + |11\rangle$$

第 4 步：合并结果

$$\begin{aligned}|+\rangle \otimes |+\rangle &= \frac{1}{2}[(|00\rangle + |01\rangle) + (|10\rangle + |11\rangle)] \\&= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)\end{aligned}$$

结论：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

因此  $|\psi_2\rangle$  可以分解为张量积形式，不是纠缠态（是可分离态/积态）。

使用的关键性质：张量积的双线性性 (bilinearity)：

- $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$
- $|a\rangle \otimes (|b\rangle + |c\rangle) = |a\rangle \otimes |b\rangle + |a\rangle \otimes |c\rangle$

**题目 3** 判断  $|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle$  是否为纠缠态，并说明理由。

解：假设  $|\psi_3\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$ ，则

$$|\psi_3\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

比较系数： $ac = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $ad = 0$ ,  $bc = 0$ ,  $bd = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 。

由  $ad = 0$  得  $a = 0$  或  $d = 0$ ；由  $bc = 0$  得  $b = 0$  或  $c = 0$ 。若  $a = 0$ ，则  $ac = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，矛盾。若  $d = 0$ ，则  $bd = 0 \neq \sqrt{\frac{2}{3}}$ ，矛盾。

因此  $|\psi_3\rangle$  不能分解为张量积，是纠缠态。

## Bell 态测量

已知四个贝尔态 (Bell states) 为:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), & |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), & |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \end{aligned}$$

若 Alice 和 Bob 共享一对处于  $|\Phi^+\rangle$  的纠缠粒子, Alice 对她手中的量子比特在计算基  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  下进行测量。

**题目 1** Alice 测量得到结果  $|0\rangle$ , Bob 手中的量子比特立即处于什么状态?

解: 初态为  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Alice 在计算基下测量, 投影算子为  $P_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes I$ ,  $P_1 = |1\rangle\langle 1| \otimes I$ 。

测量后态为

$$P_0|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| |0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle\langle 0| |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle$$

归一化后

$$|\psi'\rangle = \frac{|00\rangle}{\| |00\rangle \|} = |00\rangle = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$$

因此 Bob 手中的量子比特处于  $|0\rangle$  状态。

**题目 2** 若 Alice 测量得到  $|1\rangle$ , Bob 的量子比特状态如何?

解:

$$P_1|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

归一化后

$$|\psi'\rangle = |11\rangle = |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

因此 Bob 手中的量子比特处于  $|1\rangle$  状态。

**题目 3** 若 Alice 改为在基  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  下测量, 得到  $|+\rangle$ , 问 Bob 的量子比特状态是什么?

解: 先将  $|\Phi^+\rangle$  用 Hadamard 基表示。注意到

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |1\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

代入:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[ (|+\rangle + |-\rangle) \otimes (|+\rangle + |-\rangle) + (|+\rangle - |-\rangle) \otimes (|+\rangle - |-\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[ |++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle + |++\rangle - |+-\rangle - |-+\rangle + |--\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2(|++\rangle + |--\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle) \end{aligned}$$

若 Alice 测量得到  $|+\rangle$ , 投影后态为

$$(|+\rangle\langle +| \otimes I)|\Phi^+\rangle \propto |+\rangle \otimes |+\rangle$$

因此 Bob 的量子比特处于  $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  状态。

## 超密编码

**题目 1** 写出超密编码的详细步骤，包括：初始共享的纠缠态、Alice 根据她要发送的两位经典信息 (00, 01, 10, 11) 如何操作她手中的量子比特 (列出对应的酉变换)、Alice 将操作后的量子比特发送给 Bob 后，Bob 如何进行联合测量以解码信息。

**解：超密编码协议详细步骤：**

**初始态：**Alice 和 Bob 共享 Bell 态

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

其中 Alice 持有第一个量子比特，Bob 持有第二个。

**编码：**Alice 根据要发送的两位经典信息，对她的量子比特进行如下酉操作：

- 发送”00”：不做操作 ( $I$ )，态保持为  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- 发送”01”：施加  $Z$  门，态变为  $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

**详细计算：**

$$\begin{aligned} (Z \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (Z \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(Z \otimes I)|00\rangle + (Z \otimes I)|11\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[Z|0\rangle \otimes I|0\rangle + Z|1\rangle \otimes I|1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(+1)|0\rangle \otimes |0\rangle + (-1)|1\rangle \otimes |1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\Phi^-\rangle \end{aligned}$$

其中用到了  $Z|0\rangle = |0\rangle$  (本征值 +1)， $Z|1\rangle = -|1\rangle$  (本征值 -1)。

- 发送”10”：施加  $X$  门，态变为  $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$

**详细计算：**

$$\begin{aligned} (X \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (X \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(X \otimes I)|00\rangle + (X \otimes I)|11\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[X|0\rangle \otimes I|0\rangle + X|1\rangle \otimes I|1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) = |\Psi^+\rangle \end{aligned}$$

其中用到了  $X|0\rangle = |1\rangle$ ， $X|1\rangle = |0\rangle$ 。

- 发送”11”：施加  $XZ = iY$  门，态变为  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

**详细计算：**先施加  $Z$  再施加  $X$ ：

$$\begin{aligned}
 (X \otimes I)(Z \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (X \otimes I)|\Phi^-\rangle \\
 &= (X \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[X|0\rangle \otimes |0\rangle - X|1\rangle \otimes |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle) = -|\Psi^-\rangle
 \end{aligned}$$

相差全局相位  $-1$ , 物理上等价于  $|\Psi^-\rangle$ 。

**传输：**Alice 将她的量子比特发送给 Bob。

**解码：**Bob 持有两个量子比特后, 需要进行 Bell 基测量来区分四个 Bell 态。

**Bell 基测量的线路实现：**

Bell 基测量不能通过简单的计算基测量完成, 需要先通过量子门将 Bell 基转换到计算基, 然后再测量。标准的 Bell 基测量线路包含以下步骤:

1. 对两个量子比特施加 CNOT 门 (第 1 个比特为控制位, 第 2 个比特为目标位)
2. 对第 1 个比特施加 Hadamard 门  $H$
3. 在计算基下测量两个比特, 得到  $(M_1, M_2)$

**数学推导：验证四个 Bell 态如何被映射到计算基**

**情况 1：**初态为  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  (Alice 发送了"00")

**步骤 1：**施加 CNOT 门 (第 1 比特控制第 2 比特)

回顾 CNOT 的作用:  $|a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle$

$$\begin{aligned}
 \text{CNOT} \cdot |\Phi^+\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|00\rangle + \text{CNOT}|11\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0 \oplus 0\rangle + |1, 1 \oplus 1\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)
 \end{aligned}$$

**步骤 2：**对第 1 比特施加 Hadamard 门

回顾  $H$  的作用:  $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ,  $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

$$\begin{aligned}
 (H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |0\rangle + H|1\rangle \otimes |0\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\right) \\
 &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle + (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle] \\
 &= \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle + |00\rangle - |10\rangle] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2|00\rangle = |00\rangle
 \end{aligned}$$

**步骤 3：**测量得到  $(M_1, M_2) = (0, 0)$ , Bob 解码为"00" ✓

**情况 2:** 初态为  $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$  (Alice 发送了"01")

**步骤 1:** 施加 CNOT 门

$$\begin{aligned} \text{CNOT} \cdot |\Phi^-\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|00\rangle - \text{CNOT}|11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \end{aligned}$$

**步骤 2:** 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned} (H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |0\rangle - H|1\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle - \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle - (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle - |00\rangle + |10\rangle] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2|10\rangle = |10\rangle \end{aligned}$$

**步骤 3:** 测量得到  $(M_1, M_2) = (1, 0)$ , Bob 解码为"01" ✓

**情况 3:** 初态为  $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$  (Alice 发送了"10")

**步骤 1:** 施加 CNOT 门

$$\begin{aligned} \text{CNOT} \cdot |\Psi^+\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|01\rangle + \text{CNOT}|10\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0 \oplus 1\rangle + |1, 1 \oplus 0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) \end{aligned}$$

**步骤 2:** 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned} (H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |1\rangle + H|1\rangle \otimes |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle + (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[|01\rangle + |11\rangle + |01\rangle - |11\rangle] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2|01\rangle = |01\rangle \end{aligned}$$

**步骤 3:** 测量得到  $(M_1, M_2) = (0, 1)$ , Bob 解码为"10" ✓

**情况 4:** 初态为  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$  (Alice 发送了"11")

**步骤 1:** 施加 CNOT 门

$$\begin{aligned}
 \text{CNOT} \cdot |\Psi^-\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|01\rangle - \text{CNOT}|10\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)
 \end{aligned}$$

**步骤 2:** 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned}
 (H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |1\rangle - H|1\rangle \otimes |1\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle - \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle\right) \\
 &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle - (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{2}[|01\rangle + |11\rangle - |01\rangle + |11\rangle] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2|11\rangle = |11\rangle
 \end{aligned}$$

**步骤 3:** 测量得到  $(M_1, M_2) = (1, 1)$ , Bob 解码为”11” ✓

Bell 基测量映射总结:

Bell 态	$\xrightarrow{\text{CNOT}}$	$\xrightarrow{H \otimes I}$	测量结果
$ \Phi^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  10\rangle)$	$ 00\rangle$	$(0, 0) \rightarrow "00"$
$ \Phi^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  10\rangle)$	$ 10\rangle$	$(1, 0) \rightarrow "01"$
$ \Psi^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle +  11\rangle)$	$ 01\rangle$	$(0, 1) \rightarrow "10"$
$ \Psi^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  11\rangle)$	$ 11\rangle$	$(1, 1) \rightarrow "11"$

因此, Bob 通过  $\text{CNOT} + H +$  计算基测量, 可以确定性地区分四个 Bell 态, 从而完美解码 Alice 发送的 2 比特经典信息。

**题目 2** 验证当 Alice 要发送”11”时, 她对手中的量子比特施加  $i\sigma_y$  (即  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ) 后, 两量子比特的整体状态变为  $|\Psi^-\rangle$ 。

解: 初态为  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Alice 对第一个量子比特施加  $i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。注意到

$$i\sigma_y|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$i\sigma_y|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -|0\rangle$$

因此

$$\begin{aligned}
 (i\sigma_y \otimes I)|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\sigma_y|0\rangle \otimes |0\rangle + i\sigma_y|1\rangle \otimes |1\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = -|\Psi^-\rangle$$

相差一个全局相位  $-1$ , 物理上等价于  $|\Psi^-\rangle$ 。验证完毕。

## 1.6 6

**题目 1** (线路恒等式) 能以熟知的恒等式来简化量子线路并常有用, 证明如下三个恒等式:

- (1)  $HXH = Z$
- (2)  $HYH = -Y$
- (3)  $HZH = X$

其中 H 为 Hadamard 门, X,Y,Z 分别为 Pauli X,Y,Z 门。

解:

我们先回顾各个门的矩阵表示:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明  $HXH = Z$ :

首先计算  $XH$ :

$$XH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

再计算  $HXH$ :

$$HXH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$$

(2) 证明  $HYH = -Y$ :

首先计算  $YH$ :

$$YH = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}$$

再计算  $HYH$ :

$$HYH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -Y$$

(3) 证明  $HZH = X$ :

首先计算  $ZH$ :

$$ZH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

再计算  $HZH$ :

$$HZH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X$$

三个恒等式均得证。



**题目 2** (多量子比特门的矩阵表示) 如下图线路 (a) 的  $4 \times 4$  酉矩阵是什么? 线路 (b) 的  $4 \times 4$  酉矩阵是什么?

解:

线路 (a): 线路中在  $x_2$  上施加 Hadamard 门,  $x_1$  不变。对应的  $4 \times 4$  矩阵为:

$$U_a = I \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

线路 (b): 线路中在  $x_1$  上施加 Hadamard 门,  $x_2$  不变。对应的  $4 \times 4$  矩阵为:

$$U_b = H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**题目 3** 分析以下两个量子线路各实现什么功能，并给出分析验证过程。

解:

基本门介绍:

### 1. CNOT 门:

CNOT (Controlled-NOT) 门是一个双量子比特门，也称为受控非门。它有一个控制位 (control qubit) 和一个目标位 (target qubit):

- 当控制位为  $|0\rangle$  时，目标位保持不变
  - 当控制位为  $|1\rangle$  时，对目标位施加 X 门 (比特翻转)
- 线路图表表示: 在量子线路图中，CNOT 门用以下符号表示:
- 实心圆点 (•): 标记控制位所在的量子比特线
  - 带圈加号 (⊕): 标记目标位所在的量子比特线
  - 竖线: 连接控制位和目标位

CNOT 门的作用规则:

$$\text{CNOT}|00\rangle = |00\rangle, \quad \text{CNOT}|01\rangle = |01\rangle, \quad \text{CNOT}|10\rangle = |11\rangle, \quad \text{CNOT}|11\rangle = |10\rangle$$

### 2. SWAP 门:

SWAP 门用于交换两个量子比特的状态，在线路图中用  $\times$  符号表示:

$$\text{SWAP}|ab\rangle = |ba\rangle$$

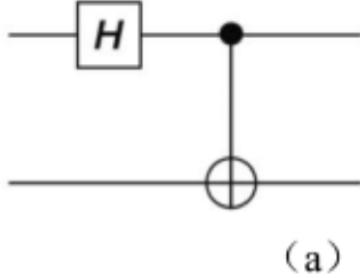
例如:  $\text{SWAP}|01\rangle = |10\rangle, \quad \text{SWAP}|10\rangle = |01\rangle$

### 3. 测量:

仪表盘符号表示测量操作，对量子比特进行投影测量，得到经典比特结果 (0 或 1)，并使量子态塌缩到相应的本征态。

——  
线路 (a): 该线路实现 Bell 态制备功能。

分析过程:



(a)

这个线路由 Hadamard 门和 CNOT 门组成，可以从不同的输入态制备出不同的 Bell 态。我们分析所有可能的输入：

**情况 1：输入  $|00\rangle$**

1. 第一个量子比特经过 Hadamard 门：

$$(H \otimes I)|00\rangle = |+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门（控制位为第一个量子比特，目标位为第二个）：

$$\text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\Phi^+\rangle$$

**情况 2：输入  $|01\rangle$**

1. 经过 Hadamard 门：

$$(H \otimes I)|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

$$\text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = |\Psi^+\rangle$$

**情况 3：输入  $|10\rangle$**

1. 经过 Hadamard 门：

$$(H \otimes I)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

$$\text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\Phi^-\rangle$$

**情况 4：输入  $|11\rangle$**

1. 经过 Hadamard 门：

$$(H \otimes I)|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

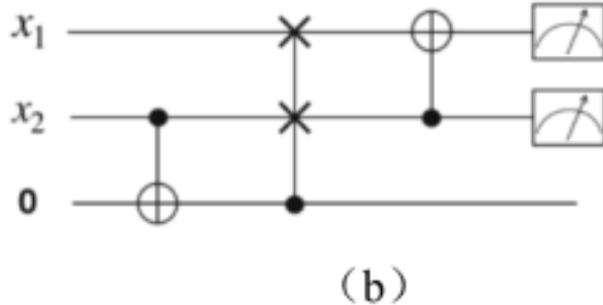
$$\text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = |\Psi^-\rangle$$

**总结:** 线路 (a) 从不同的计算基态输入可以制备出所有四个 Bell 态:

输入态	输出 Bell 态
$ 00\rangle$	$ \Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  11\rangle)$
$ 01\rangle$	$ \Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle +  10\rangle)$
$ 10\rangle$	$ \Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  11\rangle)$
$ 11\rangle$	$ \Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  10\rangle)$

因此, 线路 (a) 是一个通用的 Bell 态制备线路, 通过选择不同的输入计算基态, 可以制备出任意一个 Bell 态。

**线路 (b):** 该线路实现受控 Bell 态制备和测量功能。



### 分析过程:

仔细观察线路 (b), 从左到右依次有三个操作:

**步骤 1:**  $x_2$  和第三个量子比特  $|0\rangle$  之间的 CNOT 门,  $x_2$  为控制位, 第三个量子比特为目标位

**步骤 2:**  $x_1$  和  $x_2$  之间的受控 SWAP 门 (Controlled-SWAP, 也称 Fredkin 门), 第三个量子比特  $|0\rangle$  为控制位

受控 SWAP 门的作用是:

- 当控制位为  $|0\rangle$  时,  $x_1$  和  $x_2$  保持不变
- 当控制位为  $|1\rangle$  时, 交换  $x_1$  和  $x_2$  的状态

**步骤 3:**  $x_1$  和  $x_2$  之间的 CNOT 门,  $x_2$  为控制位,  $x_1$  为目标位

### 完整态演化分析:

假设初态为:  $|\psi\rangle = |x_1, x_2, 0\rangle$ , 其中  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

**步骤 1 后:**  $x_2$  和 0 的 CNOT 操作

$$|x_1, x_2, 0\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}_{x_2 \rightarrow 0}} |x_1, x_2, x_2\rangle$$

**步骤 2 后:** 受控 SWAP 操作 (控制位是第三个量子比特)

- 如果  $x_2 = 0$ , 第三个量子比特为  $|0\rangle$ , 不交换:

$$|x_1, 0, 0\rangle \xrightarrow{\text{C-SWAP}} |x_1, 0, 0\rangle$$

- 如果  $x_2 = 1$ , 第三个量子比特为  $|1\rangle$ , 交换  $x_1$  和  $x_2$ :

$$|x_1, 1, 1\rangle \xrightarrow{\text{C-SWAP}} |1, x_1, 1\rangle$$

**步骤 3 后:**  $x_1$  和  $x_2$  的 CNOT 操作 ( $x_2$  为控制位)

具体计算四种输入情况:

**输入**  $|00\rangle$  ( $x_1 = 0, x_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} |0, 0, 0\rangle &\xrightarrow{\text{步骤 1}} |0, 0, 0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{步骤 2}} |0, 0, 0\rangle \quad (\text{控制位为 } 0, \text{ 不交换}) \\ &\xrightarrow{\text{步骤 3}} |0, 0, 0\rangle \quad (x_2 = 0, \text{ CNOT 不作用}) \end{aligned}$$

测量  $x_1, x_2$  得到  $(0, 0)$

**输入**  $|01\rangle$  ( $x_1 = 0, x_2 = 1$ ):

$$\begin{aligned} |0, 1, 0\rangle &\xrightarrow{\text{步骤 1}} |0, 1, 1\rangle \\ &\xrightarrow{\text{步骤 2}} |1, 0, 1\rangle \quad (\text{控制位为 } 1, \text{ 交换}) \\ &\xrightarrow{\text{步骤 3}} |1, 0, 1\rangle \quad (x_2 = 0, \text{ CNOT 不作用}) \end{aligned}$$

测量  $x_1, x_2$  得到  $(1, 0)$

**输入**  $|10\rangle$  ( $x_1 = 1, x_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} |1, 0, 0\rangle &\xrightarrow{\text{步骤 1}} |1, 0, 0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{步骤 2}} |1, 0, 0\rangle \quad (\text{控制位为 } 0, \text{ 不交换}) \\ &\xrightarrow{\text{步骤 3}} |1, 0, 0\rangle \quad (x_2 = 0, \text{ CNOT 不作用}) \end{aligned}$$

测量  $x_1, x_2$  得到  $(1, 0)$

**输入**  $|11\rangle$  ( $x_1 = 1, x_2 = 1$ ):

$$\begin{aligned} |1, 1, 0\rangle &\xrightarrow{\text{步骤 1}} |1, 1, 1\rangle \\ &\xrightarrow{\text{步骤 2}} |1, 1, 1\rangle \quad (\text{控制位为 } 1, \text{ 交换后还是 } |1, 1, 1\rangle) \\ &\xrightarrow{\text{步骤 3}} |0, 1, 1\rangle \quad (x_2 = 1, \text{ CNOT 翻转 } x_1) \end{aligned}$$

测量  $x_1, x_2$  得到  $(0, 1)$

**功能总结:**

线路 (b) 的映射关系为:

输入 $(x_1, x_2)$	输出测量结果 $(m_1, m_2)$
$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(0, 1)$	$(1, 0)$
$(1, 0)$	$(1, 0)$
$(1, 1)$	$(0, 1)$

注意到  $(0, 1)$  和  $(1, 0)$  都映射到  $(1, 0)$ 。

**扩展分析: Bell 态输入的情况**

如果考虑 Bell 态输入 (线路 (a) 的输出作为线路 (b) 的输入), 这个线路可以部分区分 Bell 态。实际上, 这个线路实现的是一个更复杂的量子态转换和测量功能, 常用于量子通信协议中。下面详细分析:

**Bell 态回顾:**

线路 (a) 可以产生四个 Bell 态:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \end{aligned}$$

现在将这些 Bell 态作为线路 (b) 的前两个量子比特输入 (第三个量子比特仍为辅助  $|0\rangle$ )。

**情况 1: 输入**  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

初始态:  $|\Phi^+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |110\rangle)$

**步骤 1:**  $x_2$  和辅助位的 CNOT ( $x_2$  为控制位)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |110\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}_{x_2 \rightarrow \text{aux}}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

说明:  $|000\rangle$  中  $x_2 = 0$  不翻转辅助位;  $|110\rangle$  中  $x_2 = 1$  翻转辅助位  $0 \rightarrow 1$

**步骤 2:** 受控 SWAP (辅助位控制, 交换  $x_1$  和  $x_2$ )

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \xrightarrow{\text{C-SWAP}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

说明:  $|000\rangle$  辅助位为 0 不交换;  $|111\rangle$  辅助位为 1 交换  $x_1$  和  $x_2$ , 但  $|11\rangle \rightarrow |11\rangle$  不变

**步骤 3:**  $x_2$  和  $x_1$  的 CNOT ( $x_2$  为控制位,  $x_1$  为目标位)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}_{x_2 \rightarrow x_1}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle)$$

说明:  $|000\rangle$  中  $x_2 = 0$  不作用;  $|111\rangle$  中  $x_2 = 1$  翻转  $x_1$ :  $1 \oplus 1 = 0$

**测量结果:** 测量  $x_1, x_2$  得到  $(0, 0)$  或  $(0, 1)$ , 各占 50% 概率

**情况 2: 输入**  $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$

初始态:  $|\Psi^+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle + |100\rangle)$

**步骤 1:** CNOT ( $x_2 \rightarrow$  辅助)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle + |100\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle + |100\rangle)$$

说明:  $|010\rangle$  中  $x_2 = 1$  翻转辅助位;  $|100\rangle$  中  $x_2 = 0$  不翻转

**步骤 2:** C-SWAP

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle + |100\rangle) \xrightarrow{\text{C-SWAP}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle + |100\rangle)$$

说明:  $|011\rangle$  辅助位为 1, 交换  $x_1$  和  $x_2$ :  $|01\rangle \rightarrow |10\rangle$ ;  $|100\rangle$  辅助位为 0 不交换

**步骤 3:** CNOT ( $x_2 \rightarrow x_1$ )

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle + |100\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle + |100\rangle)$$

说明:  $|101\rangle$  中  $x_2 = 0$  (不是 1!), 不翻转  $x_1$ ;  $|100\rangle$  中  $x_2 = 0$ , 不翻转  $x_1$

测量结果: 测量  $x_1, x_2$  确定性地得到 (1, 0) (两项都给出相同结果)

情况 3: 输入  $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

初始态:  $|\Phi^-\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |110\rangle)$

类似地逐步计算:

步骤 1:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |110\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)$$

步骤 2:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle) \xrightarrow{\text{C-SWAP}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)$$

步骤 3:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |011\rangle)$$

测量结果: 测量  $x_1, x_2$  得到 (0, 0) 或 (0, 1), 各占 50% 概率 (注意负号不影响测量概率)

情况 4: 输入  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

初始态:  $|\Psi^-\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - |100\rangle)$

步骤 1:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - |100\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle - |100\rangle)$$

步骤 2:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle - |100\rangle) \xrightarrow{\text{C-SWAP}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle - |100\rangle)$$

步骤 3:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle - |100\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle - |100\rangle)$$

说明:  $|101\rangle$  中  $x_2 = 0$ , 不翻转  $x_1$ ;  $|100\rangle$  中  $x_2 = 0$ , 不翻转  $x_1$

测量结果: 测量  $x_1, x_2$  确定性地得到 (1, 0) (两项都给出相同结果, 负号不影响测量结果)

总结: Bell 态的部分区分

输入 Bell 态	可能的测量结果
$ \Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  11\rangle)$	(0, 0) 或 (0, 1) (各 50%)
$ \Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  11\rangle)$	(0, 0) 或 (0, 1) (各 50%)
$ \Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle +  10\rangle)$	确定性地 (1, 0)
$ \Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  10\rangle)$	确定性地 (1, 0)

关键观察:

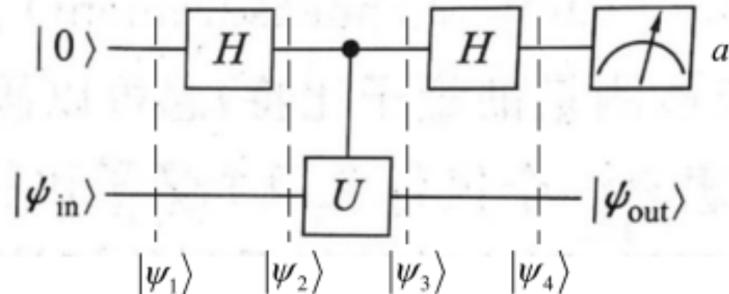
1. **部分区分能力:** 线路 (b) 可以区分两类 Bell 态:
  - $\Phi$  类 ( $|\Phi^+\rangle$  和  $|\Phi^-\rangle$ ): 测量结果可能是  $(0, 0)$  或  $(0, 1)$ , 各占 50%
  - $\Psi$  类 ( $|\Psi^+\rangle$  和  $|\Psi^-\rangle$ ): 测量结果确定性地是  $(1, 0)$
2. **无法完全区分:**
  - 无法区分  $|\Phi^+\rangle$  和  $|\Phi^-\rangle$  (相同的测量结果分布)
  - 无法区分  $|\Psi^+\rangle$  和  $|\Psi^-\rangle$  (相同的测量结果, 都是确定性的  $(1, 0)$ )
  - 对于  $\Phi$  类, 这是因为测量只能获得概率信息, 而  $|\Phi^+\rangle$  和  $|\Phi^-\rangle$  只相差一个整体相位
  - 对于  $\Psi$  类, 两个态经过线路后都演化到相同测量结果的态 (可能相差整体相位)
3. **测量结果的区分能力:**
  - 如果测量得到  $(0, 0)$ , 可以确定输入是  $\Phi$  类 ( $|\Phi^+\rangle$  或  $|\Phi^-\rangle$ )
  - 如果测量得到  $(0, 1)$ , 可以确定输入是  $\Phi$  类 ( $|\Phi^+\rangle$  或  $|\Phi^-\rangle$ )
  - 如果测量得到  $(1, 0)$ , 可以确定输入是  $\Psi$  类 ( $|\Psi^+\rangle$  或  $|\Psi^-\rangle$ )
  - 测量结果  $(1, 1)$  不会出现
4. **量子通信应用:**
  - 这种部分区分能力在量子通信协议中有重要应用
  - 例如在量子密钥分发 (QKD) 中, 可以用来检测窃听
  - 在超密编码中, 类似的线路用于解码经典信息
  - 在纠缠交换中, 部分 Bell 态测量可以建立远距离纠缠

5. **完全 Bell 态测量的困难性:**
  - 使用仅线性光学元件和单光子探测器, 无法实现完全的 Bell 态测量
  - 理论上只能确定性地区分 4 个 Bell 态中的 2 个
  - 这是量子通信实验中的一个基本限制
  - 需要使用非线性相互作用或辅助纠缠才能实现完全 Bell 态测量

#### 物理意义:

这个例子展示了量子测量的一个深刻性质: 即使是最优的测量策略, 也可能无法完全区分所有的量子态。Bell 态是最大纠缠态, 它们构成了两量子比特系统的一组正交基, 但用局部操作和经典通信 (LOCC) 无法完全区分它们。线路 (b) 实现的是一种特殊的 LOCC 测量, 只能部分区分 Bell 态。

**题目 4** 设有一个具有特征值  $\pm 1$  的单量子比特门上的算子  $U$ ,  $U$  既是 Hermite 的又是酉的, 故可以作此门是一个可观测量, 又是一个幺正门。假设我们希望测量量子观测量  $U$ , 即我们希望获得指示两个特征值之一的测量结果, 并将测量后的状态带到相应的特征向量。证明下面的线路可实现  $U$  的一个测量。



**解:**

我们逐步分析这个线路在各个阶段的量子态演化:

**记号说明:**

- 初态: 第一个量子比特为  $|0\rangle$ , 第二个量子比特为待测态  $|\psi_{in}\rangle$
- $U$  是 Hermite 算符且幺正, 因此可以写为  $U = |u_+\rangle\langle u_+| - |u_-\rangle\langle u_-|$ , 其中  $|u_\pm\rangle$  是特征值  $\pm 1$  对应的本征态

**态演化分析：**

**阶段**  $|\psi_1\rangle$ : 初态

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle$$

**阶段**  $|\psi_2\rangle$ : 第一个量子比特经过 Hadamard 门

$$|\psi_2\rangle = (H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle)$$

**使用的张量积运算规则：**

**第 1 步:**  $(H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle$

使用了算符张量积的作用规则:

$$(A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = A|a\rangle \otimes B|b\rangle$$

应用到本题:

$$\begin{aligned} (H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) &= H|0\rangle \otimes I|\psi_{\text{in}}\rangle \\ &= H|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{因为 } I|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{in}}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{因为 } H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)) \end{aligned}$$

**第 2 步:**  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle)$

使用了张量积的双线性性 (对加法的分配律):

$$(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$$

应用到本题:

$$\begin{aligned} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle &= |0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \\ &= |0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{简化记号: } |a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |a\rangle|b\rangle) \end{aligned}$$

再结合标量可交换性:

$$c(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (c|a\rangle) \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes (c|b\rangle)$$

因此:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle$$

**关键运算规则总结:**

1. 算符张量积的作用:  $(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = A|\psi\rangle \otimes B|\phi\rangle$
2. 张量积的双线性性 (分配律):  $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$
3. 标量提取:  $c(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (c|a\rangle) \otimes |b\rangle$

**阶段**  $|\psi_3\rangle$ : 经过 Controlled-U 门

Controlled-U 门的作用是: 当控制位 (第一个量子比特) 为  $|1\rangle$  时, 对目标位施加 U 门; 控制位为  $|0\rangle$  时不作用。因此:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle U|\psi_{\text{in}}\rangle)$$

将  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  按照 U 的本征态展开:  $|\psi_{\text{in}}\rangle = c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle$ , 其中  $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$ 。

**关键步骤: 利用特征值  $\pm 1$**

由于  $|u_+\rangle$  和  $|u_-\rangle$  是  $U$  的本征态，满足：

$$U|u_+\rangle = (+1)|u_+\rangle = |u_+\rangle, \quad U|u_-\rangle = (-1)|u_-\rangle = -|u_-\rangle$$

因此：

$$U|\psi_{\text{in}}\rangle = U(c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle) = c_+U|u_+\rangle + c_-U|u_-\rangle = c_+|u_+\rangle - c_-|u_-\rangle$$

注意这里出现了负号！这正是特征值  $-1$  的作用。

代入得：

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle(c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle) + |1\rangle(c_+|u_+\rangle - c_-|u_-\rangle)] \\ &= \frac{c_+}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|u_+\rangle + \frac{c_-}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|u_-\rangle \\ &= c_+|+\rangle|u_+\rangle + c_-|-rangle|u_-\rangle \end{aligned}$$

**阶段**  $|\psi_4\rangle$ ：第一个量子比特经过第二个 Hadamard 门

应用  $H \otimes I$ ：

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= c_+(H|+\rangle)|u_+\rangle + c_-(H|-\rangle)|u_-\rangle \\ &= c_+|0\rangle|u_+\rangle + c_-|1\rangle|u_-\rangle \end{aligned}$$

其中利用了  $H|+\rangle = |0\rangle$ ,  $H|-\rangle = |1\rangle$ 。

**测量结果：**

对第一个量子比特（标记为  $a$ ）进行测量：

- 测得  $a = 0$ , 概率为  $|c_+|^2$ , 第二个量子比特塌缩到  $|u_+\rangle$  (对应本征值  $+1$ )
- 测得  $a = 1$ , 概率为  $|c_-|^2$ , 第二个量子比特塌缩到  $|u_-\rangle$  (对应本征值  $-1$ )

因此，该线路通过测量辅助量子比特  $a$  的值（0 或 1），间接实现了对  $U$  的本征值测量（ $+1$  或  $-1$ ），并将第二个量子比特投影到相应的本征态上。证毕。

## 1.7 7

**题目 1** 列举两种主流量子计算体系（如超导芯片、离子阱等），分别简述其核心工作原理及主要优缺点。

解：

### 1. 超导量子计算 (Superconducting Quantum Computing)

**核心工作原理：**

- 利用超导电路中的约瑟夫森结 (Josephson Junction) 构造人造原子（如超导量子比特）
- 在极低温 ( $\sim 10-20$  mK) 下工作，使电路进入超导态，消除电阻损耗
- 通过微波脉冲控制量子比特的状态和相互作用
- 常见的超导量子比特类型包括 Transmon、Flux qubit 等

**主要优点：**

- 可利用成熟的半导体制造工艺进行芯片制造，具有良好的可扩展性
- 量子门操作速度快（纳秒量级）
- 可通过微波控制实现高保真度的单比特和双比特门
- 目前已有商业化的超导量子计算机（如 IBM、Google）

**主要缺点：**

- 相干时间较短（微秒到毫秒量级），需要复杂的量子纠错
- 需要极低温环境（稀释制冷机），系统复杂且成本高
- 量子比特之间的串扰（crosstalk）问题需要精细调控

- 对电磁噪声敏感

## 2. 离子阱量子计算 (Ion Trap Quantum Computing)

**核心工作原理:**

- 利用电磁场将单个离子（如  $^{171}\text{Yb}^+$ 、 $^{40}\text{Ca}^+$  等）囚禁在真空中
- 量子信息编码在离子的内部电子能级或运动状态上
- 通过激光脉冲实现量子比特的初始化、操控和读出
- 离子之间通过共同的声学振动模式实现耦合，从而实现双比特门

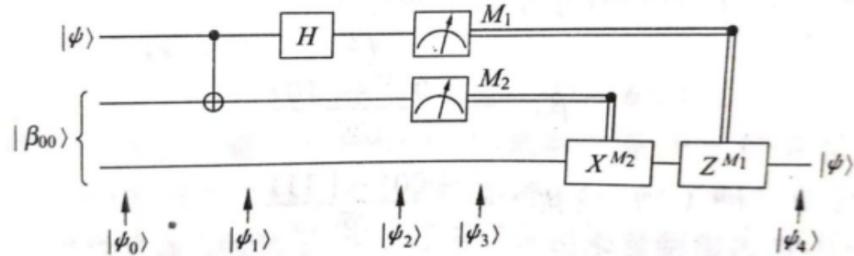
**主要优点:**

- 相干时间长（秒到分钟量级），量子比特质量高
- 量子门保真度高（单比特门  $> 99.9\%$ ，双比特门  $> 99\%$ ）
- 所有离子都是相同的（天然的量子比特一致性）
- 可实现全连接拓扑（任意两个离子都可以相互作用）

**主要缺点:**

- 量子门操作速度慢（微秒到毫秒量级）
- 可扩展性受限：单个离子阱中离子数增加时，控制复杂度急剧上升
- 需要复杂的激光系统和真空系统，集成度较低
- 量子比特数量的扩展面临技术挑战

**题目 2** 下图是量子隐形传态的线路图，假设待传输量子态为  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ，纠缠态为  $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ ，请给出此程中  $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$  结果，并简述量子隐形传态的过程。



**解：**

**态演化分析：**

$|\psi_0\rangle$ : 初态

整体初态为待传输态  $|\psi\rangle$  与纠缠态  $|\beta_{00}\rangle$  的张量积：

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) + \beta|1\rangle(|01\rangle + |10\rangle)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|001\rangle + \alpha|010\rangle + \beta|101\rangle + \beta|110\rangle) \end{aligned}$$

$|\psi_1\rangle$ : 第一个和第二个量子比特经过 CNOT 门

CNOT 门作用在前两个量子比特上（第一个为控制位，第二个为目标位）：

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|001\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|111\rangle + \beta|100\rangle)$$

$|\psi_2\rangle$ : 第一个量子比特经过 Hadamard 门

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)|01\rangle + \alpha(|0\rangle + |1\rangle)|11\rangle + \beta(|0\rangle - |1\rangle)|11\rangle + \beta(|0\rangle - |1\rangle)|00\rangle]$$

整理得：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)]$$

更简洁的形式：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |01\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |10\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |11\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)]$$

$|\psi_3\rangle$ : 测量前两个量子比特  $(M_1, M_2)$

测量后，根据测量结果  $(M_1, M_2)$ ，第三个量子比特塌缩到以下四种状态之一：

- $M_1 M_2 = 00$ : 第三个量子比特为  $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1 M_2 = 01$ : 第三个量子比特为  $-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1 M_2 = 10$ : 第三个量子比特为  $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1 M_2 = 11$ : 第三个量子比特为  $-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$

注意：这里需要根据测量结果确定具体哪种情况，因此  $|\psi_3\rangle$  是上述四种之一（概率各为  $1/4$ ）。

$|\psi_4\rangle$ : 根据测量结果施加修正操作

根据测量结果  $(M_1, M_2)$ ，对第三个量子比特施加修正操作：

- 若  $M_2 = 1$ : 施加  $X$  门 ( $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ )
- 若  $M_1 = 1$ : 施加  $Z$  门 (相位翻转  $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ )

修正后，无论测量结果如何，最终态都恢复为：

$$|\psi_4\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi\rangle$$

### 量子隐形传态过程总结：

1. **准备阶段**: Alice 持有待传输态  $|\psi\rangle$ , Alice 和 Bob 共享纠缠态  $|\beta_{00}\rangle$  (Alice 持有第二个量子比特, Bob 持有第三个)
2. **Bell 基测量**: Alice 对手中的两个量子比特 (待传输态和纠缠对的一半) 进行 Bell 基测量，得到两个经典比特  $(M_1, M_2)$
3. **经典通信**: Alice 将测量结果  $(M_1, M_2)$  通过经典信道发送给 Bob
4. **修正操作**: Bob 根据收到的测量结果，对自己手中的量子比特施加相应的幺正操作 ( $X$  和  $Z$  门的组合)
5. **完成传输**: Bob 手中的量子比特最终恢复为原始态  $|\psi\rangle$ ，而 Alice 手中的量子态已被测量破坏

### 关键点：

- 量子隐形传态不违反不可克隆定理：原始态被测量破坏
- 需要经典信道传输测量结果，因此不能超光速通信
- 利用量子纠缠和经典通信实现量子态的传输