量子信息知识点精要

Contents

1 基础数学工具

1.1 Dirac 符号与完备关系

- **外积：** $|i\rangle\langle j|$ 表示算符
- **完备关系：** $I = \sum_i |i\rangle\langle i|$
- **应用：** 展开算符 $A = \sum_{i,j} A|i\rangle\langle i|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j}\langle i|A|j\rangle|i\rangle\langle j|$

1.2 线性算符的矩阵表示

- **矩阵元：** $A_{ij} = \langle i|A|j\rangle$
- **基变换：** 若基从 $\{|v_i\rangle\}$ 变为 $\{|w_i\rangle\}$，算符矩阵表示满足 $A'' = U^\dagger A' U$，其中 $U_{ij} = \langle v_i|w_j\rangle$

1.3 特征分解

- **特征方程：** $\det(A - \lambda I) = 0$
- **对角化：** Hermite 算符可对角化，$A = \sum_i \lambda_i |u_i\rangle\langle u_i|$

1.4 张量积

- **态的张量积：** $|a\rangle \otimes |b\rangle$ 记为 $|ab\rangle$ 或 $|a, b\rangle$
- **Kronecker 积：** $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{pmatrix}$
- **算符张量积：** $(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes (B|\phi\rangle)$
- **分配律：** $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$

2 量子态

2.1 单量子比特态

- **计算基：** $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **一般纯态：** $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$，满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
- **Hadamard 基：**

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

- **Y 算符本征态：**

$$|y_+\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|y_-\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

2.2 布洛赫球表示

- **参数化形式：** $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$
- **球坐标：** $\theta \in [0, \pi]$ 为极角，$\phi \in [0, 2\pi)$ 为方位角
- **特殊点：**
  - $|0\rangle$：北极 $(\theta = 0)$
  - $|1\rangle$：南极 $(\theta = \pi)$
  - $|+\rangle$：赤道 +x 方向 $(\theta = \pi/2, \phi = 0)$
  - $|-\rangle$：赤道-x 方向 $(\theta = \pi/2, \phi = \pi)$
  - $|y_+\rangle$：赤道 +y 方向 $(\theta = \pi/2, \phi = \pi/2)$
  - $|y_-\rangle$：赤道-y 方向 $(\theta = \pi/2, \phi = 3\pi/2)$

2.3 多量子比特态

- **两比特计算基：** $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$（维数 $2^2 = 4$）
- **n 比特计算基：** $\{|x\rangle : x \in \{0,1\}^n\}$（维数 2^n）
- **可分离态：** $|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$
- **纠缠态：** 不能写成张量积形式的态

2.4 Bell 态（最大纠缠态）

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$
$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$
$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad \text{（单态）}$$

3 量子算符与量子门

3.1 Pauli 算符

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|$$
$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

性质:

- Hermite：$X^\dagger = X$，$Y^\dagger = Y$，$Z^\dagger = Z$
- 幺正：$X^2 = Y^2 = Z^2 = I$
- 特征值：均为 ± 1
- X 特征态：$|+\rangle$ $(\lambda = +1)$，$|-\rangle$ $(\lambda = -1)$
- Y 特征态：$|y_+\rangle$ $(\lambda = +1)$，$|y_-\rangle$ $(\lambda = -1)$
- Z 特征态：$|0\rangle$ $(\lambda = +1)$，$|1\rangle$ $(\lambda = -1)$

3.2 Hadamard 门

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

性质:

- 自伴：$H = H^\dagger$
- 幺正：$H^2 = I$
- 基变换：$H|0\rangle = |+\rangle$，$H|1\rangle = |-\rangle$
- 共轭关系：$HXH = Z$，$HZH = X$，$HYH = -Y$

3.3 CNOT 门（受控非门）

$$\text{CNOT}|a, b\rangle = |a, a \oplus b\rangle$$
$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

应用： Bell 态制备、Bell 基测量、量子隐形传态

3.4 其他重要门

- **单位门：** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $i\sigma_y$ **门：** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = iY$
- **Controlled-U：** C-$U|0, \psi\rangle = |0, \psi\rangle$，C-$U|1, \psi\rangle = |1, U\psi\rangle$

4 量子测量

4.1 投影测量

- **投影算符：** $P_i = |i\rangle\langle i|$，满足 $\sum_i P_i = I$，$P_i P_j = \delta_{ij} P_i$
- **Born 规则：** 测量结果 i 的概率 $P(i) = |\langle i|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$
- **测量后态：** $|\psi'\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{P(i)}} = \frac{P_i|\psi\rangle}{\|P_i|\psi\rangle\|}$

4.2 可观测量

- **定义：** Hermite 算符，谱分解 $A = \sum_i \lambda_i P_i$
- **期望值：** $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i P(i)$
- **方差：** $(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$
- **标准偏差（不确定度）：** $\Delta A = \sqrt{(\Delta A)^2}$

4.3 特殊测量

- **计算基测量：** 投影到 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基，对应 Z 算符
- **本征态测量：** 测量本征态 $|u_i\rangle$ 得到确定结果 λ_i，态不变
- **Bell 基测量：** 通过 CNOT+H+ 计算基测量实现，区分四个 Bell 态

5 密度矩阵

5.1 密度算符

- **纯态：** $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$
- **混合态：** $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$，其中 $\sum_i p_i = 1$，$p_i \geq 0$
- **性质：** $\rho^\dagger = \rho$，$\mathrm{Tr}(\rho) = 1$，$\rho \geq 0$

5.2 纯态判据

- $\rho^2 = \rho$ 等价于纯态
- $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$ 等价于纯态
- $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$ 则为混合态

5.3 约化密度算符（偏迹）

- **定义：** 对复合系统 AB，子系统 A 的约化密度算符为

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_j (\mathbb{I}_A \otimes \langle j|_B)\rho_{AB}(\mathbb{I}_A \otimes |j\rangle_B)$$

- **物理意义：** 子系统的统计描述

5.4 最大混合态

- **单比特：** $\rho = \frac{I}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- **性质：** 完全退相干，$\mathrm{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}$
- **来源：** 纠缠态的子系统是最大混合态

6 量子纠缠

6.1 纠缠判据

- **定义：** $|\psi\rangle_{AB}$ 是纠缠态当且仅当不存在 $|\phi\rangle_A$ 和 $|\chi\rangle_B$ 使得 $|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$
- **检验方法：** 尝试因式分解；计算约化密度矩阵的纯度
- **最大纠缠态：** 四个 Bell 态

6.2 纠缠的性质

- **子系统混合性：** 纠缠态的约化密度算符是混合态
- **例：** Bell 态 $|\Phi^+\rangle$ 的约化态 $\rho_A = \rho_B = \frac{I}{2}$
- **非局域关联：** 测量一个子系统会瞬间影响另一个子系统的态（但不能传递信息）

6.3 Bell 态的变换

Pauli 算符作用在 $|\Phi^+\rangle$ 的第一个量子比特上：

$$\begin{aligned} I \otimes I|\Phi^+\rangle &= |\Phi^+\rangle \\ X \otimes I|\Phi^+\rangle &= |\Psi^+\rangle \\ Z \otimes I|\Phi^+\rangle &= |\Phi^-\rangle \\ iY \otimes I|\Phi^+\rangle &= |\Psi^-\rangle \end{aligned}$$

7 量子协议

7.1 超密编码（Superdense Coding）

目标： 利用一个量子比特传输两个经典比特

资源： Alice 和 Bob 共享 Bell 态 $|\Phi^+\rangle$

编码： Alice 根据要发送的 2 比特信息施加门：

- ”00”：施加 I，态保持 $|\Phi^+\rangle$
- ”01”：施加 Z，态变为 $|\Phi^-\rangle$
- ”10”：施加 X，态变为 $|\Psi^+\rangle$
- ”11”：施加 iY（或 XZ），态变为 $|\Psi^-\rangle$

解码： Bob 收到 Alice 的量子比特后，进行 Bell 基测量（CNOT+H+ 计算基测量）

7.2 量子隐形传态（Quantum Teleportation）

目标： Alice 将未知量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ 传送给 Bob

资源： 共享 Bell 态 $|\Phi^+\rangle_{23}$（Alice 持有量子比特 2，Bob 持有量子比特 3）

步骤：

1. **初态：** $|\psi_0\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\Phi^+\rangle_{23}$
2. **Alice 进行 Bell 基测量：** 对量子比特 1 和 2 进行 CNOT+H+ 计算基测量，得到 2 比特经典结果 (M_1, M_2)
3. **Bob 根据测量结果修正：**
   - 若 $(M_1, M_2) = (0, 0)$：施加 I
   - 若 $(M_1, M_2) = (0, 1)$：施加 X
   - 若 $(M_1, M_2) = (1, 0)$：施加 Z
   - 若 $(M_1, M_2) = (1, 1)$：施加 XZ

4. **结果：** Bob 的量子比特 3 处于态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

关键性质：

- 需要经典信道传输测量结果，不能超光速
- Alice 的原始态被破坏，不违反不可克隆定理
- 传输的是量子态，而非经典信息

8 量子线路

8.1 Bell 态制备

初态 $|00\rangle$ 经过 H（作用在第一个量子比特）和 CNOT：

$$|00\rangle \xrightarrow{H\otimes I} |+0\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} |\Phi^+\rangle$$

其他初态：

- $|01\rangle \to |\Psi^+\rangle$
- $|10\rangle \to |\Phi^-\rangle$
- $|11\rangle \to |\Psi^-\rangle$

8.2 Bell 基测量

量子线路：CNOT（控制比特在前）+ H（作用在第一个量子比特）+ 计算基测量

测量结果对应：

- $(0,0) \to |\Phi^+\rangle$
- $(0,1) \to |\Psi^+\rangle$
- $(1,0) \to |\Phi^-\rangle$
- $(1,1) \to |\Psi^-\rangle$

8.3 线路恒等式

- $HXH = Z$
- $HZH = X$
- $HYH = -Y$
- $H^2 = I$

8.4 多量子比特门的张量积

例 1： $I \otimes H$ 作用在两量子比特态 $|ab\rangle$ 上，只对第二个量子比特施加 Hadamard 门

例 2： $H \otimes I$ 只对第一个量子比特施加 Hadamard 门

矩阵形式：

$$I \otimes H = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \quad H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$$

8.5 辅助量子比特与间接测量

原理： 通过测量辅助量子比特实现对系统的测量，避免直接破坏系统态

线路：

1. 辅助比特初始化为 $|0\rangle$
2. 施加 Hadamard 门到辅助比特
3. 施加 Controlled-U 门（辅助比特为控制比特）

4. 再次对辅助比特施加 Hadamard 门
5. 测量辅助比特
   结果：测量辅助比特得到的期望值对应算符 U 的本征值

9 物理实现

9.1 施特恩-格拉赫实验

- **装置：**不均匀磁场使自旋向上/向下的粒子空间分离
- **量子对应：**自旋向上 $\leftrightarrow |0\rangle$，自旋向下 $\leftrightarrow |1\rangle$
- **连续测量：**不同方向测量对应不同基（Z 方向、X 方向等）

9.2 量子计算物理平台

- **超导量子计算：**基于约瑟夫森结，微波控制，低温运行
- **离子阱量子计算：**电磁场囚禁离子，激光操控，声学模式耦合
- 两种平台各有优劣，都能实现通用量子计算

10 量子信息基本原理

10.1 不可克隆定理

不存在幺正操作能够复制任意未知量子态：

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad \text{（不可能对所有 } |\psi\rangle \text{ 成立）}$$

10.2 相位

- **全局相位：**$e^{i\theta}|\psi\rangle$ 与 $|\psi\rangle$ 物理等价
- **相对相位：**$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ 中 β/α 的相位有物理意义，影响干涉和测量结果

10.3 量子演化的可逆性

- **幺正演化：**$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$，$U$ 是幺正算符，可逆
- **测量不可逆：**测量后态坍缩，信息损失，不可逆