2.2.1 假设一（状态空间）

2.2.2 假设二（演化）

1. 量子系统的演化

2. 量子逻辑门

2.2.3 假设三（量子测量）

2.2.8 假设四（复合系统）

1. 量子系统的演化

● 假设二

➢ 一个量子系统是如何随时间演化的呢？假设 2 给了我们答案。

➢ 量子力学假设 2：一个封闭的量子系统的演化可以由酉变换来描述。就是说，系统在时间为 t_1 的状态 $|\phi\rangle$ 和系统在时间为 t_2 的状态 $|\phi'\rangle$ 可以由一个仅与时间 t_1，t_2 有关的酉矩阵关联起来，$|\phi'\rangle = U|\phi\rangle$。

- 更精细的描述量子系统在连续时间上的演化
- 假设2'：封闭量子系统的演化由薛定谔方程描述。
- 两种描述之间的关系，从薛定谔方程的解可以看出

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left[\frac{-iH(t_2 - t_1)}{\hbar}\right]|\psi(t_1)\rangle = U(t_1,t_2)|\psi(t_1)\rangle$$

$$U(t_1,t_2) = \exp\left[\frac{-iH(t_2 - t_1)}{\hbar}\right] --- 酉$$

1. 量子系统的演化

● 假设二

- 就像第一公设没有告诉我们一个给定系统的态空间或态矢是什样的一样，第二公设也没告诉我们真实世界中描述量子动力学的酉矩阵是什么样。事实上，对于一个量子比特构成的系统，任何一个酉矩阵都是适用于这个量子系统的演化。
- 在这里我们在介绍一些有趣的酉算符——量子门

2. 量子逻辑门

● 量子操作

- 所有量子操作对应于一个酉矩阵（幺正矩阵），常用U表示
  - 若$F^\dagger = F^{-1}$，则称F为酉矩阵，其中$F^\dagger = (F^T)^*$

任意酉矩阵都是一个合法量子操作!

- 操作后的末态等于对应矩阵与初态向量的乘积：$|\varphi_1\rangle = U|\varphi_0\rangle$

➢ 酉矩阵是线性的，因此量子操作具有并行性！

$$U\left(|\varphi_0\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle\right)$$
$$= c_0U|00\rangle + c_1U|01\rangle + c_2U|10\rangle + c_3U|11\rangle$$

$$U\left[|\varphi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i|i\rangle\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i U|i\rangle$$

➢ 对量子比特最基本的操作称为逻辑门

- 逻辑门的操作按照它对Hilbert空间基矢的作用来定义

2. 量子逻辑门

● 量子逻辑门简介

- **量子逻辑电路**又称为**量子逻辑门**
- 从表中看出，描述单一比特逻辑门的矩阵U都是**酉矩阵**，也就是说矩阵U满足关系

$$U^\dagger U = I$$

$U^\dagger$是 U 矩阵的**伴随矩阵**

- 量子逻辑门按照输入比特的个数分为**一位门**，**二位门**以及**三位门**。

名称	记号	作用算符的矩阵表示
Hadamard	$-\boxed{H}-$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$
Pauli-X	$-\boxed{X}-$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
Pauli-Y	$-\boxed{Y}-$	$\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$
Pauli-Z	$-\boxed{Z}-$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
Phase	$-\boxed{S}-$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$
$\pi/8$	$-\boxed{T}-$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\pi/4}\end{pmatrix}$

2. 量子逻辑门

● 常见的一位门

➢ X门（Pauli X），比特翻转（bit flip）

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

➢ **翻转$|0\rangle$和$|1\rangle$**

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \qquad X|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

➢ Z门（Pauli Z）相位翻转（phase flip）

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

➢ **保持$|0\rangle$不变，把$|1\rangle$变为-$|1\rangle$**

$$Z|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \qquad Z|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle$$

2. 量子逻辑门

● 常见的一位门

➢ Hadamard门

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\langle 0|+\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\langle 1|$$

➢ 进行基底 {|0〉,|1〉} 与 {|+〉,|−〉} 间相互转换。

$$H|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)=|+>\qquad H|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)=|->$$

➢ {|0〉,|1〉} 为泡利Z矩阵的本征向量

➢ {|+〉,|−〉}为泡利X矩阵的本征向量

➢ 假设我们有一个基底是 {|+〉,|−〉} 的状态，实验中对X进行量测不如对Z方向来的方便。我们就可以用哈达玛门将其基底转到Z方向上，通过量测自旋对Z方向进行量测。

2.2.1 假设一（状态空间）

2.2.2 假设二（演化）

2.2.3 假设三（量子测量）

1. 一般测量
2. 投影测量
3. POVM测量
4. 三种测量的关系

2.2.4 假设四（复合系统）

1. 一般测量

● 假设三

- 假设 2 阐述了一个封闭的量子系统的演化可以用酉矩阵来描述，但是为了研究量子系统，我们肯定是要对量子系统进行观测的，也就是说量子系统就不再封闭了。为了解决我们在观测时，量子系统发生了什么样的变化，我们引入另一个假设。
- 量子力学假设 3：量子测量可以由一组测量算子 $\{M_m\}$ 来描述。这些算子作用在被测量的量子系统的状态空间上。标号 m 表示实验（测量）中可能出现的各种测量结果。如果测量前，量子系统的状态是 $|\varphi\rangle$ 的话，那么第 m 个结果出现的概率是：

$$p(m) = \langle\varphi|M_m^{\dagger}M_m|\varphi\rangle$$

1. 一般测量

● 假设三

➢ 且测量后的状态为

$$|\psi\rangle = \frac{M_m|\varphi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|M_m^\dagger M_m|\varphi\rangle}}$$

➢ 测量算子满足完备性方程，

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

➢ 完备性方程表达了概率之和为 1 的事实：

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle\varphi|M_m^\dagger M_m|\varphi\rangle$$

1. 一般测量

● 例题（单量子比特在计算基下的测量）

➤ 有两个测量算子，分别是$M_0=|0\rangle\langle 0|, M_1=|1\rangle\langle 1|$，这两个算符都是厄米的，并且有 $M_0^2=M_0, M_1^2=M_1$，满足完备性关系

$$I=M_0^{\dagger}M_0+M_1^{\dagger}M_1=M_0+M_1$$。

（1）假设被测量的态是 $|\varphi\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle$，那么测量结果为 0 和 1 的概率分别为多少？

答： $p(0)=\langle\varphi|M_0^{\dagger}M_0|\varphi\rangle=\langle\varphi|M_0|\varphi\rangle=|a|^2$； $P(1)=|b|^2$

（2）在上面两种情况下测量后的态分别是什么？

答：

$$|\psi_0\rangle=\frac{M_0|\varphi\rangle}{|a|}=\frac{a}{|a|}|0\rangle$$

$$|\psi_1\rangle=\frac{M_1|\varphi\rangle}{|b|}=\frac{b}{|b|}|1\rangle$$

✧ 第三公设是比较重要的一个公设，接下来要介绍的很多测量方法都和这个有关。

2. 投影测量

● 投影测量的定义

➢与经典环境中测量物体的位置、速度等类似，对量子系统的观测实际也是对其某个力学量（可能是位置、动量、电子自旋等）的测量

➢**投影测量:**由被观测系统状态空间上的一个**可观测量**（**力学量**）**M**描述，M是个**厄米算子**，该可观测量具有谱分解

$$M=\sum_{i=1}^{m} u_i P_i \qquad m \le n\text{为不同本征值的个数}$$

其中P_i是M的本征值u_i对应的本征空间上的投影算子P_i

➢ 对应的一组测量算子可描述为$\{P_i\}=\{P_1,P_2,\ldots,P_m\}$，测量的可能结果对应于其本征值$\{u_i\}=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$

2. 投影测量

● 投影测量的定义

◆测量量子态$|\phi\rangle$时，得到结果u_i的概率为

$$p(u_i)=\langle\phi|P_i|\phi\rangle$$

◆给定测量结果u_i，测量后量子系统的状态塌缩为

$$|\psi\rangle=\frac{P_i|\phi\rangle}{\sqrt{p(u_i)}}$$

➢ 特别地，若M对应于不同本征向量的本征值都不同，则测量算子可描述为$\{\mathbf{P_i}\}=\{|\mathbf{u_i}\rangle\langle\mathbf{u_i}|\}$

- ❑ 当系统处于$|\varphi\rangle=c_1|u_1\rangle+c_2|u_2\rangle+\ldots+c_n|u_n\rangle$时，测得值$u_i$的概率是$|c_i|^2$
- ❑ 测量后的态塌缩为对应于测量结果u_i的本征向量$|u_i\rangle$
- ❑ 当量子系统处在**M**的本征态$|u_i\rangle$时，100%概率测得u_i，且态不变化

➢**投影测量和假设3中量子测量的关系：**

◆假设3中$\mathrm{M_m}$为正交投影算子，则退化为投影测量

2. 投影测量

通常称法

可观测量	本征值、对应本征态、测量算子	本质	通常称法
$Z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 自旋在z方向的可观测量	值 1, -1 态 $\|0\rangle$, $\|1\rangle$ $\{\|0\rangle\langle 0\|, \|1\rangle\langle 1\|\}$	测量量Z，测得1(-1)，态塌缩为$\|0\rangle(\|1\rangle)$	用$\{\|0\rangle,\|1\rangle\}$基测量，测得$\|0\rangle(\|1\rangle)$
$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 自旋在x方向的可观测量	值 1, -1 态 $\|+\rangle$, $\|-\rangle$ $\{\|+\rangle\langle +\|, \|-\rangle\langle -\|\}$	测量量X，测得1(-1)，态塌缩为$\|+\rangle(\|-\rangle)$	用$\{\|+\rangle,\|-\rangle\}$基测量，测得$\|+\rangle(\|-\rangle)$

不管被测量的量子态是什么，测量后其状态必为测量基中的状态之一

2. 投影测量

●计算举例

■ 要计算投影测量结果出现的概率，通常先把被测态用测量基展开，各项系数的模方即为测得它的概率

➢ 用 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 测量量子态 $|\varphi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle \quad (|\alpha|^2+|\beta|^2=1)$，将以 $|\alpha|^2$ 的概率测得 $|0\rangle$，以 $|\beta|^2$ 的概率测得 $|1\rangle$。

➢ 用 $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ 测量上述态时，可先变形为

$$|\varphi\rangle=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle)+\frac{\beta}{\sqrt{2}}(|+\rangle-|-\rangle)=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|-\rangle,$$

将以 $|(\alpha+\beta)/\sqrt{2}|^2$ 的概率测得 $|+\rangle$，以 $|(\alpha-\beta)/\sqrt{2}|^2$ 的概率测得 $|-\rangle$。

■ 用投影测量的公式可得到同样结果 $p(u_i)=\langle\phi|P_i|\phi\rangle$ $|\psi\rangle=\frac{P_i|\phi\rangle}{\sqrt{p(u_i)}}$

2. 投影测量

- 例如，用 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 测量 $|0\rangle$ 态，会以概率 1 得到 $|0\rangle$

  用 $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ 测量 $|+\rangle$ 态，会以概率 1 得到 $|+\rangle$

- 例如，用 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 测量 $|+\rangle$（$|-\rangle$）态，会随机得到 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$

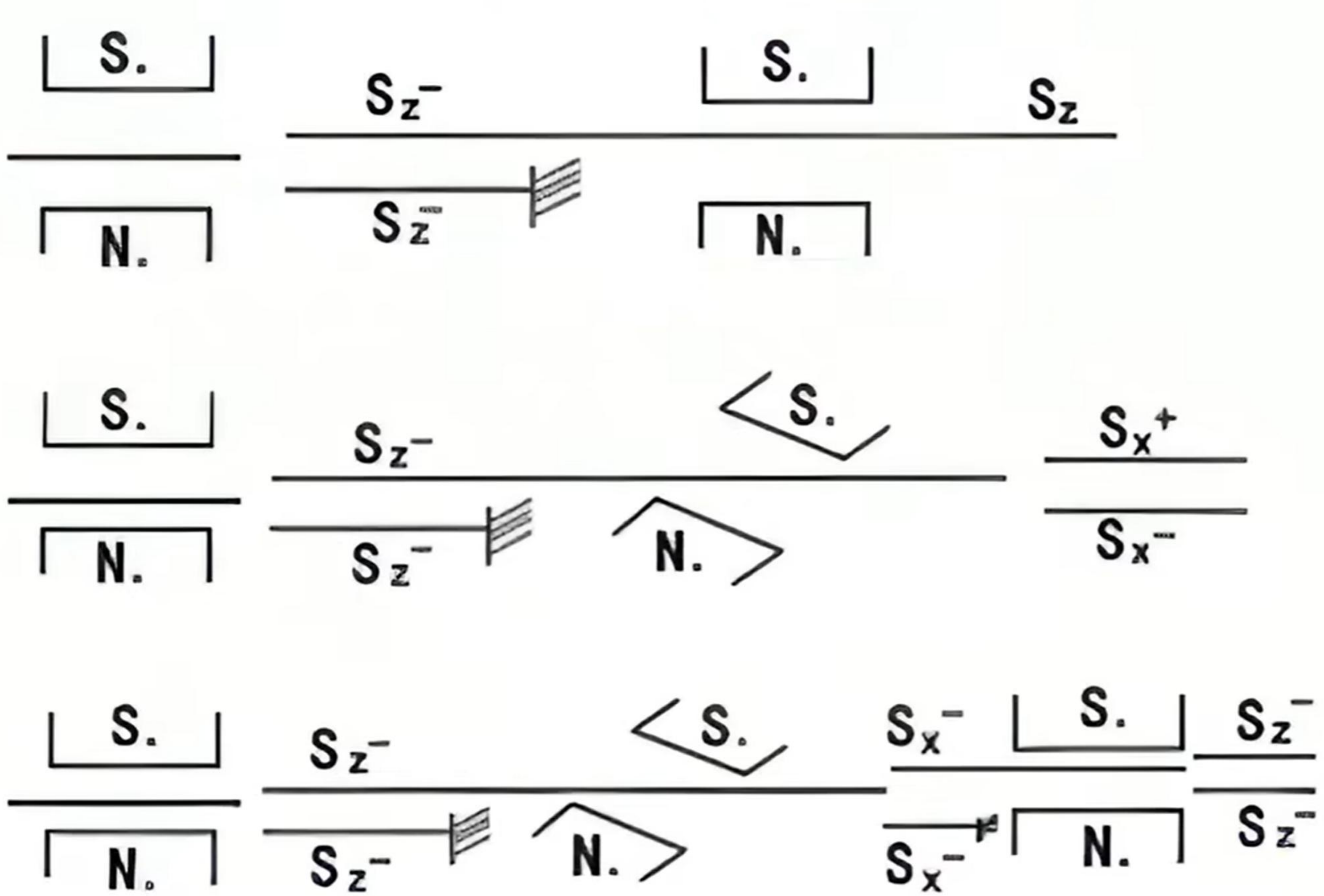
  用 $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ 测量 $|0\rangle$（$|1\rangle$）态，会随机得到 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$

- 用 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 基测量 $|\theta\rangle=(|0\rangle+\sqrt{3}|1\rangle)/2$，会以概率 1/4 得到 $|0\rangle$，以概率 3/4 得到 $|1\rangle$。

- 用 $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ 基测量上述态，结果如何？

2. 投影测量

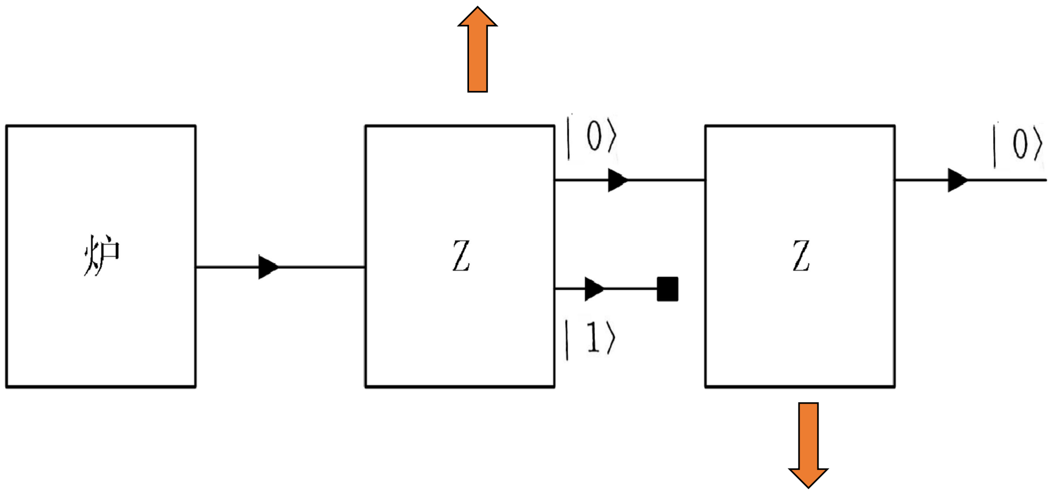
● 施特恩 - 格拉赫实验的测量模型



2. 投影测量

● 施特恩－格拉赫实验的测量模型

银离子经过Z方向磁场，即用$\{|0\rangle,|1\rangle\}$基测量量子态$|\phi\rangle$态塌缩到$|0\rangle$和$|1\rangle$的概率各1/2



量子态$|0\rangle$经过Z方向磁场，即用$\{|0\rangle,|1\rangle\}$基测量$|0\rangle$态塌缩到$|0\rangle$的概率为1

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

自旋在Z方向的可观测量：$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

本征值：1，-1

本征态：$|0\rangle$，$|1\rangle$

测量算子：$P_1 = |0\rangle\langle 0|$

$P_{-1} = |1\rangle\langle 1|$

$$p(1) = \langle\phi|P_1|\phi\rangle = \langle 0|(|0\rangle\langle 0|)|0\rangle = 1$$

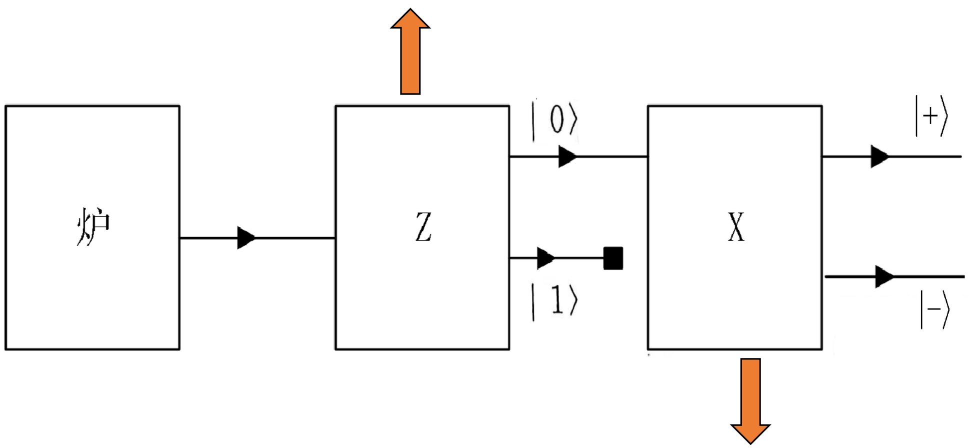
$$|\phi_2\rangle = \frac{P_1|\phi_{-1}\rangle}{\sqrt{p(1)}} = (|0\rangle\langle 0|)|0\rangle = |0\rangle$$

2. 投影测量

● 施特恩 - 格拉赫实验的测量模型

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

银离子经过Z方向磁场，即用$\{|0\rangle,|1\rangle\}$基测量量子态$|\phi\rangle$ 态塌缩到$|0\rangle$和$|1\rangle$的概率各1/2



量子态$|0\rangle$经过X方向磁场，即用$\{|+\rangle,|-\rangle\}$基测量$|0\rangle$ 态塌缩到$|+\rangle$和$|-\rangle$的概率各1/2

自旋在Z方向的可观测量： $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

本征值： 1， -1

本征态： $|0\rangle$， $|1\rangle$

测量算子： $P_1 = |0\rangle\langle 0|$

$P_{-1} = |1\rangle\langle 1|$

自旋在X方向的可观测量： $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

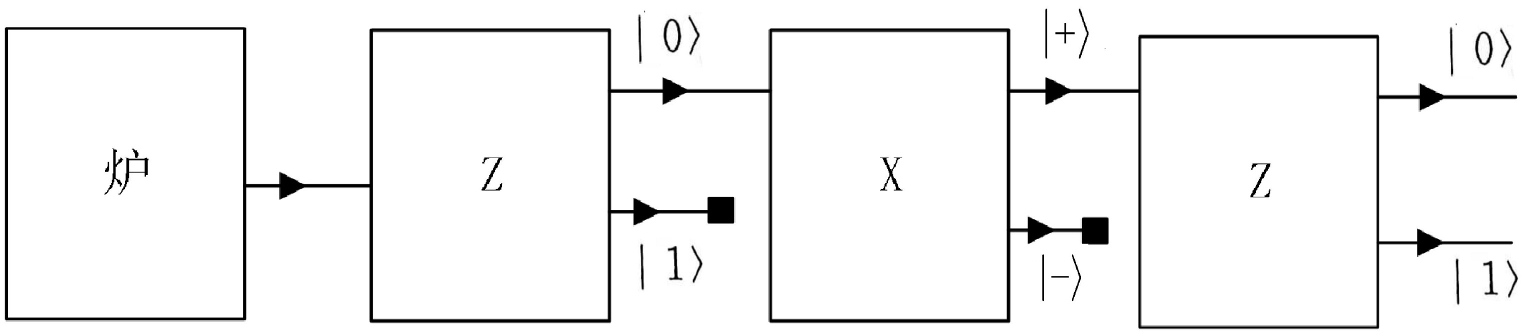
本征值： 1， -1

本征态： $|+\rangle$, $|-\rangle$

测量算子：$\{|+\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$

2. 投影测量

- **施特恩－格拉赫实验的测量模型**



练习：请大家解释以上实验结果

2. 投影测量

● 测量的不确定度

对于一个变量 u，假设它 n 有个可能的取值 $u_1, u_2, \cdots, u_n$，每个可能取值的几率分别是 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，

➢ 平均值是:

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i = \sum_i u_i \langle \phi | P_m | \phi \rangle = \langle \phi | \left(\sum_i u_i P_m \right) | \phi \rangle = \langle \phi | M | \phi \rangle$$

➢ **可观测量 M 的均值:** $\langle M \rangle = \langle \phi | M | \phi \rangle$

➢ 不确定度（标准偏差）为:

$$\Delta u = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \left(u_i - \overline{u} \right)^2}$$

➢ **可观测量 M 的不确定度:** $\Delta M = \sqrt{\left\langle \left(M - \langle M \rangle \right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\langle \phi | \left(M - \langle M \rangle \right)^2 | \phi \rangle}$

3. 半正定算子值测量（POVM）

- 假设 3，涉及两个要素。首先，它给出一个描述测量统计特征的规则，即分别得到不同测量结果的概率；其次它给出描述测量后，系统状态的规则。有的时候，我们不太在意测量之后系统的状态是什么样的，我们更关心不同结果的概率。在这种情况下，给出了半正定算子测量即 POVM 理论。

- 设测量算子 M_m 在状态 $|\varphi\rangle$ 的量子系统上进行测量，则得到结果 m 的概率为 $p(m)=\langle\varphi|M_m^{\dagger}M_m|\varphi\rangle$。若定义

$$E_m = M_m^{\dagger}M_m$$

■ 则根据假设 3 和线性代数知识可知 E_m 是满足 $\sum_m E_m = I$ 和 $p(m)=\langle\varphi|E_m|\varphi\rangle$ 的半正定算子，算子 E_m 称为与测量相联系的 POVM 元，完整的集合 $\{E_m\}$ 称为一个 POVM。

3. 半正定算子值测量（POVM）

➢ POVM应用

设 Alice 交给 Bob 处于 $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ 或 $|\psi_2\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 两状态之一的量子比特. 如 2.2.4 节所述,Bob 不可能完全可靠地确定他得到的是 $|\psi_1\rangle$ 还是 $|\psi_2\rangle$,但他可以进行一项只在某些时候区分状态但永远不误判状态的测量. 考虑由三个元素构成的 POVM:

$$E_1 \equiv \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} |1\rangle\langle 1| \qquad E_2 \equiv \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2} \qquad E_3 \equiv I - E_1 - E_2$$

设 Bob 收到的是状态 $|\psi_1\rangle = |0\rangle$,他进行 POVM$\{E_1, E_2, E_3\}$ 描述的测量. 得到结果 E_1 的概率是 0,因为 E_1 使 $\langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$. 于是,如果测量的结果是 E_1,Bob 有把握得出,他收到的是 $|\psi_2\rangle$;类似推理表明如果测量结果是 E_2,那么 Bob 收到的必为 $|\psi_1\rangle$;有时 Bob 可能测得 E_3,他就不能对所收到的状态作出任何判断. 不过关键在于,Bob 永远不会对所收到的状态作出误判,这个不错性是以有时 Bob 得不到判别状态的信息为代价的.

这个简单的例子说明在仅关心测量统计的情况下,POVM 形式体系是对量子测量的认识的简单直观途径. 本书后面的许多场合中,我们将只关心测量的统计,因此会用 POVM 测量而不是假设 3 的一般测量.

4. 三种测量的关系

- **一般测量**：测量算子满足完备性方程 $\sum_m M_m^{\dagger} M_m = I$

  完备性方程表达了概率之和为 1 的事实

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle \varphi | M_m^{\dagger} M_m | \varphi \rangle$$

- **投影测量**：测量算子除了满足完备性关系外，还满足它是正交投影算子的条件

  n 阶方阵 P 为正交投影矩阵的充要条件是 P 为幂等的厄米矩阵，$\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$，$\mathrm{P}^{\mathrm{H}} = \mathrm{P}$

- **POVM**：测量算子满足完备性关系外，还满足每个算子是半正定的

  视为“为研究一般测量的统计特性提供最简单的方法，而不需要知道测量后状态”的特殊测量。

- **区分投影测量和一般测量**：用涂有银离子的屏去测量光子的位置，会在测量过程中毁灭光子，即测量过程是不可重复的；投影测量是具有可重复性的。那么在面对这些测量情况时，我们往往采用一般测量。