

量子力学手写笔记问题（默写版）

Contents

1 常用积分与体积元	2
1.1 高斯积分与指数积分	2
1.2 分部积分	2
1.3 球坐标体积元与径向拉普拉斯	2
1.4 常见边界与归一化	2
2 δ 函数与向量分析	2
2.1 δ 函数的换元公式	2
2.2 梯度、散度、旋度与叉乘	2
3 对易关系与表象	2
3.1 基本对易关系	2
3.2 对易子的性质	3
3.3 位置与动量表象	3
3.4 矩阵元（常见例子）	3
3.5 概率密度与概率流	3
4薛定谔方程与定态解	3
4.1 四大算符	3
4.2 薛定谔方程	3
4.3 一维无限深势阱 ($0 < x < a$)	3
5 氢原子基态	3
5.1 库仑势与基态波函数	3
5.2 基态期望值	3
6 期望值随时间的演化 (Ehrenfest)	4
7 本征值与本征函数	4
7.1 位置算符	4
7.2 动量算符	4
8 不确定关系	4

1 常用积分与体积元

1.1 高斯积分与指数积分

1. 计算高斯积分: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$ ($a > 0$)。
2. 计算高斯积分: $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2} dx$ ($a > 0$)。
3. 计算高斯积分: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$ ($a > 0$)。
4. 写出指数型积分: $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx$ ($a > 0, n = 0, 1, 2, \dots$)。

1.2 分部积分

1. 写出分部积分公式。
2. 写出常见写法: $\int_a^b g(x) df(x)$ 的等价形式。
3. 写出 f, g 可微时的“把导数项借位”公式。
4. 写出多变量情形下对某一变量分部积分的公式。

1.3 球坐标体积元与径向拉普拉斯

1. 写出球坐标体积元 dV 。
2. 写出径向函数 $f(r)$ 的拉普拉斯 $\nabla^2 f(r)$ 。

1.4 常见边界与归一化

1. 写出束缚态（无限域）的边界条件与归一化条件。
2. 写出一维无限深势阱 $0 < x < a$ 的边界条件与归一化条件。

2 δ 函数与向量分析

2.1 δ 函数的换元公式

1. 若 $g(x_i) = 0$ 且 $g'(x_i) \neq 0$, 写出 $\delta(g(x))$ 的换元公式。

2.2 梯度、散度、旋度与叉乘

1. 写出 ∇f 与算符 ∇ 的分量表达式。
2. 写出散度与旋度的符号表示。
3. 写出向量叉乘 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的行列式形式。

3 对易关系与表象

3.1 基本对易关系

1. 写出 x_i, p_j 的三条基本对易关系。
2. 写出角动量算符 L_x, L_y, L_z 的 6 个对易关系。

3.2 对易子的性质

- 写出对易子的定义与两条常用性质。

3.3 位置与动量表象

- 写出位置表象中 \hat{x}, \hat{p} 的表示。
- 写出动量表象中 \hat{p}, \hat{x} 的表示。

3.4 矩阵元（常见例子）

- 一维无限深势阱能量表象中，求 $x_{mn} = \langle m | \hat{x} | n \rangle$ 与 $p_{mn} = \langle m | \hat{p} | n \rangle$ ，分别给出 $m = n$ 与 $m \neq n$ 的结果。
- 在动量表象中，写出 $\hat{L}_x^{(p)}$ ，并给出 $\langle \vec{p}_1 | \hat{L}_x | \vec{p}_2 \rangle$ 的表达式（写成算符作用于 δ 函数的形式）。

3.5 概率密度与概率流

- 写出概率密度 ρ 与概率流 \vec{j} 的表达式。
- 写出连续性方程。

4 薛定谔方程与定态解

4.1 四大算符

- 写出动能、势能、哈密顿、能量四大算符。

4.2 薛定谔方程

- 写出薛定谔方程 $\hat{E}\psi = \hat{H}\psi$ 。
- 写出时间无关势下的定态解形式与展开式。
- 写出能量期望值 $\langle H \rangle$ （或 $\langle E \rangle$ ）的表达式。

4.3 一维无限深势阱 ($0 < x < a$)

- 写出势阱与边界条件。
- 写出定态本征函数 $u_n(x)$ 与本征能量 E_n 。
- 写出展开系数 C_n 的表达式。

5 氢原子基态

5.1 库仑势与基态波函数

- 写出库仑势 $V(r)$ 。
- 写出基态 ($1s$) 波函数 $\psi_{100}(r)$ 。

5.2 基态期望值

- 写出 $\langle r \rangle$ 与 $\langle \frac{1}{r} \rangle$ 。
- 写出 $\langle V \rangle$ 与 $\langle T \rangle$ 的表达式，并给出 $\langle T \rangle$ 与 E_1 的关系。

6 期望值随时间的演化 (Ehrenfest)

1. 写出期望值定义 $\langle A \rangle$ 与薛定谔方程。
2. 写出 Ehrenfest 定理: $d\langle A \rangle/dt$ 的一般表达式。
3. 写出常见结果: $d\langle x \rangle/dt$ 与 $d\langle p \rangle/dt$ 。

7 本征值与本征函数

7.1 位置算符

1. 写出位置算符的本征方程，并指出对应本征函数与本征值。

7.2 动量算符

1. 写出动量算符的本征方程。
2. 写出本征函数 $f_p(x)$ 的形式与归一化常数。

8 不确定关系

1. 写出一般不确定关系 $\Delta A \Delta B$ 。
2. 写出位置与动量的不确定关系。
3. 写出方差定义与 Δx 的表达式。
4. 写出时间与频率(能量)的不确定关系。
5. 写出达到等号时的物理例子。