

# 量子信息导论：作业解答

## Contents

<b>1 量子信息</b>	<b>1</b>
1.1 1 . . . . .	1
1.2 2 . . . . .	4
1.3 3 . . . . .	5
1.4 4 . . . . .	7
1.5 5 . . . . .	9
1.6 6 . . . . .	16
1.7 7 . . . . .	21

## 1 量子信息

### 1.1 1

#### 练习 2.2 (矩阵表示例子)

**题目：**设  $V$  是以  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  为基向量的向量空间,  $A$  是从  $V$  到  $V$  的线性算子, 使  $A|0\rangle = |1\rangle$ ,  $A|1\rangle = |0\rangle$ 。给出  $A$  相对于输入基  $|0\rangle, |1\rangle$  和输出基  $|0\rangle, |1\rangle$  的矩阵表示。找出使  $A$  具有不同矩阵表示的输入输出基。

**解：**题意是给出线性映射  $A$  在指定输入/输出基下的矩阵表示 (第  $j$  列是  $A|j\rangle$  在输出基中的坐标), 不必先写出算符再做基变换。

(1) 输入基与输出基同为  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ : 按 3.4 节的记号, 矩阵元

$$A_{ij}^{(0,1)} = \langle i|A|j\rangle$$

且第  $j$  列是  $A|j\rangle$  在基  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  下的展开系数。由

$$A|0\rangle = |1\rangle, \quad A|1\rangle = |0\rangle$$

得到

$$A^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 取不同基得到不同矩阵表示: 例如取输入基仍为  $E = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ , 输出基改为  $F = \{|1\rangle, |0\rangle\}$  (交换顺序)。相对于原基  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , 两组基的基变换矩阵 (按 2.7 节定义  $U_{ij} = \langle e_i|f_j\rangle$ ) 分别为

$$U_{\text{in}} = I, \quad U_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

按矩阵表示的定义直接计算:  $A|0\rangle = |1\rangle$  是输出基第一向量,  $A|1\rangle = |0\rangle$  是输出基第二向量, 因此

$$A^{(F \leftarrow E)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

与  $A^{(0,1)}$  不同。

### 练习 2.11 (Pauli 矩阵的特征分解)

题目：找出 Pauli 矩阵  $X, Y, Z$  的特征向量、特征值和对角表示。

解：

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)  $X$  的特征分解 解特征方程  $\det(X - \lambda I) = 0$ :

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当  $\lambda = +1$  时, 解  $(X - I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = b.$$

取归一化向量

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = +1).$$

当  $\lambda = -1$  时, 解  $(X + I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = -b.$$

取归一化向量

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = -1).$$

因此在基  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  下,

$$X \sim \text{diag}(1, -1).$$

具体计算如下：令

$$U = (|+\rangle \ |-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = U.$$

则

$$U^\dagger X U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2)  $Y$  的特征分解 解特征方程  $\det(Y - \lambda I) = 0$ :

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当  $\lambda = +1$  时, 解  $(Y - I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -a - ib = 0 \Rightarrow a = -ib.$$

取  $b = 1$ , 归一化为

$$|y_+\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = +1).$$

当  $\lambda = -1$  时, 解  $(Y + I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = ib.$$

取  $b = 1$ , 归一化为

$$|y_-\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\lambda = -1).$$

因此在基  $\{|y_+\rangle, |y_-\rangle\}$  下,

$$Y \sim \text{diag}(1, -1).$$

具体计算如下: 令

$$U = (|y_+\rangle |y_-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

则

$$U^\dagger Y U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)  $Z$  的特征分解 解特征方程  $\det(Z - \lambda I) = 0$ :

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当  $\lambda = +1$  时, 解  $(Z - I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b = 0,$$

取归一化向量  $|0\rangle$ 。当  $\lambda = -1$  时, 解  $(Z + I)\vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = 0,$$

取归一化向量  $|1\rangle$ 。因此在基  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  下,

$$Z \sim \text{diag}(1, -1).$$

具体计算如下: 令

$$U = (|0\rangle |1\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad U^\dagger = I.$$

则

$$U^\dagger Z U = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 练习 2.20 (更换基)

**题目:** 设  $A'$  和  $A''$  是向量空间  $V$  上一个算子  $A$  对两个不同的标准正交基  $\{|v_i\rangle\}$  和  $\{|w_i\rangle\}$  的矩阵表示, 则

$$A'_{ij} = \langle v_i | A | v_j \rangle, \quad A''_{ij} = \langle w_i | A | w_j \rangle$$

刻画  $A'$  和  $A''$  之间的关系。

解：设基变换矩阵  $U$  的元素为

$$U_{ij} = \langle v_i | w_j \rangle$$

则  $U$  为酉矩阵，并有

$$|w_j\rangle = \sum_i |v_i\rangle U_{ij}$$

代入可得

$$A'' = U^\dagger A' U$$

因此两者相似（酉相似），对应同一线性算子的不同基表示。

### 练习 2.26

题目：令  $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ ，以  $|0\rangle, |1\rangle$  的张量积形式，并采用 Kronecker 积，具体写出  $|\psi\rangle^{\otimes 2}$  和  $|\psi\rangle^{\otimes 3}$ 。

解：

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

其中列向量顺序为  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ 。

同理

$$|\psi\rangle^{\otimes 3} = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即

$$|\psi\rangle^{\otimes 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{b \in \{0,1\}^3} |b\rangle$$

列向量顺序为  $|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle$ 。

## 1.2 2

请利用布洛赫球表示以下量子态

布洛赫球表示中，单量子比特纯态可写为

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

其中  $\theta \in [0, \pi]$  为极角， $\phi \in [0, 2\pi)$  为方位角。

(1) 题目：利用布洛赫球表示量子态  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。

解： $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$

比较系数：

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到  $\theta = \pi/2, \phi = 0$ 。

布洛赫球坐标为  $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ , 即赤道上  $+x$  方向。

(2) 题目：利用布洛赫球表示量子态  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。

解： $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle$

比较系数：

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到  $\theta = \pi/2, \phi = \pi$ 。

布洛赫球坐标为  $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi)$ , 即赤道上  $-x$  方向。

(3) 题目：利用布洛赫球表示量子态  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。

解：比较系数：

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到  $\theta = \pi/2, \phi = \pi/2$ 。

布洛赫球坐标为  $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi/2)$ , 即赤道上  $+y$  方向。

(4) 题目：利用布洛赫球表示量子态  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。

解：比较系数：

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i3\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到  $\theta = \pi/2, \phi = 3\pi/2$ 。

布洛赫球坐标为  $(\theta, \phi) = (\pi/2, 3\pi/2)$ , 即赤道上  $-y$  方向。

### 1.3 3

#### 施特恩-格拉赫实验与量子测量

题目 1 用  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  基测量量子态  $|+\rangle$ , 会得到什么结果? 其中  $|0\rangle$  发生的概率是多少?

解： $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

在  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  基下测量, 测量结果为  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ 。

$$P(|0\rangle) = |\langle 0|+\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(|1\rangle) = |\langle 1|+\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

因此测量结果为  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ , 各以  $1/2$  的概率出现。

**题目 2** 在施特恩-格拉赫实验中，对由高温炉产生的银原子施加 Z 方向的不均匀磁场，对这个银原子进行测量，测量结果是自旋向上的概率是  $p_1 = a$ ，结果是自旋向下的概率是  $p_2 = b$ 。

- (1) 请写出高温炉射出的银原子的自旋状态  $|\varphi\rangle$ 。
- (2) 在施特恩-格拉赫实验中，沿 Z 方向施加磁场，对应的可观测算子是泡利矩阵 Z，请计算自旋状态为  $|\varphi\rangle$  系统的可观测算子 Z 的测量不确定度（标准偏差）。

解：

(1) 由题意，测量 Z 方向自旋，向上 ( $|0\rangle$ ) 的概率为  $a$ ，向下 ( $|1\rangle$ ) 的概率为  $b$ ，且  $a + b = 1$ 。

因此初态为

$$|\varphi\rangle = \sqrt{a}|0\rangle + \sqrt{b}|1\rangle$$

(取实数系数，全局相位任意)。

(2) 泡利矩阵  $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ ，特征值为  $\pm 1$ 。

期望值：

$$\langle Z \rangle = \langle \varphi | Z | \varphi \rangle = a \cdot (+1) + b \cdot (-1) = a - b$$

期望的平方：

$$\langle Z^2 \rangle = \langle \varphi | Z^2 | \varphi \rangle = \langle \varphi | I | \varphi \rangle = 1$$

方差：

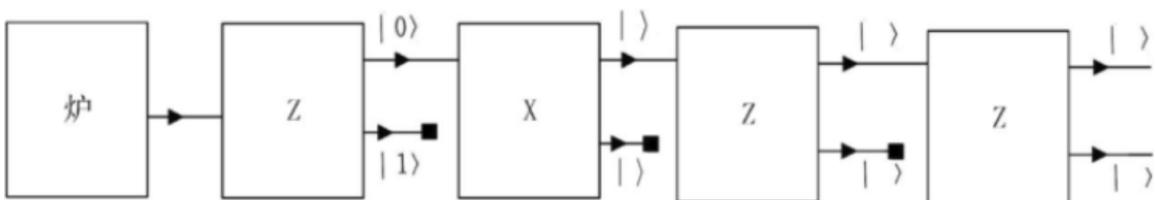
$$\Delta Z^2 = \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2 = 1 - (a - b)^2$$

标准偏差（测量不确定度）：

$$\Delta Z = \sqrt{1 - (a - b)^2} = \sqrt{1 - (a - b)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$$

其中用到了  $a + b = 1$ 。

**题目 3** 如图所示施特恩-格拉赫实验，请填出每次测量坍缩到的量子态，并给出详细计算过程。图示为：初态  $|0\rangle$  依次经过 Z 测量、X 测量、Z 测量、Z 测量的量子线路。



解：量子线路的演化过程：

第一次 Z 测量后得到  $|0\rangle$ （上方输出）。从  $|0\rangle$  开始后续测量。

步骤 1：X 测量

X 的本征态为  $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ （本征值 +1）和  $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ （本征值 -1）。

将  $|0\rangle$  投影到 X 基：

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

测量后，以各  $1/2$  概率坍缩到  $|+\rangle$ （上方输出）或  $|-\rangle$ （下方输出）。

步骤 2：第一次 Z 测量

(a) 若 X 测量得到  $|+\rangle$ ：

将  $|+\rangle$  投影到 Z 基：

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

测量后，以各  $1/2$  概率坍缩到  $|0\rangle$ （上方输出）或  $|1\rangle$ （下方输出）。

(b) 若 X 测量得到  $|-\rangle$ :

将  $|-\rangle$  投影到 Z 基:

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

测量后，以各  $1/2$  概率坍缩到  $|0\rangle$ （上方输出）或  $|1\rangle$ （下方输出）。

**步骤 3:** 第二次 Z 测量

无论前面路径如何，经过第一次 Z 测量后得到的是 Z 的本征态  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ 。对 Z 的本征态再次进行 Z 测量，结果确定不变。

从图中可以看出，只有从  $|0\rangle$  路径继续进行第二次 Z 测量，输出确定为  $|0\rangle$ 。

**图中 6 个空白处应填写的量子态:**

图中标记的空白  $| \rangle$  应填写为:

1. X 测量上方输出:  $|+\rangle$
2. X 测量下方输出:  $|-\rangle$
3. 第一次 Z 测量上方输出（从  $|+\rangle$  或  $|-\rangle$  路径）:  $|0\rangle$
4. 第一次 Z 测量下方输出（从  $|+\rangle$  或  $|-\rangle$  路径）:  $|1\rangle$
5. 第二次 Z 测量输出（从  $|0\rangle$  路径）:  $|0\rangle$
6. (图中此处若有标记) 从  $|1\rangle$  路径的输出:  $|1\rangle$  (或不填写，因为测量本征态结果确定)

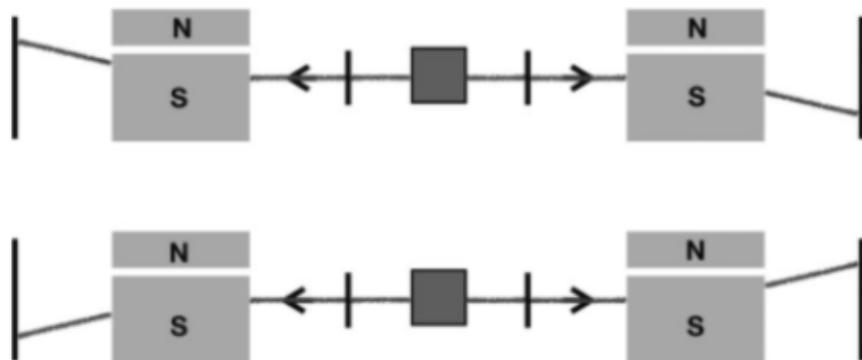
**说明:**

- 对 Z 的本征态进行 Z 测量，结果确定，不产生新的分支
- $|0\rangle$  经 Z 测量仍为  $|0\rangle$  (本征值 +1)
- $|1\rangle$  经 Z 测量仍为  $|1\rangle$  (本征值 -1)
- 图中最后的测量主要追踪从  $|0\rangle$  路径的演化

## 1.4 4

### 双自旋纠缠态

**题目** 如图为比特施特恩-格拉赫实验，蒸发炉能够产生一对一对的自旋，两个自旋具有相反的动量，图中示意地描绘了仅有的两种可能观测结果，即如果自旋 1 处于向上的状态那么自旋 2 处于向下的状态；如果自旋 1 处于向下的状态那么自旋 2 处于向上的状态。



- (1) 请写出该双自旋量子态  $|\varphi\rangle$  的表达式。
- (2) 测量的是沿 Z 方向的自旋，对应的可观测算子是泡利矩阵  $Z_1Z_2$ ，请计算状态  $|\varphi\rangle$  系统可观测量  $Z_1Z_2$  的平均值。
- (3) 计算  $|\varphi\rangle$  的密度算子，并判断它是否为纯态。
- (4) 计算对第一个量子比特的约化密度算子（对第二个量子比特取迹），并判断第一个量子比特是否为纯态。

解：

(1) 根据题意，两个自旋反关联：自旋 1 向上则自旋 2 向下，反之亦然。这意味着量子态只在  $|01\rangle$  和  $|10\rangle$  两个基态上有振幅，可以写为：

$$|\varphi\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$$

其中  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  (归一化条件)。

从图中可以看出，两种测量结果（自旋 1 上/自旋 2 下或自旋 1 下/自旋 2 上）出现的概率相等，因此  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$ ，即  $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

最一般的形式为：

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + e^{i\phi}|10\rangle)$$

其中  $\phi$  是相对相位。题目默认相对相位为 0，因此取：

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

(2) 可观测算子  $Z_1Z_2 = Z \otimes Z$ ，其中

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

因此

$$Z_1Z_2 = (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$$

计算期望值：

$$\langle Z_1Z_2 \rangle = \langle \varphi | Z_1Z_2 | \varphi \rangle$$

注意到

$$Z_1Z_2|01\rangle = (Z|0\rangle) \otimes (Z|1\rangle) = (+|0\rangle) \otimes (-|1\rangle) = -|01\rangle$$

$$Z_1Z_2|10\rangle = (Z|1\rangle) \otimes (Z|0\rangle) = (-|1\rangle) \otimes (+|0\rangle) = -|10\rangle$$

因此

$$Z_1Z_2|\varphi\rangle = \frac{-|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = -|\varphi\rangle$$

所以

$$\langle Z_1Z_2 \rangle = \langle \varphi | (-|\varphi\rangle) = -1$$

(3) 密度算子为

$$\begin{aligned} \rho &= |\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{2}(|01\rangle + |10\rangle)(\langle 01| + \langle 10|) \\ &= \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \end{aligned}$$

计算  $\rho^2$ ：

$$\rho^2 = |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \rho$$

因为  $\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$ ，且  $\rho^2 = \rho$ ，所以  $|\varphi\rangle$  是纯态。

(4) 对第二个量子比特取迹，得到第一个量子比特的约化密度算子：

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho) = \sum_{i \in \{0,1\}} \langle i |_2 \rho | i \rangle_2$$

计算：

$$\langle 0 |_2 \rho | 0 \rangle_2 = \frac{1}{2} \langle 0 |_2 (|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) | 0 \rangle_2$$

注意到  $\langle 0|_2|01\rangle = |0\rangle_1$ ,  $\langle 0|_2|10\rangle = 0$ , 所以

$$\langle 0|_2\rho|0\rangle_2 = \frac{1}{2}|0\rangle_1\langle 0|_1$$

类似地

$$\langle 1|_2\rho|1\rangle_2 = \frac{1}{2}|1\rangle_1\langle 1|_1$$

因此

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{I}{2}$$

这是最大混合态。计算  $\text{Tr}(\rho_1^2)$ :

$$\rho_1^2 = \frac{I}{4}, \quad \text{Tr}(\rho_1^2) = \frac{1}{2} < 1$$

因此第一个量子比特不是纯态, 而是混合态。这表明纠缠态的子系统总是混合态。

## 1.5 5

### Bell 态与纠缠判断

量子态  $|\psi\rangle_{AB}$  是纠缠态当且仅当它不能写成张量积形式  $|\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$ 。

**题目 1** 判断  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  是否为纠缠态, 并说明理由。

解: 假设  $|\psi_1\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$ , 则

$$|\psi_1\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

比较系数:  $ac = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $ad = 0$ ,  $bc = 0$ ,  $bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

由  $ad = 0$  得  $a = 0$  或  $d = 0$ ; 由  $bc = 0$  得  $b = 0$  或  $c = 0$ 。若  $a = 0$ , 则  $ac = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 矛盾。若  $d = 0$ , 则  $bd = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 矛盾。

因此  $|\psi_1\rangle$  不能分解为张量积, 是纠缠态 (Bell 态  $|\Phi^+\rangle$ )。

**题目 2** 判断  $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$  是否为纠缠态, 并说明理由。

解: 判断纠缠态的方法是尝试将其分解为张量积形式  $|\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$ 。

#### 观察与尝试:

注意到  $|\psi_2\rangle$  包含了所有四个计算基态, 且系数相等。我们尝试将其写成两个单量子比特态的张量积。

定义  $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$  (Hadamard 基)。

考虑张量积  $|+\rangle \otimes |+\rangle$ , 利用张量积的双线性性 (对加法的分配律) 展开:

**第 1 步:** 对第一个量子比特的态展开

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |+\rangle &= \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned}$$

**第 2 步:** 应用张量积对第一个因子的分配律

$$(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) + |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$$

**第3步：**对每一项再应用张量积对第二个因子的分配律

对第一项：

$$|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle = |00\rangle + |01\rangle$$

对第二项：

$$|1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle = |10\rangle + |11\rangle$$

**第4步：**合并结果

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |+\rangle &= \frac{1}{2}[(|00\rangle + |01\rangle) + (|10\rangle + |11\rangle)] \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \end{aligned}$$

**结论：**

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

因此  $|\psi_2\rangle$  可以分解为张量积形式，不是纠缠态（是可分离态/积态）。

**使用的关键性质：**张量积的双线性性 (bilinearity)：

- $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$
- $|a\rangle \otimes (|b\rangle + |c\rangle) = |a\rangle \otimes |b\rangle + |a\rangle \otimes |c\rangle$

**题目3** 判断  $|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle$  是否为纠缠态，并说明理由。

解：假设  $|\psi_3\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$ ，则

$$|\psi_3\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

比较系数： $ac = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $ad = 0$ ,  $bc = 0$ ,  $bd = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 。

由  $ad = 0$  得  $a = 0$  或  $d = 0$ ；由  $bc = 0$  得  $b = 0$  或  $c = 0$ 。若  $a = 0$ ，则  $ac = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，矛盾。若  $d = 0$ ，则  $bd = 0 \neq \sqrt{\frac{2}{3}}$ ，矛盾。

因此  $|\psi_3\rangle$  不能分解为张量积，是纠缠态。

## Bell 态测量

已知四个贝尔态 (Bell states) 为：

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

若 Alice 和 Bob 共享一对处于  $|\Phi^+\rangle$  的纠缠粒子，Alice 对她手中的量子比特在计算基  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  下进行测量。

**题目1** Alice 测量得到结果  $|0\rangle$ ，Bob 手中的量子比特立即处于什么状态？

解：初态为  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Alice 在计算基下测量，投影算子为  $P_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes I$ ,  $P_1 = |1\rangle\langle 1| \otimes I$ 。测量后态为

$$P_0|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0||0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle\langle 0||1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle$$

归一化后

$$|\psi'\rangle = \frac{|00\rangle}{\| |00\rangle \|} = |00\rangle = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$$

因此 Bob 手中的量子比特处于  $|0\rangle$  状态。

**题目 2** 若 Alice 测量得到  $|1\rangle$ , Bob 的量子比特状态如何?

解:

$$P_1 |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

归一化后

$$|\psi'\rangle = |11\rangle = |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

因此 Bob 手中的量子比特处于  $|1\rangle$  状态。

**题目 3** 若 Alice 改为在基  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  下测量, 得到  $|+\rangle$ , 问 Bob 的量子比特状态是什么?

解: 先将  $|\Phi^+\rangle$  用 Hadamard 基表示。注意到

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |1\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

代入:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ (|+\rangle + |-\rangle) \otimes (|+\rangle + |-\rangle) + (|+\rangle - |-\rangle) \otimes (|+\rangle - |-\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ |++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle + |++\rangle - |+-\rangle - |-+\rangle + |--\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2(|++\rangle + |--\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|++\rangle + |--\rangle) \end{aligned}$$

若 Alice 测量得到  $|+\rangle$ , 投影后态为

$$(|+\rangle \langle +| \otimes I) |\Phi^+\rangle \propto |+\rangle \otimes |+\rangle$$

因此 Bob 的量子比特处于  $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  状态。

## 超密编码

**题目 1** 写出超密编码的详细步骤, 包括: 初始共享的纠缠态、Alice 根据她要发送的两位经典信息 (00, 01, 10, 11) 如何操作她手中的量子比特 (列出对应的酉变换)、Alice 将操作后的量子比特发送给 Bob 后, Bob 如何进行联合测量以解码信息。

解: 超密编码协议详细步骤:

**初始态:** Alice 和 Bob 共享 Bell 态

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

其中 Alice 持有第一个量子比特, Bob 持有第二个。

**编码:** Alice 根据要发送的两位经典信息, 对她的量子比特进行如下酉操作:

- 发送“00”: 不做操作 ( $I$ ), 态保持为  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$

- 发送“01”：施加  $Z$  门，态变为  $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

**详细计算：**

$$\begin{aligned}
 (Z \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (Z \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(Z \otimes I)|00\rangle + (Z \otimes I)|11\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[Z|0\rangle \otimes I|0\rangle + Z|1\rangle \otimes I|1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(+1)|0\rangle \otimes |0\rangle + (-1)|1\rangle \otimes |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\Phi^-\rangle
 \end{aligned}$$

其中用到了  $Z|0\rangle = |0\rangle$  (本征值 +1),  $Z|1\rangle = -|1\rangle$  (本征值 -1)。

- 发送“10”：施加  $X$  门，态变为  $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$

**详细计算：**

$$\begin{aligned}
 (X \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (X \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(X \otimes I)|00\rangle + (X \otimes I)|11\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[X|0\rangle \otimes I|0\rangle + X|1\rangle \otimes I|1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) = |\Psi^+\rangle
 \end{aligned}$$

其中用到了  $X|0\rangle = |1\rangle$ ,  $X|1\rangle = |0\rangle$ 。

- 发送“11”：施加  $XZ = iY$  门，态变为  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

**详细计算：**先施加  $Z$  再施加  $X$ :

$$\begin{aligned}
 (X \otimes I)(Z \otimes I)|\Phi^+\rangle &= (X \otimes I)|\Phi^-\rangle \\
 &= (X \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[X|0\rangle \otimes |0\rangle - X|1\rangle \otimes |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle) = -|\Psi^-\rangle
 \end{aligned}$$

相差全局相位 -1，物理上等价于  $|\Psi^-\rangle$ 。

**传输：**Alice 将她的量子比特发送给 Bob。

**解码：**Bob 持有两个量子比特后，需要进行 Bell 基测量来区分四个 Bell 态。

**Bell 基测量的线路实现：**

Bell 基测量不能通过简单的计算基测量完成，需要先通过量子门将 Bell 基转换到计算基，然后再测量。标准的 Bell 基测量线路包含以下步骤：

1. 对两个量子比特施加 CNOT 门（第 1 个比特为控制位，第 2 个比特为目标位）
2. 对第 1 个比特施加 Hadamard 门  $H$
3. 在计算基下测量两个比特，得到  $(M_1, M_2)$

**数学推导：验证四个 Bell 态如何被映射到计算基**

**情况 1：**初态为  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  (Alice 发送了"00")

**步骤 1：**施加 CNOT 门（第 1 比特控制第 2 比特）

回顾 CNOT 的作用： $|a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle$

$$\begin{aligned} \text{CNOT} \cdot |\Phi^+\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|00\rangle + \text{CNOT}|11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0 \oplus 0\rangle + |1, 1 \oplus 1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \end{aligned}$$

**步骤 2：**对第 1 比特施加 Hadamard 门

回顾  $H$  的作用： $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ,  $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

$$\begin{aligned} (H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |0\rangle + H|1\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle + (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle + |00\rangle - |10\rangle] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2|00\rangle = |00\rangle \end{aligned}$$

**步骤 3：**测量得到  $(M_1, M_2) = (0, 0)$ , Bob 解码为"00" ✓

**情况 2：**初态为  $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$  (Alice 发送了"01")

**步骤 1：**施加 CNOT 门

$$\begin{aligned} \text{CNOT} \cdot |\Phi^-\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|00\rangle - \text{CNOT}|11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \end{aligned}$$

**步骤 2:** 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned}
(H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |0\rangle - H|1\rangle \otimes |0\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle - \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle - (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle] \\
&= \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle - |00\rangle + |10\rangle] \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2|10\rangle = |10\rangle
\end{aligned}$$

**步骤 3:** 测量得到  $(M_1, M_2) = (1, 0)$ , Bob 解码为”01” ✓

**情况 3:** 初态为  $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$  (Alice 发送了”10”)

**步骤 1:** 施加 CNOT 门

$$\begin{aligned}
\text{CNOT} \cdot |\Psi^+\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|01\rangle + \text{CNOT}|10\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0 \oplus 1\rangle + |1, 1 \oplus 0\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)
\end{aligned}$$

**步骤 2:** 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned}
(H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |1\rangle + H|1\rangle \otimes |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle + (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle] \\
&= \frac{1}{2}[|01\rangle + |11\rangle + |01\rangle - |11\rangle] \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2|01\rangle = |01\rangle
\end{aligned}$$

**步骤 3:** 测量得到  $(M_1, M_2) = (0, 1)$ , Bob 解码为”10” ✓

**情况 4:** 初态为  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$  (Alice 发送了”11”)

**步骤 1:** 施加 CNOT 门

$$\begin{aligned}
\text{CNOT} \cdot |\Psi^-\rangle &= \text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|01\rangle - \text{CNOT}|10\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)
\end{aligned}$$

**步骤 2:** 对第 1 比特施加 Hadamard 门

$$\begin{aligned}
 (H \otimes I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle \otimes |1\rangle - H|1\rangle \otimes |1\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle - \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle\right) \\
 &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle - (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{2}[|01\rangle + |11\rangle - |01\rangle + |11\rangle] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2|11\rangle = |11\rangle
 \end{aligned}$$

**步骤 3:** 测量得到  $(M_1, M_2) = (1, 1)$ , Bob 解码为”11” ✓  
Bell 基测量映射总结:

Bell 态	$\xrightarrow{\text{CNOT}}$	$\xrightarrow{H \otimes I}$	测量结果
$ \Phi^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  10\rangle)$	$ 00\rangle$	$(0, 0) \rightarrow "00"$
$ \Phi^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  10\rangle)$	$ 10\rangle$	$(1, 0) \rightarrow "01"$
$ \Psi^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle +  11\rangle)$	$ 01\rangle$	$(0, 1) \rightarrow "10"$
$ \Psi^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  11\rangle)$	$ 11\rangle$	$(1, 1) \rightarrow "11"$

因此, Bob 通过 CNOT + H + 计算基测量, 可以确定性地区分四个 Bell 态, 从而完美解码 Alice 发送的 2 比特经典信息。

**题目 2** 验证当 Alice 要发送”11”时, 她对手中的量子比特施加  $i\sigma_y$  (即  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ) 后, 两量子比特的整体状态变为  $|\Psi^-\rangle$ 。

解: 初态为  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Alice 对第一个量子比特施加  $i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。注意到

$$i\sigma_y|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$i\sigma_y|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -|0\rangle$$

因此

$$\begin{aligned}
 (i\sigma_y \otimes I)|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\sigma_y|0\rangle \otimes |0\rangle + i\sigma_y|1\rangle \otimes |1\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = -|\Psi^-\rangle
 \end{aligned}$$

相差一个全局相位  $-1$ , 物理上等价于  $|\Psi^-\rangle$ 。验证完毕。

## 1.6 6

**题目 1** (线路恒等式) 能以熟知的恒等式来简化量子线路并常有用, 证明如下三个恒等式:

- (1)  $H X H = Z$
- (2)  $H Y H = -Y$
- (3)  $H Z H = X$

其中  $H$  为 Hadamard 门,  $X, Y, Z$  分别为 Pauli  $X, Y, Z$  门。

解:

我们先回顾各个门的矩阵表示:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明  $H X H = Z$ :

首先计算  $XH$ :

$$XH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

再计算  $H X H$ :

$$H X H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$$

(2) 证明  $H Y H = -Y$ :

首先计算  $YH$ :

$$YH = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}$$

再计算  $HYH$ :

$$HYH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -Y$$

(3) 证明  $H Z H = X$ :

首先计算  $ZH$ :

$$ZH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

再计算  $H Z H$ :

$$HZH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X$$

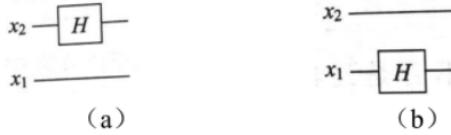
三个恒等式均得证。

**题目 2** (多量子比特门的矩阵表示) 如下图线路 (a) 的  $4 \times 4$  酉矩阵是什么? 线路 (b) 的  $4 \times 4$  酉矩阵是什么?

解:

线路 (a): 线路中在  $x_2$  上施加 Hadamard 门,  $x_1$  不变。对应的  $4 \times 4$  矩阵为:

$$U_a = I \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



**线路 (b):** 线路中在  $x_1$  上施加 Hadamard 门,  $x_2$  不变。对应的  $4 \times 4$  矩阵为:

$$U_b = H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**题目 3** 分析以下两个量子线路各实现什么功能，并给出分析验证过程。

解:

**基本门介绍:**

### 1. CNOT 门:

CNOT (Controlled-NOT) 门是一个双量子比特门，也称为受控非门。它有一个控制位 (control qubit) 和一个目标位 (target qubit):

- 当控制位为  $|0\rangle$  时，目标位保持不变
- 当控制位为  $|1\rangle$  时，对目标位施加 X 门（比特翻转）

**线路图表示:** 在量子线路图中，CNOT 门用以下符号表示:

- 实心圆点 (•): 标记控制位所在的量子比特线
- 带圈加号 ( $\oplus$ ): 标记目标位所在的量子比特线
- 竖线: 连接控制位和目标位

CNOT 门的作用规则:

$$\text{CNOT}|00\rangle = |00\rangle, \quad \text{CNOT}|01\rangle = |01\rangle, \quad \text{CNOT}|10\rangle = |11\rangle, \quad \text{CNOT}|11\rangle = |10\rangle$$

### 2. SWAP 门:

SWAP 门用于交换两个量子比特的状态，在线路图中用  $\times$  符号表示:

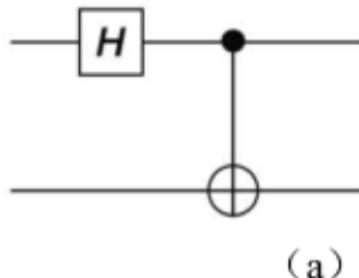
$$\text{SWAP}|ab\rangle = |ba\rangle$$

例如:  $\text{SWAP}|01\rangle = |10\rangle, \quad \text{SWAP}|10\rangle = |01\rangle$

### 3. 测量:

仪表盘符号表示测量操作，对量子比特进行投影测量，得到经典比特结果 (0 或 1)，并使量子态塌缩到相应的本征态。

**线路 (a):** 该线路实现 Bell 态制备功能。



**分析过程:**

这个线路由 Hadamard 门和 CNOT 门组成，可以从不同的输入态制备出不同的 Bell 态。我们分析所有可能的输入：

### 情况 1：输入 $|00\rangle$

1. 第一个量子比特经过 Hadamard 门：

$$(H \otimes I)|00\rangle = |+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门（控制位为第一个量子比特，目标位为第二个）：

$$\text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\Phi^+\rangle$$

### 情况 2：输入 $|01\rangle$

1. 经过 Hadamard 门：

$$(H \otimes I)|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

$$\text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = |\Psi^+\rangle$$

### 情况 3：输入 $|10\rangle$

1. 经过 Hadamard 门：

$$(H \otimes I)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

$$\text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\Phi^-\rangle$$

### 情况 4：输入 $|11\rangle$

1. 经过 Hadamard 门：

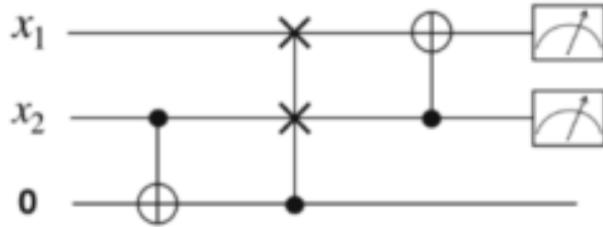
$$(H \otimes I)|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$$

2. 经过 CNOT 门：

$$\text{CNOT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = |\Psi^-\rangle$$

**总结：**线路 (a) 从不同的计算基态输入可以制备出所有四个 Bell 态：

输入态	输出 Bell 态
$ 00\rangle$	$ \Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  11\rangle)$
$ 01\rangle$	$ \Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle +  10\rangle)$
$ 10\rangle$	$ \Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  11\rangle)$
$ 11\rangle$	$ \Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  10\rangle)$



(b)

因此，线路 (a) 是一个通用的 Bell 态制备线路，通过选择不同的输入计算基态，可以制备出任意一个 Bell 态。

**线路 (b):** 这个量子线路实现两个 1 位二进制数的加法（半加器）。

**分析过程：**

设输入态为计算基态

$$|\psi_i\rangle = |x_1 x_2 x_3\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |0\rangle, \quad x_1, x_2 \in \{0, 1\},$$

其中  $x_3$  为辅助位。此处输入仅是经典比特 0/1，不涉及 Bell 态或纠缠态。

**步骤 1:** 对  $x_2 \rightarrow x_3$  施加 CNOT，得到

$$|x_1 x_2 x_3\rangle \longrightarrow |x_1 x_2 x_2\rangle,$$

即  $x_3 = x_2$ 。

**步骤 2:** 以  $x_3$  为控制的 C-SWAP (Fredkin) 门：当  $x_3 = 1$  (即  $x_2 = 1$ ) 时交换  $x_1$  与  $x_2$ ；当  $x_3 = 0$  时不交换。

**步骤 3:** 对  $x_2 \rightarrow x_1$  施加 CNOT，得到输出位

$$x'_1 = x_1 \oplus x_2, \quad x'_2 = x_1 x_2.$$

因此测量输出中：上路  $x'_1$  是“结果/和”，中路  $x'_2$  是“进位”。

**所有可能输入与输出：**

输入 $x_1$	输入 $x_2$	输出 $x'_1$ (结果/和)	输出 $x'_2$ (进位)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

因此该线路等价于经典半加器：结果位为  $x_1 \oplus x_2$ ，进位为  $x_1 x_2$ 。

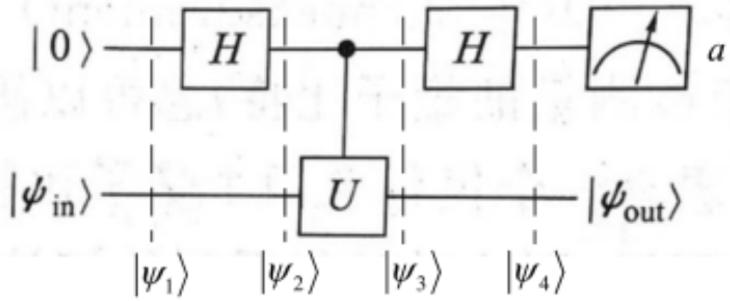
**题目 4** 设有一个具有特征值  $\pm 1$  的单量子比特上的算子  $U$ ， $U$  既是 Hermite 的又是酉的，故可以作此门是一个可观测量，又是一个幺正门。假设我们希望测量量子观测量  $U$ ，即我们希望获得指示两个特征值之一的测量结果，并将测量后的状态带到相应的特征向量。证明下面的线路可实现  $U$  的一个测量。

**解：**

我们逐步分析这个线路在各个阶段的量子态演化：

**记号说明：**

- 初态：第一个量子比特为  $|0\rangle$ ，第二个量子比特为待测态  $|\psi_{\text{in}}\rangle$
- $U$  是 Hermite 算符且幺正，因此可以写为  $U = |u_+\rangle\langle u_+| - |u_-\rangle\langle u_-|$ ，其中  $|u_{\pm}\rangle$  是特征值  $\pm 1$  对应的本征态



### 态演化分析:

阶段  $|\psi_1\rangle$ : 初态

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle$$

阶段  $|\psi_2\rangle$ : 第一个量子比特经过 Hadamard 门

$$|\psi_2\rangle = (H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle)$$

### 使用的张量积运算规则:

第 1 步:  $(H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle$

使用了算符张量积的作用规则:

$$(A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = A|a\rangle \otimes B|b\rangle$$

应用到本题:

$$\begin{aligned} (H \otimes I)(|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle) &= H|0\rangle \otimes I|\psi_{\text{in}}\rangle \\ &= H|0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{因为 } I|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{in}}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{因为 } H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)) \end{aligned}$$

第 2 步:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle)$

使用了张量积的双线性性 (对加法的分配律):

$$(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$$

应用到本题:

$$\begin{aligned} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle &= |0\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle \otimes |\psi_{\text{in}}\rangle \\ &= |0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{简化记号: } |a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |a\rangle|b\rangle) \end{aligned}$$

再结合标量可交换性:

$$c(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (c|a\rangle) \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes (c|b\rangle)$$

因此:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle$$

### 关键运算规则总结:

1. 算符张量积的作用:  $(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = A|\psi\rangle \otimes B|\phi\rangle$
2. 张量积的双线性性 (分配律):  $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$

3. 标量提取:  $c(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (c|a\rangle) \otimes |b\rangle$

**阶段  $|\psi_3\rangle$ :** 经过 Controlled-U 门

Controlled-U 门的作用是: 当控制位 (第一个量子比特) 为  $|1\rangle$  时, 对目标位施加 U 门; 控制位为  $|0\rangle$  时不作用。因此:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi_{\text{in}}\rangle + |1\rangle U|\psi_{\text{in}}\rangle)$$

将  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  按照 U 的本征态展开:  $|\psi_{\text{in}}\rangle = c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle$ , 其中  $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$ 。

**关键步骤: 利用特征值  $\pm 1$**

由于  $|u_+\rangle$  和  $|u_-\rangle$  是 U 的本征态, 满足:

$$U|u_+\rangle = (+1)|u_+\rangle = |u_+\rangle, \quad U|u_-\rangle = (-1)|u_-\rangle = -|u_-\rangle$$

因此:

$$U|\psi_{\text{in}}\rangle = U(c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle) = c_+U|u_+\rangle + c_-U|u_-\rangle = c_+|u_+\rangle - c_-|u_-\rangle$$

注意这里出现了负号! 这正是特征值  $-1$  的作用。

代入得:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle(c_+|u_+\rangle + c_-|u_-\rangle) + |1\rangle(c_+|u_+\rangle - c_-|u_-\rangle)] \\ &= \frac{c_+}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|u_+\rangle + \frac{c_-}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|u_-\rangle \\ &= c_+|+\rangle|u_+\rangle + c_-|-rangle|u_-\rangle \end{aligned}$$

**阶段  $|\psi_4\rangle$ :** 第一个量子比特经过第二个 Hadamard 门

应用  $H \otimes I$ :

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= c_+(H|+\rangle)|u_+\rangle + c_-(H|-rangle)|u_-\rangle \\ &= c_+|0\rangle|u_+\rangle + c_-|1\rangle|u_-\rangle \end{aligned}$$

其中利用了  $H|+\rangle = |0\rangle$ ,  $H|-rangle = |1\rangle$ 。

**测量结果:**

对第一个量子比特 (标记为 a) 进行测量:

- 测得  $a = 0$ , 概率为  $|c_+|^2$ , 第二个量子比特塌缩到  $|u_+\rangle$  (对应本征值  $+1$ )
- 测得  $a = 1$ , 概率为  $|c_-|^2$ , 第二个量子比特塌缩到  $|u_-\rangle$  (对应本征值  $-1$ )

因此, 该线路通过测量辅助量子比特 a 的值 (0 或 1), 间接实现了对 U 的本征值测量 ( $+1$  或  $-1$ ), 并将第二个量子比特投影到相应的本征态上。证毕。

## 1.7 7

**题目 1** 列举两种主流量子计算体系 (如超导芯片、离子阱等), 分别简述其核心工作原理及主要优缺点。

**解:**

### 1. 超导量子计算 (Superconducting Quantum Computing)

**核心工作原理:**

- 利用超导电路中的约瑟夫森结 (Josephson Junction) 构造人造原子 (如超导量子比特)
- 在极低温 ( $\sim 10\text{-}20 \text{ mK}$ ) 下工作, 使电路进入超导态, 消除电阻损耗
- 通过微波脉冲控制量子比特的状态和相互作用
- 常见的超导量子比特类型包括 Transmon、Flux qubit 等

### 主要优点:

- 可利用成熟的半导体制造工艺进行芯片制造，具有良好的可扩展性
- 量子门操作速度快（纳秒量级）
- 可通过微波控制实现高保真度的单比特和双比特门
- 目前已有商业化的超导量子计算机（如 IBM、Google）

### 主要缺点:

- 相干时间较短（微秒到毫秒量级），需要复杂的量子纠错
- 需要极低温环境（稀释制冷机），系统复杂且成本高
- 量子比特之间的串扰（crosstalk）问题需要精细调控
- 对电磁噪声敏感

## 2. 离子阱量子计算 (Ion Trap Quantum Computing)

### 核心工作原理:

- 利用电磁场将单个离子（如  $^{171}\text{Yb}^+$ 、 $^{40}\text{Ca}^+$  等）囚禁在真空中
- 量子信息编码在离子的内部电子能级或运动状态上
- 通过激光脉冲实现量子比特的初始化、操控和读出
- 离子之间通过共同的声学振动模式实现耦合，从而实现双比特门

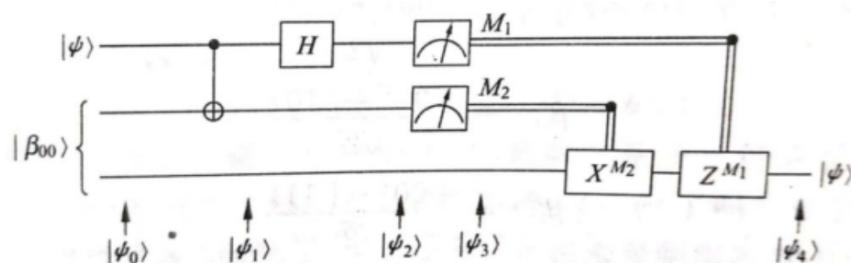
### 主要优点:

- 相干时间长（秒到分钟量级），量子比特质量高
- 量子门保真度高（单比特门  $> 99.9\%$ ，双比特门  $> 99\%$ ）
- 所有离子都是相同的（天然的量子比特一致性）
- 可实现全连接拓扑（任意两个离子都可以相互作用）

### 主要缺点:

- 量子门操作速度慢（微秒到毫秒量级）
- 可扩展性受限：单个离子阱中离子数增加时，控制复杂度急剧上升
- 需要复杂的激光系统和真空系统，集成度较低
- 量子比特数量的扩展面临技术挑战

**题目 2** 下图是量子隐形传态的线路图，假设待传输量子态为  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ，纠缠态为  $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ ，请给出此程中  $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$  结果，并简述量子隐形传态的过程。



解：

态演化分析：

$|\psi_0\rangle$ : 初态

整体初态为待传输态  $|\psi\rangle$  与纠缠态  $|\beta_{00}\rangle$  的张量积：

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) + \beta|1\rangle(|01\rangle + |10\rangle)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|001\rangle + \alpha|010\rangle + \beta|101\rangle + \beta|110\rangle)$$

$|\psi_1\rangle$ : 第一个和第二个量子比特经过 CNOT 门

CNOT 门作用在前两个量子比特上 (第一个为控制位, 第二个为目标位):

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|001\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|111\rangle + \beta|100\rangle)$$

$|\psi_2\rangle$ : 第一个量子比特经过 Hadamard 门

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)|01\rangle + \alpha(|0\rangle + |1\rangle)|11\rangle + \beta(|0\rangle - |1\rangle)|11\rangle + \beta(|0\rangle - |1\rangle)|00\rangle]$$

整理得:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)]$$

更简洁的形式:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |01\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |10\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |11\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)]$$

$|\psi_3\rangle$ : 测量前两个量子比特 ( $M_1, M_2$ )

测量后, 根据测量结果 ( $M_1, M_2$ ), 第三个量子比特塌缩到以下四种状态之一:

- $M_1M_2 = 00$ : 第三个量子比特为  $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1M_2 = 01$ : 第三个量子比特为  $-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1M_2 = 10$ : 第三个量子比特为  $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$
- $M_1M_2 = 11$ : 第三个量子比特为  $-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$

注意: 这里需要根据测量结果确定具体哪种情况, 因此  $|\psi_3\rangle$  是上述四种之一 (概率各为  $1/4$ )。

$|\psi_4\rangle$ : 根据测量结果施加修正操作

根据测量结果 ( $M_1, M_2$ ), 对第三个量子比特施加修正操作:

- 若  $M_2 = 0$ : 施加  $X$  门 (翻转  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ )
- 若  $M_1 = 1$ : 施加  $Z$  门 (相位翻转  $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ )

修正后, 无论测量结果如何, 最终态都恢复为:

$$|\psi_4\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi\rangle$$

### 量子隐形传态过程总结:

1. **准备阶段:** Alice 持有待传输态  $|\psi\rangle$ , Alice 和 Bob 共享纠缠态  $|\beta_{00}\rangle$  (Alice 持有第二个量子比特, Bob 持有第三个)
2. **Bell 基测量:** Alice 对手中的两个量子比特 (待传输态和纠缠对的一半) 进行 Bell 基测量, 得到两个经典比特 ( $M_1, M_2$ )
3. **经典通信:** Alice 将测量结果 ( $M_1, M_2$ ) 通过经典信道发送给 Bob
4. **修正操作:** Bob 根据收到的测量结果, 对自己手中的量子比特施加相应的幺正操作 ( $X$  和  $Z$  门的组合)
5. **完成传输:** Bob 手中的量子比特最终恢复为原始态  $|\psi\rangle$ , 而 Alice 手中的量子态已被测量破坏

### 关键点:

- 量子隐形传态不违反不可克隆定理: 原始态被测量破坏
- 需要经典信道传输测量结果, 因此不能超光速通信
- 利用量子纠缠和经典通信实现量子态的传输