# 量子信息手写笔记（整理版）

## Contents

# 1 基、基变换与酉矩阵

## 1.1 基向量与基变换矩阵

两组基向量分别为 $\{|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$ 与 $\{|f_1\rangle, \ldots, |f_n\rangle\}$。把基向量按列排成矩阵：

$$E = \big(|e_1\rangle \ |e_2\rangle \ \cdots \ |e_n\rangle\big), \quad F = \big(|f_1\rangle \ |f_2\rangle \ \cdots \ |f_n\rangle\big).$$

定义基变换矩阵

$$U_{ij} = \langle e_i | f_j \rangle.$$

新基向量在旧基下展开为

$$|f_j\rangle = \sum_i U_{ij} |e_i\rangle.$$

矩阵形式写作

$$F = E\,U.$$

对任意态 $|\psi\rangle$，在旧基与新基下分别展开：

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle = \sum_j c'_j |f_j\rangle,$$

其中

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{c}\,' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$$

为展开系数组成的列向量。两者满足

$$\vec{c}\,' = U^\dagger \vec{c}, \qquad \vec{c} = U \vec{c}\,'.$$

若 $E, F$ 为正交归一基，则 $U$ 为酉矩阵（$U^\dagger U = I$）。

## 1.2 算符的基变换

矩阵元定义（以旧基 $E$ 为例）：

$$A^{(E)}_{ij} = \langle e_i | A | e_j \rangle.$$

算符在新基下的矩阵表示为

$$A^{(F)} = U^\dagger A^{(E)} U.$$

# 2 本征方程与对角化

$$A|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle, \qquad (A - \lambda I)|\phi\rangle = 0.$$

非平凡解要求

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

从而求得本征值 $\lambda$，再代回求本征向量。

**厄米矩阵要点** 若 $A = A^\dagger$，则本征值全为实数，本征向量可取正交归一基；因此 $A$ 可被酉对角化：$A = U\Lambda U^\dagger$，其中 $U$ 的列向量就是按同一顺序排列的本征向量，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 为对应本征值的对角矩阵。

# 3 单比特态与 Bloch 球

任意纯态可写成

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle,$$

其中 $\theta \in [0,\pi]$ 为极角，$\varphi \in [0,2\pi]$ 为方位角。纯态对应 Bloch 球面上的点。

# 4 密度矩阵

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

基本性质：$\rho^\dagger = \rho$，$\rho \geq 0$，$\mathrm{tr}(\rho) = 1$。

**纯态与混态** 纯态满足 $\rho^2 = \rho$，$\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$；混态满足 $\mathrm{tr}(\rho^2) < 1$。一般混态可写成

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \quad p_k \geq 0,\ \sum_k p_k = 1,$$

并可酉对角化为

$$\rho = U\,\mathrm{diag}(p_1, p_2, \ldots)\,U^\dagger.$$

# 5 Bell 态与最大纠缠

四个 Bell 态：

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \qquad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

它们都是最大纠缠态。

## 5.1 对 $\Phi^+$ 施加单比特门

在第一比特上作用（超密编码常用）：

| 操作 | 结果 |
|---|---|
| $I$ | $\|\Phi^+\rangle$ |
| $X$ | $\|\Psi^+\rangle$ |
| $Z$ | $\|\Phi^-\rangle$ |
| $iY\ (XZ)$ | $\|\Psi^-\rangle$ |

# 6 量子超密编码

预共享 Bell 态 $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$。按时间顺序：

1. $t_0$：Alice 与 Bob 共享 $|\Phi^+\rangle$（Alice 持第 1 比特，Bob 持第 2 比特）。
2. $t_1$：Alice 将 2 比特信息编码为本地操作

$$00 \to I, \quad 01 \to X, \quad 10 \to Z, \quad 11 \to XZ\ (= iY),$$

   并把她的量子比特发送给 Bob。
3. $t_2$：Bob 进行 Bell 测量：先对第 1 比特施 CNOT（第 1 控第 2），再对第 1 比特施 $H$，最后在计算基测量两比特。
4. $t_3$：测量结果 $\{00, 01, 10, 11\}$ 分别对应 $\{|\Phi^+\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^-\rangle\}$，解码得到 Alice 的 2 比特信息。

结论：1 个量子比特 + 1 对纠缠可传 2 比特经典信息。

# 7 量子隐形传态

预共享 Bell 对，待传态为 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$。按时间顺序：

1. $t_0$：Alice 与 Bob 共享 Bell 对（Alice 持第 2 比特，Bob 持第 3 比特），Alice 还有待传态第 1 比特 $|\psi\rangle$。
2. $t_1$：Alice 对第 1、2 比特执行 CNOT（第 1 控第 2），再对第 1 比特施 $H$。
3. $t_2$：Alice 在计算基测量第 1、2 比特，得到 $(M_1, M_2) \in \{0,1\}^2$，并通过经典信道告知 Bob。
4. $t_3$：Bob 对第 3 比特施加纠正
$$X^{M_2} Z^{M_1},$$
得到原态 $|\psi\rangle$。

该过程不违反不可克隆与超光速通信（经典信道不可省）。

# 8 常见量子门（简表）

单比特门：
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad R_\alpha(\theta) = e^{-i\theta\sigma_\alpha/2} \ (\alpha = x, y, z).$$

双比特门：CNOT 定义为
$$|ab\rangle \mapsto |a,\, b \oplus a\rangle,$$
矩阵表示为 $\mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。常用通用门集：$\{H, S, T, \mathrm{CNOT}\}$。