1. 一个粒子的波函数为:

$\psi(x,t)=A\exp\left(-\frac{1}{2}ax^2-i\omega t\right)$

将该波函数归一化

$$
\begin{aligned}
&\int|\psi(x,t)|^2=A^2\int\exp\left(-ax^2\right)dx=A^2I=1\\
&I^2=\int\exp\left(-ax^2\right)dx\int\exp\left(-ay^2\right)dy\\
&\quad=\iint\exp\left(-a\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy\\
&\quad=\iint r\exp\left(-ar^2\right)drd\theta=\frac{\pi}{a}\\
&I=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\\
&A=\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

2. 证明$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,t)|^2dx=0$

将等式左边写为:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,t)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}|\psi(x,t)|^2dx\\
&\frac{d}{dt}|\psi(x,t)|^2=\frac{d}{dt}\left(\psi^*\psi\right)=\psi^*\frac{d\psi}{dt}+\psi\frac{d\psi^*}{dt}
\end{aligned}
$$

由薛定谔方程可知:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\psi(x,t)}{dt}=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{i}{\hbar}V(x)\psi(x,t)\\
&\frac{d\psi^*(x,t)}{dt}=-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi^*(x,t)}{\partial x^2}+\frac{i}{\hbar}V(x)\psi^*(x,t)
\end{aligned}
$$

因此: $\frac{d}{dt}|\psi(x,t)|^2=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right)=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)$

因此$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,t)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}|\psi(x,t)|^2dx=\frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=0$

3. 已知波函数$\psi=\frac{1}{r}e^{ikr}$，计算其概率流密度。

$$J=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi\right)$$
$$=\frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{1}{r}e^{ikr}\nabla\left(\frac{1}{r}e^{-ikr}\right)-\frac{1}{r}e^{-ikr}\nabla\left(\frac{1}{r}e^{ikr}\right)\right)$$
$$=\frac{i\hbar}{2mr}\left(e^{ikr}\frac{-ike^{-ikr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)r-e^{-ikr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)}{r^2}-e^{-ikr}\frac{ike^{ikr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)r-e^{ikr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)}{r^2}\right)$$
$$=\frac{\hbar k}{mr^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)=\frac{\hbar k}{mr^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}\right)=\frac{\hbar k}{mr^3}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=\frac{\hbar k}{mr^3}\vec{r}$$

4. 氢原子处于基态，$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}$，求

（1）r 的平均值，(2)势能 $-\frac{e^2}{r}$ 的平均值，（3）动能的平均值

解：（1）$\bar{r}=\int r\left|\psi(r,\theta,\varphi)\right|^2dV=\frac{1}{\pi a_0^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}re^{-2r/a_0}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{4}{a_0^3}\int_0^{\infty}r^3e^{-2r/a_0}dr$

利用公式 $\int_0^{\infty}x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$。因此 $\bar{r}=\frac{4}{a_0^3}\frac{3!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^4}=\frac{3}{2}a_0$

（2）$\overline{U}=\overline{\left(-\frac{e^2}{r}\right)}=\int\left(-\frac{e^2}{r}\right)\left|\psi(r,\theta,\varphi)\right|^2dV=-\frac{e^2}{\pi a_0^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{r}e^{-2r/a_0}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=-\frac{4e^2}{a_0^3}\int_0^{\infty}re^{-2r/a_0}dr=-\frac{e^2}{a_0}$

（3）动能算符 $T=\frac{p^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$

球坐标系下，拉普拉斯算子为 $\nabla^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

$$\overline{T}=\int\psi(r,\theta,\varphi)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\left(\psi(r,\theta,\varphi)\right)\right)dV=-\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi a_0^3}e^{-r/a_0}\nabla^2\left(e^{-r/a_0}\right)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$
$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi a_0^3}e^{-r/a_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\left(e^{-r/a_0}\right)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$
$$=-\frac{4\hbar^2}{2ma_0^3}\int_0^{\infty}e^{-r/a_0}\left(r^2\frac{d^2}{dr^2}+2r\frac{d}{dr}\right)\left(e^{-r/a_0}\right)dr$$
$$=-\frac{4\hbar^2}{2ma_0^3}\int_0^{\infty}\left(\frac{r^2}{a_0^2}-\frac{2r}{a_0}\right)e^{-2r/a_0}dr=-\frac{4\hbar^2}{2ma_0^3}\int_0^{\infty}\left(\frac{r^2}{a_0^2}e^{-2r/a_0}-\frac{2r}{a_0}e^{-2r/a_0}\right)dr=\frac{4\hbar^2}{ma_0^4}\int_0^{\infty}re^{-2r/a_0}dr-\frac{2\hbar^2}{ma_0^5}\int_0^{\infty}r^2e^{-2r/a_0}dr$$
$$=\frac{4\hbar^2}{ma_0^4}\frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}-\frac{2\hbar^2}{ma_0^5}\frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^3}=\frac{\hbar^2}{ma_0^2}-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}=\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$$

5. 写出角动量算符的表达式，并且计算 L_x 和 L_y 的对易关系

$$L=r\times p=\begin{vmatrix}i&j&k\\x&y&z\\p_x&p_y&p_z\end{vmatrix}=\left(yp_z-zp_y\right)i+\left(zp_x-xp_z\right)j+\left(xp_y-yp_x\right)k$$

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

因此: $$L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\left[L_x, L_y\right]\psi = \left(L_x L_y - L_y L_x\right)\psi = L_x L_y \psi - L_y L_x \psi$$

$$= -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - z\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) + \left(\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - x\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right)\right)$$

$$= -\hbar^2\left(\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x} + zy\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - xy\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \left(z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - zx\frac{\partial\psi}{\partial z\partial y}\right)\right) + \hbar^2\left(\left(zy\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} - z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\right) - \left(xy\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - x\frac{\partial\psi}{\partial y} - xz\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}\right)\right)$$

$$= \hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = i\hbar\left(-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\psi = i\hbar L_z\psi$$

因此有: $\left[L_x, L_y\right] = i\hbar L_z$

6. 对于一个动量为 p, 势能为 $V(x)$ 的基本微观粒子, 证明牛顿力学的基本方程 $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$ 仍然成立。

证明:

$$\langle p\rangle = \int \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx$$

因此有:

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -i\hbar\int\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi^*\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dx = -i\hbar\int\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi^*\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right]dx$$

对右边第二个积分做分步积分, 利用边界条件 $\psi(\pm\infty) = 0$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -i\hbar\int\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi^*\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right]dx = -i\hbar\int\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]dx$$

利用薛定谔方程, 及其共轭形式

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar}V(x)\psi \qquad \frac{d\psi^*}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar}V(x)\psi^*$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\int\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx + \int\left(\psi^* V(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} + V(x)\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx$$

注意到下面积分

$$\int\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx = \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)d\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx$$

由于 $\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt}$, 可知 x 的均值存在, 因此 $|\psi|^2$ 拖尾的收敛速度 $|\psi|^2 \propto x^{-2-\delta}$, 因此有

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

由此可得:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle p\rangle}{dt}&=\int\left(\psi^{*}V(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}+V(x)\psi\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}\right)dx\\&=\int\psi^{*}V(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\int V(x)\psi d\left(\psi^{*}\right)\\&=\int\psi^{*}V(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}dx-\int\psi^{*}d\left(V(x)\psi\right)\\&=\int\psi^{*}\left(V(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{d}{dx}\left(V(x)\psi\right)\right)dx\\&=\int\psi^{*}\left(-\frac{d}{dx}V(x)\right)\psi dx=\left\langle-\frac{dV(x)}{dx}\right\rangle\end{aligned}$$

7. 证明时间和频率的测不准关系：$\Delta t\Delta\omega\geq\frac{1}{2}$

一个信号的时域和频域表达式可以通过傅里叶变换来表示：

$$F(\omega)=\int f(t)e^{i\omega t}dt$$

此时$\left|f(t)\right|^2$可以表示瞬时的能量，信号总的能量可以表示为：$\|f\|^2=\int\left|f(t)\right|^2dt$

则$\frac{\left|f(t)\right|^2}{\|f\|^2}$可以看成概率密度函数，为了简单起见，我们假设$\|f\|^2=1$由此可以得到时间的平均值和时间的方差，我们假设均值为 0，时间的方差可以表示为：

$$\sigma_t^2=\int t^2\left|f(t)\right|^2dt$$

同理，利用傅里叶变换关系，能量也可以在频域中表示，由此可以得到频率的方差为：

$$\sigma_\omega^2=\int\omega^2\frac{\left|F(\omega)\right|^2}{2\pi}d\omega$$

由此可得：

$$\sigma_t^2\sigma_\omega^2=\frac{1}{2\pi}\int t^2\left|f(t)\right|^2dt\int\omega^2\left|F(\omega)\right|^2d\omega\text{、}$$

由傅里叶变换的微分性质和帕斯瓦尔定理：

$$f^{'}(t)=i\omega F(\omega)\qquad\int\left|f^{'}(t)\right|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int\omega^2\left|F(\omega)\right|^2d\omega$$

因此有：

$$\sigma_t^2\sigma_\omega^2=\int t^2\left|f(t)\right|^2dt\int\left|f^{'}(t)\right|^2dt$$

利用柯西-许瓦兹不等式：

$$\left|\int f(x)g^{*}(x)dx\right|^2\leq\left(\int\left|f(x)\right|^2dt\right)\left(\int\left|g(x)\right|^2dx\right)$$

因此有：

$$\sigma_t^2\sigma_\omega^2=\int t^2\left|f(t)\right|^2dt\int\left|f^{'}(t)\right|^2dt\geq\left|\int tf^{*}(t)\frac{d}{dt}f(t)dt\right|^2$$

注意到：

$$\int tf(t)\frac{d}{dt}f^*(t)dt = t|f(t)|^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f^*(t)d(tf(t)) = -\int f^*(t)d(tf(t)) = -\int f^*(t)(f(t)+tf'(t))dt = -1-\int f^*(t)tf'(t)dt$$

因此有：

$$\int f^*(t)tf'(t)dt + \int tf(t)\frac{d}{dt}f^*(t)dt = -1 \Rightarrow 2\operatorname{Re}\left(\int f^*(t)tf'(t)dt\right) = -1$$

由于 $\int f^*(t)tf'(t)dt$ 是一个复数，利用 $|\operatorname{Re}(z)| \le |z| \Rightarrow |\operatorname{Re}(z)|^2 \le |z|^2$

因此有：$\frac{1}{4} = \left(\operatorname{Re}\left(\int f^*(t)tf'(t)dt\right)\right)^2 \le \left|\int f^*(t)tf'(t)dt\right|^2$

因此有：$\sigma_t^2\sigma_\omega^2 = \int t^2|f(t)|^2dt\int|f'(t)|^2dt \ge \left|\int tf^*(t)\frac{d}{dt}f(t)dt\right|^2 \ge \frac{1}{4}$

因此有：$\sigma_t\sigma_\omega \ge \frac{1}{2}$

8. 粒子处于状态：

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0x - \frac{x^2}{4\xi^2}\right)$$

求粒子的动量平均值，并且计算测不准关系 $\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta p^2} = ?$

解：先将 $\psi(x)$ 归一化，由归一化条件

$$1 = \int_0^\infty|\psi(x)|^2dx = \int_0^\infty\frac{1}{2\pi\xi^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\xi^2}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}\xi\pi}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{x^2}{2\xi^2}\right)d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\xi\pi}\sqrt{\pi}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

因此，波函数为 $\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0x - \frac{\pi x^2}{2}\right)$

动量的平均值：

$$\begin{aligned}\overline{p} &= \int\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx = -i\hbar\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_0x - \frac{\pi x^2}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0x - \frac{\pi x^2}{2}\right)dx \\ &= -i\hbar\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_0x - \frac{\pi x^2}{2}\right)\left(\frac{i}{\hbar}p_0 - \pi x\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0x - \frac{\pi x^2}{2}\right)dx \\ &= -i\hbar\int\left(\frac{i}{\hbar}p_0 - \pi x\right)\exp\left(-\pi x^2\right)dx \\ &= p_0\end{aligned}$$

$$\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta p^2} = ?$$

$$\overline{x} = \int\psi^*x\psi dx = \int x\exp\left(-\pi x^2\right)dx = 0$$

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \int\psi^*x^2\psi dx = \int x^2\exp\left(-\pi x^2\right)dx = -\frac{1}{2\pi}\int xd\left(\exp\left(-\pi x^2\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi}x\exp\left(-\pi x^2\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\pi}\int\exp\left(-\pi x^2\right)dx = \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

$$\overline{p^2} = -\hbar^2\int\psi^*\frac{d}{dx^2}^2\psi dx = -\hbar^2\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_0x-\frac{\pi x^2}{2}\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0x-\frac{\pi x^2}{2}\right)\right)dx$$

$$=\hbar^2\left(\pi+\frac{p_0^2}{\hbar}\right)+i2\pi\hbar p_0\int x\exp\left(-\pi x^2\right)dx-\pi^2\hbar^2\int x^2\exp\left(-\pi x^2\right)dx$$

$$=\hbar^2\left(\pi+\frac{p_0^2}{\hbar}\right)+0-\pi^2\hbar^2\frac{1}{2\pi}=\frac{\pi}{2}\hbar^2+p_0^2$$

$$\overline{\Delta x^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2=\frac{1}{2\pi}$$

$$\overline{\Delta p^2}=\overline{p^2}-\bar{p}^2=\frac{\pi}{2}\hbar^2+p_0^2-p_0^2=\frac{\pi}{2}\hbar^2$$

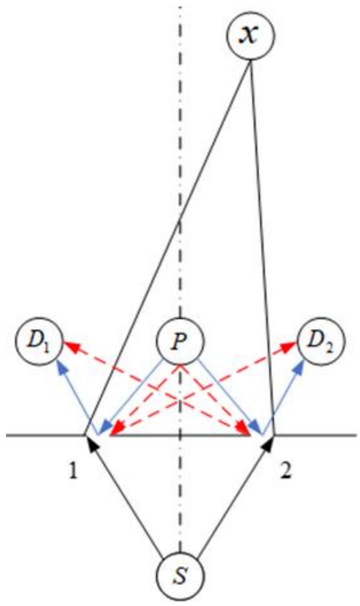
因此

$$\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta p^2}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\hbar^2=\frac{\hbar^2}{4}$$

9. 运用概率叠加原理解释电子的双缝干涉现象:

（1） 电子双缝干涉的解释

（2） 为什么加入光源探测电子是从那一条缝通过时，干涉条纹会消失



解答：

（1） 假定电子从初态 S 出发经过缝 1 和缝 2，最后被记录在屏幕上，末态为 x ，电子通过缝 1 到达末态的概率幅度为：

$$\langle x|S\rangle_1=\langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle=\alpha_1=|\alpha_1|e^{j\varphi_1}$$

电子通过缝 1 到达末态的概率为

$$I_1(x)=|\langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle|^2=|\alpha_1|^2$$

同理只打开缝 2，电子通过缝 2 到达末态的概率幅度和概率为:

$$\langle x|S\rangle_2=\langle x|2\rangle\langle 2|S\rangle=\alpha_2=|\alpha_2|e^{j\varphi_2}$$
$$I_2(x)=|\langle x|2\rangle\langle 2|S\rangle|^2=|\alpha_2|^2$$

如果同时打开缝 1 和缝 2，电子到达末态的概率幅度为：

$$\langle x|S\rangle = \langle x|S\rangle_1 + \langle x|S\rangle_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

电子到达末态的概率为：

$$\begin{aligned} I(x) &= |\langle x|S\rangle|^2 = |\langle x|S\rangle_1 + \langle x|S\rangle_2|^2 = |\alpha_1 + \alpha_2|^2 \\ &= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_1|e^{i\varphi_1}|\alpha_2|e^{-i\varphi_2} + |\alpha_1|e^{-i\varphi_1}|\alpha_2|e^{i\varphi_2} \\ &= I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x)I_2(x)}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

上式中最后一项是干涉项，φ_1 和 φ_2 在屏上的不同位置 x 处是不同的，因此 $I(x)$ 会有极大极小的变化，因此会产生明暗相间的干涉条纹。

（2） 我们再看看如果加入光源后，利用光源观测电子是从哪个狭缝中通过的，此时有两个探测器 D_1 和 D_2。此时有四个概率幅度，分别是光源发出的光子被狭缝 1，狭缝 2 的电子散射后被探测器 D_1 和 D_2 接收：

$$\begin{aligned} \langle D_1|1\rangle\langle 1|P\rangle &= \langle D_2|2\rangle\langle 2|P\rangle = \beta_1 \\ \langle D_2|1\rangle\langle 1|P\rangle &= \langle D_1|2\rangle\langle 2|P\rangle = \beta_2 \end{aligned}$$

我们可以看出，电子在 x 被记录，同时光子被 D_1 探测，应该包括两个事件，第一个事件是电子从缝 1 到达 x，同时光子被缝 1 处的电子散射，被 D_1 探测，这个过程的概率幅度为：$\langle xD_1|SP\rangle_1 = \alpha_1\beta_1$，第二个事件是电子从缝 2 到 x 同时光子被缝 2 的电子散射，被 D_1 探测，这个概率幅度为：$\langle xD_1|SP\rangle_2 = \alpha_2\beta_2$。

因此电子在 x 被记录，同时光子被 D_1 探测的概率幅度为：

$$\langle xD_1|SP\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

同理电子在 x 被记录，同时光子被 D_2 探测的概率幅度为：

$$\langle xD_2|SP\rangle = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$$

因此电子在 x 被记录，不管被哪个探测器被记录的概率为：

$$\begin{aligned} |\langle x|S\rangle|^2 &= |\langle xD_1|SP\rangle|^2 + |\langle xD_2|SP\rangle|^2 \\ &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^* + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^* \\ &= |\alpha_1|^2|\beta_1|^2 + |\alpha_2|^2|\beta_2|^2 + \alpha_1\beta_1\alpha_2^*\beta_2^* + \alpha_2\beta_2\alpha_1^*\beta_1^* \\ &\quad + |\alpha_1|^2|\beta_2|^2 + |\alpha_2|^2|\beta_1|^2 + \alpha_1\beta_2\alpha_2^*\beta_1^* + \alpha_1^*\beta_2^*\alpha_2\beta_1 \end{aligned}$$

当我们用光能分辨电子是从哪个狭缝射出时，也就是要求：光源发出的光经过狭缝 1 处的电子散射时只能够被探测器 D_1 接收，不能被探测器 D_2 接收，光源发射的光子被缝 2 处的电子散射时只能够被 D_2 接收，不能够被 D_1 接收，也就是 $\beta_2 \to 0$。因此电子在 x 被记录的概率为：

$$\left|\langle x|S\rangle\right|^2=|\beta_1|^2\left(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2\right)$$

此时干涉项消失，不再会有干涉条纹出现

10. 假设体系的势场与时间无关，波函数可以分解为各个本征态的叠加

$$\psi(x,t)=\sum_n c_n u_n(x)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$$

证明体系的哈密尔顿算符和能量算符满足如下关系：

$$\langle H\rangle=\langle E\rangle=\sum_n |c_n|^2 E_n$$

证明：

$$\begin{aligned}
\langle H\rangle&=\int\psi^*(x,t)H\psi(x,t)dx\\
&=\int\sum_m c_m^* u_m^*(x)\exp\left(i\frac{E_m}{\hbar}t\right)H\sum_n c_n u_n(x)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)dx\\
&=\int\sum_m c_m^* u_m^*(x)\exp\left(i\frac{E_m}{\hbar}t\right)\sum_n c_n E_n u_n(x)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)dx\\
&=\sum_n\sum_m E_n c_n c_m^* u_m^*(x)\exp\left(i\frac{E_m-E_n}{\hbar}t\right)\int u_m^*(x)u_n(x)dx\\
&=\sum_n\sum_m E_n c_n c_m^* u_m^*(x)\exp\left(i\frac{E_m-E_n}{\hbar}t\right)\delta_{mn}\\
&=\sum_n |c_n|^2 E_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle&=\int\psi^*(x,t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t)dx\\
&=\int\sum_m c_m^* u_m^*(x)\exp\left(i\frac{E_m}{\hbar}t\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\sum_n c_n u_n(x)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)dx\\
&=\int\sum_m c_m^* u_m^*(x)\exp\left(i\frac{E_m}{\hbar}t\right)E_n\sum_n c_n u_n(x)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)dx\\
&=\sum_n |c_n|^2 E_n
\end{aligned}$$

11. 在一维无限深势阱中，势阱内 $0\le x\le a$ ，$V(x)=0$ ，其余位置势能函数为无穷大，如果已知粒子的波函数在初始时刻 $\psi(x,0)=Ax(a-x)$，求

1） 归一化常数 A

2） 任意时刻 t 的波函数 $\psi(x,\ t)$ 。

解答：

$$\int_0^a\left(Ax(a-x)\right)^2dx=A^2\frac{a^5}{30}=1\Rightarrow A=\sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

由势阱内的一维定态薛定谔方程：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

令 $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ，方程的通解为：$\psi(x)=A\sin(kx)+B\cos(kx)$

由边界条件$\psi(0)=0$，可知$B=0$，$\psi(a)=0$，可知，$k=\frac{n\pi}{a}$，由于波函数是归一化的，

由此可得：$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\quad n=1,2,3....\quad E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

$$\psi(x,t)=\sum_n c_n\psi_n(x)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$$

$$\begin{aligned}c_n&=\int\psi_n^*(x)\psi(x,0)dx\\&=\int_0^a\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sqrt{\frac{30}{a^5}}x(a-x)dx\\&=\frac{2}{a^3}\sqrt{15}\left[a\int_0^a x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx-\int_0^a x^2\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\right]\\&=\frac{4}{(n\pi)^3}\sqrt{15}\left[1-\cos(n\pi)\right]\\&=\begin{cases}0 & n=2,4,6,8....\\ \frac{4}{(n\pi)^3}\sqrt{15} & n=1,3,5,7\end{cases}\end{aligned}$$

因此：$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{30}{a}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\sum_{n=1,3,5,7...}\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\exp\left(-i\frac{n^2\pi^2\hbar}{2ma^2}t\right)$

12. 1）写出位置算符x的本征值和本征函数

2）写出动量算符$-i\hbar\frac{d}{dx}$的本征值和本征函数

解答：

由于：$x\delta(x-x_0)=x_0\delta(x-x_0)$，位置算符$x$的本征值是$x_0$处的坐标，其本征函数是一个冲击函数：$\delta(x-x_0)$

设动量算符的本征函数是$f(x)$，根据本征函数的定义为:

$$-i\hbar\frac{df(x)}{dx}=p_xf(x)$$

因此有：$\frac{df(x)}{f(x)}=i\frac{p_x}{\hbar}dx\Rightarrow f(x)=C\exp\left(i\frac{p_x}{\hbar}x\right)$

本征函数具有归一化的特点：$1=|C|^2\int\exp\left(i\frac{p_x-p_x^{'}}{\hbar}x\right)dx=|C|^2\hbar\int\exp\left(i\frac{p_x-p_x^{'}}{\hbar}x\right)d\left(\frac{x}{\hbar}\right)$

做变量代换：$x_1=\frac{x}{\hbar}$，因此有

$$1=|C|^2\hbar\int\exp\left(i\left(p_x-p_x^{'}\right)x_1\right)dx_1=2\pi|C|^2\hbar$$

因此，$C=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

动量算符的本征值是粒子的动量，本征函数是一个复指数函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(i\frac{p_x}{\hbar}x\right)$

13. 一维无限深势阱中坐标算符和动量算符在能量表象中的矩阵元

解答：

一维无限深势阱中，本征函数为$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$

坐标算符的对角元： $x_{nn}=\int_0^a\frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx=\frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx=\frac{a}{2}$

当$m\neq n$时

$$
\begin{aligned}
x_{mn}&=\int_0^a\frac{2}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\\
&=\frac{1}{a}\int_0^a x\left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)-\cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]dx\\
&=\frac{1}{a}\left[\begin{array}{l}\left.\left(\frac{a^2}{(m-n)^2\pi^2}\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)+\frac{ax}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)\right)\right|_0^a\\ \left.-\left(\frac{a^2}{(m+n)^2\pi^2}\cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)+\frac{ax}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right)\right|_0^a\end{array}\right]\\
&=\frac{a}{\pi^2}\left[(-1)^{m-n}-1\right]\left[\frac{1}{(m-n)^2}-\frac{1}{(m+n)^2}\right]\\
&=\frac{a}{\pi^2}\frac{4mn}{\left(m^2-n^2\right)^2}\left[(-1)^{m-n}-1\right]
\end{aligned}
$$

动量算符的对角元为:

$$
\begin{aligned}
p_{nn}&=\int u_n^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)u_n(x)dx\\
&=-i\hbar\int\frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left(\frac{d}{dx}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\\
&=-i\hbar\frac{2n\pi}{a^2}\int_0^a\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\\
&=-i\hbar\frac{n\pi}{a^2}\int_0^a\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)dx\\
&=i\hbar\frac{n\pi}{a^2}\frac{a}{2n\pi}\int_0^a d\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\\
&=i\hbar\frac{1}{2a}\cos\left.\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right|_0^a=0
\end{aligned}
$$

动量算符的非对角元为:

$$
\begin{aligned}
p_{mn}&=\int u_m^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)u_n(x)dx\\
&=-i\hbar\int\frac{2}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\left(\frac{d}{dx}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\\
&=-i\hbar\frac{2n\pi}{a^2}\int_0^a\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\\
&=-i\hbar\frac{n\pi}{a^2}\left[\int_0^a\sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)+\sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)\right]dx\\
&=i\hbar\frac{n\pi}{a^2}\left.\left[\frac{a}{(m+n)\pi}\cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)+\frac{a}{(m-n)\pi}\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)\right]\right|_0^a\\
&=i\hbar\frac{n}{a}\left[\frac{1}{(m+n)}+\frac{1}{(m-n)}\right]\left[(-1)^{m-n}-1\right]\\
&=\frac{i2mn\hbar}{a\left(m^2-n^2\right)}\left[(-1)^{m-n}-1\right]
\end{aligned}
$$

14. 在动量表象中，角动量算符 L_x 的矩阵元。
解答：

动量算符的本征函数为：$\psi_p(r)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\hbar}\right)^3}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$ $\quad \vec{p}\cdot\vec{r}=p_x x+p_y y+p_z z$

角动量算符 L_x 的表达式为 $L_x=-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)$

因此其矩阵元可以表示为如下的积分：

$$
\begin{aligned}
\left(L_x\right)_{p_1 p}&=\int\psi_{p_1}^{*}L_x\psi_p dV\\
&=\int\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\hbar}\right)^3}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\left(-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\hbar}\right)^3}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)dV\\
&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\left(-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)-z\frac{\partial}{\partial y}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\right)\right)dV\\
&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\left(-i\hbar\left(y\left(\frac{i}{\hbar}\right)p_z\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)-z\left(\frac{i}{\hbar}\right)p_y\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\right)\right)dV\\
&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\left(yp_z-zp_y\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)dV
\end{aligned}
$$

注意到：$\frac{\partial}{\partial p_y}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)=\frac{i}{\hbar}y\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\Rightarrow y\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$

同理：$z\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial p_z}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$

因此有：

$$
\begin{aligned}
\left(L_x\right)_{p_1 p}&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\left(yp_z-zp_y\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)dV\\
&=\frac{(-i\hbar)}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_y}p_z-\frac{\partial}{\partial p_z}p_y\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)dV\\
&=(-i\hbar)\left(p_z\frac{\partial}{\partial p_y}-p_y\frac{\partial}{\partial p_z}\right)\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)dV\right)
\end{aligned}
$$

由正交归一性可以知道：$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)dV=\delta\left(\vec{p}-\overrightarrow{p_1}\right)$

因此：$\left(L_x\right)_{p_1 p}=(-i\hbar)\left(p_z\frac{\partial}{\partial p_y}-p_y\frac{\partial}{\partial p_z}\right)\delta\left(\vec{p}-\overrightarrow{p_1}\right)$

15. 已知在 Q 表象中，态矢为 ψ，一个力学量 F 在 Q 表象中矩阵为 $\mathbf{F_Q}$，求该力学量 F 在自身表象中，处于各个本征态的概率。
解答：

力学量 F 在 Q 表象下的平均值可以表示为：$\overline{F}=\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{H}}\mathbf{F_Q}\boldsymbol{\psi}$，那么该力学量 F 在其自身表象下，平均值可以表示为 $\overline{F}=\boldsymbol{\psi}_F{}^{\mathbf{H}}\mathbf{F}_F\boldsymbol{\psi}_F$，$\boldsymbol{\psi}_F$ 是在 F 表象下的态矢，由于力学量是处于自身的表象中，因此矩阵 $\mathbf{F}_F$ 是一个对角阵，对角线上的元素是力学量 F 的本征值。

因此，我们可以将 $\mathbf{F_Q}$ 对角化，$\mathbf{F_Q}$ 可以表示为：$\mathbf{F_Q}=\mathbf{U\Lambda U^H}$，矩阵 $\mathbf{U}$ 是由 $\mathbf{F_Q}$ 的本征值对应的本征向量张成的矩阵，该矩阵的列向量都是正交归一的。$\mathbf{\Lambda}$ 是一个对角阵，对角线的元素就是 $\mathbf{F_Q}$ 的本征值，也就是力学量 F 在其自身表象中的本征值，因此有：

$$\overline{F}=\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{H}}\mathbf{F_Q}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{H}}\mathbf{U\Lambda U^H}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{H}}\mathbf{UF}_F\mathbf{U^H}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}_F{}^{\mathbf{H}}\mathbf{F}_F\boldsymbol{\psi}_F$$

此时有：$\boldsymbol{\psi}_F=\mathbf{U^H}\boldsymbol{\psi}$，因此，$\mathbf{U^H}\boldsymbol{\psi}$ 是一个列向量，此时列向量元素的模平方就是该力学量在自身表象中，处于各个本征态的概率。

16. 已知角动量算符的矩阵为：

$$L_x=\frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

求角动量算符在自身表象下的矩阵表示：。

算符的本征值方程为：

$$\frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\psi=\lambda\psi$$

$$\lambda=\frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\lambda_1$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda_1&1&0\\1&-\lambda_1&1\\0&1&-\lambda_1\end{vmatrix}=(-\lambda_1)^3+2\lambda_1=0$$

$$\lambda_{1,1}=0,\ \lambda_{1,2}=\sqrt{2},\ \lambda_{1,3}=-\sqrt{2}$$

$$\lambda=0\text{时}\quad \psi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \lambda=\hbar\text{时}\quad \psi_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},\ \lambda=-\hbar\text{时}\quad \psi_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$$

因此：角动量算符在自身表象下的矩阵表示为：

$$\frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/2&\sqrt{2}/2&1/2\\-1/2&\sqrt{2}/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/2&-1/2\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\-1/\sqrt{2}&1/2&-1/2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\\sqrt{2}/2&1&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-1&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/2&-1/2\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\-1/\sqrt{2}&1/2&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\hbar&0\\0&0&-\hbar\end{pmatrix}$$

也可以直接根据本征值写出矩阵表达式 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\hbar&0\\0&0&-\hbar\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-\hbar&0&0\\0&\hbar&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\hbar&0&0\\0&0&0\\0&0&-\hbar\end{pmatrix}$

17. 已知态矢 $|\psi\rangle=\sum_n\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$，求投影算符 $|k\rangle\langle k|$ 的平均值，其中 α 是复数。

$$\langle k|\psi\rangle=\sum_n\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle k|n\rangle=\sum_n\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\delta_{kn}=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}$$

$$\langle\psi|k\rangle\langle k|\psi\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\frac{\left(\alpha^*\right)^k}{\sqrt{k!}}\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}=\exp\left(-|\alpha|^2\right)\frac{|\alpha|^{2k}}{k!}$$

18. 将下列公式用狄拉克符号表示

1） $F\left(x,i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)=\Phi(x,t)$

2） $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=H\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)$

3） $H\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)u_n(x)=E_nu_n(x)$

4） $\int u_m^*(x)u_n(x)dx=\delta_{mn}$

5） $\psi(x,t)=\sum_n a_n(t)u_n(x)$

解答

$$F\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)=\Phi(x,t)\to\langle x|F|\psi\rangle=\langle x|\psi\rangle \quad 或 \quad F|\psi\rangle=|\Phi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=H\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x|\psi\rangle=\langle x|H|\psi\rangle \quad 或 \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=H|\psi\rangle$$

$$H\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)u_n(x)=E_nu_n(x)\to H|n\rangle=E_n|n\rangle$$

$$\int u_n^*(x)u_m(x)dx=\delta_{nm}\to\langle n|m\rangle=\delta_{nm}$$

$$\psi(x,t)=\sum_n a_n(t)u_n(x)\to|\psi\rangle=\sum_n a_n|n\rangle=\sum_n|n\rangle\langle n|\psi\rangle \quad \langle x|\psi\rangle=\sum_n\langle x|n\rangle\langle n|\psi\rangle$$

19．已知一个算符 F 在 A 表象中的矩阵表示为 $\mathbf{F}^a$，在 B 表象中的矩阵表示为 $\mathbf{F}^b$，求 A 表象和 B 表象的转换矩阵 $\mathbf{S}$。

解答：

表象变换不改变算符的特征值，因此将 $\mathbf{F}^a$ 和 $\mathbf{F}^b$ 对角化后，对应的是同一个对角阵：因此有：$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{A}^H\mathbf{F}^a\mathbf{A} \quad \mathbf{\Lambda}=\mathbf{B}^H\mathbf{F}^b\mathbf{B}$，其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是将 $\mathbf{F}^a$ 和 $\mathbf{F}^b$ 对角化的酉矩阵，当 $\mathbf{F}^a$ 和 $\mathbf{F}^b$ 为已知时，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可以由 $\mathbf{F}^a$ 和 $\mathbf{F}^b$ 的特征向量决定。算符在 A 表象和 B 表象中的矩阵表示有如下关系：$\mathbf{F}^b=\mathbf{S}^H\mathbf{F}^a\mathbf{S}$。

从上面的描述可知：$\mathbf{B}^H\mathbf{F}^b\mathbf{B}=\mathbf{A}^H\mathbf{F}^a\mathbf{A}$

因此有：$\mathbf{F}^b=\mathbf{B}\mathbf{A}^H\mathbf{F}^a\mathbf{A}\mathbf{B}^H$

故而：$\mathbf{S}=\mathbf{A}\mathbf{B}^H$