量子力学导论
基于量子信息知识的深入学习

Contents

1 前言与学习目标

本讲义以已掌握《量子信息知识点》的读者为理想起点，同时提供零基础预备内容，便于新读者快速上手。我们将用**连续变量体系**的语言把量子信息中的抽象公理落地为波函数、微分方程与可观测量的计算，目标是让你能够**独立完成《量子力学作业》中的全部题目**。

核心学习目标：

- 从离散态过渡到连续态，掌握位置表象与动量表象的精确定义。
- 熟练使用薛定谔方程与连续性方程，理解概率守恒与概率流。
- 会处理球坐标与氢原子基态的期望值计算。
- 掌握角动量算符、对易关系与表象变换。
- 能系统推导不确定关系、Ehrenfest 定理与干涉现象。
- 能在能量表象、位置表象、动量表象之间自由切换，并计算矩阵元。

符号约定：

- $|\psi\rangle$ 表示态矢（向量），$\langle\phi|$ 为对偶向量。
- 几何向量用 $\vec{r}$、$\vec{p}$ 等箭头记号。
- A 表示算符，$\langle A\rangle$ 表示期望值；位置与动量算符仍写作 $\hat{x}, \hat{p}$。
- $\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$ 为位置表象波函数；$\phi(p,t) = \langle p|\psi(t)\rangle$ 为动量表象波函数。
- 归一化：$\int |\psi|^2\, dx = 1$；连续谱正交：$\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$。
- $\hbar$ 为约化普朗克常数；m 为粒子质量；$V(x)$ 为势能函数。
- ∇ 为梯度算符，∇^2 为拉普拉斯算符（空间二阶导数的总和）。
- 位置变量用 x（一维）或 $\vec{r}$（三维），动量变量用 p 或 $\vec{p}$。

波函数不是“概率”，而是**概率幅**。只有取模平方 $|\psi(x,t)|^2$ 才是“在位置 x 附近被测到的概率密度”。同理，$|\phi(p,t)|^2$ 是测到动量 p 的概率密度。算符是“做动作的机器”，期望值就是测量很多次的平均结果。若写成 $\psi(\vec{r},t)$，$\vec{r} = (x,y,z)$；若写成 $\psi(r,\theta,\varphi)$，r 是到原点的距离，θ 为极角，φ 为方位角。除非特别说明，ψ 默认满足可归一化（平方可积）的物理态条件。

2 零基础预备：狄拉克 δ 函数

狄拉克 δ 函数不是普通函数，而是**分布**。它的核心作用是“从积分中抽取某点的值”。最重要的性质是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0).$$

因此有归一化

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,dx = 1,$$

并且 $\delta(x-x')$ 表示“只有当 $x = x'$ 时才有贡献”，这就是写成“差”的原因。

缩放与换元： 若 $a \neq 0$，则

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

若 $g(x)$ 在 x_i 处有简单零点（$g(x_i) = 0$，$g'(x_i) \neq 0$），则

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}.$$

单位与三维形式： $\delta(x)$ 的量纲是 1/length。三维形式为

$$\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'),$$

并满足 $\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\, d^3r = 1$。

例题

δ 的抽样示例： 计算 $\int f(x)\delta(2x-1)\,dx$。
解： 零点为 $x_0=1/2$，且 $g'(x)=2$，所以

$$\delta(2x-1)=\frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad \int f(x)\delta(2x-1)\,dx=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right).$$

3 零基础预备：波函数与概率幅

量子态在位置表象下用**波函数**表示:

$$\psi(x,t)=\langle x|\psi(t)\rangle.$$

它是**概率幅**（可能为复数），概率密度由

$$\rho(x,t)=|\psi(x,t)|^2$$

给出，因此粒子出现在区间 $[a,b]$ 的概率为

$$P_{[a,b]}=\int_a^b|\psi(x,t)|^2\,dx.$$

归一化条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2\,dx=1.$$

在三维情形，$\psi(\vec{r},t)$ 满足

$$\int|\psi(\vec{r},t)|^2\,d^3r=1.$$

例题

平面波（动量本征态）： 一维自由粒子可用

$$\psi(x,t)=A\,e^{i(kx-\omega t)}$$

表示。它的概率密度为 $|\psi|^2=|A|^2$，在空间中均匀分布。由于全空间均匀，严格意义下不可归一化，只是理想化的动量本征态。

例题

高斯波包（可归一化态）： 设

$$\psi(x,0)=\left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{1/4}e^{-x^2/(2a^2)}.$$

则

$$|\psi(x,0)|^2=\frac{1}{\sqrt{\pi}a}e^{-x^2/a^2},$$

满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = 1$。这里概率密度集中在 $x=0$ 附近，a 表示波包宽度。**计算说明：**

$$|\psi|^2 = \psi^*\psi \quad \text{其中} \quad \psi^* = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/(2a^2)} \quad \text{(本例指数为实数，不含}i\text{，故共轭不变)},$$

$$|\psi|^2 = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}a} e^{-x^2/a^2}.$$

例题

简易"盒子态"：在区间 $[-L, L]$ 上取常数波函数

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2L}}, & |x| \le L, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 $|\psi(x)|^2 = \frac{1}{2L}$，在 $[-L, L]$ 内均匀分布，且归一化成立。

4 零基础预备：位置与动量算符

量子力学中"可观测量"由算符表示。最基本的是**位置算符** $\hat{x}$ 和 **动量算符** $\hat{p}$。它们的定义可以通过在位置表象中的作用来理解：

- $\psi(x)$ 是**位置表象波函数**，表示粒子在位置 x 的概率幅度。
- $\hbar$ 是**约化普朗克常数**（$\hbar = h/2\pi$），是量子力学的基本常数；其中 h 是**普朗克常数**，数值约为 $h \approx 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$，$\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$。
- $\partial/\partial x$ 表示对 x 的偏导数，i 为虚数单位（$i^2 = -1$）。

$$\hat{x}\psi(x) = x\,\psi(x), \qquad \hat{p}\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x).$$

也就是说，$\hat{x}$ 只是把函数乘以 x，而 $\hat{p}$ 通过求导来作用在波函数上。在三维情形，$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$。

例题

连续基下的"矩阵元"表示：在位置基 $\{|x\rangle\}$ 下，**注意**：$\delta(x-x')$ 是狄拉克 δ 函数，表示"当 $x = x'$ 时取值无穷大、其余为 0，但积分为 1"的理想化函数。写成 $x - x'$ 的形式是为了强调"只有两者相等时才有贡献"，并保证平移不变性。

$$\langle x|\hat{x}|x'\rangle = x\,\delta(x-x'), \qquad \langle x|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x').$$

这表示 $\hat{x}$ 在位置表象中是"对角"的，而 $\hat{p}$ 通过导数作用。在动量基 $\{|p\rangle\}$ 下则相反：

$$\langle p|\hat{p}|p'\rangle = p\,\delta(p-p'), \qquad \langle p|\hat{x}|p'\rangle = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial p}\delta(p-p').$$

例题

离散化直观（示意）：若只取三个位置点 x_1, x_2, x_3 作基，位置算符在该基下近似为对角矩阵

$$\hat{x} \approx \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

这说明"在位置基下，$\hat{x}$ 只给出对应位置的数值"。动量算符在离散基下可用有限差分近似，其矩阵不再对角（体现"含导数"）。

本征态与本征值：若

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle,$$

则称 $|\psi\rangle$ 为算符 $\hat{A}$ 的本征态，a 为本征值。例如

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

表示 $|x\rangle$ 是"位置确定为 x"的理想态。

期望值：态 $|\psi\rangle$ 中位置与动量的平均值为

$$\langle x\rangle = \int \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx, \qquad \langle p\rangle = \int \psi^*(x) \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx.$$

基本对易关系：

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

这表示位置与动量不能同时被无限精确地确定，是不确定关系的根源。

5 零基础预备：微积分与向量微分

本讲义会频繁出现导数、积分与向量微分算符。下面给出最少但够用的定义与直觉，方便没有基础的读者直接进入量子力学计算。

5.1 函数、导数与偏导

一元函数 $f(x)$ 的导数表示变化率：

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

二阶导数 d^2f/dx^2 描述"弯曲程度"。

多元函数 $f(x, y, z)$ 的偏导定义为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

其余变量保持不变。二阶偏导 $\partial^2 f/\partial x^2$ 在量子力学里经常出现。

例题

一阶导数数值：设 $f(x) = x^2 - 3x + 1$，求 $f'(x)$ 及 $f'(2)$。
解：$f'(x) = 2x - 3$，因此 $f'(2) = 1$。

例题

偏导数数值： 设 $f(x,y)=x^2y+y^2$，求 $\partial f/\partial x$，并计算 $\partial f/\partial x|_{(1,2)}$。
解： $\partial f/\partial x=2xy$，代入 $(1,2)$ 得 4。

5.2 乘积法则与复共轭求导

若 $u(t), v(t)$ 可导，则

$$\frac{d}{dt}[u(t)v(t)]=\frac{du}{dt}v+u\frac{dv}{dt}.$$

对复函数 $\psi(t)$，共轭与求导可交换：

$$\frac{d}{dt}\psi^*=\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^*.$$

因此

$$\frac{d}{dt}|\psi|^2=\frac{d}{dt}(\psi^*\psi)=\psi^*\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\psi^*}{dt}\psi.$$

5.3 向量、点积与叉积

三维向量写作 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，模长 $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$。点积定义为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$$

用于衡量方向相似程度。叉积

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$$

给出垂直于两向量平面的向量，大小为 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，角动量定义正是基于叉积。方向由右手定则给出：右手四指从 $\vec{a}$ 指向 $\vec{b}$ 弯曲，拇指方向就是 $\vec{a}\times\vec{b}$。公式可理解为对基向量的规则 $\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z$ 等做线性展开，也可用行列式记忆

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x&\vec{e}_y&\vec{e}_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

更详细的计算过程如下。令

$$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z,\quad \vec{b}=b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y+b_z\vec{e}_z.$$

利用双线性与基向量叉乘规则（$\vec{e}_x\times\vec{e}_x=0$，$\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z$，$\vec{e}_x\times\vec{e}_z=-\vec{e}_y$ 等），

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z)\times(b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y+b_z\vec{e}_z)\\&=a_x\vec{e}_x\times(b_y\vec{e}_y+b_z\vec{e}_z)+a_y\vec{e}_y\times(b_x\vec{e}_x+b_z\vec{e}_z)+a_z\vec{e}_z\times(b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y)\\&=a_x(b_y\vec{e}_z-b_z\vec{e}_y)+a_y(-b_x\vec{e}_z+b_z\vec{e}_x)+a_z(b_x\vec{e}_y-b_y\vec{e}_x)\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{e}_x+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{e}_y+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{e}_z,\end{aligned}$$

从而得到前面的分量公式。

5.4 标量场与向量场

场（field）是“空间中每个点都对应一个量”的函数。

- 若每个点对应一个数，称为**标量场**。
- 若每个点对应一个向量，称为**向量场**。

典型标量场如温度分布 $T(\vec{r})$、势能 $V(\vec{r})$、概率密度 $\rho(\vec{r})$。典型向量场如速度场 $\vec{v}(\vec{r})$、电场 $\vec{E}(\vec{r})$、概率流 $\vec{j}(\vec{r})$。

在量子力学中，波函数 $\psi(\vec{r},t)$ 是复**标量场**，其模平方给出标量场 $\rho(\vec{r},t)=|\psi(\vec{r},t)|^2$，而概率流 $\vec{j}(\vec{r},t)$ 是向量场。

举一个具体数值例子：令二维位置 $\vec{r}=(x,y)$。标量场 $T(x,y)=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处取值为 $T(1,2)=1^2+2^2=5$。向量场 $\vec{v}(x,y)=(y,-x)$ 在同一点取值为 $\vec{v}(1,2)=(2,-1)$，是一个带方向的量。

5.5 梯度、散度、旋度与拉普拉斯算符

定义向量微分算符（nabla）

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

对标量场 $f(\vec{r})$，梯度为

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

方向指向函数增长最快的方向。

对向量场 $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$，散度为

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

衡量“源/汇”强度；旋度为其中 $\partial_x A_z$ 表示对 x 的偏导：$\partial_x A_z=\frac{\partial A_z}{\partial x}$，其余分量同理。

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{pmatrix}\partial_y A_z-\partial_z A_y\\ \partial_z A_x-\partial_x A_z\\ \partial_x A_y-\partial_y A_x\end{pmatrix},$$

衡量“旋转”强度。拉普拉斯算符定义为

$$\nabla^2 f=\nabla\cdot(\nabla f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

一维情形下 $\nabla^2 f=d^2 f/dx^2$。

例题

梯度数值： 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求 ∇f，并计算在 $(1,-1,2)$ 处的梯度。
解： $\nabla f=(2x,2y,2z)$，代入得 $\nabla f(1,-1,2)=(2,-2,4)$。

例题

散度数值： 设 $\vec{A}(x,y,z)=(xy,\ y^2,\ z)$，求 $\nabla\cdot\vec{A}$，并计算在 $(1,2,3)$ 处的散度。
解： $\nabla\cdot\vec{A}=y+2y+1=3y+1$，代入 $(1,2,3)$ 得 7。

例题

拉普拉斯数值： 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求 $\nabla^2 f$。
解： $\nabla^2 f = 2+2+2=6$。

5.6 积分与归一化

定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示在区间上的“累积量”。
在概率论中，概率密度 $\rho(x)$ 的含义是“单位长度上的概率”，因此必须非负，并满足归一化

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1.$$

在量子力学里，概率密度由波函数给出：一维情形

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2,$$

三维情形写作

$$\int |\psi(\vec{r},t)|^2\,d^3r = 1, \quad d^3r = dx\,dy\,dz.$$

后续在球坐标中会用到 $d^3r = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ 的体积元。

例题

归一化与概率： 设

$$\rho(x) = C(1-x^2), \quad -1\le x\le 1,$$

其余处为 0。求常数 C，并计算 $x\in[0,1/2]$ 的概率。
解： 归一化给出 $1=\int_{-1}^{1} C(1-x^2)\,dx = C\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = C\cdot\frac{4}{3}$，故 $C=3/4$。所求概率为 $\int_0^{1/2}\frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{11}{32}$。

5.7 复数与相位（最少够用）

复数写作 $z=a+ib$，其中 $i^2=-1$，共轭为 $z^*=a-ib$，模长 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$。欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

说明复指数只改变相位，不改变模长（$|e^{i\theta}|=1$）。波函数是复函数，概率密度由 $|\psi|^2=\psi^*\psi$ 给出。

6 快速预备知识回顾（从量子信息到量子力学）

你已掌握：Dirac 符号、完备关系、Hermite 算符、期望与方差、幺正变换等。下面只强调连续谱的关键补充。

6.1 连续谱与狄拉克 δ

- 位置算符 $\hat{x}$ 的本征态：$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$（$x$ 为本征值/标签）。
- 完备性：$\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\,dx = \mathbb{I}$。

- 正交性：$\langle x'|x\rangle = \delta(x-x')$（$\delta$ 的性质见前置小节）。

连续谱的本征态是**广义函数**意义下的态，$\delta(x-x')$ 必须在积分中理解。完备性也可写作

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle\, dx.$$

又如，换元型 δ 给出 $\int f(x)\delta(2x-1)\,dx$ 的结果：零点为 $x_0=\frac{1}{2}$，且 $g'(x)=2$。因此

$$\delta(2x-1) = \frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right), \qquad \int f(x)\delta(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right).$$

同理，$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x')\delta(x-x')\,dx'$。由 δ 的抽取性质，积分结果等于被积函数在 $x'=x$ 处的取值，因此 $\psi(x)$ 被“原样取出”。这就是完备性在坐标表象中的具体体现。

6.2 期望值与方差

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle, \qquad (\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$

期望值就是“做很多次实验后的平均读数”。方差衡量分布的“宽度”，ΔA 越大说明测量结果越分散。在坐标表象中，若算符 A 在位置表象中的作用为 $A(x,-i\hbar\partial_x)$，则

$$\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, A(x,-i\hbar\partial_x)\, \psi(x)\, dx$$

同理可得 $\langle A^2\rangle$。这一步常用于“把 Dirac 记号翻成积分”。

6.3 表象变换（离散形式回顾）

若两组完备正交基 $\{|a_i\rangle\}$ 与 $\{|b_j\rangle\}$，则变换矩阵 $S_{ij} = \langle a_i|b_j\rangle$：

$$A_B = S^\dagger A_A S, \qquad |\psi\rangle_B = S^\dagger|\psi\rangle_A$$

同一个物理态在不同“坐标系”(基) 下有不同的分量表达。矩阵 S 就是把“旧坐标”旋转到“新坐标”的变换。算符在不同表象下的矩阵也会相应改变，但**物理可观测量不变**。

7 数学工具箱（必须熟练）

7.1 高斯积分与常用积分

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0)$
- $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a>0)$
- $\displaystyle\int_0^{\infty} r^2 e^{-\alpha r}dr = \frac{2}{\alpha^3}, \quad \int_0^{\infty} r^3 e^{-\alpha r}dr = \frac{6}{\alpha^4}$

例题

高斯积分与归一化的完整推导：设

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx \quad (a>0).$$

这里是**定义** I，不是推导等式。则

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ay^2}\,dy\right)=\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

改用极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，且

$$dx\,dy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|dr\,d\theta=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}dr\,d\theta=r\,dr\,d\theta,$$

其中

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}$$

称为**雅可比矩阵**，它把 (r,θ) 的微小变化映射到 (x,y) 的微小变化。其行列式

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}$$

称为**雅可比行列式**，给出面积元的缩放因子。因此 (r,θ) 的小矩形 $dr\,d\theta$ 在 (x,y) 平面中变为面积 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|dr\,d\theta$ 的平行四边形。因此得

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-ar^2}\,r\,dr\,d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\infty}re^{-ar^2}\,dr\right).$$

令 $u=ar^2$，则 $du=2ar\,dr$，因此

$$\int_0^{\infty}re^{-ar^2}\,dr=\frac{1}{2a}\int_0^{\infty}e^{-u}\,du=\frac{1}{2a}.$$

所以

$$I^2=2\pi\cdot\frac{1}{2a}=\frac{\pi}{a},\qquad\Rightarrow\qquad I=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

于是对于

$$\psi(x,t)=A\,e^{-\frac{1}{2}ax^2-i\omega t},$$

归一化条件给出

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx=A^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,dx=A^2\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

从而

$$A=\left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4}.$$

例题

指数积分的一般推导：设

$$I_n(a)=\int_0^{\infty}x^ne^{-ax}\,dx,\quad a>0.$$

对 x 做变量替换 $u=ax$，则 $x=u/a$，$dx=du/a$：

$$I_n(a)=\int_0^\infty\left(\frac{u}{a}\right)^n e^{-u}\frac{du}{a}=\frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du.$$

记

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du.$$

对整数 n，做分部积分。取 $u_1=u^n$，$dv_1=e^{-u}du$，则 $du_1=nu^{n-1}du$，且

$$v_1=\int e^{-u}du=-e^{-u}.$$

因为 $\frac{d}{du}(e^{-u})=-e^{-u}$，所以原函数是 $-e^{-u}$（常数略去）。因此

$$\Gamma(n+1)=\left[-u^n e^{-u}\right]_0^\infty+n\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du.$$

边界项为 0（$u^n e^{-u}\to 0$），于是得到递推

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n).$$

又有

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-u}du=1,$$

所以

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 1=n!.$$

因此

$$I_n(a)=\frac{n!}{a^{n+1}}.$$

例题

常用径向积分： 由上式取 $n=2,3$ 并记 $a=\alpha$，得

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\alpha r}\,dr=\frac{2}{\alpha^3},\qquad \int_0^\infty r^3 e^{-\alpha r}\,dr=\frac{6}{\alpha^4}.$$

若要直接分部积分，可令 $u=r^n$，$dv=e^{-\alpha r}dr$，反复应用即可得到同样结果。

7.2 分部积分与边界条件

量子力学中常用：

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

典型边界条件：$\psi(\pm\infty)=0$ 或在势阱壁处 $\psi=0$。分部积分常用于把导数从一个函数“移”到另一个函数上。边界项为零的前提是波函数在无穷远或势垒处足够快地衰减/消失，这正是“可归一化”的物理要求。因此类似

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}F(x)\,dx=F(\infty)-F(-\infty)=0$$

的结果来自边界条件（F 在无穷远消失或取相同值），常用于证明概率守恒。

7.3 傅里叶变换

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-ipx/\hbar}\psi(x)\,dx$$
$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ipx/\hbar}\phi(p)\,dp$$

Parseval 定理：$\int |\psi|^2 dx = \int |\phi|^2 dp$。位置表象与动量表象互为傅里叶变换。空间里“越窄”的波包，对应动量空间“越宽”的分布，这正是测不准关系的数学根源。指数中的 $px/\hbar$ 必须无量纲；因此 $\hbar$ 保证单位一致。系数 $1/\sqrt{2\pi\hbar}$ 的选择保证傅里叶变换是幺正的，从而概率守恒（Parseval 定理）。例如，对高斯波包 $\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/(2a^2)}$，则 $\phi(p)$ 仍是高斯，宽度与 a 成反比，并满足 $\Delta x\,\Delta p = \hbar/2$。

7.4 球坐标

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$
$$d^3r = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$r \geq 0$，$\theta \in [0,\pi]$（从 $+z$ 轴往下量），$\varphi \in [0,2\pi)$（在 x-y 平面内的方位角）。体积元中的 $r^2\sin\theta$ 是坐标变换的雅可比因子。

7.5 球坐标下拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

若函数只依赖 r（球对称），角度导数项为零，于是 $\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)$，这在氢原子基态计算中非常常见。

8 连续表象与波函数

8.1 位置表象

定义： $\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$

归一化：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2\,dx = 1$$

$|\psi(x,t)|^2 dx$ 是粒子在 x 到 $x+dx$ 内被测到的概率。如果把波函数看成“热度图”，归一化就是“总概率为 1”。

例题

位置表象概率： 当 $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$（$0 < x < a$）时，粒子落在区间 $(0, a/2)$ 的概率为

$$P = \int_0^{a/2} \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}.$$

这也体现了基态在势阱两侧对称分布。

8.2 动量表象

动量本征态满足 $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$，并取连续谱归一化

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p')$$

由平移对称性可得位置表象中的动量本征函数：

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

$|p\rangle$ 是“动量确定”的态，在位置表象中是平面波。平面波在全空间均匀分布，因此不能被归一化，它是理想化的“纯动量”极限。动量表象波函数 $\phi(p,t) = \langle p|\psi(t)\rangle$ 满足归一化 $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(p,t)|^2\, dp = 1$，与位置表象的归一化完全等价（由 Parseval 定理保证）。

例题

动量表象概率： 若 $\phi(p)$ 在区间 $(p_0 - \Delta, p_0 + \Delta)$ 内近似为常数，则测得动量位于该区间的概率约为

$$\int_{p_0-\Delta}^{p_0+\Delta} |\phi(p)|^2 dp \approx 2\Delta\, |\phi(p_0)|^2.$$

这体现了“概率密度 $\times$ 区间长度”的含义。

8.3 算符在位置/动量表象中的表示

- 位置表象：$\hat{x} \to x$，$\hat{p} \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
- 动量表象：$\hat{p} \to p$，$\hat{x} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$

动量是“平移的生成元”。当波函数整体向右平移一点点时，变化率正比于空间导数，因此 $\hat{p}$ 在位置表象中变成微分算符。这也是 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 的根源。用表象表示计算对易子：在位置表象中 $[\hat{x}, \hat{p}]\psi = x(-i\hbar\partial_x\psi) - (-i\hbar\partial_x)(x\psi) = i\hbar\psi$，因此 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$。

9 薛定谔方程与概率守恒

9.1 含时薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

位置表象：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$$

薛定谔方程告诉我们“量子态如何随时间演化”。哈密顿量 H 就是**总能量算符**（动能 + 势能）。对时间无关势能，能量本征态只会积累相位。$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ 是动能算符，来源于经典关系 $p^2/2m$ 与量子替换 $\hat{p} = -i\hbar\nabla$。$V(\vec{r}, t)$ 表示外加势能，若 V 与时间无关，可采用分离变量求定态。

9.2 连续性方程与概率流

定义概率密度 $\rho = |\psi|^2$，概率流密度**定义**为

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

并满足连续性方程（概率守恒）

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0$$

这是“概率守恒”的数学表达：概率不会凭空产生或消失，只能在空间中流动。$\vec{j}$ 就是“概率流密度”。$\vec{j}$ 的单位为“概率/时间/面积”，$\nabla\cdot\vec{j}$ 描述流出某点附近体积的“净流量”。一维情形下，方程变为 $\partial_t\rho+\partial_x j=0$。一维平面波 $\psi=Ae^{ikx-i\omega t}$ 的概率流为 $j=\frac{\hbar k}{m}|A|^2$，为常数。这表示粒子以恒定平均速度向右传播。

9.3 例：球面波概率流

若 $\psi=\frac{1}{r}e^{ikr}$，则

$$\vec{j}=\frac{\hbar k}{mr^2}\hat{r}=\frac{\hbar k}{mr^3}\vec{r}$$

径向流随 r^{-2} 衰减，与球面积 $4\pi r^2$ 相乘给出恒定总流量。计算要点：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，因此

$$\nabla r=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)=\hat{r}.$$

对 $\psi=\frac{1}{r}e^{ikr}$ 有

$$\nabla\psi=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)e^{ikr}+\frac{1}{r}\nabla\left(e^{ikr}\right)=-\frac{\hat{r}}{r^2}e^{ikr}+\frac{1}{r}(ike^{ikr})\hat{r}=\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{ikr}\hat{r}.$$

同理

$$\nabla\psi^*=\left(-\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{-ikr}\hat{r}.$$

代入

$$\vec{j}=\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)$$

即可得到 $\vec{j}=\frac{\hbar k}{mr^2}\hat{r}$。

10 定态理论与能量展开

10.1 分离变量

若 V 与时间无关:

$$\psi(\vec{r},t)=u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$$

代入薛定谔方程得定态方程:

$$Hu=Eu$$

定态的“时间演化”只是一个整体相位。因此 $|\psi|^2$ 与所有与时间无关算符的期望值都不随时间变化。

10.2 能量本征态展开

本征态完备：$\sum_n|n\rangle\langle n|=\mathbb{I}$，

$$|\psi(t)\rangle=\sum_n c_n e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle$$

期望值:

$$\langle H\rangle=\sum_n|c_n|^2E_n$$

这是作业中“能量期望等于系数模平方加权”的核心来源。系数由投影得到 $c_n = \langle n|\psi(0)\rangle$。若能量谱连续，则求和换成积分 $\int c(E)e^{-iEt/\hbar}|E\rangle\, dE$。若初态 $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$，则测量能量得到 E_1 或 E_2 的概率各为 $1/2$。随时间演化：$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-iE_1 t/\hbar}|1\rangle + e^{-iE_2 t/\hbar}|2\rangle)$，概率分布保持不变，但相位差会影响可观测量的干涉项。

11　一维无限深势阱

11.1　定态解

势能：$V(x) = 0$（$0 \le x \le a$），其他位置 $V = \infty$。定态方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} = Eu$$

边界条件 $u(0) = u(a) = 0$，得

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

无限深势阱把粒子“关”在 $[0, a]$。边界处波函数必须为零，像一根固定两端的琴弦，因此能量离散、波形为正弦。$n = 1, 2, 3, \ldots$ 为正整数（$n = 0$ 会使波函数为零）。归一化系数 $\sqrt{2/a}$ 来自 $\int_0^a |u_n|^2 dx = 1$。能级间隔随 $1/a^2$ 变化，阱越窄能级越稀疏（更“高能”）。

11.2　任意初态展开

给定 $\psi(x, 0)$，展开为

$$\psi(x, 0) = \sum_n c_n u_n(x), \quad c_n = \int_0^a u_n(x)\psi(x, 0)\, dx$$

时间演化：

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

提示：若初态关于 $x = \frac{a}{2}$ 对称或反对称，可快速判断奇偶 n 的系数为零。若初态满足 $\psi(a/2+x) = \psi(a/2-x)$（对称），则只有**奇数** n 的系数非零；若满足 $\psi(a/2+x) = -\psi(a/2-x)$（反对称），则只有**偶数** n 非零。这能极大简化系数计算。

12　球坐标与氢原子基态

12.1　基态波函数

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

球对称的基态只依赖 r，没有角度信息。真正的“半径分布”不是 $|\psi|^2$，而是 $P(r) = 4\pi r^2|\psi(r)|^2$，因为球壳体积随 r^2 增大。例如，氢原子基态的最可几半径由最大化 $P(r) = 4\pi r^2|\psi|^2 \propto r^2 e^{-2r/a_0}$ 得出，令 $\frac{d}{dr}(r^2 e^{-2r/a_0}) = 0$ 可得 $r = a_0$。

12.2 期望值计算要点

1. $\langle r\rangle = \int r|\psi|^2 dV$，使用体积元 $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$。
2. $\langle V\rangle = \left\langle -\frac{e^2}{r} \right\rangle$，利用 r 积分公式。
3. $\langle T\rangle = \left\langle -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \right\rangle$，球对称时 $\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)$。

最终结果:

$$\langle r\rangle = \frac{3a_0}{2}, \quad \langle V\rangle = -\frac{e^2}{a_0}, \quad \langle T\rangle = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$$

总能量 $E = -\frac{e^2}{2a_0} = -13.6\,\mathrm{eV}$。

13 角动量算符与对易关系

13.1 定义与分量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

位置表象中:

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

角动量描述“绕原点旋转”的量。它的分量不能同时精确测量，但 L^2 可以与任意一个分量同时测量。在中心势中，能量本征态同时是 L^2, L_z 的本征态。

13.2 对易关系

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

循环置换得到其余两条。结论：不同分量不能同时测准，但 L^2 与任一分量对易。对易子 $[A,B] = AB - BA$。若对易子为零，表示两可观测量可同时精确测量（共享本征态）。若 $|l,m\rangle$ 是角动量本征态，则 $L^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$，$L_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$。因此测量 L_z 的可能结果是离散的整数（或半整数）倍 $\hbar$。

14 Ehrenfest 定理（量子-经典对应）

14.1 一般形式

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

Ehrenfest 定理把量子平均值的演化和经典方程联系起来。当波包足够窄、势能变化缓慢时，$\langle x\rangle$ 和 $\langle p\rangle$ 几乎满足经典牛顿方程。

14.2 对动量的应用

令 $A = \hat{p}$，$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$，可得

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

这是量子版本的牛顿第二定律。自由粒子 $V = 0$ 时，$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = 0$，因此 $\langle p\rangle$ 为常数，$\langle x\rangle$ 随时间线性变化。

15 不确定关系

15.1 一般不确定关系（Robertson）

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|$$

测不准不是“测量仪器不够好”，而是波函数的**内在涨落**。当两个算符不对易时，不可能同时让它们的分布都很窄。

15.2 位置-动量

$$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

高斯波包满足等号。若 $\psi(x) \propto e^{-x^2/(4\sigma^2)}$，则 $\Delta x = \sigma$，$\Delta p = \hbar/(2\sigma)$，因此 $\Delta x\,\Delta p = \hbar/2$，达到最小不确定。

例题

高斯波包数值: 取 $\sigma = 0.5$, 则 $\Delta x = 0.5$, $\Delta p = \hbar/(2\sigma) = \hbar$, 因此 $\Delta x\,\Delta p = 0.5\,\hbar = \hbar/2$。

15.3 时间-频率

对归一化信号 $f(t)$ 及其傅里叶变换 $F(\omega)$:

$$\Delta t\,\Delta\omega \geq \frac{1}{2}$$

方法: 用 Parseval 定理与 Cauchy-Schwarz 不等式, 配合分部积分。ω 是角频率 (单位 rad/s), Δt 与 $\Delta\omega$ 描述信号在时间与频率上的“扩展宽度”。这与量子中的 $\Delta x\,\Delta p$ 属于同一数学结构。

16 双缝干涉与相干性

16.1 概率幅叠加

若通过缝 1、缝 2 到达屏幕点 x 的概率幅为 α_1, α_2，则

$$P(x) = |\alpha_1 + \alpha_2|^2 = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

干涉条纹来自相位差。概率**不是**直接相加，而是**概率幅**相加后再取模平方。这就是为什么会出现“亮条纹更亮、暗条纹变暗”的干涉现象。若两缝强度相同，$P_1 = P_2$，则当 $\Delta\varphi = 2\pi m$ 时出现亮纹（最大值），当 $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$ 时出现暗纹（最小值）。

16.2 Which-way 信息的影响

当路径信息与探测器纠缠，概率幅变为 $\alpha_i\beta_j$，若能完全区分路径（如 $\beta_2 \to 0$），干涉项消失。一旦“知道走哪条缝”，两条路径就不再相干，干涉项被探测器“记录”掉。可见性与可区分性此消彼长。

17 表象理论与矩阵元

17.1 表象变换通式

$$S_{ij} = \langle a_i | b_j \rangle, \quad A_B = S^\dagger A_A S, \quad |\psi\rangle_B = S^\dagger |\psi\rangle_A$$

若 F 在 Q 表象为 F_Q，对角化 $F_Q = U\Lambda U^\dagger$，则在 F 表象下 $|\psi\rangle_F = U^\dagger|\psi\rangle_Q$，其分量模平方即测得本征值的概率。把算符“对角化”就是找到它的本征表象。在该表象中，测量结果直接对应向量分量，概率就是分量模平方（Born 规则）。

17.2 一维势阱中的矩阵元（坐标与动量）

能量本征态 $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$。

- $x_{nn} = \frac{a}{2}$。
- $x_{mn} = \frac{4mna}{\pi^2(m^2-n^2)^2}\left[(-1)^{m-n} - 1\right]$（$m-n$ 奇数时非零）。
- $p_{nn} = 0$，$p_{mn} = \frac{2imn\hbar}{a(m^2-n^2)}\left[(-1)^{m-n} - 1\right]$。

由 x_{mn} 的表达式可见：当 $m-n$ 为偶数时，$x_{mn} = 0$。这体现了势阱中“奇偶选择定则”，可快速判断哪些跃迁矩阵元为零。矩阵元 $A_{mn} = \langle m|A|n\rangle$ 反映“从 $|n\rangle$ 到 $|m\rangle$ 的跃迁强度”。对角元 A_{nn} 是在能量本征态中的期望值。

17.3 动量表象中的角动量算符

利用 $\vec{r} \leftrightarrow i\hbar\nabla_p$：

$$(L_x)_{p'p} = -i\hbar \left(p_z \frac{\partial}{\partial p_y} - p_y \frac{\partial}{\partial p_z} \right) \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

在动量表象中，位置算符变成对动量的微分，因此角动量依然表现为“绕动量空间的旋转生成元”。

18 线性代数速记：对角化与本征表象

18.1 一般步骤

给定矩阵 A：
1. 解特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 得特征值。
2. 对每个 λ 求特征向量并正交归一，组成酉矩阵 U。
3. $A_{\text{diag}} = U^\dagger A U$。

对角化就是“找到让算符看起来最简单的坐标系”。在本征基下，算符只剩下对角元，测量结果一目了然。$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值为 ± 1，本征向量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1)^T$。这对应把 A 变成对角矩阵 $\text{diag}(1, -1)$。

18.2 本征表象中的概率

若 $|\psi\rangle$ 在原表象为列向量 ψ，则

$$\psi_{\text{eig}} = U^\dagger \psi$$

其分量模平方即测得对应本征值的概率。U 是由本征向量组成的酉矩阵，满足 $U^\dagger U = I$。向量分量的模平方之和为 1，体现归一化。

19 相干态与投影算符

相干态定义:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

投影期望:

$$\langle\alpha|k\rangle\langle k|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!}$$

即 Poisson 分布，平均光子数为 $|\alpha|^2$。相干态是“最像经典光场”的量子态，既是简谐振子湮灭算符的本征态，也是最小不确定态。当 $|\alpha|^2 = 4$ 时，光子数的平均值为 4，方差也为 4（Poisson 分布的性质）。

20 Dirac 符号翻译清单

- $F(x, i\hbar\partial_x)\psi(x) = \Phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad F|\psi\rangle = |\Phi\rangle$
- $i\hbar\partial_t\psi = H(x, -i\hbar\partial_x)\psi \quad \Leftrightarrow i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$
- $H|n\rangle = E_n|n\rangle$
- $\int u_m^*(x)u_n(x)dx = \delta_{mn} \quad \Leftrightarrow \quad \langle m|n\rangle = \delta_{mn}$
- $\psi(x,t) = \sum_n a_n(t)u_n(x) \quad \Leftrightarrow \quad |\psi\rangle = \sum_n a_n|n\rangle$

把 Dirac 记号翻译成微分方程或积分表达，只是“同一个物理内容的两种语言”。熟练互译能大幅降低做题成本。$F(x, i\hbar\partial_x)$ 表示把算符写成“坐标 + 导数”的形式；$u_n(x) = \langle x|n\rangle$ 是能量本征态在位置表象的波函数。离散谱满足 δ_{mn}，连续谱对应 $\delta(x - x')$。

21 作业题对应索引（建议路线）

作业题	对应章节
1	数学工具箱：高斯积分
2–3	薛定谔方程与概率守恒
4	球坐标与氢原子基态
5	角动量算符与对易关系
6	Ehrenfest 定理
7–8	不确定关系
9	双缝干涉与相干性
10	定态理论与能量展开
11	一维无限深势阱
12–13	表象理论与矩阵元
14–15	线性代数速记：对角化与表象变换
16	相干态与投影算符
17–18	Dirac 符号翻译 + 表象变换

22 总结

本讲义把量子信息中的抽象公理具体化为连续变量的计算框架，涵盖波函数、薛定谔方程、角动量、定态理论、表象变换与测不准等内容。按照“作业题对应索引”逐章学习与练习，即可独立完成《量子力学作业》中所有题目。