量子信息导论

主讲：李军

Email：junli01@mail.xidian.edu.cn
办公室：新科技楼1718室

2.2.1 假设一（状态空间）

1. 状态空间
2. 施特恩-格拉赫实验
3. 量子态
4. 量子比特

2.2.2 假设二（演化）

2.2.3 假设三（量子测量）

2.2.4 假设四（复合系统）

1. 状态空间（教材2.2.1）

● 希尔伯特空间

➢ 任一孤立量子物理系统的状态空间是Hilbert空间，即定义了内积的复向量空间。

➢ 复向量空间L是一个向量集合$L=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$，满足：

■ (1) 任取$a_i,a_j\in L$，都有$a_i+a_j\in L$

■ (2) 任取复数$c\in C$，$a_i\in L$，都有$c\cdot a_i\in L$

➢ 复向量空间 L 上的内积定义为一种映射：对于任意的一对向量$a_i,a_j\in L$，都有一个复数$c=(a_i,a_j)$与之对应，称为a_i和a_j的内积，它具有如下性质：

$$\left.\begin{aligned}&(a_i,a_i)\geq 0\\&(a_i,a_j)=(a_j,a_i)^*\\&(a_l,c_1a_i+c_2a_j)=c_1(a_l,a_i)+c_2(a_l,a_j)\end{aligned}\right\}$$

Hilbert空间

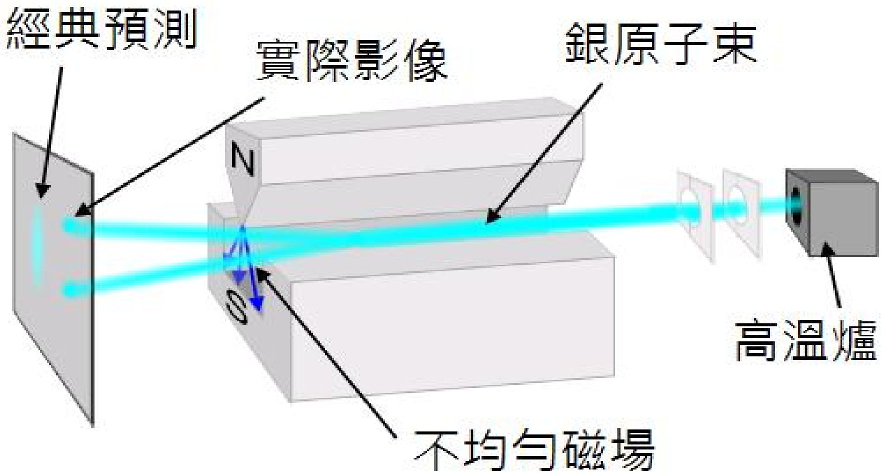
1. 状态空间（教材2.2.1）

● 假设一

- **量子力学假设 1**：任何量子系统都可以用 Hilbert 空间来表示，该空间被称为量子系统的状态空间(State sapce)。量子系统可以完全由该空间的单位向量来描述，该向量被称为态矢(State vector)。
  - 该向量通常称为态向量（或态矢），常用$\left|\cdot\right\rangle$表示，也称为右矢。例如$\left|\varphi\right\rangle$，$\left|0\right\rangle$等都表示量子态
  - $\left\langle\varphi\right|$表示$\left|\varphi\right\rangle$的对偶向量，由 Hilbert 空间中的行单位向量描述

2.施特恩－格拉赫实验（教材1.5.1）

● 实验示意图



- **高温炉发射出的银原子经过非均匀磁场分裂成两条**

- **银原子的磁矩 M 和磁场 B 发生相互作用产生势，磁矩正比于角动量，可得银原子经过磁场所受力为**

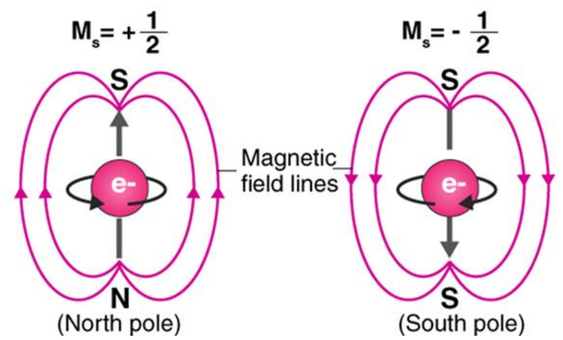
$$\vec{F} \propto J_z \frac{\partial B}{\partial z}\vec{e}_z, \text{其中} J_z \text{为角动量}$$

- 由于银原子的轨道角动量为 0，所以这种在磁场的分裂行为一定预示着电子有其他的角动量，因此银原子存在一种内禀的角动量，称作自旋，这种角动量在任意方向只有两个取值

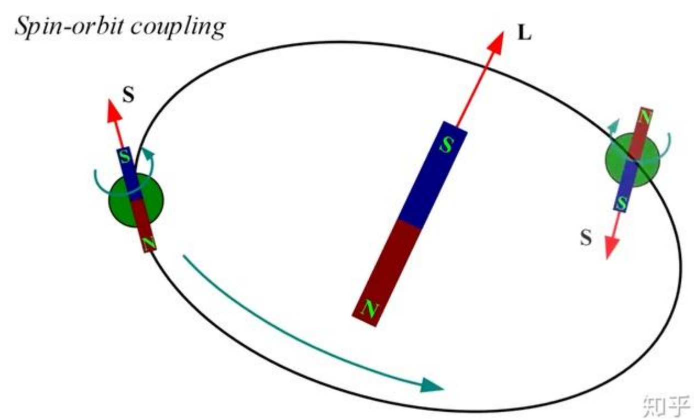
2.施特恩 - 格拉赫实验（教材1.5.1）

● 实验解释

- 按经典理论，因为原子内部的电子在绕着原子核旋转。你可以简单想象成行星绕着太阳一样的公转，所以他存在一个磁矩。但是由于银原子来源于银蒸汽，所以这个磁矩方向是随机的。经过磁场后，打在屏幕上的结果，按理说应该是一条细长的条纹，但是实验结果确实屏幕上出现了上下两个独立的斑点。后来人们才意识到，这是因为电子在绕核公转的同时，自身应该还有一个自转。
- 人们之所以不叫自转，而称其为自旋，是因为他和行星的自转有着本质的区别。首先，行星的自转是种外部属性，对于同一个物体他可快可慢，但是对于自旋来说，他是粒子的内禀属性在物理学中也叫自由度。
- 如果一个粒子的自旋值发生了变化，那么说明他不是当初的粒子了，也就是已经变成了其他粒子了。另外行星的自转是一个连续的过程。而电子的自旋它是不连续的，他的角动量只存在 $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$ 这两个值。



自旋磁矩



电子的”自转”与”公转”
对应自旋与轨道角动量

知识拓展

为什么自旋会是 1/2？刚刚说过，自旋是一种特殊的角动量。物理学家发现，轨道角动量总是普朗克常数的整数倍，即 $m\hbar$，这里 m 是整数（可正可负）。而自旋对应的角动量则可以是 $\pm\hbar/2$、$\pm\hbar$、$\pm3\hbar/2$ 等等。物理学家还发现，一个粒子所带自旋的角动量会有个最大值。比如电子所带自旋的角动量的最大值就是 $\hbar/2$。自旋 1/2 指的就是这个自旋的最大角动量是 $\hbar/2$。质子和中子的自旋也是 1/2。光子的自旋则是 1，这意味着光子自旋的最大角动量是 $\hbar$。在量子力学里，无论是轨道角动量还是自旋角动量，它们的取值都是离散的。比如，自旋 1/2 的角动量只能是 $-\hbar/2, \hbar/2$；自旋 1 的角动量只能是 $-\hbar, 0, \hbar$。

有自旋 1/4 吗？没有。狄拉克发现电子具有自旋 1/2 是狭义相对论和量子力学结合的必然结果。如果某一天实验物理学家发现自然界存在自旋 1/4，那么理论物理学家就不得不改写相对论或者量子力学或者两者。

3. 量子态

● 量子态表示举例：

自旋向上可以表示为: $|0\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，自旋向下可表示为 $|1\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

➢ 量子态满足态叠加原理

■ 若量子力学系统可能处在 $|\varphi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 描述的态中，则系统也可能处于态 $|\Phi\rangle=c_1|\varphi\rangle+c_2|\psi\rangle$，其中 c_1，c_2 是两复数，且一般满足归一化条件（比如若 $|\varphi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 正交，则满足 $|c_1|^2+|c_2|^2=1$。

如果通过磁场后，自旋向上的概率是 $\frac{1}{3}$，自旋向下的概率是 $\frac{2}{3}$，

则量子态可以写为: $|\psi\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$

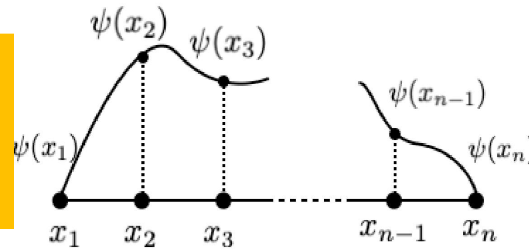
3. 量子态

● 量子态和波函数之间的关系

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)$$

$\psi(x,t)$称为波函数，它描述粒子的量子态

$|\psi(x,t)|^2$ 表示在t时刻x位置发现这个粒子的概率



$|x_i\rangle$ 为正交基张成了一个n 维的希尔伯特空间，其中的向量可以写成

$$|\psi\rangle=\sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)|x_j\rangle$$

格点数增到无穷大，变为连续线段，而系数 $\psi(x_i)$ 则变成这个线段上的一个连续函数 $\psi(x)$

$$\langle x_i|\psi\rangle=\sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)\langle x_i|x_j\rangle \longrightarrow \psi(x)=\langle x|\psi\rangle$$

波函数　　量子态

简单来说，**波函数是量子态在坐标表象中的数学表示。**

可以把它们的关系类比于一个向量和它在特定坐标系下的分量：

- **量子态**：就像一个抽象的物理向量本身（比如速度$\vec{v}$），它代表了系统所有物理属性的完整状态。我们用一个名为**态矢量**的符号 $|\Psi\rangle$ 来表示它。这个符号是抽象的、与坐标系无关的。
- **波函数**：就像这个向量在某个特定坐标系（比如直角坐标系）下的具体坐标值 (v_x, v_y, v_z)。波函数 $\Psi(x, t)$ 就是态矢量 $|\Psi\rangle$ 在位置坐标基底上的“坐标”或“投影”。

1. 量子态 - 系统的完整描述

在量子力学中，一个物理系统（比如一个电子）的状态，即**量子态**，包含了该系统所有可获取的信息。例如，一个电子的量子态决定了它在某处被发现的概率、它的平均动量、平均能量等等。

- **数学表示**：在数学上，我们使用希尔伯特空间中的一个**态矢量** 来表示量子态，记作 $|\Psi\rangle$（读作“Psi ket”）。这个矢量存在于一个抽象的数学空间中。
- **核心特性**：量子态遵循**叠加原理**。如果 $|\Psi_1\rangle$ 和 $|\Psi_2\rangle$ 是可能的态，那么它们的任意线性组合 $|\Psi\rangle = a|\Psi_1\rangle + b|\Psi_2\rangle$ 也是一个可能的量子态。

2. 波函数 - 量子态在位置空间的“投影”

为了进行具体的计算，我们需要将这个抽象的态矢量 $|\Psi\rangle$ 用我们熟悉的数学函数来表示。这取决于我们选择在哪个“基底”或“表象”下观察这个态。最常用的是**位置表象**。

- **定义**：当我们选择以“位置”作为观察的基底时，态矢量 $|\Psi\rangle$ 在这个基底上的投影就是**波函数**，通常记作 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 或 $\Psi(x, t)$（在一维情况下）。
- **物理意义**：波函数 $\Psi(x, t)$ 的模的平方 $|\Psi(x, t)|^2$ 给出了在时间 t，于位置 x 附近单位体积内发现该粒子的**概率密度**。

> 概率密度 $P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$
> 这是波函数最重要的物理诠释（由玻恩提出）。

● 纯态和混合态

(一）纯态（Pure state) **纯态是指可用一个波函数描述的量子态，**

1. 纯态：**量子系统的量子态 $|\psi\rangle$ 是一个确定的态。**

2. 密度矩阵表示：$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

3. $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$.

(二）混合态（Mixed state) 混合态则不能简单用一个波函数来描述，它是非完备测量的产物

1. 混合态：量子系统可能以一定概率 p_1 处于量子态 $|\psi_1\rangle$，以一定概率 p_2 处于量子态 $|\psi_2\rangle$，…，以 p_n 的概率处于量子态 $|\psi_n\rangle$。因此我们可以从统计的角度将混合态看作是**不同纯态的概率分布**，对相同的混合态进行统计，这个混合态应当分别以 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的概率处于量子态 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle$。

2. 密度矩阵表示：$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

3. $\mathrm{tr}(\rho^2) < 1$.

通常我们可以通过计算 $\mathrm{tr}(\rho^2)$ 来判断一个量子系统是处于纯态还是混合态。

4. 量子比特（教材1.2节）

● 量子比特概念

■ 比特（bit）是经典计算和经典信息的基本概念，经典信息的基本单元。只要是两态物理系统，都可以代表一个比特。经典比特只能处于0态或1态，不是0就是1。

• 如，开关的开和闭，开代表1、闭代表0，或是晶体管的高电平和低电平，高电平代表1、低电平代表0。

■ 在经典计算中，有单比特门操作，例如非门，有两比特门操作，例如与门、或门。量子比特（qubit）是量子计算和量子信息的基本概念，量子信息的基本单元。量子比特（qubit）可以处于0态（通常用|0>来表示）和1态（通常用|1>来表示）的任意叠加态

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$|0\rangle$和$|1\rangle$正交，称为计算基态（computation basis)。

这种叠加态具有明显的量子相干特征，经典概率p=|c|²不足以描写这个叠加态， α和β的相对位相在量子信息中起到至关重要的作用

4. 量子比特

● 量子比特概念

➢ 量子比特（qubit），又称量子位，是一个双态量子系统，其状态空间为二维 Hilbert 空间

$$|\varphi\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle$$

其中a_1和a_2是满足$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$的复数，原则上可以编码无穷多的信息

$$|+\rangle = \left(|0\rangle + |1\rangle\right)/\sqrt{2} \qquad |-\rangle = \left(|0\rangle - |1\rangle\right)/\sqrt{2}$$

在不同基下，同一量子态可以有多种不同表示：

$$|\varphi\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle \qquad = \frac{a_1 + a_2}{2}|+\rangle + \frac{a_1 - a_2}{2}|-\rangle$$

$$= (a_1\cos\theta + a_2\sin\theta)\,|B_1\rangle + (a_1\sin\theta - a_2\cos\theta)|B_2\rangle$$

$$|B_1\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, \qquad |B_2\rangle = \sin\theta|0\rangle - \cos\theta|1\rangle$$

$$|0\rangle = \cos\theta|B_1\rangle + \sin\theta|B_2\rangle, \qquad |1\rangle = \sin\theta|B_1\rangle - \cos\theta|B_2\rangle$$

有些量子算法中，没有对量子态做任何操作，只是变了变形式，就发现里面系数中成了我们想要的一个值，看到这个时不要惊讶，确实如此，关键看你怎么提取出这个值来

4. 量子比特

● 布洛赫（Bloch）球

qubit可以等效表示为：

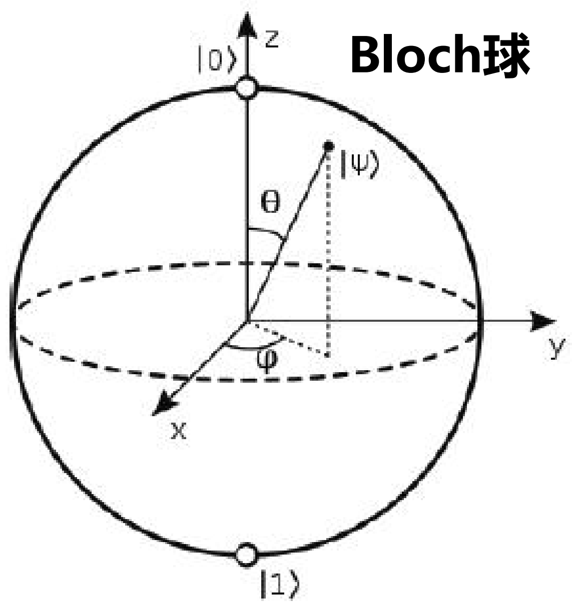
$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

对应的点是 $\psi\,(cos\varphi\sin\theta, sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$

式中 θ，ϕ 为实数， θ 和 ϕ 定义单位三维Bloch球面上的一个点。

布洛赫球提供了非常直观实用的单个量子比特纯状态可视化几何表示

量子比特的物理载体可以是任意二态量子系统，如光子偏振态、电子自旋态、原子二能级态等。

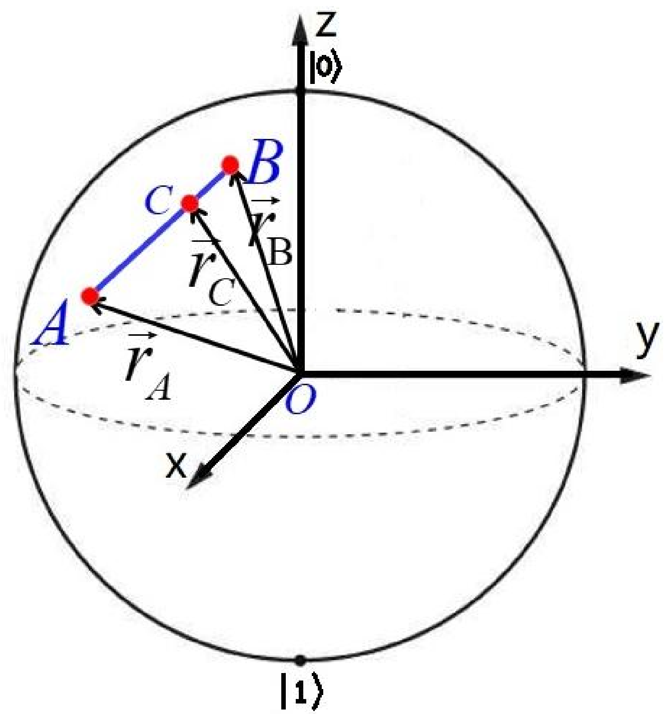


Bloch球

在量子计算中，同样有单比特门操作和两比特门操作。与经典计算中单比特门只有非门不同，量子计算中的单比特门数量众多，这源于量子叠加态的存在。

4. 量子比特

● 布洛赫球



$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

- 球面上任两点 A,B 的连线上的任一点 C 所表征的**混合态**都能被球面上 A,B 这两点所表征的**纯态**分解.
- 利用布洛赫球可以很轻松的将一个混合态**密度算符**进行本征谱分解

$$\rho_c = \frac{CB}{AB}\rho_A + \left(1 - \frac{CB}{AB}\right)\rho_B$$

- 混合态qubit 的密度算符表示为

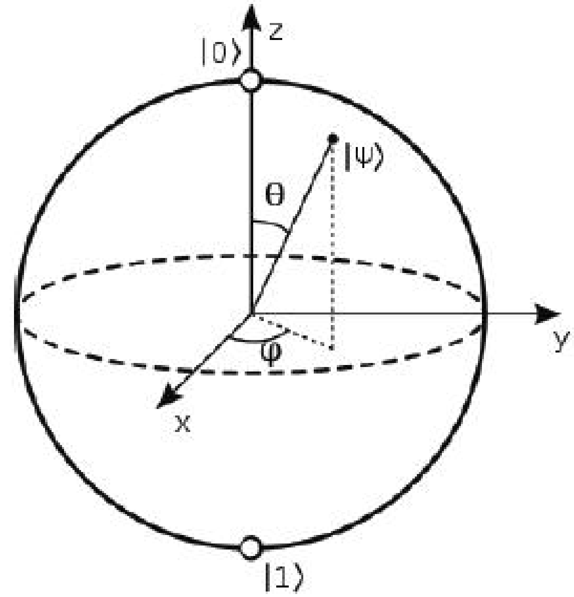
$$\rho = \sum_n \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

其中的$|\psi\rangle_n = \alpha_n|0\rangle + \beta_n|1\rangle$是个纯态，参数$\rho_n$可看作系统处于纯态$|\psi_n\rangle$的概率

4. 量子比特

● 布洛赫球

- 球面上每一个点都能映射到一个纯态
- 球内每一个点都能映射到混合态



不难证明布洛赫球面满足下面这三个结论:

(1). 布洛赫球同一个直径的两个端点对应的态是正交的.

(2). x, y 轴与球面的交点正好对应 σ_x, σ_y 的本征态, 本征值为 ± 1.

(3). 方向 $\vec{n}$ 所在直线与球面的交点就是 σ_n 的本征态, 本征值为 ± 1

4. 量子比特

● 练习

$|0\rangle$, $|1\rangle$态分别对应于Bloch球上的哪个点，相应的Bloch矢量是什么？

$|+\rangle$, $|-\rangle$态分别对应于Bloch球上的哪个点，相应的Bloch矢量是什么？

赤道上的点对应什么量子态？球坐标点$(1, \theta, \varphi)$对应的Bloch矢量是什么？