同济大学中德工程学院

CDHAW of Tongji University

DSGE 模型笔记

朱彦元

Dr. Yanyuan Zhu
yyz@tongji.edu.cn

2016 年 10 月 12 日

目录

插图

表格

第一章　前言

还没想好要写什么...

第一部分

基础

第二章　基准 New Keynesian 模型

2.1　家庭部门

假定 cashless economy，家庭的效用函数 $U(C_t, N_t)$ 表示为[1]

$$U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \cdot \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta}, \tag{2.1}$$

HH 问题。目标：追求效用最大化

$$\begin{aligned} &\max_{\{C_t, N_t, B_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot U(C_t, N_t), \\ &\qquad st. \quad P_t \cdot C_t + B_{t+1} \leq W_t \cdot N_t + Div_t - P_t \cdot T_t + (1 + i_{t-1}) \cdot B_t, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 Div_t 表示 dividends，中间产品企业的（垄断）利润。T_t 表示税收或转移支付。i_t 为名义利率。

建 Lagrange

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot \{U(C_t, N_t) + \lambda_t \cdot [W_t \cdot N_t + Div_t - P_t \cdot T_t + (1 + i_{t-1}) \cdot B_t - P_t \cdot C_t - B_{t+1}]\}. \tag{2.3}$$

FOCs

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} &= 0 \Rightarrow C_t^{-\sigma} = \lambda_t \cdot P_t \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} &= 0 \Rightarrow \psi \cdot N_t^{\eta} = \lambda_t \cdot W_t \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial\{\lambda_t \cdot (1 + i_{t-1}) \cdot B_t\}}{\partial B_{t+1}} - \lambda_t = \frac{\partial \beta \cdot E_t\{\lambda_{t+1} \cdot (1 + i_t) \cdot B_{t+1}\}}{\partial B_{t+1}} - \lambda_t = 0 \end{aligned}$$

---

[1]膏按：RBC(DSGE) 在经验研究中中常用工作小时数而非就业人员数作为 N_t 的代理变量，其相关讨论早期文献可见Hansen (1985); Rogerson (1988)；近期的综述见Rogerson and Wallenius (2009a)。

整理得

$$\psi \cdot N_t^{\eta} = C_t^{-\sigma} \cdot w_t \tag{2.4}$$

$$C_t^{-\sigma} = \beta \cdot E_t\{C_{t+1}^{-\sigma} \cdot (1+i_t) \cdot \frac{P_t}{P_{t+1}}\} = \beta \cdot E_t\{C_{t+1}^{-\sigma} \cdot (1+i_t) \cdot (1+\pi_{t+1})^{-1}\}, \tag{2.5}$$

其中 $w_t \equiv \frac{W_t}{P_t}$ 表示实际工资，$\pi_t + 1 \equiv P_t/P_{t-1}$ 表示通货膨胀率。由 (2.4)可得 Frisch elasticity of labor supply 为 $1/\eta$[2]。

2.2 企业部门

2.2.1 最终产品生产部门

最终产品部门以中间产品 $Y_t(j), j \in [0,1]$ 的组合为投入要素，产出 Y_t，符合完全竞争假定。Dixit and Stiglitz (1977) 形式的生产规模报酬不变生产函数为

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}, \tag{2.6}$$

其中 $\epsilon > 1$ 表示 j^{th} 中间产品的替代弹性。

最终产品厂商问题：在给定 $P_t(j)$ 的情况下，通过选择 $Y_t(j)$ 的投入追求利润最大化

$$\max_{Y_t(j)} P_t \cdot Y_t - \int_0^1 P_t(j) \cdot Y_t(j) dj, \tag{2.7}$$

引入式(2.6)，FOC 整理可得对 j 中间产品的需求函数

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} \cdot Y_t, \tag{2.8}$$

进而根据完全竞争市场假定

$$\begin{aligned} P_t \cdot Y_t &\equiv \int_0^1 P_t(j) \cdot Y_t(j) dj \\ &= \left[\int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} \cdot Y_t \cdot P_t(j) dj\right] \\ &= \left[\int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj\right] \cdot P_t^{\epsilon} \cdot Y_t, \end{aligned}$$

整理得最终产品价格的决定 (aggregate price index)：

$$P_t = \left[\int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj\right]^{\frac{1}{1-\epsilon}} \tag{2.9}$$

[2]假定短时期内家庭的总财富 (总消费) 不变，市场上工资的变化只影响家庭的劳动力供应，Frisch labor supply elasticity(Frisch, 1932, 1959) 可表示为

$$\frac{\partial n_t}{\partial w_t} \cdot \frac{w_t}{n_t},$$

可参考 (Heer and Maussner, 2009, pp.279)，以及Christiano et al. (2010)。

2.2.2　中间产品生产部门

中间产品生产部门假定处于垄断竞争状态。代表企业 j 雇佣劳动力 $N_t(j)$ 生产 $Y_t(j)$，生产函数形式

$$Y_t(j) = A_t \cdot N_t(j), \tag{2.10}$$

其中 A_t 表示外生的生产率冲击，它对所有中间产品生产者都是相同的。对劳动力的总需求为 j 个厂商的加总。

$$N_t = \int_0^1 N_t(j)dj. \tag{2.11}$$

成本最小化：边际成本与工资

中间产品生产者 j 的问题可以表示为两阶段优化。第一阶段为成本最小化：在给定工资 W_t 的基础上，选择雇佣劳动力投入 $N_t(j)$，生产中间品 $Y_t(j)$，以满足最终产品生产部门对 $Y_t(j)$ 的需求，

$$\begin{aligned} &\min_{N_t(j)} W_t \cdot N_t(j), \\ &\qquad st. \quad A_t \cdot N_t(j) \geq \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t, \end{aligned} \tag{2.12}$$

第二行 LHS 和 RHS 分别表示中间产品 $Y_t(j)$ 的供应和需求，见式(2.10)和式 (2.8)。

建 Lagrange

$$\mathcal{L} = W_t \cdot N_t(j) + \lambda_t \cdot \left[\left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} \cdot Y_t - A_t \cdot N_t(j)\right],$$

其中拉格朗日乘子 λ_t 表示 j 生产额外 1 单位 $Y_t(j)$ 的影子价格（边际成本），设为 $MC_t \equiv \lambda_t$.

FOC:

$$MC_t = \frac{W_t}{A_t}$$

或者用实际价格形式表示

$$mc_t = \frac{MC_t}{P_t} = \frac{W_t}{A_t \cdot P_t} = \frac{w_t}{A_t}. \tag{2.13}$$

式(2.13) 反映了实际（边际成本）和实际工资的对应关系。

利润最大化：定价策略

在此基础上，第二阶段，中间产品生产者 j 对自己的产品 $Y_t(j)$ 定价 $P_t(j)$，以追求实际利润 Π_t 最大化。

$$\begin{aligned} \Pi_t(j) &= \frac{P_t(j) \cdot Y_t(j)}{P_t} - \frac{W_t \cdot N_t(j)}{P_t} \\ &= \frac{P_t(j)}{P_t} \cdot Y_t(j) - mc_t \cdot Y_t(j) \\ &= \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{1-\epsilon} \cdot Y_t - mc_t \cdot \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} \cdot Y_t \end{aligned} \tag{2.14}$$

粘性价格。在 t 时期，中间产品生产者 j 有 $\phi<1$ 的概率不能调整价格，维持上一期的定价 $P_{t-1}(j)$；有 $1-\phi$ 的概率可以调整价格，将产品售价更新为 $P_t^{\#}(j)$。

$$P_t(j)=\begin{cases}P_{t-1}(j) & \text{with prob.} \quad \phi \\ P_t^{\#}(j) & \text{else} \quad 1-\phi\end{cases} \tag{2.15}$$

根据模型假设，中间产品生产部门由于垄断产生的利润 Π_t，流回到家庭部门，供消费以提升效用，满足跨期消费的 Euler equation 式(2.5)，设 $\tilde{M}_{t+s}\equiv\beta^s\cdot\frac{U_{C,t+s}}{U_{C,t}}$ 作为 discount factor。从 t 期向前直到 $t+s$ 期，j 不能自由调整价格的概率是 ϕ^s。此外，从 t 期向前直到 $t+s$ 期，j 不能自由调整价格的概率是 ϕ^s。由此，j 生产者 forward-looking 的随机折旧因子为 $\phi^s\cdot\tilde{M}_{t+s}$。

先来看式(2.15)中 $p_j^{\#}(j)$ 的决定。t 期中间品生产者 j 的利润最大化问题表示为

$$\begin{aligned}&\max_{P_t(j)} E_t\sum_{s=0}^{\infty}\phi^s\cdot\tilde{M}_{t+s}\cdot\Pi_{t+s}\\ &=\max_{P_t(j)} E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi)^s\cdot\frac{U_{C,t+s}}{U_{C,t}}\cdot\left[\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}}\cdot Y_{t+s}(j)-mc_{t+s}\cdot Y_{t+s}(j)\right]\\ &=\max_{P_t(j)} E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi)^s\cdot\frac{U_{C,t+s}}{U_{C,t}}\cdot Y_{t+s}\cdot\left[\left(\frac{P_t(j)}{P_{t+s}}\right)^{1-\epsilon}-mc_{t+s}\cdot\left(\frac{P_t(j)}{P_{t+s}}\right)^{-\epsilon}\right],\end{aligned}$$

FOC wrt $P_t(j)$，整理得

$$P_t(j)=\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\cdot\frac{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi)^s\cdot U_{C,t+s}\cdot Y_{t+s}\cdot mc_{t+s}\cdot P_{t+s}^{\epsilon}}{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi)^s\cdot U_{C,t+s}\cdot Y_{t+s}\cdot P_{t+s}^{\epsilon-1}} \tag{2.16}$$

式(2.16) RHS 分子和分母均与 j 无关，即在价格粘性的情况下，forward-looking 的所有中间产品生产者 $j\in[0,1]$，如果有机会调整价格（概率 $1-\phi$），都会遵循相同的价格调整策略，设为 $P_t^{\#}\equiv P_t^{\#}(j),\forall j$。上式改写为

$$P_t^{\#}=\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\cdot\frac{X_{1,t}}{X_{2,t}}, \tag{2.17}$$

其中辅助变量

$$X_{1,t}\equiv U_{C,t}\cdot Y_t\cdot P_t^{\epsilon}\cdot mc_t+\beta\cdot\phi\cdot E_tX_{1,t+1}, \tag{2.18}$$

$$X_{2,t}\equiv U_{C,t}\cdot Y_t\cdot P_t^{\epsilon-1}+\beta\cdot\phi\cdot E_tX_{2,t+1}. \tag{2.19}$$

为了让变量平稳，定义 $x_{1,t}\equiv X_{1,t}/P_t^{\epsilon}$，$x_{2,t}\equiv X_{2,t}/P_t^{\epsilon-1}$，式 (2.17)变为

$$P_t^{\#}=\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\cdot\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\cdot P_t. \tag{2.20}$$

或者定义 reset price 的通胀项 $(1+\pi_t^{\#})\equiv P_t^{\#}/P_{t-1}$，将式(2.20)由价格形式改写为通货膨胀率的形式

$$(1+\pi_t^{\#})=\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\cdot(1+\pi_t)\cdot\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}. \tag{2.21}$$

根据(2.20)，在 flexible price 即 $\phi=0$ 的情况下，$\forall j$ 中间产品的定价为 $P_t^{\#}=\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\cdot(mc_t\cdot P_t)$，即名义的边际成本乘以 markup。

2.2.3　最终产品定价：Calvo assupmtion

Aggregate price index 式(2.9)中含有 j，为了消除中间产品生产者的价格异质性对最终产品价格的影响，引入式(2.15)，根据 Calvo assumption (Calvo, 1983) 得

$$\begin{aligned} P_t^{1-\epsilon} &= \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj \\ &= \int_0^{1-\phi} \left(P_t^{\#}\right)^{1-\epsilon} dj + \int_{1-\phi}^1 \left(P_{t-1}(j)\right)^{1-\epsilon} dj \\ &= \int_0^{1-\phi} \left(P_t^{\#}\right)^{1-\epsilon} dj + \int_0^{\phi} \left(P_{t-1}(j)\right)^{1-\epsilon} dj \\ &= (1-\phi) \cdot \int_0^1 \left(P_t^{\#}\right)^{1-\epsilon} dj + \phi \cdot \int_0^1 \left(P_{t-1}(j)\right)^{1-\epsilon} dj \\ &= (1-\phi) \cdot \left(P_t^{\#}\right)^{1-\epsilon} + \phi \cdot \left(P_{t-1}\right)^{1-\epsilon} \end{aligned} \tag{2.22}$$

或者以 reset price inflation 形式表示为

$$(1+\pi_t)^{1-\epsilon} = (1-\phi) \cdot \left(1+\pi_t^{\#}\right)^{1-\epsilon} + \phi \tag{2.23}$$

2.3　外生技术冲击

设外生技术冲击满足 log 形式的 AR(1) 过程

$$\ln A_t = \rho_a \cdot \ln A_{t-1} + \varepsilon_{a,t} \tag{2.24}$$

其中 $0 < \rho_a < 1$，$E\{\varepsilon_{a,t}\} = 0$。

2.4　总量均衡

2.4.1　家庭部门消费的决定

均衡状态下，家庭持有的债券和净转移支付为零，$B_t = T_t = 0\ \forall t$。Div_t 来自全部中间产品生产者的垄断利润之和，

$$\begin{aligned} \frac{Div_t}{P_t} &= \frac{\Pi_t}{P_t} \\ &\equiv \int_0^1 \left[\frac{P_t(j)}{P_t} \cdot Y_t(j) - \frac{W_t}{P_t} N_t(j)\right] dj \\ &= \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right) Y_t(j) dj - w_t \cdot \int_0^1 N_t(j) dj \\ &= \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right) Y_t(j) dj - w_t \cdot N_t \end{aligned} \tag{2.25}$$

家庭部门预算约束条件式(2.2)因此改写为

$$
\begin{aligned}
C_t &= \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right) \cdot Y_t(j)dj \\
&= \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right) \cdot \left[\left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} \cdot Y_t\right] \\
&= \left[Y_t \cdot P_t^{\epsilon-1}\right] \cdot \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj \\
&= Y_t
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

2.4.2 price dispersion

在市场出清情况下，对 j 类中间产品 $Y_t(j)$ 的需求式(2.8)与供应式(2.10)联立，并加总

$$
\int_0^1 A_t \cdot N_t(j)dj = \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} \cdot Y(t)dj,
$$

整理可得（最终产品）总量生产函数

$$
Y_t = \frac{A_t \cdot N_t}{\nu_t^p}, \tag{2.27}
$$

其中 $\nu_t^p \geq 1$

$$
\nu_t^p = \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj \tag{2.28}
$$

是 price dispersion index，反映市场上各种商品价格的差异程度：价格不一致的程度越高，υ_t^p 越大，总产出越小；lower bound $\nu_t^p = 1$ 表示在没有 price friction 时，所有企业对自己的产品都会设定同样的价格。这在一定程度上说明了旨在稳定物价政策的重要性。

利用 Calvo assumption 对 ν_t^p 作调整，以消除 j 个体企业的异质性：

$$
\begin{aligned}
\nu_t^p &= \int_0^{1-\phi} \left(\frac{P_t^{\#}}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj + \int_{1-\phi}^1 \left(\frac{P_{t-1}(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj \\
&= (1-\phi) \cdot \int_0^1 \left(\frac{P_t^{\#}}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon} \cdot \left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{\epsilon} dj + \phi \cdot \int_0^1 \left(\frac{P_{t-1}(j)}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon} \cdot \left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{\epsilon} dj \\
&= (1-\phi) \cdot (1+\pi_t^{\#})^{-\epsilon} \cdot (1+\pi_t)^{\epsilon} + \phi \cdot (1+\pi_t)^{\epsilon} \cdot \int_0^1 \left(\frac{P_{t-1}(j)}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon} dj \\
&= (1-\phi) \cdot (1+\pi_t^{\#})^{-\epsilon} \cdot (1+\pi_t)^{\epsilon} + \phi \cdot (1+\pi_t)^{\epsilon} \cdot \nu_{t-1}^p.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

2.5 （非随机的）稳定状态

根据第2.4节的总量均衡，可以进一步探讨非随机稳态。我们将未标注时间下角标的变量表示为其稳定状态。

根据定义式(2.24)可得

$$A = 1. \tag{2.30}$$

式(2.26) $\Rightarrow$

$$Y = C. \tag{2.31}$$

跨期消费的 Euler 等式(2.5) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} i &= \frac{1-\beta}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \pi \\ &\approx \rho + \pi, \end{aligned} \tag{2.32}$$

上式中第二行等式，假定时间贴现 $\beta \approx 1$，则 $\rho \equiv \frac{1-\beta}{\beta}$ 表示时间贴现率。

Reset price inflation 式(2.23) $\Rightarrow$

$$(1 + \pi^{\#}) = \left[\frac{(1+\pi)^{1-\epsilon} - \phi}{1-\phi} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}. \tag{2.33}$$

price dispersion 式(2.29) $\Rightarrow$

$$\nu^p = \frac{(1-\phi) \cdot \left[\frac{1+\pi}{1+\pi^{\#}} \right]^{\epsilon}}{1 - \phi \cdot (1+\pi)^{\epsilon}}. \tag{2.34}$$

边际成本式(2.21) $\Rightarrow$

$$mc = \frac{1 - \phi \cdot \beta \cdot (1+\pi)^{\epsilon}}{1 - \phi \cdot \beta \cdot (1+\pi)^{\epsilon-1}} \cdot \frac{1+\pi^{\#}}{1+\pi} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \tag{2.35}$$

基于式(2.33)、(2.34)和(2.35)，利用数值模拟的方法，考察稳态下总物价通胀 π 和 reset price 通胀 $\pi^{\#}$、price dispersionν^p、边际成本 mc 之间的关系。

1. $\pi = 0$ 时，$\pi^{\#} = 0$。$\pi \gtreqless 0$ 时，$\pi^{\#} \gtreqless \pi$。见图2.1左图。

2. $\pi = 0$ 时，$\nu^p = 1$，price dispersion 处于最小值。$\pi \neq 0$ 时，$\nu^p > 1$，且相比较负通胀 ($\pi < 0$)，ν^p 对正通胀的响应更剧烈，导致对产出的干扰更大。见图2.1中图。

3. $\pi = 0$ 时，$mc = \frac{\epsilon-1}{\epsilon}$，即等于 fixed price markup 的倒数。$\pi \neq 0$ 时，有 $mc < \frac{\epsilon-1}{\epsilon}$，说明 $\pi \neq 0$ 时的 steady state markup，大于 $\pi = 0$ 时的 steady state price markup。见图2.1右图。

给定 $A = 1$，工资决定式(2.13) $\Rightarrow$

$$w = mc \tag{2.36}$$

即工资等于劳动投入的边际成本。

式(2.27) $\Rightarrow$ 边际产出 mpn

$$mpn = \frac{1}{\nu^p} \tag{2.37}$$

可见 $\pi = 0$ 时，mpn 和 mc 的差距最小，体现为一个 fixed price markup $\frac{\epsilon}{\epsilon-1}$。$\pi \neq 0$ 且越远离 0 时，经济体 distorted 的程度越大；此外，$\pi > 0$ 时经济体的 distorted 程度，高于 $\pi < 0$ 时。

劳动力的供应式(2.4) ⇒

$$\begin{aligned}
\psi \cdot N^{\eta} &= C^{-\sigma} \cdot w \\
&= Y^{-\sigma} \cdot mc \\
&= \left(\frac{N}{\nu^p}\right)^{-\sigma} \cdot mc,
\end{aligned}$$

整理得

$$N = \left[\frac{1}{\psi} \cdot (\nu^p)^{\sigma} \cdot mc\right]^{\frac{1}{\eta+\sigma}} \tag{2.38}$$

总产出由式(2.27) (2.38) (2.35)得 ⇒

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{N}{\nu^p}, \\
&= \frac{\left[\frac{1}{\psi} \cdot (\nu^p)^{\sigma} \cdot mc\right]^{\frac{1}{\eta+\sigma}}}{\nu^p} \\
&= \left(\frac{1}{\psi}\right)^{\frac{1}{\sigma+\eta}} \cdot (v^p)^{-\frac{\eta}{\eta+\sigma}} \cdot \left[\frac{1-\phi \cdot \beta \cdot (1+\pi)^{\epsilon}}{1-\phi \cdot \beta \cdot (1+\pi)^{\epsilon-1}} \cdot \frac{1+\pi^{\#}}{1+\pi} \cdot \frac{\epsilon-1}{\epsilon}\right]^{\frac{1}{\eta+\sigma}}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

2.6 flexible price equilibrium 和 output gap

2.6.1 flexible price equilibrium

假定中间产品生产者可以自由调整价格，对应 $\phi = 0$。将变量加上角标 f 以标注。此时 $\pi = \pi^{\#}$，且名义价格不会对实际变量产生任何影响。

Flexible price dispersion index 式(2.29) ⇒

$$v_t^{p,f} = 1, \tag{2.40}$$

即包括最终产品和中间产品在内的全部生产者都会采取同样的产品定价策略，使 price dispersion 位于最低值 1。

Reset price inflation 式(2.21) ⇒

$$mc_t^f = \frac{\epsilon-1}{\epsilon}, \tag{2.41}$$

可见边际成本是 price markup 的倒数。企业的定价策略在于：给 mc 加上一个固定的 fixed price markup 权数，作为产品售价。

Flexible price wage $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} mpn_t^f &= \frac{\partial Y_t^f}{\partial N_t^f} = A_t, \\ P_t^f &= mc_t^f \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}, \\ mc_t^f &= w_t, \\ mpn_t &= p_t^f, \end{aligned}$$

整理得

$$w_t^f = A_t \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}. \tag{2.42}$$

Flexible price labor supply $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \psi(N_t^f)^\eta &= (C_t^f)^{-\sigma} \cdot w_t^f, \\ &= (Y_t^f)^{-\sigma} \cdot mc_t^f, \\ &= \left(A_t \cdot N_t^f\right)^{-\sigma} \cdot \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \cdot A_t\right), \end{aligned}$$

整理得

$$N_t^f = \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \cdot A_t^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma+\eta}}. \tag{2.43}$$

Flexible price aggregate output $\Rightarrow$

$$Y_t^f = A_t \cdot N_t^f = \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\sigma+\eta}} \cdot A_t^{\frac{1+\eta}{\sigma+\eta}} \tag{2.44}$$

可见 flexible price ($\phi = 0$) 情况下，名义波动不会对真实变量产生影响。

2.6.2 output gap

定义 output gap $\ln X_t \equiv \ln Y_t - \ln Y_t^f$，表示 flexible price ($\phi = 0$) 情况下产出 Y_t^f 与 sticky price ($\phi > 0$) 情况下产出 Y_t 的差。

稳定状态下，Y^f 的值由式(2.44)给出；

$$Y^f = \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\sigma+\eta}}$$

由此可得稳态 output gap 的值:

$$\frac{Y}{Y^f} = \left[\frac{1 - \phi \cdot \beta \cdot (1+\pi)^\epsilon}{1 - \phi \cdot \beta \cdot (1+\pi)^{\epsilon-1}} \cdot \frac{1 + \pi^\#}{1+\pi}\right]^{\frac{1}{\eta+\sigma}} \cdot (\nu^p)^{-\frac{\eta}{\eta+\sigma}} \tag{2.45}$$

output gap 的性质，分两种情况来讨论:

1. $\pi = 0 \Rightarrow \pi^\# = \pi = 0$，$\nu^p = 1 \Rightarrow Y = Y^f \Rightarrow \ln X = 0$，
2. $\pi > 0 \Rightarrow \pi^\# > \pi$，$\nu^p > 1 \Rightarrow Y < Y^f \Rightarrow \ln X < 0$。

即在 sticky price ($\phi > 0$) 条件下，稳态的 output gap（对数）为负。

2.7 Taylor 法则

假定中央银行的货币政策着眼于利率而非货币供应量：通过盯紧通货膨胀和产出这两个变量，灵活制定内生的货币政策以达到既定的利率目标[3]。常见的内生货币政策如 Taylor 法则：

$$(i_t - i) = \rho_i \cdot (i_{t-1} - i) + (1 - \rho_i) \cdot i + (1 - \rho_i) \cdot [\theta_\pi \cdot (\pi_t - \pi) + \theta_x \cdot (\ln X_t - \ln X)] + \varepsilon_{i,t}, \tag{2.46}$$

其中 i_t 表示名义利率。X_t 表示 output gap，见第2.6.2节。去掉下角标的变量表示其稳态值。$0 \leq \rho_i \leq 1$ 表示 smoothing parameter。$\theta_\pi \geq 0$，$\theta_x \geq 0$。外生利率冲击 $E\{\varepsilon_{i,t}\} = 0$。

不难看出式(2.46)的 Taylor 法则是个局部调整的货币政策：如果将稳态值 i 和 π 视作长期目标，则中央银行根据上期名义利率（距其稳态值）的偏离程度，以及当前期目标值（距其稳态值）的偏离程度，来灵活调整当期的名义利率；当前期目标值包括通货膨胀和 output gap。一旦当期名义利率的调整目标确定，中央银行即通过向市场印发货币等手段，调节市场上的货币量，来实现其名义利率的目标。

2.8 完整的均衡条件

经济系统的均衡解包括下述 12 个变量 $\{C_t, N_t, w_t, mc_t, Y_t, v_t^p, i_t, \pi_t, \pi_t^\#, x_{1,t}, x_{2,t}, A_t\}$，以及 12 个等式：

跨期消费的 Euler equation 式(2.5) $\Rightarrow$

$$C_t^{-\sigma} = \beta \cdot E_t\{C_{t+1}^{-\sigma} \cdot (1 + i_t) \cdot \frac{P_t}{P_{t+1}}\} = \beta \cdot E_t\{C_{t+1}^{-\sigma} \cdot (1 + i_t) \cdot (1 + \pi_{t+1})^{-1}\}.$$

劳动力供应式(2.4) $\Rightarrow$

$$\psi \cdot N_t^\eta = C_t^{-\sigma} \cdot w_t.$$

工资/边际成本的决定式(2.13) $\Rightarrow$

$$mc_t = \frac{MC_t}{P_t} = \frac{W_t}{A_t \cdot P_t} = \frac{w_t}{A_t}.$$

总消费与总产出的关系式(2.26) $\Rightarrow$

$$C_t = Y_t.$$

总量生产函数式(2.27) $\Rightarrow$

$$Y_t = \frac{A_t \cdot N_t}{\nu_t^p}.$$

Price dispersion index 式(2.29) $\Rightarrow$

$$\nu_t^p = (1 - \phi) \cdot (1 + \pi_t^\#)^{-\epsilon} \cdot (1 + \pi_t)^\epsilon + \phi \cdot (1 + \pi_t)^\epsilon \cdot \nu_{t-1}^p.$$

[3]膏按：外生利率政策会导致 indeterminacy 问题，补充一个 Appendix。

Evolution of inflation 式(2.23) ⇒

$$(1+\pi_t)^{1-\epsilon} = (1-\phi)\cdot\left(1+\pi_t^{\#}\right)^{1-\epsilon} + \phi.$$

Reset price inflation 式 (2.21) ⇒

$$(1+\pi_t^{\#}) = \frac{\epsilon}{\epsilon-1}\cdot(1+\pi_t)\cdot\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}.$$

两个 reset price inflation 的辅助变量，式(2.18)-(2.19) ⇒

$$\begin{aligned} x_{1,t} &\equiv C_t^{-\sigma}\cdot Y_t\cdot mc_t + \beta\cdot\phi\cdot E_t\left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon}\cdot x_{1,t+1}, \\ x_{2,t} &\equiv C_t^{-\sigma}\cdot Y_t + \beta\cdot\phi\cdot E_t\left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon-1}\cdot x_{2,t+1}. \end{aligned}$$

Taylor rule 式(2.46) ⇒

$$(i_t - i) = \rho_i\cdot(i_{t-1}-i) + (1-\rho_i)\cdot i + (1-\rho_i)\cdot[\theta_\pi\cdot(\pi_t-\pi) + \theta_x\cdot(\ln X_t - \ln X)] + \varepsilon_{i,t}.$$

Exogenous productivity shock 式(2.24) ⇒

$$\ln A_t = \rho_a\cdot\ln A_{t-1} + \varepsilon_{a,t}.$$

2.9　对数线性化

2.9.1　对数线性化计算

求解上述均衡方程组，方法之一是利用 Dynare 等计算机软件进行计算。此外，在模型较简单的情况下，也可以围绕 zero-inflation steady state $\pi = 0$ 的点，手算对数线性化的近似。

Euler equation 式(2.5) + 式(2.26) ⇒

$$-\sigma\cdot\ln Y_t = \ln\beta - \sigma E_t\ln Y_{t+1} + i_t - E_t\pi_{t+1},$$

设 $\ln(1+i_t)\approx i_t$，$\ln(1+\pi_t)\approx\pi_t$。将上式中每个变量分别围绕自己的稳态值作一阶泰勒级数展开，

$$-\sigma\cdot\frac{Y_t-Y}{Y} = -\sigma\cdot E_t\frac{Y_{t+1}-Y}{Y} + (i_t-i) - E_t(\pi_{t+1}-\pi),$$

定义 $\tilde{Z}_t \equiv (Z_t - Z)/Z$ 作为变量 Z_t 距离其稳态值 Z 的偏离程度，$Z_t = (Y_t, N_t, A_t, \ldots)$；为了手算方便，对于已经是 rate form 的变量，包括利率 i_t、通货膨胀率 π_t 和 $\pi_t^{\#}$、price dispersion index v_t^p，直接用差分代替增速形式，如 $\tilde{i}_t \equiv i_t - i$。上式进一步改写为

$$\tilde{Y}_t = E_t\tilde{Y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left[\tilde{i}_t - E_t\tilde{\pi}_{t+1}\right]. \tag{2.47}$$

式(2.47)又被称为 New Keynesian IS Curve (NKIS)。Keynesian IS curve 反映了投资 (Investment) 和投资 (Saving) 之间的对应关系。这里的“基础”New Keynesian 模型中并未考虑投资，它反映了当期消费需求和实际之间的负相关关系。与传统 IS curve 相比，NKIS 的“新”体

现在其 forward-looking 的特征上：当期需求 ($\tilde{C}_t = \tilde{Y}_t$) 不只取决于实际利率 ($\tilde{i}_t - E_t\tilde{\pi}_{t+1}$) 且负相关，还取决于对未来收入 (消费) 的期望 $E_t\tilde{Y}_{t+1}$ 且负相关。

边际成本与工资的关系式(2.13) ⇒

$$\tilde{mc}_t = \tilde{w}_t - \tilde{A}_t. \tag{2.48}$$

Price dispersion index 式(2.29) ⇒

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}_t^p &= \left[(-\epsilon)\cdot(1-\phi)\cdot(1+\pi^{\#})^{-\epsilon-1}\cdot(1+\pi)^{\epsilon}\right]\cdot(\pi_t^{\#}-\pi^{\#})\\
&+\left[\epsilon\cdot(1-\phi)\cdot(1+\pi^{\#})^{-\epsilon}\cdot(1+\pi)^{\epsilon-1}\right]\cdot\pi_t\\
&+\left[\epsilon\cdot\phi\cdot(1+\pi)^{\epsilon-1}\cdot\nu^p\right]\cdot(\pi_t-\pi)\\
&+\left[\phi\cdot(1+\pi)^{\epsilon}\right]\cdot\left(\nu_{t-1}^p-\nu^p\right)\\
&=-\epsilon\cdot(1-\phi)\cdot\tilde{\pi}_t^{\#}+\epsilon\cdot(1-\phi)\cdot\tilde{\pi}_t+\epsilon\cdot\phi\cdot\tilde{\pi}_t+\phi\cdot\tilde{\nu}_{t-1}^p\\
&=-\epsilon\cdot(1-\phi)\cdot\tilde{\pi}_t^{\#}+\epsilon\cdot\tilde{\pi}_t+\phi\cdot\tilde{\nu}_{t-1}^p,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

其中第三个等号用到 $\pi = \pi^{\#} = 0$ 的假设条件。

Evolution of inflation 式(2.23) ⇒

$$(1-\epsilon)\cdot\ln(1+\pi_t) = \ln\left[(1-\phi)\cdot\left(1+\pi_t^{\#}\right)^{1-\epsilon}+\phi\right],$$

$$(1-\epsilon)\cdot(\pi_t-\pi) = \left[(1-\phi)\cdot(1-\epsilon)\cdot\left(1+\phi^{\#}\right)^{-\epsilon}\cdot(1+\pi)^{\epsilon-1}\right],$$

$$\tilde{\pi}_t = (1-\phi)\cdot\tilde{\pi}_t^{\#}. \tag{2.50}$$

由式(2.50)可见，actual inflation 和 reset price inflation 呈一定比例变化，比例 $1-\phi$ 为全部企业中，调整价格者所占的比重。

总量生产函数式(2.27) ⇒

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t &= \tilde{A}_t + \tilde{N}_t - \tilde{\nu}_t^p\\
&= \tilde{A}_t + \tilde{N}_t - \left[\epsilon\cdot\tilde{\pi}_t - \epsilon\cdot(1-\phi)\cdot\tilde{\pi}_t^{\#} + \phi\cdot\tilde{\nu}_{t-1}^p\right]\\
&\approx \tilde{A}_t + \tilde{N}_t,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

第三行的约等号是由于，从式(2.49)可得，在 zero inflation steady state 下，$\pi = \pi^{\#} = 0$ 且 $\nu^p = 1$，则 $(\nu_t^p - 1) = \phi\cdot(\nu_{t-1}^p - 1)$。这说明 $\tilde{\nu}_t^p = 0\ \forall t$。换句话说，在 price dispersion index 是一个二阶量；在我们围绕 zero inflation steady state 作一阶线性近似时，可以省略。

flexible price 下的产出水平式(2.44) ⇒

$$\tilde{Y}_t^f = \frac{1+\eta}{\sigma+\eta}\cdot\tilde{A}_t. \tag{2.52}$$

劳动力供应式(2.4) ⇒

$$\begin{aligned}
\eta\cdot\tilde{N}_t &= -\sigma\cdot\tilde{Y}_t + \tilde{w}_t\\
&= -\sigma\cdot\tilde{Y}_t + \tilde{mc}_t + \tilde{A}_t,
\end{aligned}$$

引入式(2.51)替代 LHS 的 $\tilde{N}_t$，引入式(2.44)替代 RHS 的 $\tilde{A}_t$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{mc}_t &= (\sigma+\eta)\cdot\tilde{Y}_t-(1+\eta)\cdot\tilde{A}_t\\ &= (\sigma+\eta)\cdot\tilde{Y}_t-\left(\frac{\sigma+\eta}{1+\eta}\right)\cdot\tilde{Y}_t^f\cdot(1+\eta)\\ &= (\sigma+\eta)\cdot\left(\tilde{Y}_t-\tilde{Y}_t^f\right)\\ &= (\sigma+\eta)\cdot\tilde{X}_t, \end{aligned} \tag{2.53}$$

式(2.53) LHS 是 fixed steady state price markup 的倒数 $(\epsilon-1)/\epsilon$。

1. $\tilde{X}_t = 0 \Rightarrow \tilde{mc}_t = 0 \Rightarrow mc_t \equiv mc = \frac{\epsilon-1}{\epsilon} \Rightarrow$ price markups 等于 desired steady state fixed price markup $\frac{\epsilon}{\epsilon-1}$
2. $\tilde{X}_t < 0 \Rightarrow Y_t < Y_t^f \Rightarrow \tilde{mc}_t < mc \Rightarrow$ 实际边际成本小于 steady state fixed price markup，$mc_t < \frac{\epsilon}{\epsilon-1} \Rightarrow$ 该经济体 is more distorted。

辅助变量 $x_{1,t}$ 式(2.18) $\Rightarrow$

$$\ln x_{1,t} = \ln\left[Y_t^{1-\sigma}\cdot mc_t+\phi\cdot\beta\cdot E_t\cdot(1+\pi_{t+1})^{\epsilon}\cdot x_{1,t+1}\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{x_{1,t}-x_1}{x_1} = \frac{1}{x_1}\cdot\{&\left[(1-\sigma)\cdot Y^{-\sigma}\cdot mc\right]\cdot(Y_t-Y)\\ &+Y^{1-\sigma}\cdot(mc_t-mc)\\ &+\left[\phi\cdot\beta\cdot\epsilon\cdot(1+\pi)^{\epsilon-1}\cdot x_1\right]\cdot E_t(\pi_{t+1}-\pi)\\ &+\left[\phi\cdot\beta\cdot(1+\pi)^{\epsilon}\right]\cdot E_t(x_{1,t+1}-x_1)\}, \end{aligned} \tag{2.54}$$

由式(2.18)可得，在 $\pi = 0$ 时

$$x_1 = \frac{Y^{-\sigma}\cdot mc}{1-\phi\cdot\beta}, \tag{2.55}$$

联立(2.54)-(2.55)得

$$\tilde{x}_{1,t} = (1-\sigma)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot\tilde{Y}_t+(1-\phi\cdot\beta)\cdot\tilde{mc}_t+\epsilon\cdot\phi\cdot\beta\cdot E_t\tilde{\pi}_{t+1}+\phi\cdot\beta\cdot E_t\tilde{x}_{1,t+1}. \tag{2.56}$$

辅助变量 $x_{2,t}$ 式(2.19) $\Rightarrow$

$$\ln x_{2,t} = \ln\left[Y_t^{1-\sigma}+\phi\cdot\beta\cdot E_t\left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon-1}\cdot x_{2,t+1}\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{x_{2,t}-x_2}{x_2} = \frac{1}{x_2}\cdot\{&\left[(1-\sigma)\cdot Y^{-\sigma}\right]\cdot(Y_t-Y)\\ &+\left[\phi\cdot\beta\cdot E_t(\epsilon-1)\cdot(1+\pi)^{\epsilon-2}\cdot x_2\right]\cdot(\pi_{t+1}-\pi)\\ &+\left[\phi\cdot\beta\cdot E_t(1+\pi)^{\epsilon-1}\right]\cdot\left(x_{2,t+1}-x_2\right), \end{aligned} \tag{2.57}$$

由式(2.19)可得，在 $\pi = 0$ 时

$$x_2 = \frac{Y^{-\sigma}}{1-\phi\cdot\beta} \tag{2.58}$$

联立式(2.57)-(2.58)得

$$\tilde{x}_{2,t} = (1-\sigma)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot\tilde{Y}_t + (\epsilon-1)\cdot\phi\cdot\beta\cdot E_t\tilde{\pi}_{t+1} + \phi\cdot\beta\cdot E_t\tilde{x}_{2,t+1}. \tag{2.59}$$

将式(2.59)-(2.59)代入式(2.21)得

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_t^{\#} - \tilde{\pi}_t &= \tilde{x}_{1,t} - \tilde{x}_{2,t} \\ &= (1-\phi\cdot\beta)\cdot\tilde{mc}_t + \phi\cdot\beta\cdot E_t\tilde{\pi}_{t+1} + \phi\cdot\beta\cdot E_t\left(\tilde{x}_{1,t+1} - \tilde{x}_{2,t+1}\right).\end{aligned} \tag{2.60}$$

式(2.50)与(2.60)联立，可得 Reset price inflation 式

$$\tilde{\pi}_t = \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot\tilde{mc}_t + \beta\cdot E_t\tilde{\pi}_{t+1}. \tag{2.61}$$

式(2.61)又被称为 New Keynesian Philips Curve (NKPC)，它反映了中央银行对产出和通货膨胀的 trade off。也可以用式(2.53)中的 output gap $\tilde{X}_t$ 代替边际成本 mc_t，NKPC 改写为

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_t &= \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot\left[(\sigma+\eta)\cdot\left(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^f\right)\right] + \beta\cdot E_t\tilde{\pi}_{t+1} \\ &= \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot\left[(\sigma+\eta)\cdot\tilde{X}_t\right] + \beta\cdot E_t\tilde{\pi}_{t+1}.\end{aligned} \tag{2.62}$$

或者，around a zero inflation steady state，用 forward-looking 形式表现 NKPC

$$\tilde{\pi}_t = \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\beta^s\cdot\tilde{mc}_{t+s} \tag{2.63}$$

$$= \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot(\sigma+\eta)\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\beta^s\cdot\tilde{X}_{t+s}. \tag{2.64}$$

Keynesian PC curve 反映了通货膨胀率和边际成本之间的对应关系。NKPC 的“新”体现在其 forward-looking 的特征上。式(2.63)表明当前通货膨胀率和对未来实际边际成本的贴现值之间呈等比关系，边际成本表现为 price markup 的倒数。在价格是完全浮动的情况下 $\phi = 0$，企业会根据 desired constant markups 给产品定价；如果企业预期未来的边际成本会增加，那么在定价时就会相应调低 price markups。在存在价格粘性的情况下 $\phi > 0$，有机会在当前 t 期调整价格的企业，便会提前提高产品价格（以避免在未来 $t+s$ 时间期内无法再次调整产品售价），以达到他们的 desired price markup，这造成了通货膨胀。反之亦然。

NKPC curve 的“斜率”与 ϕ 负相关。随着 ϕ 逐渐降低，NKPC 线越来越陡峭。当 $\phi \to 0$ 时，perfectly flexible price，NKPC 线完全垂直，此时 $\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_t^f$，$\tilde{mc}_t = 0$。

Exogenous productivity shock 式(2.24) $\Rightarrow$

$$\tilde{A}_t = \rho_a\cdot\tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_{a,t}. \tag{2.65}$$

Taylor rule 式(2.46) $\Rightarrow$

$$\tilde{i}_t = \rho_i\cdot\tilde{i}_{t-1} + (1-\rho_i)\cdot\left[\phi_\pi\cdot\tilde{\pi}_t + \phi_x\cdot\tilde{X}_t\right]. \tag{2.66}$$

2.9.2 线性模型

作线性近似处理后的经济系统，表述为如下 5 个变量 $\left(\tilde{Y}_t, \tilde{i}_t, \tilde{\pi}_t, \tilde{Y}_t^f, \tilde{A}_t\right)$，5 个等式线性 Euler equation，反映总量需求的 NKIS 式(2.47) ⇒

$$\tilde{Y}_t = E_t\tilde{Y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - E_t\tilde{\pi}_{t+1}\right).$$

反映总量供应的 NKPC 式(2.61)或 (2.62) ⇒

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_t &= \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot\tilde{mc}_t + \beta\cdot E_t\tilde{\pi}_{t+1}\\ &= \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\cdot(1-\phi\cdot\beta)\cdot\left[(\sigma+\eta)\cdot\tilde{X}_t\right] + \beta\cdot E_t\tilde{\pi}_{t+1}.\end{aligned}$$

辅助变量，反映 flexible price 下的产出水平，式(2.52) ⇒

$$\tilde{Y}_t^f = \frac{1+\eta}{\sigma+\eta}\cdot\tilde{A}_t.$$

Exogenous productivity shock 式(2.24) ⇒

$$\tilde{A}_t = \rho_a\cdot\tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_{a,t}.$$

反映货币政策的 Taylor rule 式(2.46) ⇒

$$\tilde{i}_t = \rho_i\cdot\tilde{i}_{t-1} + (1-\rho_i)\cdot\left[\phi_\pi\cdot\tilde{\pi}_t + \phi_x\cdot\tilde{X}_t\right].$$

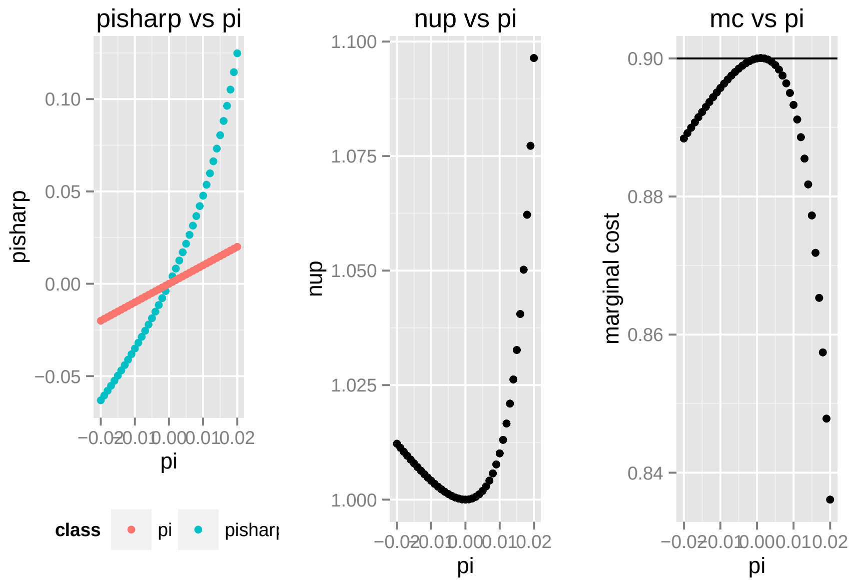

图 2.1: 数值模拟：$\{\pi^{\#}, \nu^p\}$ vs π。模拟过程中设参数值 $\phi = 0.25$，$\epsilon = 10$，$\beta = 0.99$。

第三章　Medium-Sized DSGE 模型

3.1　产品的生产部门

3.1.1　最终产品生产部门

最终产品生产部门以中间产品 $Y_t(i), i \in (0,1)$ 的组合为投入要素，产出 Y_t，符合完全竞争假定。Dixit and Stiglitz (1977) 形式的生产规模报酬不变生产函数为

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_t(i)^{\frac{\varepsilon_f - 1}{\varepsilon_f}} di\right]^{\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - 1}}, \tag{3.1}$$

其中 ε_f 表示 i^{th} 中间产品的替代弹性。

最终产品厂商问题：在给定中间产品价格 $P_t(i)$ 的情况下，通过选择 $Y_t(i)$ 的投入追求利润最大化

$$\max_{Y_t(i)} P_t \cdot Y_t - \int_0^1 P_t(i) \cdot Y_t(i) di.$$

引入式(2.6)，FOC 整理可得对 i 中间产品的需求函数

$$Y_t(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon_f} \cdot Y_t, \tag{3.2}$$

进而根据完全竞争市场假定

$$\begin{aligned}
P_t \cdot Y_t &\equiv \int_0^1 P_t(i) \cdot Y_t(i) di \\
&= \left[\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon_f} \cdot Y_t \cdot P_t(i) di\right] \\
&= \left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon_f} di\right] \cdot P_t^{\varepsilon_f} \cdot Y_t,
\end{aligned}$$

整理得最终产品价格的决定 (aggregate price index)：

$$P_t = \left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon_f} di\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_f}} \tag{3.3}$$

3.1.2 中间产品生产部门

每个 i^{th} 中间产品有且只有一个生产者，处于垄断竞争状态，视式(3.2)-(2.9)为需求函数和价格；最终产品的总产出 Y_t 和总价格 P_t 是外生的。i^{th} 中间品生产者的生产函数为

$$Y_t(i) = K_t(i)^{\alpha} \cdot [z_t \cdot H_t(i)]^{1-\alpha} - z_t^{+} \cdot \varphi, \tag{3.4}$$

其中投入要素 $H_t(i)$ 和 $K_t(i)$ 分别表示同质的劳动力和实物资本服务，产出系数 $0 < \alpha < 1$。z_t 和 Ψ_t 分别表示 neutral 和 investment-specific 类型的随机技术冲击，见第3.1.7节。φ 为生产的固定成本；z_t^{+} 定义如下

$$z_t^{+} = \Psi_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z_t, \tag{3.5}$$

可见沿着非随机的稳态增长路径，$Y_t(i)/z_t^{+}$ 收敛至常数[1]。

i^{th} 中间产品生产者雇佣同质劳动服务 $H_t(i)$，假定生产者必须 100% 借款来支付工资，根据Christiano et al. (2005) 的 working capital channel 设定加以简化 ($v_t = 0, \psi = 1$)，每一单位劳动服务的成本等于

$$cost = (1 - v_t) \cdot (1 - \psi + \psi \cdot R_t) \cdot W_t = R_t \cdot W_t,$$

其中 W_t 和 R_t 分别表示总量水平上的名义工资和 working capital 借贷的名义利率[2]。

经济体受到的外部技术冲击有二，分别为 z_t 和 Ψ_t，均假定为对数形式的单位根过程[3]：

$$\Delta \log z_t = \mu_z + \varepsilon_{z,t}, E(\varepsilon_{z,t}) = \sigma_z^2, \tag{3.6}$$

$$\Delta \log \Psi_t = (1 - \rho_\Psi) \cdot \mu_\Psi + \rho_\Psi \cdot \Delta \log \Psi_{t-1} + \varepsilon_{\Psi,t}, E(\varepsilon_{\Psi,t}) = \sigma_\Psi^2. \tag{3.7}$$

[1] 膏按：模型引入固定成本的设定，以及采取一个变量乘以一个常量形式设定的考虑。模型假定中间产品生产者处于垄断地位，且假定没有进出 (no entry and exit)，以确保垄断利润得以长期持续，因此在中间产品生产函数中引入常数固定生产成本 φ，使得稳态利润是零，被固定成本抵消，维持 no entry 的假设成立。但这需要 fixed cost 的增速与产出增速相等，由此对常数 φ 额外乘以一个系数 z_t^{+}。此外经验研究的发现也肯定了这种设定的意义：在引入规模报酬递增的情况下，正的货币政策冲击产生后，劳动的生产率随着提高，这与对现实的观测基本接近。

[2] Working Capital Channel 可追溯至Basu (1995)。Christiano et al. (2005) 对资本和劳动服务的 working capital 做了建模。近期研究可见Phaneuf et al. (2015)。根据不含 working capital channel 的 DSGE 模型模拟出来的结果，对经济体注入正的货币政策冲击会导致通货膨胀率有大幅度的提升，而现实世界中通货膨胀并没有上升的如此剧烈。Christiano et al. (2005) 因此引入了 working capital channel 设定以缓解该问题，其思路如下：正的货币政策冲击降低了名义利率，进而降低企业进行外部融资（支付员工工资）的边际成本，而边际成本对企业价格决策的制定至关重要。一系列对经济现实的 VAR-based 观察发现，扩张性货币政策冲击出现后的初期，通货膨胀率出现小幅的下降。这从侧面印证了 working capiutal channel 假设的重要性，除了可能存在计量意义上的设定失误之外，恐怕只有 working capital channel 的假设可以解释它了。计量意义上的设定失误，Sims (1992) 最早提出这种可能；Christiano et al. (1999) 进一步探讨了该可能性；另外可见Bernanke et al. (2005)。

[3] 膏按：式(3.6)直接将中性技术进步定义为有 drift 的随机游走过程，依据如下：

1. estimation 部分，Smets and Wouters (2003) 估计 $\log z_t$ 发现它高度自相关，
2. Prescott (1986) 的经验研究，
3. Fernald (2009) 对美国经济部门的经验研究发现，1947 年第 2 季度到 2009 年第三季度 TFP 增速的一阶自回归系数为 0.0034。

3.1.3 中间产品生产者的边际成本

i^{th} 中间产品生产者的最优行为表现为两阶段优化。第一阶段是成本最小化，选择合适的投入要素 $\{K_t(i), H_t(i)\}$ 数量，生产出满足最终产品生产部门需求的 $Y_t(i)$。投入要素价格分别为市场给定的 $\bar{R}_t$ 及 $\bar{W}_t$，

$$\min_{K_t(i),H_t(i)} \bar{W}_t \cdot H_t(i) + \bar{R}_t \cdot K_t(i),$$
$$st. \quad Y_t(i) = K_t(i)^\alpha \cdot [z_t \cdot H_t(i)]^{1-\alpha} - z_t^+ \cdot \varphi.$$

建 Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{W}_t \cdot H_t(i) + \bar{R}_t \cdot K_t(i) + \lambda_t \cdot \left\{ Y_t(i) - K_t(i)^\alpha \cdot [z_t \cdot H_t(i)]^{1-\alpha} + z_t^+ \cdot \varphi \right\}.$$

FOCs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_t(i)} = 0 \Rightarrow \bar{W}_t = \lambda_t \cdot (1-\alpha) \cdot z_t^{1-\alpha} \cdot H_t(i)^{-\alpha} \cdot K_t(i)^\alpha, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t(i)} = 0 \Rightarrow \bar{R}_t = \lambda_t \cdot \alpha \cdot z_t^{1-\alpha} \cdot H_t(i)^{1-\alpha} \cdot K_t(i)^{\alpha-1}. \tag{3.9}$$

式(3.8)- (3.9)可得

$$\frac{\bar{W}_t}{\bar{R}_t} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{K_t(i)}{H_t(i)}\right). \tag{3.10}$$

由式(3.10)可得

$$\frac{K_t(i)}{H_t(i)} \equiv \frac{K_t}{H_t}, \quad \forall i, \tag{3.11}$$

即所有中间产品生产者以及总量层面上的投入要素之比相等。

将式(3.10)带回生产函数式(2.10)，得

$$Y_t(i) + z_t^+ \cdot \varphi = z_t^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\bar{W}_t}{\bar{R}_t}\right)^{-(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-(1-\alpha)} \cdot K_t(i) = z_t^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\bar{W}_t}{\bar{R}_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha} \cdot H_t(i).$$

进而最优投入要素的数量

$$K_t(i) = \left[Y_t(i) + z_t^+ \cdot \varphi\right] \cdot z_t^{-(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\bar{W}_t}{\bar{R}_t}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha},$$
$$H_t(i) = \left[Y_t(i) + z_t^+ \cdot \varphi\right] \cdot z_t^{-(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\bar{W}_t}{\bar{R}_t}\right)^{-\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha}.$$

i^{th} 中间产品生产者的成本函数

$$C(Y_t(i), K_t(i), H_t(i)) = \bar{W}_t \cdot H_t(i) + \bar{R}_t \cdot K_t(i) = \left(Y_t(i) + z_t^+ \cdot \varphi\right) \cdot z_t^{-(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\bar{W}_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\bar{R}_t}{\alpha}\right)^{\alpha}. \tag{3.12}$$

因此名义边际成本 $S_t(i)$ 等于

$$S_t(i) = \frac{\partial C(Y_t(i), K_t(i), H_t(i))}{\partial Y_t(i)} = z_t^{-(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\bar{W}_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\bar{R}_t}{\alpha}\right)^{\alpha}, \tag{3.13}$$

类似地，$S_t(i) \equiv S_t, \forall i$。

根据定义，投入要素的市场价格

$$\bar{W}_t = (1 - v_t) \cdot (1 - \psi + \psi \cdot R_t) \cdot W_t, \tag{3.14}$$

$$\bar{R}_t = (1 - v_t) \cdot (1 - \psi + \psi \cdot r_t^k) \cdot P_t \tag{3.15}$$

引入 $v_t = 0, \psi = 1$ 的设定后，实际边际成本 s_t 等于

$$s_t \equiv \frac{S_t}{P_t} = \frac{\left(\frac{R_t \cdot W_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{r_t^k \cdot P_t}{\alpha}\right)^{\alpha}}{z_t^{1-\alpha} \cdot P_t}. \tag{3.16}$$

引入式 (A.11)、(A.10)、(3.5)后，式(3.16)改写为 scaled 形式

$$s_t = \frac{\left(\frac{R_t \cdot \left(\bar{w}_t \cdot z_t^+ \cdot P_t\right)}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\left(\frac{\bar{r}_t^k}{\Psi_t}\right) \cdot P_t}{\alpha}\right)^{\alpha}}{z_t^{1-\alpha} \cdot P_t} = \left(\frac{\bar{w}_t \cdot R_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\bar{r}_t^k}{\alpha}\right)^{\alpha}. \tag{3.17}$$

此外，根据 productive efficiency，生产额外 1 单位 $Y_t(i)$ 的边际成本 s_t，等于雇佣额外 1 单位劳动的成本 $W_t \cdot R_t$，除以劳动的名义边际产出 $P_t \cdot \frac{\partial Y_t(i)}{\partial H_t(i)}$，即

$$\begin{aligned}
s_t &= \frac{W_t \cdot R_t}{P_t \cdot \frac{\partial Y_t(i)}{\partial H_t(i)}} \\
&= \frac{\left(\bar{w}_t \cdot z_t^+ \cdot P_t\right) \cdot R_t}{(1-\alpha) \cdot \left[\frac{K_t(i)}{H_t(i)}\right]^{\alpha} \cdot z_t^{1-\alpha} \cdot P_t} \\
&= \frac{\bar{w}_t \cdot R_t \cdot z_t^+ \cdot P_t}{(1-\alpha) \cdot \left[\frac{\frac{k_t(i)}{z_{t-1}^+ \cdot \Psi_{t-1}}}{H_t(i)}\right]^{\alpha} \cdot \left(z_t^+ \cdot \Psi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} \cdot P_t} \\
&= \frac{\bar{w}_t \cdot R_t}{(1-\alpha) \cdot \left[\frac{k_t(i)}{H_t(i) \cdot \mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\Psi,t}}\right]^{\alpha}} \\
&= \frac{\bar{w}_t \cdot R_t \cdot z_t^+ \cdot P_t}{(1-\alpha) \cdot \left[\frac{\frac{k_t(i)}{z_{t-1}^+ \cdot \Psi_{t-1}}}{H_t(i)}\right]^{\alpha} \cdot \left(z_t^+ \cdot \Psi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} \cdot P_t} \\
&= \frac{\bar{w}_t \cdot R_t}{(1-\alpha) \cdot \left[\frac{k_t}{H_t \cdot \mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\Psi,t}}\right]^{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中最后一个等号利用式(3.34)消除异质性。

3.1.4 中间产品生产者的定价

updating 生产者的定价策略

价格刚性。假定在 t 时期，有 $0 \leq \phi_f \leq 1$ 比例的中间产品生产者 $i \in [0, 1]$ 无法调整价格；有 $1 - \phi_f$ 比例的生产者不可以调整价格。可以调整价格的中间产品垄断生产者，其 forward-looking

问题可以描述为，制定合理的垄断价格 $P_t^{\#}(i)$ 以满足利润最大化

$$\max_{P_t^{\#}(i)} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot v_{t+j} \cdot \left[P_t^{\#}(i) \cdot Y_{t+j}(i) - P_{t+j} \cdot s_{t+j} \cdot Y_{t+j}(i) \right], \tag{3.19}$$

st. 对 i^{th} 中间产品的需求式(3.2)。s_t 的定义见式 (3.17)。中括号中的内容为 $t+j$ 时刻 i^{th} 生产者的利润；$\beta^j \cdot v_{t+j}$ 为家庭部门跨期预算约束条件的乘数[4]，满足 $v_t = \frac{\partial U_t(\cdot)/\partial C_t}{P_t}$。[5]

引入式(3.2)替代 $Y_{t+j}(i)$，整理得

$$\begin{aligned}
&\max_{P_t^{\#}(i)} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot \left(\frac{U_{C,t+j}}{P_{t+j}} \right) \cdot \left(\frac{P_{t+j}^{\#}(i)}{P_{t+j}} \right)^{-\varepsilon_f} \cdot Y_{t+j} \cdot \left[P_t^{\#}(i) - P_{t+j} \cdot s_{t+j} \right] \\
= &\max_{P_t^{\#}(i)} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot (U_{C,t+j} \cdot Y_{t+j}) \cdot \left[P_t^{\#}(i)^{-(\varepsilon_f - 1)} \cdot P_{t+j}^{\varepsilon_f - 1} - P_t^{\#}(i)^{-\varepsilon_f} \cdot P_{t+j}^{\varepsilon_f} \cdot s_{t+j} \right].
\end{aligned}$$

FOC wrt $P_t^{\#}(i)$,

$$\begin{aligned}
&[-(\varepsilon_f - 1)] \cdot \max_{P_t^{\#}(i)} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot (U_{C,t+j} \cdot Y_{t+j}) \cdot \left[P_t^{\#}(i)^{-\varepsilon_f} \cdot P_{t+j}^{\varepsilon_f - 1} \right] \\
= &- \varepsilon_f \cdot \max_{P_t^{\#}(i)} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot (U_{C,t+j} \cdot Y_{t+j}) \cdot \left[P_t^{\#}(i)^{-\varepsilon_f - 1} \cdot P_{t+j}^{\varepsilon_f} \cdot s_{t+j} \right]
\end{aligned}$$

整理得

$$P_t(i)^{\#} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - 1} \cdot \frac{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot (U_{C,t+j} \cdot Y_{t+j}) \cdot \left(P_{t+j}^{\varepsilon_f} \cdot s_{t+j} \right)}{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot (U_{C,t+j} \cdot Y_{t+j}) \cdot \left(P_{t+j}^{\varepsilon_f - 1} \right)}. \tag{3.20}$$

式(3.20)的 RHS 与个体企业 i^{th} 无关；因此 $P_t(i)^{\#} \equiv P_t^{\#}, \forall i$。

定义两个辅助变量 $X_{1,t}^f$，$X_{2,t}^f$

$$X_{1,t}^f \equiv E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot (U_{C,t+j} \cdot Y_{t+j}) \cdot \left(P_{t+j}^{\varepsilon_f} \cdot s_{t+j} \right) = U_{C,t} \cdot Y_t \cdot P_t^{\varepsilon_f} \cdot s_t + \phi_f \cdot \beta \cdot E_t X_{1,t+1}^f, \tag{3.21}$$

$$X_{2,t}^f \equiv E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_f \cdot \beta)^j \cdot (U_{C,t+j} \cdot Y_{t+j}) \cdot \left(P_{t+j}^{\varepsilon_f - 1} \right) = U_{C,t} \cdot Y_t \cdot P_t^{\varepsilon_f - 1} + \phi_f \cdot \beta \cdot E_t X_{2,t+1}^f. \tag{3.22}$$

进一步对辅助变量作 scaling

$$\begin{aligned}
x_{1,t}^f \equiv& \frac{X_{1,t}^f}{P_t^{\varepsilon_f}} \\
&= U_{C,t} \cdot Y_t \cdot s_t + \phi_f \cdot \beta \cdot E_t (1 + \pi_{t+1})^{\varepsilon_f} \cdot x_{1,t+1}^f, \\
&= \psi_{z^+,t} \cdot y_t \cdot s_t + \phi_f \cdot \beta \cdot E_t (1 + \pi_{t+1})^{\varepsilon_f} \cdot x_{1,t+1}^f.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

[4]中间产品生产部门的垄断利润，假设全部返回家庭部门；家庭部门基于自己的消费偏好作跨期消费决策；因此对于 i^{th} 来说，$\beta^j \cdot v_{t+j}$ 是外生给定的。

[5]膏按：补一个 eqref，嵌到 hh 部门的 max problem 上去。

$$
\begin{aligned}
x_{2,t}^{f} &\equiv \frac{X_{2,t}}{P_t^{\varepsilon_f-1}} \\
&= U_{C,t}\cdot Y_t + \phi_f\cdot\beta\cdot E_t(1+\pi_{t+1})^{\varepsilon_f-1}\cdot x_{2,t+1}^{f} \\
&= \psi_{z^+,t}\cdot y_t + \phi_f\cdot\beta\cdot E_t(1+\pi_{t+1})^{\varepsilon_f-1}\cdot x_{2,t+1}^{f}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

其中上两式的最后一个等号根据式(3.76)、(A.9)和(A.13)求得

$$
U_{C,t}\cdot Y_t = (v_t\cdot P_t)\cdot\left(z_t^{+}\cdot y_t\right) = \psi_{z^+,t}\cdot y_t, \tag{3.25}
$$

式(3.20)因此变为

$$
P_t^{\#} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f-1}\cdot\frac{X_{1,t}^{f}}{X_{2,t}^{f}} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f-1}\cdot\frac{x_{1,t}^{f}}{x_{2,t}^{f}}\cdot P_t. \tag{3.26}
$$

定义 reset price inflation $1+\pi_t^{\#}\equiv\frac{P_t^{\#}}{P_{t-1}}$，则式(3.26)两侧同时除以 P_{t-1} 得

$$
(1+\pi_t^{\#}) = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f-1}\cdot(1+\pi_t)\cdot\frac{x_{1,t}^{f}}{x_{2,t}^{f}}. \tag{3.27}
$$

Aggregate Price Index

利用 Calvo pricing 方法 (Calvo, 1983)，aggregate price index 式(2.9)可以改写为

$$
P_t^{1-\varepsilon_f} = \int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon_f}di = \int_0^{1-\phi_f} P_t^{\#,1-\varepsilon_f}di + \int_{1-\phi_f}^{1} p_{t-1}(i)^{1-\varepsilon_f}di = (1-\phi_f)\cdot P_t^{\#,1-\varepsilon_f} + \phi_f\cdot P_{t-1}^{1-\varepsilon_f}.
$$

等式两侧同时除以 $P_{t-1}^{1-\varepsilon_f}$，整理得

$$
(1+\pi_t^{\#}) = \left[\frac{(1+\pi_t)^{1-\varepsilon_f}-\phi_f}{1-\phi_f}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_f}}. \tag{3.28}
$$

式(3.27)与式(3.28)联立，整理可得

$$
\left[\frac{1-\phi_f\cdot(1+\pi_t)^{\varepsilon_f-1}}{1-\phi_f}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_f}} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f-1}\cdot\frac{x_{1,t}^{f}}{x_{2,t}^{f}}. \tag{3.29}
$$

3.1.5 price dispersion index

Medium-sized DSGE 模型中，同质总产出 Y_t^{sum} 是 i^{th} 种中间产品产出 $Y_t(i)$ 之和，结合式(3.4)可得

$$\begin{aligned} Y_t^{sum} &= \int_0^1 Y_t(i)di \\ &= \int_0^1 \left[(z_t \cdot H_t(i))^{1-\alpha} \cdot K_t(i)^\alpha - z_t^+ \cdot \varphi\right] di \\ &= \int_0^1 \left[z_t^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{K_t(i)}{H_t(i)}\right)^\alpha \cdot H_t(i) - z_t^+ \cdot \varphi\right] di \\ &= z_t^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{K_t}{H_t}\right)^\alpha \cdot \int_0^1 H_t(i)di - z_t^+ \cdot \varphi \\ &= z_t^{1-\alpha} \cdot K_t^\alpha \cdot H_t^{1-\alpha} - z_t^+ \cdot \varphi, \end{aligned} \tag{3.30}$$

其中 K_t 和 H_t 分别表示经济体中同质资本服务品和同质劳动力的数量。成本最小化的中间产品企业面临相同的要素价格，因此致力于雇佣同等比例的资本-劳动投入品进行生产，最后一个等号因此消除了企业 i 的异质性。市场出清情况下对中间产品的总需求式(3.2)等于总供应式(3.30)，整理得

$$Y_t = \frac{z_t^{1-\alpha} \cdot K_t^\alpha \cdot H_t^{1-\alpha} - z_t^+ \cdot \varphi}{\int_0^1 \left(\frac{p_t(i)}{p_t}\right)^{-\varepsilon_f} di} = \frac{z_t^{1-\alpha} \cdot K_t^\alpha \cdot H_t^{1-\alpha} - z_t^+ \cdot \varphi}{\nu_t^f}. \tag{3.31}$$

其中定义了产品价格的分布指标 $\nu_t^f \geq 1$。当 $\nu_t^f = 1$ 时，不存在 price dispersion，实际总产出最大。利用 calvo pricing 可得

$$\begin{aligned} \nu_t^f &\equiv \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon_f} di \\ &= \int_0^{1-\phi_f} \left(\frac{P_t^{\#}}{P_t}\right)^{-\varepsilon_f} di + \int_{1-\phi_f}^1 \left(\frac{P_{t-1}(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon_f} di \\ &= (1-\phi_f) \cdot \left[\frac{1+\pi_t}{1+\pi_t^{\#}}\right]^{\varepsilon_f} + \phi_f \cdot (1+\pi_t)^{\varepsilon_f}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

式(3.28)与式(3.32)联立得

$$\nu_t^f = (1-\phi_f) \cdot \left[\frac{1-\phi_f \cdot (1+\pi_t)^{\varepsilon_f - 1}}{1-\phi_f}\right]^{\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - 1}} + \phi_f \cdot (1+\pi_t)^{\varepsilon_f} \cdot \nu_{t-1}^f. \tag{3.33}$$

此外，联立式(A.9)、(3.31)和(3.40)可得

$$\begin{aligned} y_t \equiv \frac{Y_t}{z_t^+} &= \frac{1}{\nu_t^f} \cdot \left[\frac{z_t^{1-\alpha} \cdot K_t^\alpha \cdot H_t^{1-\alpha}}{z_t^+} - \varphi\right] \\ &= \end{aligned} \tag{3.34}$$

结合式(3.40)、式(3.68)，可将式(3.34)变为如下 scale 形式

$$y_t = \frac{1}{\nu_t^f} \cdot \left[\left(\frac{u_t \cdot \bar{k}_t}{\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\Psi,t}}\right)^\alpha \cdot (h_t \cdot \nu_t^w)^{1-\alpha} - \varphi\right] \tag{3.35}$$

3.1.6 投资的调节成本

$F(I_t, I_{t-1})$ 表示投资的调节成本，定义为

$$F(I_t, I_{t-1}) = \left[1 - S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right] \cdot I_t, \tag{3.36}$$

$S(I_t, I_{t-1})$ 表示为投资的调节成本，也有用实物资本的调节形式表现的。adjustment cost 的详细讨论见第A.3节。隐函数 $S(\cdot)$ 满足 $S(1) = S'(1) = 0$，$S'' = \kappa$ 是个常数，即 DSGE 模型的稳定状态与 κ 系数值无关。

3.1.7 总产出的分配

市场出清条件下总产出的分配

$$Y_t = C_t + \tilde{I}_t + G_t, \tag{3.37}$$

其中 G_t 表示外生的政府支出。C_t 表示家庭消费支出。同质的投资品 $\tilde{I}_t$ 定义式如下

$$\tilde{I}_t \equiv \frac{I_t + a(u_t) \cdot \bar{K}_t}{\Psi_t}, \tag{3.38}$$

同质投资品 $\tilde{I}_t$ 用于形成投资品 I_t。I_t 被家庭部门用于增加下一个时间期的实物资本存量 $\bar{K}_{t+1}$。$a(u_t) \cdot \bar{K}_t$ 是实物资本的维护成本，$0 \leq u_t \leq 1$ 是可变的资本利用率，反映家庭的 variable capital utilization 决策，递增且 convex 的成本函数 $a(u_t)$ 表示对应于 u_t，利用实物资本存量从事生产的成本；在稳定状态下，家庭会设 $u = 1$ 即实物资本 $\bar{K}_t$ 全部用于生产活动，且成本函数 $a(u) = 0$。

unit root 的 investment specific technology shock Ψ_t 程度越大，同等单位 $\tilde{I}_t$ 所能形成的投资品 I_t 越多。Ψ_t 的定义式见 (3.7)。

实物资本服务品 K_t 与实物资本存量 $\bar{K}_t$ 和利用率 u_t 有关:

$$K_t \equiv u_t \cdot \bar{K}_t. \tag{3.39}$$

对式(3.39)作 scale 调整。根据式(3.39)和(A.4)得

$$\begin{aligned} K_t &= u_t \cdot \bar{K}_t \\ &= u_t \cdot \left(\bar{k}_t \cdot z_{t-1}^{+} \cdot \Psi_{t-1}\right) \\ &= \frac{u_t \cdot \bar{k}_t \cdot z_t^{+} \cdot \Psi_t}{\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\Psi,t}}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

进而总产出分配式(3.37)的 scale 形式如下

$$y_t = g_t + c_t + i_t + \frac{a(u_t) \cdot \bar{k}_t}{\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\Psi,t}}. \tag{3.41}$$

可变的资本利用率

如果 $u_t = u$ 即资本利用率是个常数，模型模拟出来的结果显示，通货膨胀率会随着外生货币政策冲击而发生很大波动；然而在实际经济运行过程中观测，往往通货膨胀的波动并没有那么大。在模型中引入可变的资本利用率 u_t，有助于解释通货膨胀对货币政策冲击的响应速度为何缓慢：价格很大程度上由生产成本所决定；生产成本又受到生产要素弹性的影响；如果弹性很大，则一个较小的成本上升即可导致较大的投入要素量变化，从而使得通货膨胀率对货币冲击的响应缓慢且温和。建模时使投入要素弹性变大的方法有很多，其一便是让实物资本利用率是可变的，可以使实物资本服务品更有弹性——如果 $a()$ 函数的曲率很低 (very little curvature inthe a function)，那么家庭部门可以在确保成本不大幅度提高的情况下，增加资本服务品的供应。

3.2 家庭部门

家庭部门拥有全部生产资料 (劳动力和实物资本)，向生产部门供应生产资料以获得收入（工资和垄断利润）。假定劳动力市场上存在具有不同特征的异质劳动力 $h_t(j)$，$j \in (0,1)$，且对于 $j' \neq j$，$h_t(j)$ 和 $h_t(j')$（至少部分地）可以相互替代。引入工资粘性的设定 (Erceg et al., 2000)，存在一个垄断者为每一种 $h_t(j)$ 分别定价，并且由于可替代性的存在，其垄断定价的能力受到市场竞争的限制 (Christiano et al., 2010)。

3.2.1 劳动力投入：同质化假定还是异质化假定?

家庭的效用函数中引入劳动力投入 $h_t^{1+\eta}$，反映休闲带来的效用（或者劳动带来的负效用）。幂指数的倒数 $1/\eta$ 反映在保持消费水平不变的情况下，劳动力供应相对于真实工资水平的弹性。宏观经济学研究中 h_t 进而 η 反映何种含义，引起广泛争论。

一种观点是假定经济体中的家庭部门都是同质的，h_t 反映了用就业市场上一个典型劳动者工作时间（小时数），体现了家庭的 labor effort。此时 $1/\eta$ 系数又称 Frisch elasticity of labor supply[6]，描述典型劳动者随着工资的变化，愿意增加或减少的工作时间。

另一种做法是仍然假定家庭部门的同质性，h_t 反映了劳动力市场上的就业人数。$1/\eta$ 描述了额外一个边际劳动者，随着工资的变化，愿意进入或是离开劳动力市场；它不反映某一个特定个人的劳动力供应的弹性。

已有大量基于家庭调查数据的微观层面经验研究发现，Frisch 弹性尽管跨国差异较大，但总的来说值比较小，这往往意味着 $\eta \geq 1$。早期宏观经济的经验研究往往采用这一设定，但存在不足：引入外生冲击后，RBC 模型的结果往往显示，就业的波动要远远大于工资的波动，这与实际观测到的数据不符。并且从（宏观经济学的）道理上讲，理性经济行为者应该对工资的波动做出较有弹性的应对，使得就业率波动小于工资，劳动力供应的弹性较大，$\eta < 1$。

宏观和微观研究中的分歧似乎可以从这个角度来理解：微观层面上的 Frisch elasiticty，和宏观层面上的 labor supply elasticity，所描述的对象并不一致。Rogerson (1988); Hansen (1985) 等

[6]见附录A.2。

人论证了，在 Frisch elasticity of labor supply 等于 0 的情况下，总就业仍然可能随着实际工资的小幅度变化而出现大幅度震荡 (Rogerson and Wallenius, 2009b)。

有鉴于此，Gal提出了新的模型设定思路，随后被Christiano et al. (2010); Mulligan (2001); Krusell et al. (2008, 2011) 等所采用：

- 经济体中每个典型家庭都有大量成员 $j \in (0, 1)$，
- 任何工资水平下的 Frisch labor supply elasticity 都为 0，
- 每个家庭成员只有两个状态，对应两种效用函数：
  - 被雇佣，$\log C_t^{employed} - l^{\eta}$，
  - 失业，$\log C_t^{unemployed}$，

  其中 l 代表对工作厌恶程度：l 越高的家庭成员（老幼病人）越厌恶工作。
- 家庭效用最大化的目标是追求内部所有成员整体效用的最大化，即所有成员无论工作与否，消费水平相等，$C_t = C_t^{employed} = C_t^{unemployed}$。

如果家庭需要提供 H_t 单位劳动力，那么家庭全部成员中，$0 \le l \le H_t$ 的去工作，$l > H_t$ 的不工作。那么对所有 $l \in [0, 1]$ 求积分后，消费水平为 C_t，就业水平为 H_t 的典型家庭的效用函数为 $\log C_t - \frac{H_t^{1+\eta}}{1+\eta}$。

在这样的设定下，H_t 重新表示劳动者的数量，η 不再作为衡量 Frisch 弹性（设为 0）的指标，它表示在受到外部经济环境冲击的情况下，进入或离开劳动力市场的家庭成员变化的弹性。如果 η 比较大，反映出家庭内部各个成员之间厌恶工作的程度差异较大，分布较平均。此时工资的变化只会导致就业量发生较小的变化。如果 η 比较小，反映出家庭内部各个成员中，厌恶工作的差异程度较小，且集中在对于工作不工作无所谓的水平附近，此时工资的变化会导致就业量发生较大的变化。

3.2.2 劳动力承包商

设产品生产部门所需要的同质劳动服务 H_t 由劳动力承包商提供。承包商负责向家庭部门征集一系列具有不同特性 $j \in (0, 1)$ 的劳动力投入 $h_t(j)$，满足生产部门的需求，投入产出关系符合 Dixit-Stiglitz 形式 (Dixit and Stiglitz, 1977)

$$H_t = \left[\int_0^1 h_t(j)^{\frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w}} dj \right]^{\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1}}. \tag{3.42}$$

承包商是完全竞争的，视 W_t 和 H_t 为生产部门所给定，视 $W_t(j)$ 为家庭部门所给定。劳动承包商的最大化问题：

$$\max_{h_t(j)} W_t \cdot H_t - \int_0^1 W_t(j) \cdot h_t(j) dj.$$

引入式(3.42)，FOC 整理得对 $h_t(j)$ 的需求函数

$$h_t(j) = \left(\frac{W_t(j)}{W_t} \right)^{-\varepsilon_w} \cdot H_t. \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
W_t \cdot H_t &\equiv \int_0^1 W_t(j) \cdot h_t(j) dj \\
&= \left[\int_0^1 \left(\frac{W_t(j)}{W_t} \right)^{-\varepsilon_w} \cdot H_t \cdot W_t(j) dj \right] \\
&= \left[\int_0^1 W_t(j)^{1-\varepsilon_w} dj \right] \cdot W_t^{\varepsilon_w} \cdot H_t,
\end{aligned}$$

整理得最终工资的决定 (aggregate wage index):

$$W_t = \left[\int_0^1 W_t(j)^{1-\varepsilon_w} dj \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_w}} \tag{3.44}$$

3.2.3 家庭行为

经济体中存在一系列同质化家庭，相关假定及评述第3.2.1节。一个典型家庭中存在许多成员，对应异质化的劳动力特征 $j \in [0,1]$。诸多家庭劳动承包商供应 $h_t(j)$ 异质劳动力，满足式 (3.43)。诸多家庭的 j^{th} 类型劳动力汇总到垄断竞争的 j^{th} 劳工联盟，由联盟制定工资 $W_t(j)$，见下节[7]。

假定总量层面上，家庭的效用函数表现为

$$U(C_t, h_t) = \log(C_t - b \cdot C_{t-1}) - A \cdot \int_0^1 \frac{h_t(j)^{1+\eta}}{1+\eta} dj. \tag{3.45}$$

效用来自消费和休闲[8]两方面，二者对效用的正效果相加得到总效用函数，是内部可分的 (intratemporal separability)[9]。

（消费）习惯的形成

消费的效应是跨期可分 (intertemporal separability) 的[10]。$b > 0$ 表示 habit persistence parameter[11]，$b = 0$ 时当期效用仅与当期消费有关，habit formation 不存在，模型回到经典的 PIH 模式 (permanent income hypothesis)。$0 < b < 1$ 时，当期效用不仅取决于当期消费水平，还与当期消费相对于过去消费水平的变化程度有关，因此又称消费偏好的习惯形成。

宏观经济模型中引入消费习惯的形成设定，主要是为了减小传统 PIH-based 模型的模拟结果与实际情况间的背离，如：

1. Excess smoothness puzzle。消费习惯越是强 (b 越接近于 1)，在 permanent income 出现波动时，消费水平随之变化的幅度就越小 (Carroll et al., 1997, 2000)。

[7]膏按：补一个 reference。

[8]休闲的效应以劳动的负效果 (disutility) 形式体现，因此用负号。

[9]内部不可分的效用函数的例子，可见King et al. (1988a,b); Greenwood et al. (1988); Guerron-Quintana (2008)。

[10]效用函数中，关于 intertemporal- 和 intratemporal (non)separability 的介绍，可见 Eric Sims(2015) 讲义。

[11]经验研究中常常限定 $b < 1$，这是出于计算方便的需要：如果 $b = 1$，则稳定状态下消费的边际效用就变成无穷大了。

2. Asset pricing 方面的 Equity primium puzzle。消费习惯越是强 (b 越接近于 1)，消费者的行为决策看起来就更加具有风险规避的特征，从而使我们在构建模型时，不必为相对风险规避系数定义一个大的离谱的值，如 $C_t^{1-\sigma}/(1-\sigma)$ 中的 σ：一方面可以设 $\sigma=1$ (σ 越大，消费者越厌恶风险)；另一方面使得消费者行为仍然表现出厌恶风险的特性 (Constantinides, 1990; Boldrin et al., 2001)。

引入消费 habit formation 设定后的 DSGE 模型，其模拟的冲击-响应结果更符合现实 (基于 VAR 对现实数据的观察)：货币政策等外生冲击可以造成消费响应的 hump-shape。而传统 PIH based DSGE 模型中消费的响应往往做不到这一点 (Fuhrer, 2000)。除了消费之外，HF-based DSGE 模型还可以生成实际利率持续下降的结果。

3.2.4 劳工联盟的工资策略

j^{th} 劳工联盟居于垄断竞争地位，满足劳动力承包商对 $h_t(j)$ 的需求式(3.43)。假定价格刚性存在，t 时期有 $0\leq\phi_w\leq 1$ 比例的劳工联盟 $j\in[0,1]$ 无法调整价格。

对于剩下的可以调整价格的 $1-\phi_w$ 联盟而言，名义工资的决定式

$$W_{t+1}(j)\equiv(1+\tilde{\pi}_{w,t+1})\cdot W_t(j), \tag{3.46}$$

其中

$$1+\tilde{\pi}_{w,t+1}\equiv(1+\pi_t)^{\kappa_w}\cdot(1+\pi)^{1-\kappa_w}\cdot\mu_{z^+},\quad 0<\kappa_w<1. \tag{3.47}$$

可以调整工资的垄断劳工联盟，其 forward-looking 问题可以描述为，制定合理的垄断工资 $W_t^{\#}(j)$ 以追求效用最大化

$$\max E_t\sum_{m=0}^{\infty}(\phi_w\cdot\beta)^m\cdot\left[v_{t+m}\cdot W_{t+m}^{\#}(j)\cdot h_{t+m}(j)-A_L\cdot\frac{h_{t+m}(j)^{1+\eta}}{1+\eta}\right], \tag{3.48}$$

中括号中的内容为 $t+j$ 时刻 i^{th} 类型劳动力供应为家庭部门带来的效用；与第3.1.4节类似，$\beta^m\cdot v_{t+m}$ 为家庭部门跨期预算约束条件的乘数，$v_t=\frac{\partial U_t(\cdot)/\partial C_t}{P_t}$。

t 时刻制定的垄断工资直到 $t+m$ 时段都无法再调整，因此由式(3.46)得

$$\begin{aligned}W_{t+m}^{\#}(j)&=W_{t+m-1}^{\#}(j)\cdot(1+\tilde{\pi}_{w,t+m})\\&=W_{t+m-2}^{\#}(j)\cdot(1+\tilde{\pi}_{w,t+m})\cdot(1+\tilde{\pi}_{w,t+m-1})\\&=\dots\\&=W_t^{\#}(j)\cdot\left[(1+\tilde{\pi}_{w,t+m})\cdot\ldots\cdot(1+\tilde{\pi}_{w,t+1})\right].\end{aligned} \tag{3.49}$$

并且

$$\frac{z_{t+m}^+}{z_t^+}=\frac{z_{t+m}^+}{z_{t+m-1}^+}\cdot\frac{z_{t+m-1}^+}{z_{t+m-2}^+}\cdot\ldots\cdot\frac{z_{t+1}^+}{z_t^+}=\mu_{z^+,t+m}\cdot\ldots\cdot\mu_{z^+,t+1}, \tag{3.50}$$

$$\frac{P_{t+m}}{P_t}=\frac{P_{t+m}}{P_{t+m-1}}\cdot\frac{P_{t+m-1}}{P_{t+m-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{P_{t+1}}{P_t}=(1+\pi_{t+m})\cdot\ldots\cdot(1+\pi_{t+1}), \tag{3.51}$$

式(3.49)两侧同时除以 W_{t+m}，引入 scaling 式 (A.10)、(3.50)和 (3.51)得

$$\frac{W^{\#}_{t+m}(j)}{W_{t+m}} = \frac{W^{\#}_{t}(j)\cdot(\tilde{\pi}_{w,t+m}\cdot\ldots\cdot\tilde{\pi}_{w,t+1})}{W_{t+m}} \tag{3.52}$$

$$= \frac{\left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)\cdot\left(\bar{w}_t\cdot z^{+}_{t}\cdot P_t\right)\cdot(\tilde{\pi}_{w,t+m}\cdot\ldots\cdot\tilde{\pi}_{w,t+1})}{\bar{w}_{t+m}\cdot z^{+}_{t+m}\cdot P_{t+m}} \tag{3.53}$$

$$= \left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)\cdot\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\right)\cdot\frac{[(1+\tilde{\pi}_{w,t+m})\cdot\ldots\cdot(1+\tilde{\pi}_{w,t+1})]}{[(1+\pi_{t+m}\cdot\ldots\cdot(1+\pi_{t+1})]\cdot\left[\mu_{z^{+},t+m}\cdot\ldots\cdot\mu_{z^{+},t+1}\right]} \tag{3.54}$$

$$= \left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)\cdot\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\right)\cdot\mathcal{X}_{t,m}, \tag{3.55}$$

其中定义辅助变量

$$\mathcal{X}_{t,m} = \begin{cases} \frac{[(1+\tilde{\pi}_{w,t+m})\cdot\ldots\cdot(1+\tilde{\pi}_{w,t+1})]}{[(1+\pi_{t+m}\cdot\ldots\cdot(1+\pi_{t+1})]\cdot\left[\mu_{z^{+},t+m}\cdot\ldots\cdot\mu_{z^{+},t+1}\right]} & \text{if } m\geq 0, \\ 1 & \text{if } m=0. \end{cases} \tag{3.56}$$

利用式(3.52)可以将式(3.43)改写为

$$h_{t+m}(j) = \left[\left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)\cdot\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\right)\cdot\mathcal{X}_{t,m}\right]^{-\varepsilon_w}\cdot H_{t+m}. \tag{3.57}$$

效用最大化问题式(3.48)改写为

$$\max E_t\sum_{m=0}^{\infty}(\phi_w\cdot\beta)^m\cdot\left[v_{t+m}\cdot W_{t+m}\cdot\left(\frac{W^{\#}_{t+m}(j)}{W_{t+m}}\right)\cdot h_{t+m}(j) - A_L\cdot\frac{h_{t+m}(j)^{1+\eta}}{1+\eta}\right],$$

中括号中的内容进一步调整为

$$\left(\frac{v_{t+m}\cdot W_{t+m}}{\bar{w}_{t+m}}\right)\cdot\left[\bar{w}_t\cdot\left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)\cdot\mathcal{X}_{t,m}\right]\cdot\left[\left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)\cdot\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\right)\cdot\mathcal{X}_{t,m}\right]^{-\varepsilon_w}\cdot H_{t+m}$$
$$- A_L\cdot\frac{1}{1+\eta}\cdot\left[\left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)\cdot\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\right)\cdot\mathcal{X}_{t,m}\right]^{-\varepsilon_w\cdot(1+\eta)}\cdot H^{1+\eta}_{t+m}.$$

并且由式(A.10)、(A.13)得

$$\frac{v_{t+m}\cdot W_{t+m}}{\bar{w}_{t+m}} = v_{t+m}\cdot p_{t+m}\cdot z^{+}_{t+m} = \psi_{z^{+},t+m}.$$

可得调整后的最大化问题式

$$\max E_t\sum_{m=0}^{\infty}(\phi_w\cdot\beta)^m\cdot\{\psi_{z^{+},t+m}\cdot\bar{w}^{1-\varepsilon_w}_{t}\cdot\bar{w}^{\varepsilon_m}_{t+m}\cdot\mathcal{X}^{1-\varepsilon_w}_{t,m}\cdot\left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)^{1-\varepsilon_w}\cdot H_{i,t}$$
$$- \frac{A_L}{1+\eta}\cdot\bar{w}^{-\varepsilon_w\cdot(1+\eta)}_{t}\cdot\bar{w}_{t+m}\cdot\mathcal{X}^{-\varepsilon_w\cdot(1+\eta)}_{t,m}\cdot\left(\frac{W^{\#}_{t}(j)}{W_t}\right)^{-\varepsilon_w\cdot(1+\eta)}\cdot H^{1+\eta}_{t+m}\}. \tag{3.58}$$

设 $w_t^{\#}(j) \equiv W_t^{\#}(j)/W_t$，劳工联盟 FOCs wrt $w_t^{\#}$ ，整理得

$$w_t^{\#}(j)^{1+\varepsilon_w\cdot\eta} = \frac{A_L}{\bar{w}_t}\cdot\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w-1}\cdot\frac{E_t\sum_{m=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi_w)^m\left[\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\cdot\mathcal{X}_{t,m}\right)^{-\varepsilon_w}\cdot H_{t+m}\right]^{1+\eta}}{E_t\sum_{m=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi_w)^m\cdot\psi_{z^+,t+m}\cdot\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\cdot\mathcal{X}_{t,m}\right)^{-\varepsilon_w}\cdot H_{t+m}\cdot\mathcal{X}_{t,m}} \tag{3.59}$$

可见 $W_t^{\#}(j) = W_t^{\#} = W_t, \forall j$，劳工联盟工资策略的异质性特征得以消除。为了进一步简化，定义两个辅助变量[12]

$$x_{1,t}^w \equiv E_t\sum_{m=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi_w)^m\left[\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\cdot\mathcal{X}_{t,m}\right)^{-\varepsilon_w}\cdot H_{t+m}\right]^{1+\eta}, \tag{3.60}$$

$$x_{2,t}^w \equiv E_t\sum_{m=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi_w)^m\cdot\psi_{z^+,t+m}\cdot\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\cdot\mathcal{X}_{t,m}\right)^{-\varepsilon_w}\cdot H_{t+m}\cdot\mathcal{X}_{t,m}. \tag{3.61}$$

对 $x_{1,t}^w$ 的迭代简化

$$\begin{aligned}
x_{1,t}^w &= H_t^{1+\eta} + (\beta\cdot\phi_w)\cdot\left[\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+1}}\cdot\mathcal{X}_{t,1}\right)^{-\varepsilon_w}\cdot H_{t+1}\right]^{1+\eta} + (\beta\cdot\phi_w)^2\cdot\left[\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+2}}\cdot\mathcal{X}_{t,2}\right)^{-\varepsilon_w}\cdot H_{t+2}\right]^{1+\eta} + \dots \\
&= H_t^{1+\eta} + E_t(\beta\cdot\phi_w)\cdot\left[\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+1}}\cdot\frac{(1+\pi)^{1-\kappa_w}\cdot(1+\pi_t)^{\kappa_w}\cdot\mu_{z^+}}{(1+\pi_{t+1})\cdot\mu_{z^+,t+1}}\right]^{-\varepsilon_w\cdot(1+\eta)}\cdot \\
&\left\{H_{t+1}^{1+\eta} + (\beta\cdot\phi_w)\cdot\left[\left(\frac{\bar{w}_{t+1}}{\bar{w}_{t+2}}\cdot\frac{(1+\pi)^{1-\kappa_w}\cdot(1+\pi_{t+1})^{\kappa_w}\cdot\mu_{z^+}}{(1+\pi_{t+2})\cdot\mu_{z^+,t+2}}\right)^{-\varepsilon_w\cdot(1+\eta)}\cdot H_{t+2}^{1+\eta}\right] + \dots\right\} \\
&= H_t^{1+\eta} + (\beta\cdot\phi_w)\cdot E_t\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+1}}\cdot\frac{(1+\pi)^{1-\kappa_w}\cdot(1+\pi_t)^{\kappa_w}\cdot\mu_{z^+}}{(1+\pi_{t+1})\cdot\mu_{z^+,t+1}}\right)^{-\varepsilon_w\cdot(1+\eta)}\cdot x_{1,t+1}^w \\
&= H_t^{1+\eta} + (\beta\cdot\phi_w)\cdot E_t\left(\frac{1+\tilde{\pi}_{w,t+1}}{1+\pi_{w,t+1}}\right)^{-\varepsilon_w\cdot(1+\eta)}\cdot x_{1,t+1}^w,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

其中最后一个等号用到了由式(A.17)而得的衍生:

$$1+\pi_{w,t+1} = \frac{W_{t+1}}{W_t} = \frac{\bar{w}_{t+1}\cdot P_{t+1}\cdot z_{t+1}^+}{\bar{w}_t\cdot P_t\cdot z_t^+} = \frac{\bar{w}_{t+1}}{\bar{w}_t}\cdot(1+\pi_{t+1})\cdot\mu_{z^+,t+1}. \tag{3.63}$$

[12]也可以在此基础上，作工资的 philips 曲线，见第3.4节。

对 $x_{2,t}^w$ 的迭代简化

$$\begin{aligned}
x_{2,t}^w &= \psi_{z^+,t} \cdot H_t + (\beta \cdot \phi_w)\, \psi_{z^+,t+1} \cdot \left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+1}}\right)^{-\varepsilon_w} \cdot \mathcal{X}_{t,1}^{1-\varepsilon_w} \cdot H_{t+1} \\
&+ (\beta \cdot \phi_w)^2\, \psi_{z^+,t+2} \cdot \left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+2}}\right)^{-\varepsilon_w} \cdot \mathcal{X}_{t,2}^{1-\varepsilon_w} \cdot H_{t+2} + \dots \\
&= \psi_{z^+,t} \cdot H_t + (\beta \cdot \phi_w) \cdot \left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+1}}\right)^{-\varepsilon_w} \cdot \left[\frac{(1+\pi)^{1-\kappa_w} \cdot (1+\pi_t)^{\kappa_w} \cdot \mu_{z^+}}{(1+\pi_{t+1}) \cdot \mu_{z^+,t+1}}\right]^{1-\varepsilon_w} \cdot \\
&\left\{\psi_{z^+,t+1} \cdot H_{t+1} + (\beta \cdot \phi_w) \cdot \psi_{z^+,t+2} \cdot \left(\frac{\bar{w}_{t+1}}{\bar{w}_{t+2}}\right)^{-\varepsilon_w} \cdot \left(\frac{(1+\pi)^{1-\kappa_w} \cdot (1+\pi_{t+1})^{\kappa_w} \cdot \mu_{z^+}}{(1+\pi_{t+2}) \cdot \mu_{z^+,t+2}}\right)^{1-\varepsilon_w} \cdot H_{t+2} + \dots\right\} \\
&= \psi_{z^+,t} \cdot H_t + (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t \left(\frac{\bar{w}_{t+1}}{\bar{w}_t}\right) \cdot \left(\frac{1+\tilde{\pi}_{w,t+1}}{1+\pi_{w,t+1}}\right)^{1-\varepsilon_w} \cdot x_{2,t+1}^w \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

其中最后一个等号用到了式(3.63)。

结合辅助变量式(3.62)、(3.64)，可得 repotimizing 劳工联盟的工资

$$w_t^{\#} = \left[\frac{A_L}{\bar{w}_t} \cdot \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1} \cdot \frac{x_{1,t}^w}{x_{2,t}^w}\right]^{\frac{1}{1+\varepsilon_w \cdot \eta}} \qquad (3.65)$$

另一方面，对 Aggregate wage index 式(3.44)作 calvo pricing

$$\begin{aligned}
W_t^{1-\varepsilon_w} &= \int_0^1 W_t(j)^{1-\varepsilon_w} dj \\
&= \int_0^{1-\phi_w} \left[W_t(j)^{\#}\right]^{1-\varepsilon_w} dj + \int_{1-\phi_w}^1 \left[(1+\tilde{\pi}_{w,t}) \cdot W_{t-1}(j)\right]^{1-\varepsilon_w} dj \\
&= (1-\phi_w) \cdot \left(W_t^{\#}\right)^{1-\varepsilon_w} + \phi_w \cdot \left[(1+\tilde{\pi}_{w,t}) \cdot W_{t-1}\right]^{1-\varepsilon_w},
\end{aligned}$$

其中最后一个等号消除 j^{th} 劳工联盟工资定价的异质性特征,见式(3.59)。式两侧同时除以 $W_t^{1-\varepsilon_w}$,整理得

$$w_t^{\#} = \left[\frac{1 - \phi_w \cdot \left(\frac{1+\tilde{\pi}_{w,t}}{1+\pi_{w,t}}\right)^{1-\varepsilon_w}}{1-\phi_w}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_w}}. \qquad (3.66)$$

联立式(3.65)-(3.66)可得工资的决定

$$\frac{A_L}{\bar{w}_t} \cdot \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1} \frac{x_{1,t}^w}{x_{2,t}^w} = \left[\frac{1 - \phi_w \cdot \left(\frac{1+\tilde{\pi}_{w,t}}{1+\pi_{w,t}}\right)^{1-\varepsilon_w}}{1-\phi_w}\right]^{\frac{1+\varepsilon_w \cdot \phi_w}{1-\varepsilon_w}}. \qquad (3.67)$$

3.2.5 wage dispersion index

在市场出清情况下，劳动力承包商所提供的全部同质劳动 H_t 和家庭部门提供的全部异质劳动时间 h_t 的关系为:

$$h_t \equiv \int_0^1 h_t(j) dj = H_t \cdot \int_0^1 \left(\frac{W_t(j)}{W_t}\right)^{-\varepsilon_w} \cdot dj,$$

其中用到了式(3.43)。整理可得

$$H_t = \frac{h_t}{\nu_t^w}, \tag{3.68}$$

其中 wage dispersion index $\nu_t^w \geq 1$

$$\nu_t^w = \int_0^1 \left(\frac{W_t(j)}{W_t}\right)^{-\varepsilon_w} \cdot dj \tag{3.69}$$

反映劳动力市场上各类型 j 劳动力工资的差异程度：差异越大，ν_t^w 值越高，同质的总劳动力产出越小；lower bound $\nu_t^p = 1$ 表明在没有 wage setting friction 时，所有 j 劳工联盟都会设定同样的工资。利用 Calvo pricing 可得

$$\begin{aligned}
v_t^w &= \int_0^1 \left[\frac{W_t(j)}{W_t}\right]^{-\varepsilon_w} dj \\
&= \int_0^{1-\phi_w} \cdot \left[\frac{W_t^{\#}(j)}{W_t}\right]^{-\varepsilon_w} dj + \int_{1-\phi_w}^1 \cdot \left[(1+\tilde{\pi}_{w,t}) \cdot \frac{W_{t-1}(j)}{W_t}\right]^{-\varepsilon_w} dj \\
&= (1-\phi_w) \cdot \left[\frac{W_t^{\#}}{W_t}\right]^{-\varepsilon_w} + \phi_w \cdot (1+\tilde{\pi}_{w,t})^{-\varepsilon_w} \cdot \int_0^1 \cdot \left[\frac{W_{t-1}(j)}{W_{t-1}} \cdot \frac{W_{t-1}}{W_t}\right]^{-\varepsilon_w} dj \\
&= (1-\phi_w) \cdot (w_t^{\#})^{-\varepsilon_w} + \phi_w \cdot \left(\frac{1+\tilde{\pi}_{w,t}}{1+\pi_{w,t}}\right)^{-\varepsilon_w} \cdot v_{t-1}^w \\
&= (1-\phi_w) \cdot \left[\frac{1-\phi_w \cdot \left(\frac{1+\tilde{\pi}_{w,t}}{1+\pi_{w,t}}\right)^{1-\varepsilon_w}}{1-\phi_w}\right]^{\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1}} + \phi_w \cdot \left(\frac{1+\tilde{\pi}_{w,t}}{1+\pi_{w,t}}\right)^{-\varepsilon_w} \cdot v_{t-1}^w
\end{aligned} \tag{3.70}$$

3.2.6 家庭预算约束条件

家庭面临的预算约束条件为[13]

$$P_t \cdot \left(C_t + \frac{1}{\Psi_t} \cdot I_t\right) + B_{t+1} + P_t \cdot P_{k',t} \cdot \Delta_t \leq \int_0^1 W_t(j) \cdot h_t(j) dj + X_t^k \cdot \bar{K}_t + R_{t-1} \cdot B_t, \tag{3.71}$$

其中 B_t 为家庭部门购买的无风险债券。R_t 表示 t_1 时刻购买的债券，在 t 时刻兑现，所对应的名义利率。

3.2.7 资本积累

假定家庭部门

- 是实物资本的所有者，
- 设定实物资本的利用率 (utilization rate)，

[13]膏按：上文所需要的等式。这一章节还需要补充相关文字。

- 并进一步在竞争市场上将其租给 (中间产品) 生产者使用，收益为资本租金，成本为维护成本 (fast depreciation)。

当期资本存量尽管是由前期投资形成的，但家庭部门的当期经济决策仍可更集中/更少地使用已经形成的资本，投入到生产活动中去。决策依据取决于对当前经济形势的观察，和/或对未来的预期。实物资本存量积累式

$$\bar{K}_{t+1} = (1-\delta)\cdot\bar{K}_t + F(I_t, I_{t-1}) + \Delta_t, \tag{3.72}$$

其中折旧率为常数 δ[14]。

将式(3.36)带回式(3.72)，资本积累式可改写为

$$\bar{K}_{t+1} = (1-\delta)\cdot\bar{K}_t + \left[1 - S\cdot\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right]\cdot I_t + \Delta_t. \tag{3.73}$$

Δ_t 表示该家庭从其他家庭购买的“净”实物资本，均衡条件下 $\Delta_t = 0$，模型设定中保留 Δ_t 以便于测算实物资本存量的价值。Δ_t 的市场价格为 $P_t \cdot P_{k',t}$。

利用均衡条件下 $\Delta_t = 0$，以及式，将(A.4)、(A.6)，对上式作 scale

$$\bar{k}_{t+1} = \frac{(1-\delta)\cdot\bar{k}_t}{\mu_{z^+,t}\cdot\mu_{\Psi,t}} + \left[1 - s\cdot\left(\frac{i_t}{i_{t-1}}\cdot\mu_{z^+,t}\cdot\mu_{\Psi,t}\right)\right]\cdot i_t \tag{3.74}$$

资本净收益

t 时期的投资带来 $t+1$ 时期的实物资本积累增加；$\bar{K}_{t+1}$ 每增加 1 单位，给家庭带来的净收益 (net cash payment) X^k_{t+1} 为

$$X^k_{t+1} = u_{t+1}\cdot P_{t+1}\cdot r^k_{t+1} - \frac{P_{t+1}}{\psi_{t+1}}\cdot a(u_{t+1}), \tag{3.75}$$

RHS 前半部分为考虑到资本利用率之后的名义净 rental 收入（扣除掉折旧）；后半部分为使用成本 (capital utilization cost)。P_{t+1}/Ψ_{t+1} 为同质投资品 I_t 的均衡市场价格（名义量），由式(3.37)-(3.38)给出。

3.2.8 家庭部门最大化问题

家庭部门问题可以表示为：选择投入组合 $\{C_t, I_t, \Delta_t, B_{t+1}, \bar{K}_{t+1}, u_t\}$，基于给定的预算约束式(3.71)、资本积累式(3.73)和资本净收益式(3.75)，来追求式(3.45)效用函数最大化。

$$\begin{aligned}
&\max_{\{C_t,\Delta_t,I_t,\bar{K}_{t+1},B_{t+1},u_t\}} \mathcal{L} = E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta\cdot\left\{\ln\left(C_t - b\cdot C_{t-1}\right) - A_L\cdot\frac{\int_0^1 h_t(j)^{1+\eta}}{1+\eta}dj\right.\\
&+ \upsilon_t\cdot\left[\int_0^1 W_t(j)\cdot h_t(j)dj + X^k_t\cdot\bar{K}_t + R_{t-1}\cdot B_t - P_t\cdot C_t - P_t\cdot\frac{I_t}{\Psi_t} - B_{t+1} - P_t\cdot P_{k',t}\cdot\Delta_t\right]\\
&+ \omega_t\cdot\left[\Delta_t + (1-\delta)\cdot\bar{K}_t + \left[1 - S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right]\cdot I_t - \bar{K}_{t+1}\right]\\
&\left.+ \tau_t\cdot\left[u_{t+1}\cdot P_{t+1}\cdot r^k_{t+1} - \frac{P_{t+1}}{\psi_{t+1}}\cdot a(u_{t+1}) - X^k_{t+1}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

[14]膏按：也有将折旧率视为与 u_t 有关的变量，$\delta(u_t)$，补充 reference。

取消异质性 $j \in (0,1)$ 特征。依次求解 FOCs，为表述简便，在不产生歧义的情况下省略式中的期望符号。

FOC wrt C

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C_t - b \cdot C_{t-1}} - \frac{\beta \cdot b}{C_{t+1} - b \cdot C_t} = v_t \cdot P_t, \tag{3.76}$$

代入式(3.5)、(A.7)、(A.3)、(A.13)，进一步整理得

$$\frac{1}{c_t - \frac{b}{\mu_{z^+,t}} \cdot c_{t-1}} - \frac{\beta \cdot b}{\mu_{z^+,t+1} \cdot c_{t+1} - b \cdot c_t} = \psi_{z^+,t}. \tag{3.77}$$

FOC wrt Δ_t

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Delta_t} = 0 \Rightarrow P_t \cdot P_{k',t} = \frac{\omega_t}{v_t}, \tag{3.78}$$

其中 RHS 两个影子价格之比反映了 Tobin's q，见第A.3节。

FOC wrt I

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_t \cdot \left[1 - S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right] \cdot I_t}{\partial I_t} &= \frac{\partial \omega_t \cdot I_t}{\partial I_t} - \frac{\left[\partial \omega_t \cdot I_t \cdot S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right]}{I_t} \\
&= \omega_t - \omega_t \cdot \frac{I_t}{I_{t-1}} \cdot S'\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) - \omega_t \cdot S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) - \frac{\partial \beta \cdot E_t\left\{\omega_{t+1} \cdot I_{t+1} \cdot S\left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)\right\}}{\partial I_t} \\
&= \omega_t - \omega_t \cdot \frac{I_t}{I_{t-1}} \cdot S'\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) - \omega_t \cdot S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) - \beta \cdot E_t\left\{\omega_{t+1} \cdot I_{t+1} \cdot S'\left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right) \cdot (-1) \cdot \frac{I_{t+1}}{I_t^2}\right\} \\
&= \omega_t \cdot \left[1 - S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) - \frac{I_t}{I_{t-1}} \cdot S'\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right] + \beta \cdot E_t\left\{\omega_{t+1} \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)^2 \cdot S'\left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

式(A.13)、(A.12)代入式(3.79)得

$$\omega_t = (v_t \cdot P_t) \cdot (P_{k',t}) = \left(\frac{\psi_{z^+,t}}{z_t^+}\right) \cdot \left(\frac{p_{k',t}}{\Psi_t}\right) \tag{3.80}$$

此外由式(A.6)得

$$\frac{i_t}{i_{t-1}} = \frac{i_t \cdot z_t^+ \cdot \psi_t}{i_{t-1} \cdot z_{t-1}^+ \cdot \psi_{t-1}} = \frac{i_t}{i_{t_1}} \cdot \mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\Psi,t}. \tag{3.81}$$

FOC wrt I_t

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = 0 \Rightarrow \frac{v_t \cdot P_t}{\psi_t} = \frac{\partial \omega_t \cdot \left[1 - S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right] \cdot I_t}{\partial I_t}, \tag{3.82}$$

LHS 代入式(A.13)，RHS 代入式(3.79)、(3.80)得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\psi_{z^+,t}}{z_t^+ \cdot \psi_t} = \frac{\psi_{z^+,t} \cdot p_{k',t}}{z_t^+ \cdot \psi_t} \cdot \mathcal{A} + \beta \cdot E_t \frac{\psi_{z^+,t+1} \cdot p_{k',t+1}}{z_{t+1}^+ \cdot \psi_{t+1}} \cdot \mathcal{B}, \\
&\mathcal{A} \equiv 1 - S\left(\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\psi,t} \cdot \frac{i_t}{i_{t-1}}\right) - S'\left(\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\psi,t} \cdot \frac{i_t}{i_{t-1}}\right) \cdot \left(\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\psi,t} \cdot \frac{i_t}{i_{t-1}}\right), \\
&\mathcal{B} \equiv S'\left(\mu_{z^+,t+1} \cdot \mu_{\psi,t+1} \cdot \frac{i_{t+1}}{i_t}\right) \cdot \left(\mu_{z^+,t+1} \cdot \mu_{\psi,t+1}\right) \cdot \left(\frac{i_{t+1}}{i_t}\right)^2,
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

等式两侧同时乘以 $z_t^+ \cdot \psi_t$，整理得

$$
\begin{aligned}
\psi_{z^+,t} =&\psi_{z^+,t} \cdot p_{k',t} \cdot \left[1 - S\left(\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\psi,t} \cdot \frac{i_t}{i_{t-1}}\right) - S'\left(\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\psi,t} \cdot \frac{i_t}{i_{t-1}}\right) \cdot \left(\mu_{z^+,t} \cdot \mu_{\psi,t} \cdot \frac{i_t}{i_{t-1}}\right)\right] \\
&+ \beta \cdot E_t \left[\left(\psi_{z^+,t+1} \cdot p_{k',t+1}\right) \cdot \left(\mu_{z^+,t+1} \cdot \mu_{\psi,t+1}\right) \cdot S'\left(\mu_{z^+,t+1} \cdot \mu_{\psi,t+1} \cdot \frac{i_{t+1}}{i_t}\right) \cdot \left(\frac{i_{t+1}}{i_t}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

FOC wrt K

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{K}_{t+1}} = 0 \Rightarrow \omega_t &= \frac{\partial v_t \cdot X_t^k \cdot \bar{K}_t}{\partial \bar{K}_{t+1}} + \frac{\partial \omega_t \cdot (1-\delta) \cdot \bar{K}_t}{\partial \bar{K}_{t+1}} \\
&= \beta \cdot E_t X_{t+1}^k \cdot v_{t+1} + \beta \cdot (1-\delta) \cdot E_t \omega_{t+1},
\end{aligned}
\tag{3.85}
$$

代入式(3.80)以消去 ω_t，整理得

$$
\begin{aligned}
v_t &= \beta \cdot E_t v_{t+1} \cdot \frac{X_{t+1}^k + (1-\delta) \cdot P_{t+1} \cdot P_{k',t+1}}{P_t \cdot P_{k',t}} \\
&= \beta \cdot E_t \cdot v_{t+1} \cdot R_{t+1}^k \\
&\text{其中定义} \quad R_{t+1}^k \equiv \frac{X_{t+1}^k + (1-\delta) \cdot P_{t+1} \cdot P_{k',t+1}}{P_t \cdot P_{k',t}}
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

R_t^k 表示资本的回报率 (rate of return on capiutal)。

对式(3.86)两侧同时乘以 $P_t \cdot z_t^+$

$$
\begin{aligned}
\psi_{z^+,t} &= \beta \cdot E_t \frac{v_{t+1} \cdot P_{t+1} \cdot z_{t+1}^+}{\frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot \frac{z_{t+1}^+}{z_t^+}} \cdot R_{t+1}^k \\
&= \beta \cdot E_t \cdot \frac{\psi_{z^+,t+1}}{(1+\pi_{t+1}) \cdot \mu_{z^+,t+1}} \cdot R_{t+1}^k
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

将 net cash payment X_{t+1}^k 式(3.75)代入资本回报率 R_{t+1}^k 定义式(3.86)，并利用(A.11)、(A.12)改写为 scaled variables 形式

$$
\begin{aligned}
R_{t+1}^k &= \frac{u_{t+1} \cdot \frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot r_{t+1}^k}{P_{k',t}} - \frac{\frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot a(u_{t+1})}{P_{k',t} \cdot \psi_{t+1}} + \frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot \frac{P_{k',t+1}}{P_{k',t}} \cdot (1-\delta) \\
&= \frac{1+\pi_{t+1}}{\mu_{\psi,t+1}} \cdot \frac{u_{t+1} \cdot \bar{r}_{t+1}^k - (1+\pi_{t+1}) \cdot a(u_{t+1}) + p_{k',t+1} \cdot (1-\delta)}{p_{k',t}}
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

FOC wrt u

家庭选择 capital utilization rate u_t，使得同时段的 net cash payments of physical capital X_t^k 最大化，这表现为家庭问题中的静态比较。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = 0 \Rightarrow & P_t \cdot r_t^k = \frac{P_t}{\Psi_t} \cdot a'(u_t), \\ & a'(u_t) = r_t^k \cdot \Psi_t = \bar{r}_t^k.\end{aligned} \tag{3.89}$$

FOC wrt B

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}} = 0 \Rightarrow & \frac{\partial \left[\beta \cdot E_t v_{t+1} \cdot R_t \cdot B_{t+1}\right]}{\partial B_{t+1}} - \frac{\partial v_t \cdot B_{t+1}}{\partial B_{t+1}} = 0, \\ & v_t = \beta \cdot E_t v_{t+1} \cdot R_t,\end{aligned} \tag{3.90}$$

代入 scale 式(A.13)

$$\frac{\psi_{z^+,t}}{P_t \cdot z_t^+} = \beta \cdot \frac{\psi_{z^+,t+1}}{P_{t+1} \cdot z_{t+1}^+} \cdot R_t,$$

整理得

$$\psi_{z^+,t} = \beta \cdot E_t \frac{\psi_{z^+,t+1}}{\mu_{z^+,t+1} \cdot (1+\pi_{t+1})} \cdot R_t. \tag{3.91}$$

3.3 Price Philips Curve

3.3.1 price dispersion index 的线性近似

式(3.33) ⇒

$$\ln \nu_t^f = \ln \left[(1-\phi_f) \cdot (1+\pi_t)^{\varepsilon_f} \cdot \left(1+\pi_t^{\#}\right)^{-\varepsilon_f} + \phi_f \cdot (1+\pi_t)^{\varepsilon_f} \cdot \nu_{t-1}^f\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\nu_t^f - \nu^f}{\nu^f} = & \varepsilon_f \cdot (1-\phi_f) \cdot (1+\pi)^{\varepsilon_f - 1} \cdot \left(1+\pi^{\#}\right)^{-\varepsilon_f} \cdot [\pi_t - \pi] \\ & + (-\varepsilon_f) \cdot (1-\phi_f) \cdot (1+\pi)^{\varepsilon_f} \cdot \left(1+\pi^{\#}\right)^{-\varepsilon_f - 1} \cdot \left[\pi_t^{\#} - \pi^{\#}\right] \\ & + \varepsilon_f \cdot \phi_f \cdot (1+\pi)^{\varepsilon_f - 1} \cdot \nu^f \cdot [\pi_t - \pi],\end{aligned}$$

沿着 $\pi = 0$，$\pi^{\#} = 0$，$\nu^f = 1$ 作线性近似

$$\hat{\nu}_t^f = \varepsilon_f \cdot \hat{\pi}_t - \varepsilon_f \cdot (1-\phi_f) \cdot \hat{\pi}_t^{\#} + \phi_f \cdot \hat{\nu} f_{t-1}. \tag{3.92}$$

3.3.2 两个辅助变量的线性近似

对辅助变量 $x_{1,t}^f$ 作线性近似。已知 $U_{c,t} = 1/C_t$[15]，式(3.23) ⇒

[15]膏按：在写完家庭部门优化条件 FOC 之后，把 $U_{c,t}$ 对应的 FOC 的连接写进去。

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{1,t}^f - x_1^f}{x_1} =& \frac{-\frac{Y}{C^2}\cdot s\cdot (C_t - C)}{x_1^f} + \frac{\frac{s}{C}\cdot (Y_t - Y)}{x_1^f} + \frac{\frac{Y}{C}\cdot (s_t - s)}{x_1^f} \\
&+ \beta\cdot\phi_f\cdot(1+\pi)^{\varepsilon_f - 1}\cdot\varepsilon_f\cdot(\pi_{t+1}-\pi) \\
&+ \beta\cdot\phi_f\cdot(1+\pi)^{\varepsilon_f}\cdot\frac{x_1^f - x_1^f}{x_1^f}
\end{aligned} \tag{3.93}
$$

稳定状态下我们有 $\pi = \pi^{\#} = 0$，因而稳态 x_1^f 的值由式(3.23)给出

$$
x_1^f = \frac{1}{1-\beta\cdot\phi_f}\cdot\frac{Y\cdot s}{C}. \tag{3.94}
$$

式(3.94)带回式(3.93)，进一步整理得

$$
\hat{x}_{1,t}^f = (1-\beta\cdot\phi_f)\cdot\left(\hat{Y}_t + \hat{s}_t - \hat{C}_t\right) + \beta\cdot\phi_f\cdot E_t\left(\varepsilon_f\cdot\hat{\pi}_{t+1} + \hat{x}_{1,t+1}^f\right). \tag{3.95}
$$

对辅助变量 $x_{2,t}^f$ 作线性近似。式(3.24) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{2,t}^f - x_2^f}{x_2} =& \frac{-\frac{Y}{C^2}\cdot (C_t - C)}{x_2^f} + \frac{\frac{1}{C}\cdot (Y_t - Y)}{x_1^f} + \beta\cdot\phi_f\cdot(\varepsilon_f - 1)\cdot(1+\pi)^{\varepsilon-1-1}\cdot(\pi_{t+1}-\pi) \\
&+ \beta\cdot\phi_f\cdot(1+\pi)^{\varepsilon_f - 1}\cdot\frac{x_{2,t+1}^f - x_2^f}{x_2^f},
\end{aligned} \tag{3.96}
$$

进一步整理得

$$
\hat{x}_{2,t}^f = (1-\beta\cdot\phi_f)\cdot\left(\hat{Y}_t - \hat{C}_t\right) + \beta\cdot\phi_f\cdot E_t\left[(\varepsilon_f - 1)\cdot\hat{\pi}_{t+1} + \hat{x}_{2,t+1}^f\right]. \tag{3.97}
$$

3.3.3 reset price inflation 的线性近似

式(3.28) $\Rightarrow$

$$
(1-\varepsilon_f)\cdot\ln(1+\pi_t) = \ln\left[(1-\phi_f)\cdot\left(1-\pi_t^{\#}\right)^{1-\varepsilon_f} + \phi_f\right],
$$

$$
(1-\varepsilon_f)\cdot(\pi_t - \pi) = \frac{(1-\phi_f)\cdot(1-\varepsilon_w)\cdot\left(1+\pi^{\#}\right)^{-\varepsilon_w}\cdot\left(\pi_t^{\#} - \pi^{\#}\right)}{(1-\phi_f)\cdot\left(1-\pi_t^{\#}\right)^{1-\varepsilon_f} + \phi_f},
$$

由此可得 reset price inflation 的线性近似式

$$
\hat{\pi}_t = (1-\phi_f)\cdot\frac{\left(1+\pi^{\#}\right)^{-\varepsilon}}{(1+\pi)^{1-\varepsilon}}\cdot\hat{\pi}_t^{\#} \approx (1-\phi_f)\cdot\hat{\pi}_t^{\#} \tag{3.98}
$$

3.3.4 Price Philips Curve

式(3.27) ⇒

$$\ln\left(1+\pi_t^{\#}\right)-\ln\left(1+\pi_t\right)=\ln\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f-1}\right)+\ln x_{1,t}^f-\ln x_{2,t}^f,$$

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t^{\#}-\hat{\pi}_t&=\hat{x}_{1,t}^f-\hat{x}_{2,t}^f\\&=(1-\beta\cdot\phi_f)\cdot\hat{s}_t+\beta\cdot\phi_f\cdot E_t\hat{\pi}_{t+1}+\beta\cdot\phi_f\cdot E_t\left(\hat{x}_{1,t+1}^f-\hat{x}_{2,t+1}^f\right),\end{aligned}\tag{3.99}$$

将式(3.98)的代入上式替代 $\hat{\pi}_t^{\#}$，得到 price philips curve

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t&=\left(\frac{1-\phi_f}{\phi_f}\right)\cdot(1-\beta\cdot\phi_f)\cdot\hat{s}_t+\beta\cdot E_t\hat{\pi}_{t+1}\\&=\left(\frac{1-\phi_f}{\phi_f}\right)\cdot(1-\beta\cdot\phi_f)\cdot\left[\alpha\cdot(1+\phi_f)\cdot\hat{X}_t+\hat{R}_t\right]+\beta\cdot E_t\hat{\pi}_{t+1}\end{aligned}$$

其中 $\hat{s}_t$ 由式(3.18)作近似线性测得；X_t 表示 output gap，$\hat{s}_t$ 和 $\hat{X}_t$ 的关系参见基准 NK 模型相关部分[16]。

据此得到 price philips curve

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t=\kappa_f\cdot\left[\alpha\cdot(1+\eta)\cdot\hat{X}_t+\hat{R}_t\right]+\beta\cdot E_t\hat{\pi}_{t+1},\\\text{其中定义系数}\kappa_f\equiv\frac{1-\phi_f}{\phi_f}\cdot(1-\beta\cdot\phi_f).\end{aligned}\tag{3.100}$$

3.4 Wage Philips Curve

式(3.59)的最优化问题可以调整为

$$\left[\frac{1}{1-\varepsilon_w}\cdot\frac{1}{w_t^{\#}}\right]\cdot E_t\sum_{m=0}^{\infty}\cdot(\beta\cdot\phi_w)^m\cdot\psi_{z^+,t+m}\cdot h_{t+m}^t\cdot\left[w_t^{\#}\cdot\bar{w}_t\cdot\mathcal{X}_{t,m}-\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w-1}\cdot\left(\frac{A_L\cdot\left(h_{t+m}^t\right)^\eta}{\psi_{z^+,t+m}}\right)\right],\tag{3.101}$$

或者进一步变为

$$E_t\sum_{m=0}^{\infty}\cdot(\beta\cdot\phi_w)^m\cdot\psi_{z^+,t+m}\cdot h_{t+m}^t\cdot\left[w_t^{\#}\cdot\bar{w}_t\cdot\mathcal{X}_{t,m}-\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w-1}\cdot MRS_{t+m}^t\right],\tag{3.102}$$

其中

$$MRS_{t+m}^t\equiv\frac{A_L\cdot\left(h_{t+m}^t\right)^\eta}{\psi_{z^+,t+m}}\tag{3.103}$$

表示边际劳动成本，上角标和下角标表示在 t 时间调整工资，在随后的 $t+1,\ldots t+m$ 时间均未调整。稳定状态下 forward-looking 的劳工联盟最优策略为，将工资设为等于提供额外 1 单位劳动力 (劳动时间) 的边际成本乘以 price markup，即使式(3.102)中中括号内的部分等于零；线性展开见下文式(3.129)。

[16]膏按：这部分还没看明白，需要进一步搞清楚。

3.4.1 稳定状态的描述

稳定状态下，$w^{\#} = \mathcal{X} = 1$，$\bar{w} = \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1} \cdot MRS$，$1 + \tilde{\pi} = (1 + \pi) \cdot \mu_{z^+}$。

3.4.2 wage inflation

对 $(1 + \tilde{\pi}_{w,t+1})$ 作线性近似。式(3.47) $\Rightarrow$

$$\ln(1 + \tilde{\pi}_{w,t+1}) = \kappa_w \cdot \ln(1 + \pi_t) + (1 - \kappa_w) \cdot \ln(1 + \pi_t) + \ln \mu_{z^+},$$

$$\hat{\tilde{\pi}}_{w,t+1} \approx \tilde{\pi}_{w,t+1} - \tilde{\pi}_w \approx \kappa_w \cdot (\pi_t - \pi) = \kappa_w \cdot \hat{\pi}_t \tag{3.104}$$

$$\tilde{\pi}_w = \pi \cdot \mu_{z^+} \tag{3.105}$$

3.4.3 辅助变量 $\mathcal{X}_{t,m}$

对 $\hat{\mathcal{X}}_{t,m}$ 作线性近似。式(3.56) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{X}}_{t,m\neq 0} \approx &\left[\left(\hat{\tilde{\pi}}_{w,t+1} + \hat{\tilde{\pi}}_{w,t+2} + \ldots + \hat{\tilde{\pi}}_{w,t+m}\right) - (\hat{\pi}_{t+1} + \hat{\pi}_{t+2} + \ldots \hat{\pi}_{t+m})\right] \\ &- \left(\hat{\mu}_{z^+,t+1} + \hat{\mu}_{z^+,t+2} + \ldots \hat{\mu}_{z^+,t+m}\right) \\ &= -\left[(\hat{\pi}_{t+1} - \kappa_w \cdot \hat{\pi}_t) + (\hat{\pi}_{t+2} - \kappa_w \cdot \hat{\pi}_{t+1}) + \ldots + (\hat{\pi}_{t+m} - \kappa_w \cdot \hat{\pi}_{t+m-1})\right] \\ &- \left(\hat{\mu}_{z^+,t+1} + \hat{\mu}_{z^+,t+2} + \ldots + \hat{\mu}_{z^+,t+m}\right) \\ &\equiv -\left(\Delta\kappa_w\pi_{t+1} + \Delta\kappa_w\pi_{t+2} + \ldots \Delta\kappa_w\pi_{t+m}\right) - \left(\hat{\mu}_{z^+,t+1} + \hat{\mu}_{z^+,t+2} + \ldots + \hat{\mu}_{z^+,t+m}\right)\end{aligned} \tag{3.106}$$

以及

$$\hat{\mathcal{X}}_{t,0} = 0, \tag{3.107}$$

其中定义

$$\Delta_{\kappa_w}\pi_{w,t+1} \equiv \hat{\pi}^{\#}_{w,t+1} - \kappa_w \cdot \hat{\pi}_t, \tag{3.108}$$

$$\Delta_{\kappa_w}\pi_{t+1} \equiv \hat{\pi}_{t+1} - \kappa_w \cdot \hat{\pi}_t. \tag{3.109}$$

3.4.4 劳动力供应

对 h_{t+m} 式(3.57)作线性近似。$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}} &= \frac{\frac{W_t}{P_t \cdot z_t^+}}{\frac{W_{t+m}}{P_{t+m} \cdot z_{t+m}^+}} \\ &= \frac{W_t}{W_{t+m}} \cdot \frac{P_{t+m}}{P_t} \cdot \frac{z_{t+m}^+}{z_t^+} \\ &= \frac{(1 + \pi_{t+1}) \cdot (1 + \pi_{t+2}) \cdot \ldots (1 + \pi_{t+m}) \cdot \left(\mu_{z^+,t+1} \cdot \mu_{z^+,t+2} \cdot \ldots \mu_{z^+,t+m}\right)}{(1 + \tilde{\pi}_{w,t+1}) \cdot (1 + \tilde{\pi}_{w,t+2}) \cdot \ldots \cdot (1 + \tilde{\pi}_{w,t+m})},\end{aligned} \tag{3.110}$$

其中最后一个等号用到了式(3.47)。结合式(3.105)，对上式线性展开，整理得

$$\left(\frac{\hat{\bar{w}}_t}{\bar{w}_{t+m}}\right) \approx \hat{\mu}_{z^+,t+1} \cdot \hat{\mu}_{z^+,t+2} \cdot \ldots \cdot \hat{\mu}_{z^+,t+m}. \tag{3.111}$$

将式(3.111)代入式(3.57) ⇒

$$\hat{h}^t_{t+m} - \hat{H}_{t+m} = \begin{cases} -\varepsilon_w \cdot \left[\hat{w}^{\#}_t - (\Delta\kappa_w \pi_{t+1} + \Delta\kappa_w \pi_{t+2} + \ldots + \Delta\kappa_w \pi_{t+m})\right], & \text{当} m > 0, \\ -\varepsilon_w \cdot \hat{w}^{\#}_t, & \text{当} m = 0. \end{cases} \tag{3.112}$$

3.4.5 边际劳动成本

对 RMS^t_{t+m} 作线性近似。式(3.103) ⇒

$$\ln MRS^t_{t+m} = \ln A_L + \eta \cdot \ln^t_{t+m} - \ln \Psi_{z^+,t+m},$$

$$M\hat{R}S^t_{t+m} = -\hat{\Psi}_{z^+,t+m} + \eta \cdot \left(\hat{h}^t_{t+m} - \hat{H}_{t+m}\right) + \eta \cdot \hat{H}_{t+m}. \tag{3.113}$$

3.4.6 wage price inflation

式(3.66)反映了，aggreate wage index W_t 对劳工联盟制定工资指数 $W^{\#}_t$ 的限制。调整得

$$1 = (1-\phi_w) \cdot w^{\#,1-\varepsilon_w}_t + \phi_w \cdot \left(\frac{1+\pi^{\#}_{w,t}}{1+\pi_{w,t}}\right)^{1-\varepsilon_w},$$

两侧取 ln 后作近似线性展开

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{(1-\phi_w)\cdot(1-\varepsilon_w)\cdot w^{\#,-\varepsilon_w}\cdot\left(w^{\#}_t - w^{\#}\right)}{(1-\phi_w)\cdot w^{\#,1-\varepsilon_w} + \phi_w \cdot \left(\frac{\pi^{\#}_w}{\pi_w}\right)^{1-\varepsilon_w}} \\ &+ \frac{\phi_w \cdot (1-\varepsilon_w)\cdot\left(\frac{\pi^{\#}_w}{\pi_w}\right)^{1-\varepsilon_w}\cdot \pi^{\#,-1}_w \cdot \left(\pi^{\#}_{w,t} - \pi^{\#}_w\right)}{(1-\phi_w)\cdot w^{\#,1-\varepsilon_w} + \phi_w \cdot \left(\frac{\pi^{\#}_w}{\pi_w}\right)^{1-\varepsilon_w}} \\ &+ \frac{\phi_w \cdot (\varepsilon_w - 1)\cdot\left(\frac{\pi^{\#}_w}{\pi_w}\right)^{1-\varepsilon_w}\cdot \pi^{-1}_w \cdot (\pi_{w,t} - \pi_w)}{(1-\phi_w)\cdot w^{\#,1-\varepsilon_w} + \phi_w \cdot \left(\frac{\pi^{\#}_w}{\pi_w}\right)^{1-\varepsilon_w}} \\ =& \frac{(1-\varepsilon_w)\cdot\left[(1-\phi_w)\cdot w^{\#,1-\varepsilon_w}\cdot \hat{w}^{\#}_t + \phi_w \cdot \left(\frac{\pi^{\#}_w}{\pi_w}\right)^{1-\varepsilon_w}\cdot\left(\hat{\pi}^{\#}_{w,t} - \hat{\pi}_{w,t}\right)\right]}{(1-\phi_w)\cdot w^{\#,1-\varepsilon_w} + \phi_w \cdot \left(\frac{\pi^{\#}_w}{\pi_w}\right)^{1-\varepsilon_w}}. \end{aligned} \tag{3.114}$$

稳定状态下，$w^{\#} = 1$，$\pi^{\#}_w/\pi_w = 1$，且根据式(3.108)得

$$\hat{\pi}^{\#}_{w,t} - \hat{\pi}_{w,t} = -\left(\hat{\pi}_{w,t} - \kappa_w \cdot \hat{\pi}_{t-1}\right) = -\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}.$$

因此式(3.114)可以进一步改写为如下 wage price inflation index

$$\hat{w}^{\#}_t = \frac{\varepsilon_w}{1-\varepsilon_w} \cdot \Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}. \tag{3.115}$$

3.4.7 其他辅助变量

由(3.112)可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\eta\cdot\left(\hat{h}_{t+m}^{t}-\hat{H}_{t+m}\right)\\
&=-\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\hat{w}_t^{\#}\\
&-(\beta\cdot\phi_w)\cdot\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\left[\hat{w}_t^{\#}-\Delta\kappa_w\pi_{t+1}\right]\\
&-(\beta\cdot\phi_w)^2\cdot\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\left[\hat{w}_t^{\#}-\Delta\kappa_w\pi_{t+1}-\Delta\kappa_w\pi_{t+2}\right]\\
&-(\beta\cdot\phi_w)^3\cdot\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\left[\hat{w}_t^{\#}-\Delta\kappa_w\pi_{t+1}-\Delta\kappa_w\pi_{t+2}-\Delta\kappa_w\pi_{t+3}\right]\ldots\\
&=-\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\left[1+(\beta\cdot\phi_w)+(\beta\cdot\phi_w)^2+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\cdot\hat{w}_t^{\#}\\
&+\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\left[(\beta\cdot\phi_w)+(\beta\cdot\phi_w)^2+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+1}\\
&+\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\left[(\beta\cdot\phi_w)^2+(\beta\cdot\phi_w)^3+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+2}\\
&+\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\left[(\beta\cdot\phi_w)^3+(\beta\cdot\phi_w)^4+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+3}\\
&+\ldots\\
&+\varepsilon_w\cdot\eta\cdot[(\beta\cdot\phi_w)^m]\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+m}\\
&\approx-\varepsilon_w\cdot\eta\cdot(\beta\cdot\phi_w)^0\cdot\left[1+(\beta\cdot\phi_w)+(\beta\cdot\phi_w)^2+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\cdot\hat{w}_t^{\#}\\
&+\varepsilon_w\cdot\eta\cdot(\beta\cdot\phi_w)^1\cdot\left[1+(\beta\cdot\phi_w)+(\beta\cdot\phi_w)^2+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+1}\\
&+\varepsilon_w\cdot\eta\cdot(\beta\cdot\phi_w)^2\cdot\left[1+(\beta\cdot\phi_w)+(\beta\cdot\phi_w)^2+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+2}\\
&+\varepsilon_w\cdot\eta\cdot(\beta\cdot\phi_w)^3\cdot\left[1+(\beta\cdot\phi_w)+(\beta\cdot\phi_w)^2+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+3}+\ldots
\end{aligned}
$$

由于 $\left[1+(\beta\cdot\phi_w)+(\beta\cdot\phi_w)^2+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\right]\approx 1/(1-\beta\cdot\phi_w)$，随着 $m\to\infty$ 上式化简为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\eta\cdot\left(\hat{h}_{t+m}^{t}-\hat{H}_{t+m}\right)\\
&\approx-\frac{\varepsilon_w\cdot\eta}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left\{\hat{w}_t^{\#}-\left[(\beta\cdot\phi_w)\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+1}+(\beta\cdot\phi_w)^2\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+2}+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+m}\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{3.116}
$$

将上式中定义中括号中的内容定义为 $S_{w,t}$，进而改写为递归形式

$$
\begin{aligned}
S_{w,t}&\equiv(\beta\cdot\phi_w)\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+1}+(\beta\cdot\phi_w)^2\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+2}+\ldots+(\beta\cdot\phi_w)^m\cdot\Delta\kappa_w\pi_{t+m}\\
&\approx(\beta\cdot\phi_w)\cdot(\Delta\kappa_w\pi_{t+1}+S_{w,t+1}),
\end{aligned}
\tag{3.117}
$$

式(3.117)代回式(3.116)可得

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\eta\cdot\left(\hat{h}_{t+m}^{t}-\hat{H}_{t+m}\right)\approx-\frac{\varepsilon_w\cdot\eta}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left[\hat{w}_t^{\#}-S_{w,t}\right],\tag{3.118}
$$

结合式(3.118)和式(3.113)，作时间 m 的加总得

$$\begin{aligned} S_{MRS,t} &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^m \cdot M\hat{R}S_{t+m}^t \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^m \cdot \left[-\hat{\Psi}_{z^+,t+m} + \eta \cdot \hat{H}_{t+m}\right] + \sum_{m=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^m \cdot \left[\eta \cdot \left(\hat{h}_{t+m}^t - \hat{H}_{t+m}\right)\right], \end{aligned} \tag{3.119}$$

第二个等式中后半部分由式(3.118)给出。将前半部分定义为 $S_{o,t}$，进而改写为递归形式

$$\begin{aligned} S_{o,t} &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^m \cdot \left[-\hat{\Psi}_{z^+,t+m} + \eta \cdot \hat{H}_{t+m}\right] \\ &\approx -\hat{\Psi}_{z^+,t} + \eta \cdot \hat{H}_t + (\beta \cdot \phi_w) \cdot S_{o,t+1}, \end{aligned} \tag{3.120}$$

由此，式(3.118)、式(3.120)代回式(3.119)，进一步调整得

$$S_{MRS,t} = S_{o,t} - \frac{\varepsilon_w \cdot \eta}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \left[\hat{w}_t^{\#} - S_{w,t}\right]. \tag{3.121}$$

结合式(3.106)对 $\hat{\mathcal{X}}_{t,m}$ 作沿时间 m 的加总，定义为 $S_{x,t}$，进而改写为递归形式，得

$$\begin{aligned} S_{x,t} &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^m \cdot \hat{\mathcal{X}}_{t,m} \\ &= \frac{1}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \cdot (\beta \cdot \phi_w)^m \cdot \left[-\Delta\kappa_w \hat{\pi}_{t+1} - \hat{\mu}_{z^+,t+1}\right] \\ &\approx \frac{\beta \cdot \phi_w}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \left[-\Delta\kappa_w \hat{\pi}_{t+1} - \hat{\mu}_{z^+,t+1}\right] + (\beta \cdot \phi_w) \cdot S_{x,t+1}. \end{aligned} \tag{3.122}$$

稳定状态下的最优决策，式(3.102)的中括号中内容应当为零，线性近似，整理得

$$\begin{aligned} &\ln w_t^{\#} + \ln \bar{w}_t = \ln\left(\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t+m}}\right) + \ln MRS_{t+m}^t - \ln \mathcal{X}_{t,m}, \\ &\frac{\hat{w}_t^{\#} + \hat{w}_t}{1 - \beta \cdot \phi_w} + S_{x,t} - S_{MRS,t} = 0, \end{aligned} \tag{3.123}$$

将式(3.115)，(3.122)，(3.121)的 $\hat{w}_t^{\#}, S_{x,t}, S_{MRS,t}$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \hat{\bar{w}}_t + \frac{1}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \hat{w}_t^{\#} + S_{x,t} \\ &= S_{o,t} - \frac{1}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \varepsilon_w \cdot \eta \cdot \left[\frac{\phi_w}{1 - \phi_w} \cdot \Delta_{\kappa_w} \hat{\pi}_{w,t} - S_{w,t}\right]. \end{aligned} \tag{3.124}$$

将式(3.124)改为 t 时刻对 $t+1$ 期的期望

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \left(\beta \cdot \phi_w \cdot \hat{\bar{w}}_{t+1}\right) + \frac{1}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \left(\beta \cdot \phi_w \cdot \hat{w}_{t+1}^{\#}\right) + (\beta \cdot \phi_w \cdot S_{x,t+1}) \\ &= (\beta \cdot \phi_w \cdot S_{o,t+1}) - \frac{1}{1 - \beta \cdot \phi_w} \cdot \varepsilon_w \cdot \eta \cdot \left[\frac{\phi_w}{1 - \phi_w} \cdot (\beta \cdot \phi_w \cdot \Delta_{\kappa_w} \hat{\pi}_{w,t+1}) - (\beta \cdot \phi_w \cdot S_{w,t+1})\right], \end{aligned} \tag{3.125}$$

式(3.124)减去式(3.125)，整理得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left(\hat{\bar{w}}_t-\beta\cdot\phi_w\cdot\hat{\bar{w}}_{t+1}\right)+\frac{1}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left(\hat{w}_t^{\#}-\beta\cdot\phi_w\cdot\hat{w}_{t+1}^{\#}\right)+\frac{\beta\cdot\varepsilon_w}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left(\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{t+1}+\hat{\mu}_{z^+,t+1}\right)\\
&=\left(-\Psi_{z^+,t}+\eta\cdot\hat{H}_t\right)-\frac{\varepsilon_w\cdot\eta}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\frac{\phi_w}{1-\phi_w}\cdot\left(\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}-\beta\cdot\phi_w\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t+1}\right)\\
&+\frac{\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\beta\cdot\phi_w}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t+1},
\end{aligned}\tag{3.126}$$

根据式(A.10)得

$$\frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_{t-1}}=\frac{W_t}{W_{t-1}}\cdot\frac{P_{t-1}}{P_t}\cdot\frac{z_{t-1}^+}{z_t^+},$$

线性近似展开

$$\begin{aligned}
\ln\bar{w}_t&=\ln\bar{w}_{t-1}+\ln\pi_{w,t}-\ln\pi_t-\ln\mu_{z^+,t},\\
\hat{\bar{w}}_t&=\hat{\bar{w}}_{t-1}+\hat{\pi}_{w,t}-\hat{\pi}_t-\hat{\mu}_{z^+,t},
\end{aligned}\tag{3.127}$$

对式(3.109)作近似线性展开，并利用式(3.127)替代 $\hat{\pi}_t$ 得

$$\begin{aligned}
\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_t&=\hat{\pi}_t-\kappa_w\cdot\hat{\pi}_{t-1}\\
&=-\left(\hat{\bar{w}}_t-\hat{\bar{w}}_{t-1}\right)+\left(\hat{\pi}_{w,t}-\kappa_w\cdot\hat{\pi}_{t-1}\right)-\hat{\mu}_{z^+,t}\\
&=\left(\hat{\bar{w}}_{t-1}-\hat{\bar{w}}_t\right)+\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}-\hat{\mu}_{z^+,t}
\end{aligned}\tag{3.128}$$

式(3.127)-(3.128)代回式(3.126)，重写为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left(\hat{\bar{w}}_t-\beta\cdot\phi_w\cdot\hat{\bar{w}}_{t+1}\right)+\frac{1}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\frac{\phi_w}{1-\phi_w}\cdot\left(\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}-\beta\cdot\phi_w\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t+1}\right)\\
&-\frac{\beta\cdot\phi_w}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left[\Delta_{\kappa_w}\cdot\hat{\pi}_{w,t+1}+\left(\hat{\bar{w}}_t-\hat{\bar{w}}_{t+1}\right)\right]\\
&=\left(-\hat{\Psi}_{z^+,t}+\eta\cdot\hat{H}_t\right)-\frac{\varepsilon_w\cdot\eta}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\frac{\phi_w}{1-\phi_w}\cdot\left(\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}-\beta\cdot\phi_w\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t+1}\right)\\
&+\frac{\varepsilon_w\cdot\eta\cdot\beta\cdot\phi_w}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t+1},
\end{aligned}$$

进一步调整为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left(\hat{\bar{w}}_t-\beta\cdot\phi_w\cdot\hat{\bar{w}}_t\right)-\frac{\beta\cdot\phi_w}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\left(\hat{\bar{w}}_{t+1}-\hat{\bar{w}}_{t+1}\right)+\frac{1+\varepsilon_w\cdot\eta}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\frac{\phi_w}{1-\phi_w}\cdot\left(\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}\right)\\
&-\frac{\beta\cdot\phi_w}{1-\beta\cdot\phi_w}\cdot\frac{1+\varepsilon_w\cdot\eta}{1-\phi_w}\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t+1}=-\hat{\Psi}_{z^+,t}+\phi\cdot\hat{H}_t,
\end{aligned}$$

再整理得 wage philips curve

$$\begin{aligned}
&\left(1+\varepsilon_w\cdot\eta\right)\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}\\
&=\left(1-\beta\cdot\phi_w\right)\cdot\left(\frac{1-\phi_w}{\phi_w}\right)\cdot\left(-\Psi_{z^+,t}+\eta\cdot\hat{H}_t-\bar{w}_t\right)+\beta\cdot\left(1+\eta\cdot\varepsilon_w\right)\cdot\Delta_{\kappa_w}\cdot\hat{\pi}_{w,t+1}\\
&=\kappa_w\cdot\left(-\Psi_{z^+,t}+\eta\cdot\hat{H}_t-\bar{w}_t\right)+\beta\cdot\left(1+\eta\cdot\varepsilon_w\right)\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t+1},
\end{aligned}\tag{3.129}$$

其中定义系数 $\kappa_w\equiv\left(1-\beta\cdot\phi_w\right)\cdot\left(\dfrac{1-\phi_w}{\phi_w}\right)$.

根据工资 philips curve 式(3.129)，当期名义工资率的增速 $\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}$ 与对未来名义工资率增速的预期正相关，与额外 1 单位劳动投入的边际成本 $\left(-\hat{\Psi}_{z^+,t}+\phi\cdot\hat{H}_t\right)$ 正相关，与实际工资 $\hat{w}_t$ 正相关。

3.5 比较两条 philips curve

比较 price philips curve 式(3.100)和 wage philips curve 式(3.129)。

$$\hat{\pi}_t=\kappa_f\cdot\left[\alpha\cdot(1+\eta)\cdot\hat{X}_t+\hat{R}_t\right]+\beta\cdot E_t\hat{\pi}_{t+1},$$
$$\text{其中}\quad\kappa_f\equiv\frac{1-\phi_f}{\phi_f}\cdot(1-\beta\cdot\phi_f),$$

$$\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t}=\frac{\kappa_w}{(1+\varepsilon_w\cdot\eta)}\cdot\left(-\Psi_{z^+,t}+\eta\cdot\hat{H}_t-\bar{w}_t\right)+\beta\cdot\Delta_{\kappa_w}\hat{\pi}_{w,t+1},$$
$$\text{其中}\quad\kappa_w\equiv(1-\beta\cdot\phi_w)\cdot\left(\frac{1-\phi_w}{\phi_w}\right).$$

假定 price stickiness 和 wage stikiness 的程度相等，即 $\kappa_f=\kappa_w$。那么，如果 $1+\varepsilon_w\cdot\eta>1$ 的话，则 PPC 中边际成本 $\left(\alpha\cdot(1+\eta)\cdot\hat{X}_t\right)$ 的斜率 κ_f 要高于 WPC 中边际成本 $\left(-\Psi_{z^+,t}+\eta\cdot\hat{H}_t\right)$ 的斜率 $(\kappa_w/\left(1+\varepsilon_w\cdot\eta\right))$[17]。

若要满足 $1+\varepsilon_w\cdot\eta>1$，需要

1. 劳动的需求弹性 ε_w 较大，和/或
2. 劳动者提供额外 1 单位劳动的边际成本 η 较高，即随着劳动供应的增加，边际劳动成本 MRS 式(3.103)迅速上升。

假定 j^{th} 劳工联盟出于某种目的，考虑提高名义工资。分三种情况来讨论。

1. 若在市场上对劳动力需求函数的斜率 ε_w 保持不变，则 j^{th} 种类劳动力工资提高，对 j^{th} 劳动力的需求降低，边际成本 MRS 随之降低；并且 MRS 的斜率越陡峭即 η 越大，边际成本下降的幅度越大。
2. 若边际成本 MRS 的斜率 η 保持不变，则对 j^{th} 劳动力需求曲线的斜率越平缓，j^{th} 工资上升带来导致的对 j^{th} 劳动力需求的下降就会越剧烈。
3. 在 MRS 线斜率向上倾斜即 η 变大的情况下，j^{th} 工资上调也会使得边际成本大幅度下降。

因此，若 j^{th} 劳工联盟想要提高 j^{th} 工资，在弹性需求函数以及陡峭边际成本曲线的条件下，需要做好面临边际成本大幅度下降的准备。但另一方面，ceteris paribus，若当前边际成本较低，也会抑制住 j^{th} 劳工联盟提高工资的冲动。

[17] 在弹性劳动力需求曲线和/或陡峭边际成本曲线的假设下，wpc 的斜率比 ppc 斜率平缓，其原理类似于 firm-specific capital 导致 ppc 曲线斜率降低，参见Sveen and Weinke (2005); Altig et al. (2011); DeW。

第二部分

中等规模的动态随机一般均衡模型

第四章 NK-DSGE 模型

4.1 Intrduction

4.1.1 模型中的六个生产部门

1. 劳动承包部门。labor contractor，在充分竞争环境中，将家庭部门提供的异质劳动力转化为同质劳动力，供中间产品生产部门使用。

2. 家庭部门。存在一系列家庭，家庭行为包括

    (a) 供应 (异质) 劳动力给劳动力承包商

    (b) 对应向下倾斜的需求曲线，决定 (异质) 劳动力的工资

    (c) 投资于实物资本

    (d) 做实物资本的使用率决策

    (e) 将资本服务品租借给生产部门，赚取资本租金

    (f) 消费，购买最终产品

    (g) 购买政府部门的债券。

3. 中间产品生产部门。存在一系列中间产品生产部门，在垄断竞争环境中，使用来自家庭部门的资本服务品，和来自劳动承包商的劳动力投入，生产异质的中间产品，以供最终产品生产部门使用。

4. 最终产品生产部门。存在一个最终产品生产者，在充分竞争环境中，将中间产品生产部门生产的异质中间产品转化为最终产品，创造产出。

5. 政府部门。

    (a) 决定 (外生) 政府支出的规模

    (b) 通过收取一揽子税和/或发放债券来平衡收支。

6. 中央银行。通过 Taylor rule 来推行货币政策。

4.1.2 几点说明

1. cashless economy，效用函数中无 cash。
2. 中性的财政政策，政府收一揽子税和发债的目标是确保收支平衡。
3. 打破利率的 zero lower bound，即不再假定利率必须 ≥ 0。
4. 假定是封闭经济体，无进出口[1]。

4.2 解析模型

4.2.1 劳动承包部门

经济体中存在一系列异质化家庭，将它们标记为标准化的 $l \in [0,1]$，每个家庭供应劳动力 $N_t(l)$。劳动供应商将异质的 $N_t(l)$ 打包为同质劳动 $N_{d,t}$，以供生产部门使用。打包技术如下

$$N_{d,t} = \left(\int_0^1 N_t(l)^{\frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w}} dl \right)^{\frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1}}, \tag{4.1}$$

其中 ϵ_w 表示不同家庭 l 所提供劳动力之间的替代弹性，设 $\epsilon_w > 1$ 即它们是替代品。

对 l^{th} 劳动力的需求

劳动承包商的最大化问题。根据给定 $\{W_t, W_t(l)\}$ 和既定产出条件式(4.1)，选择异质劳动力 $\{N_t(l)\}$ 以实现利润最大化。其中 W_t 表示总工资水平，$W_t(l)$ 表示 l^{th} 类型劳动力工资，

$$\max_{N_t(l)} W_t \cdot N_{d,t} - \int_0^1 W_t(l) \cdot N_t(l) dl.$$

FOC wrt $N_t(l)$

$$\frac{\partial \left\{ W_t \cdot \left[\int_0^1 N_t(l)^{\frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w}} dl \right]^{\frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1}} - \int_0^1 W_t(l) \cdot N_t(l) dl \right\}}{\partial N_t(l)} = 0,$$

$$W_t \cdot \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \cdot [\cdot]^{\frac{1}{\epsilon_w - 1}} \cdot \frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w} \cdot N_t(l)^{-\frac{1}{\epsilon_w}} = W_t(l),$$

$$W_t \cdot \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \cdot N_{d,t}^{\frac{1}{\epsilon_w}} \cdot \frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w} \cdot N_t(l)^{-\frac{1}{\epsilon_w}} = W_t(l),$$

$$N_t(l) = N_{d,t} \cdot \left(\frac{W_t(l)}{W_t} \right)^{-\epsilon_w}. \tag{4.2}$$

式(4.2)为 (劳动承包商) 对 l^{th} 家庭劳动力的需求函数，可见 $N_t(l)$ 一方面取决于 (生产部门) 对 $N_{d,t}$ 的需求，一方面取决于 l^{th} 劳动力的相对工资。

[1]DSGE 框架中加入进出口的框架，如Svensson (2010)。

总工资水平

劳动承包商处于充分竞争环境中，利润为 0。

$$W_t \cdot N_{d,t} = \int_0^1 W_t(l) N_t(l) dl.$$

引入式(4.2)替换掉 $N_t(l)$

$$W_t \cdot N_{d,t} = \int_0^1 W_t(l)^{1-\epsilon_w} dl \cdot (W_t \cdot N_{d,t})^{\epsilon_w}.$$

整理得总工资水平 W_t 的决定式，它是一个关于 $W_t(l)$ 的函数

$$W_t^{1-\epsilon_w} = \int_0^1 W_t(l)^{1-\epsilon_w} dl. \tag{4.3}$$

工资分布指标

根据定义，家庭部门异质劳动力供应的加总为 $N_t = \int_0^1 N_t(l)dl$，代入式(4.2)用 $N_{d,t}$ 代替 $N_t(l)$

$$N_t = N_{d,t} \cdot \int_0^1 \left(\frac{W_t(l)}{W_t} \right)^{-\epsilon_w} dl = N_{d,t} \cdot v_t^w, \tag{4.4}$$

上式反映了家庭部门的总劳动供应和劳动承包商生产同质劳动之间的关系，其中

$$v_t^w \equiv \int_0^1 \left(\frac{W_t(l)}{W_t} \right)^{-\epsilon_w} \tag{4.5}$$

表示工资分布指标，衡量不同家庭劳动工资相对于总工资的差异程度，设 $v_t^w \geq 1$。$v_t^w \to 1$，工资差异越小，劳动承包商的劳动供应 $N_{d,t}$ 接近于家庭总劳动供应；反之亦然。

4.2.2 家庭部门

1. 家庭部门存在 Calvo 工资摩擦，即 l^{th} 家庭的劳动力 $N_t(l)$ 是异质的，这导致工资收入 $W_t(l)$ 也是异质的 (Calvo, 1983; Erceg et al., 2000)。

2. 家庭 l 的效用 $U_t(l)$ 来自于消费 C_t 和劳动 (休闲)$N_t(l)$。家庭与家庭效用的不同仅体现在工资 $W_t(l)$ 和劳动 $N_t(l)$ 的差异上，其他条件相同。

3. 家庭是实物资本的持有者，一方面决定利用实物资本的强度 (capital utilization intensity, Greenwood et al. (1988))，利用实物资本的强度越高，资本折旧率越大；另一方面决定将多少 (利用率调整后的) 资本服务租借给生产企业，以换取租金。

4. 家庭决定购买政府债券的数量。

资本形成

实物资本积累式

$$K_{t+1} = Z_t \cdot \left[1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2\right] \cdot I_t + [1 - \delta(u_t)] \cdot K_t, \tag{4.6}$$

其中

- Z_t 表示外部投资冲击，影响从流量投资向存量实物资本的转化效率。

- 常数 κ 反映投资的调整成本 (adjustment cost, Lucas and Prescott (1971); Hayashi (1982))，我们取Christiano et al. (2005) 的设定形式。

- u_t 表示实物资本的利用率。

- 折旧率变量 $\delta(u_t)$ 的函数形式如下

$$\delta(u_t) = \delta_0 + \delta_1 \cdot (u_t - 1) + \frac{\delta_2}{2} \cdot (u_t - 1)^2. \tag{4.7}$$

资本服务品

家庭选择 u_t 和 K_t，向生产部门供应资本服务 (capital services)，函数形式如下

$$\hat{K}_t = u_t \cdot K_t. \tag{4.8}$$

效用函数

t 期效用函数

$$U_t(l) = \ln(C_t - b \cdot C_{t-1}) - \psi_t \cdot \frac{N_t(l)^{1+\chi}}{1+\chi} \tag{4.9}$$

其中

- 消费对效用的贡献表现为习惯形成 (habit formation of consumption)，如Fuhrer (2000); Bouakez et al. (2005))，用参数 $b \geq 0$ 来表示。$b \to 0$，上期消费习惯对当期效用的影响就越小。

- 消费和劳动 (休闲) 对效用的贡献是内部可分的 (intratemporal separable)，如Christiano et al. (2005))。参数 χ 表示劳动力供应的 Frisch 弹性的倒数，见节A.2。

- 外生的偏好冲击 ψ_t 影响家庭对消费带来的效用和劳动带来的负效用之间的权衡。

预算约束条件

家庭预算约束条件，当期支出不得超过当期收入。

$$P_t \cdot C_t + P_t \cdot I_t + B_{t+1} \leq W_t(l) \cdot N_t(l) + R_t^n \cdot \hat{K}_t + \Pi_t^n - P_t \cdot T_t + (1 + i_{t-1}) \cdot B_t, \tag{4.10}$$

其中

- P_t 表示价格水平。
- t 期初，家庭购买 B_t 名义国债，t 期末时，根据上一期名义利率 i_{t-1} 获得利息。
- 家庭以名义租金率 R_t^n 将资本服务品租借给生产部门。
- Π_t^n 为 (垄断竞争的中间产品) 生产者的名义盈利，转回到作为资本所有者的家庭部门。
- T_t 表示政府的一揽子税/转移支付。

家庭最大化问题

l^{th} 家庭决策为，选择 $\{C_t, N_t(l), W_t(l), u_t, K_{t+1}, B_{t+1}, I_t\}$，以实现 forward-looking 形式的效用最大化

$$\max_{\{C_t, N_t(l), W_t(l), u_t, K_{t+1}, B_{t+1}, I_t\}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \cdot \nu_{t+s} \cdot U_{t+s} \tag{4.11}$$

$$= \max_{\{C_t, N_t(l), W_t(l), u_t, K_{t+1}, B_{t+1}, I_t\}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \cdot \nu_{t+s} \cdot \left\{ \ln\left(C_{t+s} - b \cdot C_{t+s-1}\right) - \psi_{t+s} \cdot \frac{N_{t+s}(l)^{1+\chi}}{1+\chi}. \right\} \tag{4.12}$$

其中 β 为时间的折旧系数，ν_{t+s} 为外生 inter-temporal 偏好冲击。最大化的约束条件包括预算约束条件(4.10)，资本形成式(4.6)。效用表达式(4.9)中引入式(4.8)替换 $\hat{K}_{t+s}$，引入式(4.2)替换 $N_t(l)$。

与工资设定无关的一阶条件

将家庭最大化问题中，首先提取与工资设定无关的控制变量 $\{C_t, u_t, K_{t+1}, B_{t+1}, I_t\}$，建 Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^s \cdot \{ & \nu_{t+s} \cdot \ln\left(C_{t+s} - b \cdot C_{t+s-1}\right) + \dots \\ & + \lambda_{t+s}^n \cdot [W_{t+s}(l) \cdot N_{t+s}(l) + R_{t+s}^n \cdot u_{t+s} \cdot K_{t+s} + \Pi_{t+s}^n - P_{t+s} \cdot T_{t+s} + (1 + i_{t+s-1}) \cdot B_{t+s}] \\ & + \mu_{t+s} \cdot \left[Z_{t+s} \cdot \left(1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_{t+s}}{I_{t+s-1}} - 1\right)^2\right) \cdot I_{t+s} + (1 - \delta(u_{t+s})) \cdot K_{t+s} \right] \}\end{aligned}$$

FOC wrt C_t

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \nu_t \ln(C_t - b \cdot C_{t-1})}{\partial C_t} = \lambda_t^n \cdot P_t,$$

$$\lambda_t^n \cdot P_t = \frac{\nu_t - b \cdot \beta \cdot E_t \nu_{t+1}}{C_t - b \cdot C_{t-1}}. \tag{4.13}$$

FOC wrt u_t

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t^n \cdot R_t^n = \mu_t \cdot \delta'(u_t). \tag{4.14}$$

FOC wrt B_{t+1}

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}} = 0 \Rightarrow \lambda_t^n = \beta \cdot (1 + i_t) \cdot E_t \lambda_{t+1}^n. \tag{4.15}$$

FOC wrt I_t

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t^n \cdot P_t =& \frac{\partial \mu_t \cdot Z_t \cdot (\cdot) \cdot I_t}{\partial I_t} \\
=& \mu_t \cdot Z_t \cdot \left[1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2\right] + \mu_t \cdot Z_t \cdot I_t \cdot (-\frac{\kappa}{2}) \cdot 2 \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right) \cdot \frac{1}{I_{t-1}} \\
&+ \frac{\partial \beta \cdot E_t \left\{\mu_{t+1} \cdot Z_{t+1} \cdot I_{t+1} \cdot \left[1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} - 1\right)^2\right]\right\}}{\partial I_t} \\
=& \mu_t \cdot Z_t \cdot \left[1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2\right] + Z_t \cdot u_t \cdot I_t \cdot (-\frac{\kappa}{2}) \cdot 2 \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right) \cdot \frac{1}{I_{t-1}} \\
&+ \beta \cdot E_t \cdot Z_{t+1} \cdot \mu_{t+1} \cdot I_{t+1} \cdot \left(-\frac{\kappa}{2}\right) \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} - 1\right) \cdot \left(\frac{-I_{t+1}}{I_t^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_t^n \cdot P_t =& Z_t \cdot \mu_t \cdot \left[1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2 - \kappa \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right) \cdot \frac{I_t}{I_{t-1}}\right] \\
&+ \beta \cdot E_t Z_{t+1} \cdot \mu_{t+1} \cdot \kappa \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} - 1\right) \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)^2.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

FOC wrt K_{t+1}

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \lambda_t^n \cdot R_t^n \cdot u_t \cdot K_t}{\partial K_{t+1}} + \frac{\mu_t \cdot (1 - \delta(u_t)) \cdot K_t}{\partial K_{t+1}} = \frac{\partial \mu_t \cdot K_{t+1}}{\partial K_{t+1}},$$

$$\mu_t = \beta \cdot E_t \left\{\lambda_{t+1}^n \cdot R_{t+1}^n \cdot u_{t+1} + \mu_{t+1} \cdot [1 - \delta(u_{t+1})] .\right\} \tag{4.17}$$

将名义量式(4.13)-(4.16)折算为实际量。定义消费的边际效用 λ_t 和资本服务品的实际租金 R_t 如下

$$\lambda_t \equiv \lambda_t^n \cdot P_t, \tag{4.18}$$

$$R_t \equiv \frac{R_t^n}{P_t}. \tag{4.19}$$

此外，定义通货膨胀率 π_t 如下

$$1 + \pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}. \tag{4.20}$$

我们有 FOC wrt 消费 (Euler equation)

$$\lambda_t = \frac{\nu_t}{C_t - b \cdot C_{t-1}} - b \cdot \beta \cdot E_t \frac{\nu_{t+1}}{C_{t+1} - b \cdot C_t}. \tag{4.21}$$

FOC wrt 资本利用率

$$\lambda_t \cdot R_t = \mu_t \cdot \delta'(u_t). \tag{4.22}$$

FOC wrt 债券

$$\lambda_t = \beta \cdot E_t \lambda_{t+1} \cdot \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}} \right). \tag{4.23}$$

FOC wrt 投资

$$\begin{aligned} \lambda_t =& \mu_t \cdot Z_t \cdot \left\{ 1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right)^2 - \kappa \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right\} \\ &+ \beta \cdot E_t \mu_{t+1} \cdot Z_{t+1} \cdot \kappa \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} - 1 \right) \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 \end{aligned} \tag{4.24}$$

FOC wrt 资本存量

$$\mu_t = \beta \cdot E_t \left\{ \lambda_{t+1} \cdot R_{t+1} \cdot u_{t+1} + \mu_{t+1} \cdot (1 - \delta(u_{t+1})) \right\} \tag{4.25}$$

现在来看有关工资设定部分的一阶条件。在任一时间，假定全部 $l \in [0,1]$ 家庭中有 $(1 - \phi_w)$ 比例可以调整工资，设为 $W_t^{\#}(l)$；有 ϕ_w 比例不能调整工资，只能根据上期工资和上期通胀率制定当期工资，可表示如下

$$W_t(l) = \begin{cases} W_t^{\#}(l) & \text{能调整工资，概率 } 1 - \phi_w, \\ (1 + \pi_{t-1})^{\zeta_w} \cdot W_{t-1}(l) & \text{不能调整工资，概率 } \phi_w. \end{cases} \tag{4.26}$$

其中通货膨胀率的传导系数 $0 \le \zeta_w \le 1$。

工资设定的 backward indexation 分析

假定某家庭 l 能够在 t 期调整价格至 $W_t^{\#}(l)$，随后直到 $t+s, s \ge 0$ 期均不能调整价格。根据式(4.26)，随着 $s = (0, 1, 2 \ldots \infty)$，$l$ 家庭的工资 $W_{t+s}(l)$ 依次为

$$\begin{aligned} &W_t(l) = W_t^{\#}(l), \\ &W_{t+1}(l) = (1 + \pi_t)^{\zeta_w} \cdot W_t(l) = (1 + \pi_t)^{\zeta_w} \cdot W_t^{\#}(l), \\ &W_{t+2}(l) = (1 + \pi_{t+1})^{\zeta_w} \cdot W_{t+1}(l) = [(1 + \pi_{t+1}) \cdot (1 + \pi_t)]^{\zeta_w} \cdot W_t^{\#}(j), \\ &W_{t+3}(l) = (1 + \pi_{t+2})^{\zeta_w} \cdot W_{t+2}(l) = [(1 + \pi_{t+2}) \cdot (1 + \pi_{t+1}) \cdot (1 + \pi_t)]^{\zeta_w} \cdot W_t^{\#}(j), \\ &\ldots \end{aligned}$$

或者改写为

$$\begin{aligned} W_{t+s}(l) &= \left[\prod_{j=0}^{s-1}(1+\pi_{t+j})\right]^{\zeta_w} \cdot W_t^{\#}(l) \\ &= \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_w} \cdot W_t^{\#}(l). \end{aligned} \tag{4.27}$$

其中第二行根据式(4.20)求得。该式描述 $t+s$ 期，l^{th} 家庭的工资与 t 期工资和往期通货膨胀（或往期价格水平）的关系。

涉及工资设定的一阶条件

t 期有机会调整工资的家庭 l，从 forward-looking 的角度，通过设定 $W_t^{\#}(l)$ 追求 t 到 $t+s$ 期的效用之和最大化，

$$\max_{\{W_t^{\#}(l)\}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\cdot\phi_w)^s \cdot \left\{\nu_{t+s}\cdot\left[\ldots - \psi_{t+s}\cdot\frac{N_{t+s}(l)^{1+\chi}}{1+\chi}\right] + \lambda_t^n \cdot W_{t+s}(l)\cdot N_{t+s}(l)\right\}, \tag{4.28}$$

$W_t^{\#}(l)$ 信息在 $t+s$ 期仍然有效的概率是 ϕ_w^s。$(\beta\cdot\phi_w)^s$ 为主观折旧系数。

根据式(4.2)，用劳动承包商对 $N_{d,t}$ 的需求代替异质劳动力供应 $N_t(l)$；根据式(4.27)，用 t 期的调整工资 $W_t^{\#}(l)$ 代替 $t+s$ 期工资 $W_{t+s}(l)$，得

$$N_{t+s}(l) = N_{d,t+s}\cdot\left(\frac{W_{t+s}(l)}{W_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w} = N_{d,t+s}\cdot\left(\frac{W_t^{\#}(l)}{W_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w}\cdot\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_w\cdot\zeta_w}. \tag{4.29}$$

式(4.28)变为

$$\begin{aligned} E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\cdot\phi_w)^s \cdot \{ -\nu_{t+s}\cdot\psi_{t+s}\cdot\frac{N_{d,t+s}^{1+\chi}}{1+\chi}\cdot\left(\frac{W_t^{\#}(l)}{W_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w\cdot(1+\chi)} \cdot\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_w\cdot\zeta_w\cdot(1+\chi)} \\ \lambda_{t+s}^n\cdot\left[\left(\frac{W_t^{\#}(l)}{W_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w}\cdot\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_w\cdot\zeta_w}\cdot N_{d,t+s}\right]\} \end{aligned} \tag{4.30}$$

求解一阶条件，整理得

$$W_t^{\#}(l)^{1+\epsilon_w\cdot\chi} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon-1}\cdot\frac{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi_w)^s\cdot\nu_{t+s}\cdot\psi_{t+s}\cdot W_{t+s}^{\epsilon_w\cdot(1+\chi)}\cdot N_{d,t+s}^{1+\chi}\cdot\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_w\cdot\zeta_w\cdot(1+\chi)}}{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\cdot\phi_w)^s\cdot\lambda_{t+s}^n\cdot W_{t+s}^{\epsilon_w}\cdot N_{d,t+s}\cdot\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_w\cdot(1-\epsilon_w)}}$$

式右侧与个体家庭 l 无关，可见 $W_t^{\#}(l) = W_t^{\#}, \forall l$。定义两个辅助变量 $H_{1,t}, H_{2,t}$，上式变为

$$W_t^{\#,1+\epsilon_w\cdot\chi} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w-1}\cdot\frac{H_{1,t}}{H_{2,t}}, \tag{4.31}$$

其中

$$H_{1,t} \equiv E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^s \cdot \nu_{t+s} \cdot \psi_{t+s} \cdot W_{t+s}^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot N_{d,t+s}^{1+\chi} \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_w \cdot \zeta_w \cdot (1+\chi)}, \tag{4.32}$$

$$H_{2,t} \equiv E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^s \cdot \lambda_{t+s}^n \cdot W_{t+s}^{\epsilon_w} \cdot N_{d,t+s} \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_w \cdot (1-\epsilon_w)}. \tag{4.33}$$

将名义量的式(4.33)-(4.31)改写为实际量。定义实际工资

$$w_t \equiv \frac{W_t}{P_t}, \tag{4.34}$$

两个辅助变量分别变为

$$\begin{aligned} H_{1,t} &= E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^s \cdot \nu_{t+s} \cdot \psi_{t+s} \cdot w_{t+s}^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot N_{d,t+s}^{1+\chi} \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_w \cdot \zeta_w \cdot (1+\chi)} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \\ &= \nu_t \cdot \psi_t \cdot w_t^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot N_{d,t}^{1+\chi} \cdot P_t^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} + (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t \left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_w \cdot \zeta_w \cdot (1+\chi)} \cdot H_{1,t+1} \\ &= \nu_t \cdot \psi_t \cdot w_t^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot N_{d,t}^{1+\chi} \cdot P_t^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} + (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t \left(1+\pi_t\right)^{-\epsilon_w \cdot \zeta_w \cdot (1+\chi)} \cdot H_{1,t+1}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} H_{2,t} &= E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_w)^s \cdot \lambda_{t+s}^n \cdot W_{t+s}^{\epsilon_w} \cdot N_{d,t+s} \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_w \cdot (1-\epsilon_w)} \\ &= \lambda_t \cdot w_t^{\epsilon_w} \cdot N_{d,t} \cdot P_t^{\epsilon_w - 1} + (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t \left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_w \cdot (1-\epsilon_w)} \cdot H_{2,t+1} \\ &= \lambda_t \cdot w_t^{\epsilon_w} \cdot N_{d,t} \cdot P_t^{\epsilon_w - 1} + (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t \left(1+\pi_t\right)^{\zeta_w \cdot (1-\epsilon_w)} \cdot H_{2,t+1}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

继续调整辅助变量，定义

$$\begin{aligned} h_{1,t} \equiv \frac{H_{1,t}}{P_t^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)}} =& \nu_t \cdot \psi_t \cdot w_t^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot N_{d,t}^{1+\chi} \\ &+ (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t \left(1+\pi_t\right)^{-\epsilon_w \cdot \zeta_w \cdot (1+\chi)} \cdot \left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot h_{1,t+1}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} h_{2,t} \equiv \frac{H_{2,t}}{P_t^{\epsilon_w - 1}} =& \lambda_t \cdot w_t^{\epsilon_w} \cdot N_{d,t} \\ &+ (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t \left(1+\pi_t\right)^{\zeta_w \cdot (1-\epsilon_w)} \cdot \left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon_w - 1} \cdot h_{2,t+1}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

式(4.31)进一步调整为

$$w_t^{\#, 1+\epsilon_w \cdot \chi} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \cdot \frac{h_{1,t}}{h_{2,t}}, \tag{4.39}$$

其中定义实际调整工资

$$w_t^{\#} \equiv \frac{W_t^{\#}}{P_t}. \tag{4.40}$$

式(4.37)-(4.39)一道构成了家庭调整工资的最优决策。

相对调整工资

出于研究的需要，我们常常更感兴趣于调整工资 $w^{\#}$ 与当期总工资水平 w_t 的比值，而非 $w^{\#}$ 值本身。因此定义一组新的辅助变量

$$\begin{aligned}\hat{h}_{1,t} \equiv & \frac{h_{1,t}}{w^{\#,\epsilon_w\cdot(1+\chi)}} \\ = & \nu_t \cdot \psi_t \cdot \left(\frac{w_t}{w_t^{\#}}\right)^{\epsilon_w\cdot(1+\chi)} \cdot N_{d,t}^{1+\chi} \\ & + (\beta\cdot\phi_w)\cdot E_t\,(1+\pi_t)^{-\epsilon_w\cdot\zeta_w\cdot(1+\chi)}\cdot(1+\pi_{t+1})^{\epsilon_w\cdot(1+\chi)}\cdot\left(\frac{w_{t+1}^{\#}}{w_t^{\#}}\right)^{\epsilon_w\cdot(1+\chi)}\cdot\hat{h}_{1,t+1},\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}\hat{h}_{2,t} \equiv & \frac{h_{2,t}}{w^{\#,\epsilon_w}} \\ = & \lambda_t \cdot \left(\frac{w_t}{w_t^{\#}}\right)^{\epsilon_w} \cdot N_{d,t} \\ & + (\beta\cdot\phi_w)\cdot E_t\,(1+\pi_t)^{\zeta_w\cdot(1-\epsilon_w)}\cdot(1+\pi_{t+1})^{\epsilon_w-1}\cdot\left(\frac{w_{t+1}^{\#}}{w_t^{\#}}\right)^{\epsilon_w}\cdot\hat{h}_{2,t+1}.\end{aligned} \tag{4.42}$$

调整工资决定式(4.39)变为

$$w_t^{\#,1+\epsilon_w\cdot\chi} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w-1}\cdot\frac{h_{1,t}}{h_{2,t}} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w-1}\cdot\frac{\frac{h_{1,t}}{w_t^{\#,\epsilon_w\cdot(1+\chi)}}}{\frac{h_{2,t}}{w_t^{\#,\epsilon_w}}}\cdot\frac{w_t^{\#,\epsilon_w\cdot(1+\chi)}}{w_t^{\#,\epsilon_w}}$$

整理得

$$w_t^{\#} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w-1}\cdot\frac{\hat{h}_{1,t}}{\hat{h}_{2,t}}. \tag{4.43}$$

这样，式(4.21)-(4.25)，以及(4.41)-(4.43)一道，描述了家庭的最优行为决策。

4.2.3 最终产品生产部门

经济体中存在一个最终产品生产者和一系列异质化的中间产品生产者 $j\in[0,1]$，每个中间产品上生产一种中间产品 Y_tj，以 $P_t(j)$ 的价格提供给最终产品生产者。最终产品生产者将 Y_tj 打包为最终产出，满足投入产出关系

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon_p-1}{\epsilon_p}}dj\right)^{\frac{\epsilon_p}{\epsilon_p-1}}, \tag{4.44}$$

其中 ϵ_p 表示不同中间产品之间的替代弹性，设 $\epsilon_p>1$ 即它们是替代品。

对 j^{th} 中间产品的需求

在完全竞争市场假定下，最终产品生产者的利润最大化问题。根据给定价格 $\{P_t(j)\}$，决定对中间产品 $\{Y_t(j)\}$ 的需求，

$$\max_{Y_t(j)} P_t \cdot Y_t - \int_0^1 P_t(j) \cdot Y_t(j) dj,$$

引入式(4.44)替代 Y_t，FOC wrt $Y_t(j)$ 可得

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon_p} \cdot Y_t. \tag{4.45}$$

总价格水平

根据完全竞争假定，利润为 0，

$$P_t \cdot Y_t = \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj,$$

引入(4.45)，可得经济体的总价格水平

$$P_t^{1-\epsilon_p} = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon_p} dj. \tag{4.46}$$

4.2.4 中间产品生产部门

j^{th} 中间产品生产者的产出函数

$$Y_t(j) = A_t \cdot \hat{K}_t(j)^\alpha \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha} - F, \tag{4.47}$$

F 代表固定成本，$F > 0$ 意味着在垄断竞争的市场条件下，中间产品生产者的稳态利润为 0，no negative production，使得 no entry no exit。详见第3.1.2节。

生产的边际成本

j^{th} 中间产品生产者的最大化问题可以描述为，以 R_t^n 的价格从家庭部门租用资本服务 $\hat{K}_t(j)$，以 W_t 的价格从劳动承包商那里获取同质劳动 $N_{d,t}(j)$；产出 $Y_t(j)$ 以 $P_t(j)$ 的价格出售给最终产品生产者以获取利润。市场摩擦的存在导致 j 无法随意调整产出品价格，但可以通过调整投入品的数量实现成本最小化

$$\min_{\{\hat{K}_t(j), N_{d,t}(j)\}} W_t \cdot N_{d,t}(j) + R_t^n \cdot \hat{K}_t(j),$$

满足约束条件

$$A_t \cdot \hat{K}_t(j)^\alpha \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha} - F \geq \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon_p} \cdot Y_t,$$

LHS 表示中间产品的供应，RHS 表示需求。

建 Lagrangian

$$\mathcal{L} = W_t \cdot N_{d,t}(j) + R_t^n \cdot \hat{K}_t(j) - \varphi_t(j) \cdot \left[A_t \cdot \hat{K}_t(j)^\alpha \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha} - F - \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon_p} \cdot Y_t \right].$$

FOCs

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_{d,t}(j)} = 0 \Rightarrow W_t = \varphi_t \cdot (1-\alpha) \cdot A_t \cdot \hat{K}_t(j)^\alpha \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha},$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{K}_t(j)} = 0 \Rightarrow R_t^n = \varphi_t \cdot \alpha \cdot A_t \cdot \hat{K}_t(j)^{\alpha-1} \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha}.$$

两式相除可得

$$\frac{W_t}{R_t^n} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\hat{K}_t(j)}{N_{d,t}(j)},$$

即所有中间产品生产者，在外部给定的投入要素价格 $\{W_t, R_t^n\}$ 下，会有相同的资本-劳动投入比，

$$\frac{\hat{K}_t(j)}{N_{d,t}(j)} = \frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}, \quad \forall j. \tag{4.48}$$

带回上式，消除异质化特征可得

$$\frac{W_t}{R_t^n} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}},$$

根据式(4.34)、(4.34)可以将上式改写为实际量

$$\frac{w_t}{R_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}. \tag{4.49}$$

对投入要素的需求

式(4.49)带回 j^{th} 的生产函数，可得

$$\begin{aligned} Y_t(j) &= A_t \cdot \hat{K}_t(j)^\alpha \cdot \left[\frac{R_t^n}{W_t} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \hat{K}_t(j) \right]^{1-\alpha} \\ &= A_t \cdot \left(\frac{W_t}{R_t^n} \right)^{-(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-(1-\alpha)} \cdot \hat{K}_t(j) - F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_t(j) &= A_t \cdot \left[\frac{W_t}{R_t^n} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot N_{d,t}(j) \right]^\alpha \cdot N_{d,t}^{1-\alpha} - F \\ &= A_t \cdot \left(\frac{W_t}{R_t^n} \right)^\alpha \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-\alpha} \cdot N_{d,t}(j) - F. \end{aligned}$$

整理可得中间产品生产者 j 对投入要素 $\hat{K}_t(j), N_{d,t}(j)$ 的需求

$$\hat{K}_t(j) = \frac{1}{A_t} \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}} \right)^{1-\alpha} \cdot [Y_t(j) + F], \tag{4.50}$$

$$N_{d,t}(j) = \frac{1}{A_t} \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}} \right)^{\alpha} \cdot [Y_t(j) + F]. \tag{4.51}$$

边际成本

根据式(4.50)-(4.51)可求得 j 的成本函数

$$Cost_t(j) = W_t \cdot N_{d,t}(j) + R_t^n \cdot \hat{K}_t(j). \tag{4.52}$$

j 生产额外 1 单位 $Y_t(j)$ 的边际成本

$$\begin{aligned}
MC_t(j) &= \frac{\partial Cost_t(j)}{\partial Y_t(j)} = W_t \cdot \frac{\partial N_{d,t}(j)}{\partial Y_t(j)} + R_t^n \cdot \frac{\partial \hat{K}_t(j)}{\partial Y_t(j)} \\
&= \frac{1}{A_t} \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{-\alpha} \cdot \left[W_t + R_t^n \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)\right] = \frac{1}{A_t} \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{-\alpha} \cdot \left[W_t + W_t \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}\right] \\
&= \frac{W_t}{(1-\alpha) \cdot A_t \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{-\alpha}}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

类似地，RHS 也不涉及 j^{th} 生产者的异质性特征，可见 $MC_t(j) = MC_t$，$\forall j$。定义实际边际成本 $mc_t(j)$ 如下

$$mc_t \equiv \frac{MC_t}{P_t} = \frac{w_t}{(1-\alpha) \cdot A_t \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{-\alpha}} \tag{4.54}$$

利润函数

根据 product efficiency，每投入额外 1 单位某种投入要素的成本，应等于该要素的边际产出与边际成本的乘积

$$\begin{aligned}
W_t &= MC_t \cdot \frac{\partial Y_t(j)}{\partial N_{d,t}(j)} = MC_t \cdot (1-\alpha) \cdot A_t \cdot \hat{K}_t(j)^{\alpha} \cdot N_{d,t}(j)^{-\alpha}, \\
R_t^n &= MC_t \cdot \frac{\partial Y_t(j)}{\partial \hat{K}_t(j)} = MC_t \cdot \alpha \cdot A_t \cdot \hat{K}_t(j)^{\alpha-1} \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

对于 $N_{d,t}(j)$ 和 $\hat{K}_t(j)$ 单位的要素投入来说，

$$\begin{aligned}
W_t \cdot N_{d,t}(j) &= (1-\alpha) \cdot A_t \cdot \hat{K}_t(j)^{\alpha} \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha}, \\
R_t^n \cdot \hat{K}_t(j) &= \alpha \cdot A_t \cdot \hat{K}_t(j)^{\alpha-1} \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

成本函数式(4.52)变为

$$\begin{aligned}
Cost_t(j) &= W_t \cdot N_{d,t}(j) + R_t^n \cdot \hat{K}_t(j) \\
&= MC_t \cdot A_t \cdot \hat{K}_t(j)^{\alpha} \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha} \\
&= MC_t \cdot (Y_t(j) + F).
\end{aligned}$$

中间产品生产者 j 的利润式

$$\Pi_t^n(j) = P_t(j) \cdot Y_t(j) - MC_t \cdot Y_t(j) - MC_t \cdot F, \tag{4.55}$$

在任一时间 t，假定全部 $j \in [0,1]$ 生产者中有 $(1-\phi_p)$ 比例可以调整价格，设为 $P_t^{\#}(j)$；有 ϕ_p 比例不能调整，只能根据上期价格和上期通胀率制定当期产品价格，可表示如下

$$P_t(l) = \begin{cases} P_t^{\#}(l) & \text{能调整价格，概率 } 1-\phi_p, \\ (1+\pi_{t-1})^{\zeta_p} \cdot P_{t-1}(l) & \text{不能调整价格，概率 } \phi_P. \end{cases} \tag{4.56}$$

其中通货膨胀率的传导系数 $0 \leq \zeta_p \leq 1$。

价格设定的 backward indexation 分析

假定某生产者 j 能够在 t 期调整价格至 $P_t^{\#}(j)$，随后直到 $t+s, s \geq 0$ 期均不能调整价格。根据式(4.56)，随着 $s = (0,1,2\ldots\infty)$，j 产品价格 $P_{t+s}(j)$ 依次为

$$\begin{aligned} &P_t(j) = P_t^{\#}(j), \\ &P_{t+1}(j) = (1+\pi_t)^{\zeta_p} \cdot P_t(l) = (1+\pi_t)^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j), \\ &P_{t+2}(j) = (1+\pi_{t+1})^{\zeta_p} \cdot P_{t+1}(j) = [(1+\pi_{t+1}) \cdot (1+\pi_t)]^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j), \\ &P_{t+3}(j) = (1+\pi_{t+2})^{\zeta_p} \cdot P_{t+2}(j) = [(1+\pi_{t+2}) \cdot (1+\pi_{t+1}) \cdot (1+\pi_t)]^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j), \\ &\ldots \end{aligned}$$

或者改写为

$$\begin{aligned} P_{t+s}(j) &= \left[\prod_{\rho=0}^{s-1} (1+\pi_{t+\rho})\right]^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j) \\ &= \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j). \end{aligned} \tag{4.57}$$

该式描述 $t+s$ 期，j^{th} 产品价格与 t 期价格和往期通货膨胀（或往期价格水平）的关系。

利润最大化问题

t 期有机会调整工资的中间产品生产者 j，从 forward-looking 的角度，通过设定 $P_t^{\#}(j)$ 追求从 t 到 $t+s$ 期的利润最大化

$$\max_{\{P_t^{\#}\}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \left(\frac{\lambda_{t+s}^n}{\lambda_t^n}\right) \cdot \Pi_{t+s}^n \tag{4.58}$$

λ_t^n 反映消费的边际效用。t 期价格到 $t+s$ 期仍然有影响的概率是 ϕ_p^s。$(\beta^s \cdot \lambda_{t+s}^n / \lambda_t^n)$ 表示

名义的随机折旧系数。将式(4.57)、(4.45)代入式(4.55)可得，

$$
\begin{aligned}
\Pi_{t+s}^{n} =& P_{t+s}(j) \cdot Y_{t+s}(j) - MC_{t+s} \cdot Y_{t+s}(j) - MC_{t+s} \cdot F \\
=& P_{t+s}(j) \cdot \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}}\right)^{-\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} - MC_{t+s} \cdot \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}}\right)^{-\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} - MC_{t+s} \cdot F \\
=& P_{t+s}(j)^{1-\epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} - MC_{t+s} \cdot P_{t+s}(j)^{-\epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} - MC_{t+s} \cdot F \\
=& \left[\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j)\right]^{1-\epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} \\
& - MC_{t+s} \cdot \left[\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j)\right]^{-\epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} - MC_{t+s} \cdot F.
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

式(4.59)带回式(4.58)，最大化问题式变为

$$
\begin{aligned}
\max_{P_t^{\#}(j)} E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \frac{\lambda_{t+s}^n}{\lambda_t^n} \cdot \{ & \left[\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j)\right]^{1-\epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} \\
& - MC_{t+s} \cdot \left[\left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-1}}\right)^{\zeta_p} \cdot P_t^{\#}(j)\right]^{-\epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} - MC_{t+s} \cdot F\}.
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

FOC wrt $P_t^{\#}(j)$

$$
\begin{aligned}
&(1-\epsilon_p) \cdot E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \frac{\lambda_{t+s}^n}{\lambda_t^n} \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-s}}\right)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot P_t^{\#,-\epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} \\
&= -\epsilon_p \cdot E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \frac{\lambda_{t+s}^n}{\lambda_t^n} \cdot MC_{t+s} \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-s}}\right)^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot P_t^{\#,-\epsilon_p-1} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s},
\end{aligned}
$$

整理得

$$
P_t^{\#} = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p - 1} \cdot \frac{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \lambda_{t+s}^n \cdot MC_{t+s} \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-s}}\right)^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \lambda_{t+s}^n \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-s}}\right)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s}},
$$

引入式(4.18)和(4.54)，上式改写为名义量形式。

$$
P_t^{\#}(j) = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p - 1} \cdot \frac{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \lambda_{t+s} \cdot mc_{t+s} \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-s}}\right)^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \lambda_{t+s} \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-s}}\right)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s}}, \tag{4.61}
$$

类似地，RHS 与个体 j 无关，$P^{\#}(j) = P^{\#}, \forall j$。定义两个辅助变量 $X_{1,t}, X_{2,t}$，上式变为

$$
P_t^{\#} = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p - 1} \cdot \frac{X_{1,t}}{X_{2,t}}, \tag{4.62}
$$

其中

$$\begin{aligned} X_{1,t} &\equiv E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \lambda_{t+s} \cdot mc_{t+s} \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-s}} \right)^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} \\ &= \lambda_t \cdot mc_t \cdot P_t^{\epsilon_p} \cdot Y_t + (\beta \cdot \phi_p) \cdot (1+\pi_t)^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot E_t X_{1,t+1}, \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} X_{2,t} &\equiv E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \cdot \phi_p)^s \cdot \lambda_{t+s} \cdot \left(\frac{P_{t+s-1}}{P_{t-s}} \right)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot P_{t+s}^{\epsilon_p} \cdot Y_{t+s} \\ &= \lambda_t \cdot P_t^{\epsilon_p - 1} \cdot Y_t + (\beta \cdot \phi_p) \cdot (1+\pi_t)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot E_t X_{2,t+1}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

继续调整辅助变量，定义

$$x_{1,t} = \frac{X_{1,t}}{P_t^{\epsilon_p}} = \lambda_t \cdot mc_t \cdot Y_t + (\beta \cdot \phi_p) \cdot (1+\pi_t)^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot E_t \left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon_p} \cdot x_{1,t+1} \tag{4.65}$$

$$x_{2,t} = \frac{X_{2,t}}{P_t^{\epsilon_p - 1}} = \lambda_t \cdot Y_t + (\beta \cdot \phi_p) \cdot (1+\pi_t)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot E_t \left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon_p - 1} x_{2,t+1}. \tag{4.66}$$

调整价格的决定式(4.62)变为

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p - 1} \cdot P_t \cdot \frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}. \tag{4.67}$$

调整价格的通胀率

定义调整价格的通胀率为

$$\left(1+\pi_t^{\#}\right) \equiv \frac{P^{\#}}{P_{t-1}}. \tag{4.68}$$

由式(4.67)得调整价格通胀率表示的决定式

$$\left(1+\pi_t^{\#}\right) = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p - 1} \cdot (1+\pi_t) \cdot \frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}. \tag{4.69}$$

4.2.5 政府部门

政府支出

用 G_t 定义政府支出；设 $\ln G_t$ 满足 AR(1) 过程

$$\ln G_t = (1-\rho_G) \cdot \ln G + \rho_G \cdot \ln G_{t-1} + s_g \cdot \varepsilon_{G,t}, \tag{4.70}$$

其中 G 表示稳定状态下的政府支出。$0 \le \rho_G < 1$。$\varepsilon_{G,t}$ 表示政府支出的外生冲击，s_G 表示这个外生冲击的标准差。

政府预算约束

政府部门的总支出不得超过总收入。总支出由当期政府支出 G_t 和以上期利率 i_{t-1} 价格支付的当期初发放债券 D_t 的利息组成。总收入由两部分构成，分别为 (一揽子) 税收 T_t 和当期新发放债券数量 $\Delta D_{t+1} = D_{t+1} - D_t$。

$$P_t \cdot G_t + i_{t-1} \cdot D_t \le P_t \cdot T_t + D_{t+1} - D_t, \tag{4.71}$$

4.2.6 中央银行

中央银行的货币政策，假定遵循 partial adjustment 形式的 Taylor rule

$$i_t = (1-\rho_i)\cdot i + \rho_i \cdot i_{t-1} + (1-\rho_i)\cdot[\phi_\pi \cdot (\pi_t - \pi) + \phi_y \cdot (\ln Y_t - \ln Y_{t-1})] + s_i \cdot \varepsilon_{i,t}, \tag{4.72}$$

类似地，设 $0 \le \rho_i < 1$；i 和 π 分别代表稳定状态下的利率和通胀率；假定经济体处于 determinacy region，且 $\phi_\pi > 0$，$\phi_y > 0$。

4.2.7 总量层面的均衡

总利润

经济总体层面，总利润 Π_t^n 来自 j 中间产品生产者的利润之和[2]，

$$\begin{aligned}
\Pi_t^n &= \int_0^1 \Pi_t^n(j)dj \\
&= \int_0^1 \cdot \Big[P_t(j)\cdot Y_t(j) - W_t \cdot N_{d,t}(j) - R_t^n \cdot \hat{K}_t(j)\Big]\, dj \\
&= \int_0^1 P_t(j)\cdot Y_t(j)dj - W_t \cdot \int_0^1 N_{d,t}(j)dj - R_t^n \cdot \int_0^1 \hat{K}_t(j)dj \\
&= \int_0^1 P_t(j)\cdot Y_t(j)dj - W_t \cdot N_{d,t} - R_t^n \cdot u_t \cdot \hat{K}_t, \\
&= \left[\int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon_p} dj\right]\cdot P_t^{\epsilon_p} \cdot Y_t - W_t \cdot N_{d,t} - R_t^n \cdot u_t \cdot K_t \\
&= P_t \cdot Y_t - W_t \cdot N_{d,t} - R_t^n \cdot u_t \cdot K_t
\end{aligned} \tag{4.73}$$

第二行用到了式(4.55)。第四行用到了在市场出清的均衡条件下的假定，投入要素的总供给等于总需求

$$N_{d,t} = \int_0^1 N_{d,t}(j)dj, \tag{4.74}$$

$$\hat{K}_t = u_t \cdot K_t = \int_0^1 \hat{K}_t(j)dj. \tag{4.75}$$

第五行根据式(4.45)，利用 Y_t 和相对价格代替对异质中间产品 $Y_t(j)$ 的需求，以消除异质性。第六行根据式(4.46)，用总物价水平 P_t 替代中间产品价格 $P_t(j)$ 以消除异质性。

式(4.73)两侧同时除以 P_t，可得实际利润表述式

$$\Pi_t = Y_t - w_t \cdot N_{d,t} - R_t \cdot u_t \cdot K_t. \tag{4.76}$$

[2]最终产品部门假定为完全竞争的，利润为零。

家庭总预算约束

家庭部门的总预算约束来自 l 个家庭预算约束的加总，总支出不得超过总收入。由式(4.10)得

$$
\begin{aligned}
& P_t \cdot C_t + P_t \cdot I_t + B_{t+1} \\
& = \int_0^1 W_t(l) \cdot N_t(l) dl + R_t^n \cdot u_t \cdot K_t + \Pi_t^n - P_t \cdot T_t + (1 + i_{t-1}) \cdot B_t \\
& = \int_0^1 W_t(l)^{1-\epsilon_w} \cdot W_t^{\epsilon_w} N_{d,t} dl + R_t^n \cdot u_t \cdot K_t + \Pi_t^n - P_t \cdot T_t + (1 + i_{t-1}) \cdot B_t \\
& = W_t^{\epsilon_w} \cdot N_{d,t} \cdot \int_0^1 W_t(l)^{1-\epsilon_w} dl + R_t^n \cdot u_t \cdot K_t + \Pi_t^n - P_t \cdot T_t + (1 + i_{t-1}) \cdot B_t \\
& = W_t \cdot N_{d,t} + R_t^n \cdot u_t \cdot K_t + \Pi_t^n - P_t \cdot T_t + (1 + i_{t-1}) \cdot B_t \\
& = P_t \cdot Y_t - P_t \cdot T_t + (1 - i_{t-1}) \cdot B_t
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

第三行用到了式(4.2)，市场出清均衡下，用劳动承包者的同质劳动产出 $N_{d,t}$ 替代家庭的劳动力供应 $N_t(l)$，以消除异质性。第五行用根据式(4.3)，利用总工资水平 W_t 替代异质家庭劳动力工资 $W_t(l)$。第六行根据式(4.73)替代总利润 Π_t^n。

总产出的使用

国债市场出清要求家庭部门持有全部政府债券，即 $D_t \equiv B_t, \quad \forall t$。

政府预算约束条件式(4.71)调整为

$$P_t \cdot T_t = P_t \cdot G_t + (1 + i_{t-1}) \cdot D_t - D_{t+1}.$$

家庭部门总预算约束条件式(4.77)中用 D_t 替代 B_t，调整得

$$P_t \cdot T_t = P_t \cdot Y_t + (1 - i_{t-1}) \cdot D_t - D_{t-1} - P_t \cdot C_t - P_t \cdot I_t.$$

两式联立可得总产出的使用

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \tag{4.78}$$

总量生产函数

经济总体层面，j 中间产品的总供应等于总需求。供应端由式(4.47)可得

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 Y_t(j) dj = \int_0^1 \left[A_t \cdot \hat{K}_t(j)^\alpha \cdot N_{d,t}(j)^{1-\alpha} - F \right] dj \\
& = A_t \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}} \right)^\alpha \cdot \int_0^1 N_{d,t}(j) dj - F \\
& = A_t \cdot \hat{K}_t^\alpha N_{d,t}^{1-\alpha} - F,
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

其中第二行利用了式(4.48)，第三行利用了式(4.74)。

需求端由式(4.45)可得

$$\int_0^1 Y_t(j)dj = Y_t \cdot \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon_p} dj \tag{4.80}$$

定义一个价格分布指标 ν_t^p

$$\nu_t^p \equiv \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon_p} dj. \tag{4.81}$$

联立式(4.79)-(4.80)可得总量生产函数

$$Y_t = \frac{A_t \cdot \hat{K}_t^{\alpha} \cdot N_{d,t}^{1-\alpha} - F}{\nu_t^p}. \tag{4.82}$$

价格分布指标的演化

根据 Calvo assumption(Calvo, 1983)，将式(4.56)引入式(4.81)，可得价格分布指标随时间的演化，

$$\begin{aligned}
\nu_t^p &\equiv \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon_p} dj \\
&= \int_0^{1-\phi_p} \left(\frac{P_t^{\#}}{P_t}\right)^{-\epsilon_p} dj + \int_{1-\phi_p}^1 \cdot \left[\frac{(1+\pi_{t-1})^{\zeta_p} \cdot P_{t-1}(j)}{P_t}\right]^{-\epsilon_p} dj \\
&= (1-\phi_p) \cdot \int_0^1 \left(\frac{P_t^{\#}}{P_t}\right)^{-\epsilon_p} dj + (1+\pi_{t-1})^{-\zeta_p \cdot \phi_p} \int_0^{\phi_p} \left(\frac{P_{t-1}(j)}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_p} \cdot \left(\frac{P_{t-1}}{P_t}\right)^{-\epsilon_p} \\
&= (1-\phi_p) \cdot \left(\frac{P_t^{\#}}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_p} \cdot \left(\frac{P_{t-1}}{P_t}\right)^{-\epsilon_p} + (1+\pi_{t-1})^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot (1+\pi_t)^{\epsilon_p} \cdot \phi_p \cdot \int_0^1 \left(\frac{P_{t-1}(j)}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon_p} dj \\
&= (1-\phi_p) \cdot \left(\frac{1+\pi_t^{\#}}{1+\pi_t}\right)^{-\epsilon_p} + \phi_p \cdot (1+\pi_{t-1})^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot (1+\pi_t)^{\epsilon_p} \cdot \phi_p \cdot \nu_{t-1}^p
\end{aligned} \tag{4.83}$$

总物价水平的演化

根据 Calvo assumption (Calvo, 1983)，将式(4.56)引入式(4.46)，可得总物价水平随时间的演化

$$\begin{aligned}
P_t^{1-\epsilon_p} &= \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon_p} dj \\
&= \int_0^{1-\phi_p} P_t^{\#,1-\epsilon_p} dj + \int_{1-\phi_p}^1 (1+\pi_{t-1})^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot P_{t-1}(j)^{1-\epsilon_p} dj \\
&= (1-\phi_p) \cdot P_t^{\#,1-\epsilon_p} + \phi_p \cdot (1+\pi_{t-1})^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot \int_0^1 P_{t-1}(j)^{1-\epsilon_p} dj \\
&= (1-\phi_p) \cdot P_t^{\#,1-\epsilon_p} + \phi_p \cdot (1+\pi_{t-1})^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot P_{t-1}^{1-\epsilon_p},
\end{aligned}$$

式两侧同时除以 $P_{t-1}^{1-\epsilon_p}$，整理得

$$(1+\pi_t)^{1-\epsilon_p} = (1-\phi_p)\cdot\left(1+\pi_t^{\#}\right)^{1-\epsilon_p} + \phi_p\cdot(1+\pi_{t-1})^{\zeta_p\cdot(1-\epsilon_p)} \tag{4.84}$$

总工资水平的演化

根据 Calvo assumption(Calvo, 1983)，将式(4.26)引入式(4.26)，可得总工资水平随时间的演化

$$\begin{aligned}
W_t^{1-\epsilon_w} &= \int_0^1 W_t(l)^{1-\epsilon_w} dl \\
&= \int_0^{1-\phi_w} W_t(l)^{\#,1-\epsilon_w} dl + \int_{1-\phi_w}^1 (1+\pi_{t-1})^{\zeta_w\cdot(1-\epsilon_w)}\cdot W_{t-1}(l)^{1-\epsilon_w} dl \\
&= (1-\phi_w)\cdot W_t^{\#,1-\epsilon_w} + (1+\pi_{t-1})^{\zeta_w\cdot(1-\epsilon_w)}\cdot\phi_w\cdot\int_0^1 W_{t-1}(l)^{1-\epsilon_w} dl \\
&= (1-\phi_w)\cdot W_t^{\#,1-\epsilon_w} + \phi_w\cdot(1+\pi_{t-1})^{\zeta_w\cdot(1-\epsilon_w)}\cdot W_{t-1}^{1-\epsilon_w},
\end{aligned}$$

式两侧同时除以 $P_t^{1-\epsilon_w}$ 化为实际量，整理得

$$w_t^{1-\epsilon_w} = (1-\phi_w)\cdot w_t^{\#,1-\epsilon_w} + \phi_w\cdot(1+\pi_{t-1})^{\zeta_w\cdot(1-\epsilon_w)}\cdot w_{t-1}^{1-\epsilon_w}\cdot(1+\pi_t)^{-(1-\epsilon_w)} \tag{4.85}$$

4.2.8 外生过程

模型中设定六个外生冲击，假定分为两组。第一组为政府支出冲击式(4.70)、货币政策冲击式(4.72)和影响劳动力供应的 Intratemporal 偏好冲击 ψ_t，均假定为对数形式的 AR(1) 过程，伴随着非随机均值。ψ_t 设定形式如下

$$\ln\psi_t = (1-\rho_\psi)\cdot\ln\psi + \rho_\psi\cdot\ln\psi_{t-1} + s_\psi\cdot\varepsilon_{\psi,t}. \tag{4.86}$$

第二组为产出效率冲击 A_t、投资的边际效率冲击 Z_t 和影响消费和休闲所带来效用的 Intertemporal 偏好冲击 ν_t，均假定为对数形式的 AR(1)，其非随机均值设定为 1，对应的 $\log(1)=0$，

$$\ln A_t = \rho_A\cdot\ln A_{t-1} + s_A\cdot\varepsilon_{A,t}, \tag{4.87}$$

$$\ln Z_t = \rho_Z\cdot\ln Z_{t-1} + s_Z\cdot\varepsilon_{Z,t}, \tag{4.88}$$

$$\ln\nu_t = \rho_v\cdot\ln\nu_{t-1} + s_\nu\cdot\varepsilon_{\nu,t}. \tag{4.89}$$

4.2.9 均衡条件的完整解集

根据模型设定，均衡状态由 26 个变量构成，对应 26 个方程，其中包括 33 个待决参数。

26 个变量有

$\{\lambda_t, \mu_t, C_t, i_t, \Pi_t, R_t, u_t, Z_t, I_t, v_t, \psi_t, w_t, w_t^{\#}, \hat{h}_{1,t}, \hat{h}_{2,t}, N_{d,t}, \hat{K}_t, K_t, mc_t, \pi_t^{\#}, x_{1,t}, x_{2,t}, Y_t, G_t, A_t, \nu_t^p\}$

33 个待决参数有

$\{\beta, b, \alpha, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \pi, \kappa, \epsilon_w, \chi, \phi_w, \zeta_w, \alpha, \zeta_p, \phi_p, \epsilon_p, F, \rho_i, \phi_\pi, \phi_y, s_i, \rho_A, \rho_Z, \rho_G, \rho_v, \rho_\psi, s_A, s_Z, s_v, s_G, s_\psi$
$, G, \psi\}$

26 个方程如下。来自于家庭部门经济行为决策的方程 1-9；实物资本、资本服务品的形成方程 10-11；生产部门经济行为方程 12-20；政府部门外生支出方程 21；中央银行部门货币政策方程 22；余下 4 个外生冲击方程 23-26。

1. 家庭部门 FOC wrt 消费 (Euler equation)，式(4.21) ⇒

$$\lambda_t = \frac{\nu_t}{C_t - b \cdot C_{t-1}} - b \cdot \beta \cdot E_t \frac{\nu_{t+1}}{C_{t+1} - b \cdot C_t}.$$

2. 家庭部门 FOC wrt 资本利用率，式(4.22) ⇒

$$\lambda_t \cdot R_t = \mu_t \cdot \delta'(u_t).$$

3. 家庭部门 FOC wrt 债券，式(4.23) ⇒

$$\lambda_t = \beta \cdot E_t \lambda_{t+1} \cdot \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}}\right).$$

4. 家庭部门 FOC wrt 投资，式(4.24) ⇒

$$\begin{aligned}\lambda_t =& \mu_t \cdot Z_t \cdot \left\{1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2 - \kappa \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right) \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right\} \\ &+ \beta \cdot E_t \mu_{t+1} \cdot Z_{t+1} \cdot \kappa \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} - 1\right) \cdot \left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)^2.\end{aligned}$$

5. 家庭部门 FOC wrt 资本存量，式(4.25) ⇒

$$\mu_t = \beta \cdot E_t \left\{\lambda_{t+1} \cdot R_{t+1} \cdot u_{t+1} + \mu_{t+1} \cdot (1 - \delta(u_{t+1})).\right\}$$

6. 家庭调整工资的设定，式(4.43) ⇒

$$w_t^{\#} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \cdot \frac{\hat{h}_{1,t}}{\hat{h}_{2,t}}.$$

7. 家庭调整工资的辅助变量之一，式(4.41) ⇒

$$\begin{aligned}\hat{h}_{1,t} =& \nu_t \cdot \psi_t \cdot \left(\frac{w_t}{w_t^{\#}}\right)^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot N_{d,t}^{1+\chi} \\ &+ (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t (1 + \pi_t)^{-\epsilon_w \cdot \zeta_w \cdot (1+\chi)} \cdot (1 + \pi_{t+1})^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot \left(\frac{w_{t+1}^{\#}}{w_t^{\#}}\right)^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot \hat{h}_{1,t+1},\end{aligned}$$

8. 家庭调整工资的辅助变量之二，式(4.42) ⇒

$$\begin{aligned}\hat{h}_{2,t} =&\lambda_t \cdot \left(\frac{w_t}{w_t^{\#}}\right)^{\epsilon_w} \cdot N_{d,t} \\ &+ (\beta \cdot \phi_w) \cdot E_t \left(1+\pi_t\right)^{\zeta_w \cdot (1-\epsilon_w)} \cdot (1+\pi_{t+1})^{\epsilon_w - 1} \cdot \left(\frac{w_{t+1}^{\#}}{w_t^{\#}}\right)^{\epsilon_w} \cdot \hat{h}_{2,t+1}.\end{aligned}$$

9. 总工资水平的演化，反映工资水平和调整工资水平的关系，式(4.85) ⇒

$$w_t^{1-\epsilon_w} = (1-\phi_w) \cdot w_t^{\#,1-\epsilon_w} + \phi_w \cdot (1+\pi_{t-1})^{\zeta_w \cdot (1-\epsilon_w)} \cdot w_{t-1}^{1-\epsilon_w} \cdot (1+\pi_t)^{-(1-\epsilon_w)}$$

10. 实物资本的积累，式(4.6) ⇒

$$K_{t+1} = Z_t \cdot \left[1 - \frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2\right] \cdot I_t + [1-\delta(u_t)] \cdot K_t.$$

11. 资本服务品的决定，式(4.8) ⇒

$$\hat{K}_t = u_t \cdot K_t.$$

12. 要素相对价格和资本-劳动比的关系，式(4.49) ⇒

$$\frac{w_t}{R_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}.$$

13. 生产的边际成本，式(4.54) ⇒

$$mc_t \equiv \frac{MC_t}{P_t} = \frac{w_t}{(1-\alpha) \cdot A_t \cdot \left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{-\alpha}}.$$

14. 生产者调整价格的行为决策，以调整通胀率形式表示，式(4.69) ⇒

$$\left(1+\pi_t^{\#}\right) = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p - 1} \cdot (1+\pi_t) \cdot \frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}.$$

15. 生产者调整价格的辅助变量之一，式(4.65) ⇒

$$x_{1,t} = \lambda_t \cdot mc_t \cdot Y_t + (\beta \cdot \phi_p) \cdot (1+\pi_t)^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot E_t \left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon_p} \cdot x_{1,t+1}.$$

16. 生产者调整价格的辅助变量之二，式(4.66) ⇒

$$x_{2,t} = \lambda_t \cdot Y_t + (\beta \cdot \phi_p) \cdot (1+\pi_t)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)} \cdot E_t \left(1+\pi_{t+1}\right)^{\epsilon_p - 1} x_{2,t+1}.$$

17. 价格分布指标的演化，式(4.83) ⇒

$$\nu_t^p = (1-\phi_p) \cdot \left(\frac{1+\pi_t^{\#}}{1+\pi_t}\right)^{-\epsilon_p} + \phi_p \cdot (1+\pi_{t-1})^{-\zeta_p \cdot \epsilon_p} \cdot (1+\pi_t)^{\epsilon_p} \cdot \phi_p \cdot \nu_{t-1}^p.$$

18. 总物价水平的演化，反映通胀水平和调整价格通胀水平的关系，式(4.84) ⇒

$$(1+\pi_t)^{1-\epsilon_p} = (1-\phi_p)\cdot\left(1+\pi_t^{\#}\right)^{1-\epsilon_p} + \phi_p\cdot(1+\pi_{t-1})^{\zeta_p\cdot(1-\epsilon_p)}$$

19. 总产出的使用，式(4.78) ⇒

$$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

20. 外生政府支出，式(4.70) ⇒

$$\ln G_t = (1-\rho_G)\cdot\ln G + \rho_G\cdot\ln G_{t-1} + s_g\cdot\varepsilon_{G,t}.$$

21. 部分调整 Taylor 法则形式的货币政策，式(4.72) ⇒

$$i_t = (1-\rho_i)\cdot i + \rho_i\cdot i_{t-1} + (1-\rho_i)\cdot[\phi_\pi\cdot(\pi_t-\pi) + \phi_y\cdot(\ln Y_t - \ln Y_{t-1})] + s_i\cdot\varepsilon_{i,t}.$$

22. 期内偏好冲击，影响劳动力供应，式(4.86) ⇒

$$\ln\psi_t = (1-\rho_\psi)\cdot\ln\psi + \rho_\psi\cdot\ln\psi_{t-1} + s_\psi\cdot\varepsilon_{\psi,t}.$$

23. 产出效率冲击，影响总产出，式(4.87) ⇒

$$\ln A_t = \rho_A\cdot\ln A_{t-1} + s_A\cdot\varepsilon_{A,t}.$$

24. 投资冲击，影响投资的边际效率，式(4.88) ⇒

$$\ln Z_t = \rho_Z\cdot\ln Z_{t-1} + s_Z\cdot\varepsilon_{Z,t}.$$

25. 跨期偏好冲击，影响消费和休闲带来的效用，式(4.89) ⇒

$$\ln\nu_t = \rho_v\cdot\ln\nu_{t-1} + s_\nu\cdot\varepsilon_{\nu,t}.$$

4.2.10　非随机的稳定状态

来看如何求得相关解释变量的稳态值。

1. 式(4.23) ⇒

$$\lambda = \beta\cdot\lambda\cdot\frac{1+i}{i+\pi},$$

调整得

$$i = \left(\frac{1+\pi}{\beta}\right) - 1. \tag{4.90}$$

2. 式(4.24) ⇒
$$\lambda = \mu \cdot Z,$$
其中设稳定状态下，投资的边际效率冲击为 1，
$$Z \equiv 1, \tag{4.91}$$
整理得
$$\lambda = \mu, \tag{4.92}$$
即 Tobin's q = 1，详见第A.3节。

3. 设稳定状态下，资本利用率为 1，
$$u \equiv 1, \tag{4.93}$$
式(4.7) ⇒
$$\delta(u) = \delta_0, \tag{4.94}$$
进而式(4.25) ⇒
$$\mu = \beta \cdot [\lambda \cdot R \cdot u + \mu \cdot (1 - \delta(u))] = \beta \cdot (\lambda \cdot R + \mu \cdot (1 - \delta_0)),$$
整理得
$$R = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta_0). \tag{4.95}$$

4. 式(4.7) ⇒
$$\delta'(u_t) = \delta_1 + \delta_2 \cdot (u_t - 1), \tag{4.96}$$
以及，若引入稳定状态下的假定式(4.93) $u \equiv 1$，上式变为
$$\delta'(1) = \delta_1. \tag{4.97}$$
式(4.22) ⇒
$$\lambda \cdot R = \mu \cdot \delta_1,$$
引入式(4.92)、式(4.95)，整理得
$$\delta_1 = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta_0). \tag{4.98}$$

5. 式(4.84) ⇒
$$(1+\pi)^{1-\epsilon_p} = (1-\phi_p) \cdot \left(1+\pi^{\#}\right)^{1-\epsilon_p} + \phi_p \cdot (1+\pi)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)},$$
整理得
$$\left(1+\pi^{\#}\right) = \left[\frac{(1+\pi)^{1-\epsilon_p} - \phi_p \cdot (1+\pi)^{\zeta_p \cdot (1-\epsilon_p)}}{1-\phi_p}\right]^{\frac{1}{1-\epsilon_p}}, \tag{4.99}$$
由式(4.99)不难看出，只有当 $\pi = 0$(稳定状态下的通货膨胀为 0)，或 $\zeta_p = 1$(所有生产者都可以调整价格)，才能得到 $\pi^{\#} = \pi$。

6. 式(4.83) $\Rightarrow$

$$\nu^p = (1-\phi_p)\cdot\left(\frac{1+\pi^{\#}}{1+\pi}\right)^{-\epsilon_p} + \phi_p\cdot(1+\pi)^{\epsilon_p\cdot(1-\zeta_p)}\cdot\nu^p,$$

整理得

$$\nu^p = \frac{(1-\phi_p)\cdot\left(\frac{1+\pi^{\#}}{1+\pi}\right)^{-\epsilon_p}}{1-\phi_p\cdot(1+\pi)^{\epsilon_p\cdot(1-\zeta_p)}}. \tag{4.100}$$

同上分析，由式(4.100)可见，只有当 $\pi=0$ 或 $\zeta_p=1$ 时，可得 $\nu^p=1$，即价格完全一致。

7. 式(4.65)- (4.66) $\Rightarrow$

$$x_1 = \lambda\cdot mc\cdot Y + \beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{-\zeta_p\cdot\epsilon_p}\cdot(1+\pi)^{\epsilon_p}\,x_1,$$
$$x_2 = \lambda\cdot Y + \beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{\zeta_p\cdot(1-\epsilon_p)}\cdot(1+\pi)^{\epsilon_p-1}\cdot x_2,$$

整理得

$$x_1 = \frac{\lambda\cdot mc\cdot Y}{1-\beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{\epsilon_p\cdot(1-\epsilon_p)}}, \tag{4.101}$$

$$x_2 = \frac{\lambda\cdot Y}{1-\beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{(\epsilon_p-1)\cdot(-1+\zeta_p)}}, \tag{4.102}$$

进而我们有

$$\frac{x_1}{x_2} = mc\cdot\frac{1-\beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{(\epsilon_p-1)\cdot(-1+\zeta_p)}}{1-\beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{\epsilon_p\cdot(1-\zeta_p)}}. \tag{4.103}$$

同上分析，由式(4.103)可见，当 $\pi=0$ 或 $\zeta_p=1$ 时，$mc=\frac{x_1}{x_2}$ 是个常量，厂商基于相同的边际成本定价。否则 $\frac{x_1}{x_2}$ 是个变量，厂商在边际成本上做一个额外的 price markup，作为定价依据。

8. 对式(4.69)求非随机稳态，并引入式(4.103)可得

$$\begin{aligned}(1+\pi^{\#}) &= \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p-1}\cdot(1+\pi)\cdot\frac{x_1}{x_2}\\ &= \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p-1}\cdot(1+\pi)\cdot mc\cdot\frac{1-\beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{(\epsilon_p-1)\cdot(-1+\zeta_p)}}{1-\beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{\epsilon_p\cdot(1-\zeta_p)}},\end{aligned}$$

整理可得稳态边际成本

$$mc = \frac{\epsilon_p-1}{\epsilon_p}\cdot\frac{1+\pi^{\#}}{1+\pi}\cdot\frac{1-\beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{\epsilon_p\cdot(1-\zeta_p)}}{1-\beta\cdot\phi_p\cdot(1+\pi)^{(1-\epsilon_p)\cdot(1-\zeta_p)}}. \tag{4.104}$$

9. 假定条件 $u=1$ 式(4.91) 引入式(4.8) $\Rightarrow$

$$\hat{K} = K. \tag{4.105}$$

10. 式(4.105)引入式(4.49) ⇒

$$\frac{\hat{K}}{N_d}=\frac{K}{N_d}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{w}{R} \tag{4.106}$$

11. 关于固定成本 F 值的选取。模型设定中常见两种方案。第一种方案是设 $F=0$，即不存在固定成本。对于 $F\neq 0$ 的第二种方案，将 F 值设定为使得厂商的稳态利润为 0。具体说来，式(4.76)对应的稳定状态

$$\Pi=Y-w\cdot N_d-R\cdot K=0,$$

其中利用到了 $u=1$ 的条件式(4.93)。进而有

$$\frac{Y}{N_d}=w+R\cdot\frac{K}{N_d}. \tag{4.107}$$

12. 式(4.49) ⇒

$$\begin{aligned}R_t&=w_t\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{-1}\\&=mc_t\cdot(1-\alpha)\cdot A_t\cdot\left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{-1}\\&=\alpha\cdot A_t\cdot mc_t\cdot\left(\frac{\hat{K}_t}{N_{d,t}}\right)^{\alpha-1},\end{aligned} \tag{4.108}$$

其中第二行根据式(4.54)，用 mc_t 替代 w_t。

设稳定状态下，产出效率冲击为 1(对数值为 0)

$$A=1, \tag{4.109}$$

代入式(4.109)的 A，式(4.105)以替代 $\hat{K}$，根据式(4.104)求得的 mc。式(4.108)进一步调整为

$$R=\alpha\cdot mc\cdot\left(\frac{K}{N_d}\right)^{\alpha-1},$$

即稳定状态下的资本-劳动投入比表示为

$$\frac{K}{N_d}=\left(\frac{\alpha\cdot mc}{R}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4.110}$$

13. 式(4.54) ⇒

$$w=(1-\alpha)\cdot mc\cdot\left(\frac{K}{N_d}\right)^{\alpha}. \tag{4.111}$$

14. 式(4.85) ⇒

$$w^{1-\epsilon_w}=(1-\phi_w)\cdot w^{\#,1-\epsilon_w}+\phi_w\cdot(1+\pi)^{\zeta_w\cdot(1-\epsilon_w)}\cdot(1+\pi)^{\epsilon_w-1}\cdot w^{1-\epsilon_w},$$

整理得

$$w^{\#} = \left\{ \frac{w^{1-\epsilon_w} \cdot \left[1 - \phi_w \cdot (1+\pi)^{(\epsilon_w - 1)\cdot(1-\zeta_w)} \right]}{1-\phi_w} \right\}^{\frac{1}{1-\epsilon_w}}. \tag{4.112}$$

同上分析，由式(4.112)可见，当 $\pi = 0$ 或 $\zeta_w = 1$(所有家庭都可以调整工资) 时，可得 $w^{\#} = w$。

15. 设稳定状态下，影响跨期偏好冲击的变量对数为 0,

$$\nu \equiv 1, \tag{4.113}$$

式(4.113)引入式(4.21) ⇒

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu}{c\cdot(1-b)} - b\cdot\beta\cdot\frac{\nu}{c\cdot(1-b)} \\ &= \frac{1}{c}\cdot\frac{1-b\cdot\beta}{1-b}. \end{aligned} \tag{4.114}$$

16. 式(4.6) ⇒

$$K = Z\cdot I + (1-\delta(u))\cdot K,$$

引入式(4.91)、式(4.94)得

$$I = \delta_0 \cdot K. \tag{4.115}$$

17. 式(4.78) ⇒

$$Y = C + I + G,$$

定义稳态的政府支出占全部 GDP 的比重 $\omega \equiv \frac{G}{Y}$，引入式(4.115)，上式变为

$$(1-\omega)\cdot Y = C + IC + \delta_0\cdot K.$$

式两侧同时除以 N_d 得

$$(1-\omega)\cdot\frac{Y}{N_d} = \frac{C}{N_d} + \delta_0\cdot\frac{K}{N_d},$$

引入式(4.107)以替代 Y/N_d，整理得

$$\begin{aligned} \frac{C}{N_d} &= (1-\omega)\cdot\left(\frac{Y}{N_d}\right) - \delta_0\cdot\frac{K}{N_d} \\ &= (1-\omega)\cdot\left(w + R\cdot\frac{K}{N_d}\right) - \delta_0\cdot\frac{K}{N_d} \end{aligned} \tag{4.116}$$

18. 式(4.41)-(4.42) ⇒

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= \nu\cdot\psi\cdot\left(\frac{w}{w^{\#}}\right)^{\epsilon_w\cdot(1+\chi)}\cdot N_d^{1+\chi} + \beta\cdot\phi_w\cdot(1+\pi)^{-\zeta_w\cdot\epsilon_w\cdot(1+\chi)}\cdot(1+\pi)^{\epsilon_w\cdot(1+\chi)}\cdot\hat{h}_1, \\ \hat{h}_2 &= \lambda\cdot\left(\frac{w}{w^{\#}}\right)^{\epsilon_w}\cdot N_d + \beta\cdot\phi_w\cdot(1+\pi)^{\zeta_w\cdot(1-\epsilon_w)}\cdot(1+\pi)^{\epsilon_w - 1}\cdot\hat{h}_2, \end{aligned}$$

整理得

$$\hat{h}_1 = \frac{\nu \cdot \psi \cdot \left(\frac{w}{w^{\#}}\right)^{\epsilon_w \cdot (1+\chi)} \cdot N_d^{1+\chi}}{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{\epsilon_w \cdot (1-\zeta_w) \cdot (1+\chi)}}, \tag{4.117}$$

$$\hat{h}_2 = \frac{\lambda \cdot \left(\frac{w}{w^{\#}}\right)^{\epsilon_w} \cdot N_d}{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{(1-\zeta_w) \cdot (\epsilon_w - 1)}}, \tag{4.118}$$

进而，结合 $\nu = 1$ 的稳态假定式(4.113)我们有

$$\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} = \frac{\psi}{\lambda} \cdot \left(\frac{w}{w^{\#}}\right)^{\epsilon_w \cdot \chi} \cdot N_d^{\chi} \cdot \frac{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{(1-\zeta_w) \cdot (\epsilon_w - 1)}}{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{\epsilon_w \cdot (1-\zeta_w) \cdot (1+\chi)}}, \tag{4.119}$$

19. 利用式(4.119)可得，式(4.43) ⇒

$$\begin{aligned} w^{\#} &= \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \cdot \frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} \\ &= \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \cdot \frac{\psi}{\lambda} \cdot \left(\frac{w}{w^{\#}}\right)^{\epsilon_w \cdot \chi} \cdot N_d^{\chi} \cdot \frac{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{(1-\zeta_w) \cdot (\epsilon_w - 1)}}{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{\epsilon_w \cdot (1-\zeta_w) \cdot (1+\chi)}} \end{aligned} \tag{4.120}$$

式(4.120)分两种情境分析。情境一，当 $\pi = 0$ 时，$w = w^{\#}$，式子变为

$$w^{\#} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \cdot N_d^{\chi} = w,$$

整理得

$$w = \left[\frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1}\right] \cdot \left[\frac{\psi}{\lambda} \cdot N_d^{\chi}\right], \tag{4.121}$$

即垄断竞争条件下的稳态工资为一个 markup(RHS 前半部分)，乘以劳动和消费的边际替代率 (RHS 后半部分)。

情景二，对于更通用的情况，将式改写为关于 N_d 的函数

$$N_d^{\chi} = \frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w} \cdot \frac{\lambda}{\psi} \cdot w^{\#} \cdot \left(\frac{w^{\#}}{w}\right)^{-\epsilon_w \cdot \chi} \cdot \frac{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{\epsilon_w \cdot (1-\zeta_w) \cdot (1+\chi)}}{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{(1-\zeta_w) \cdot (\epsilon_w - 1)}},$$

引入式(4.114)以替代 λ，两侧再同乘 N_d 得

$$N_d^{1+\chi} = \frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w} \cdot \frac{N_d}{C} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{1 - b \cdot \beta}{1 - b} \cdot w^{\#} \cdot \left(\frac{w^{\#}}{w}\right)^{-\epsilon_w \cdot \chi} \cdot \frac{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{\epsilon_w \cdot (1-\zeta_w) \cdot (1+\chi)}}{1 - \beta \cdot \phi_w \cdot (1+\pi)^{(1-\zeta_w) \cdot (\epsilon_w - 1)}}, \tag{4.122}$$

其中 N_d/C 的值由式(4.116)给出。

20. 式(4.82) ⇒

$$Y \cdot \nu^p = A \cdot K^{\alpha} \cdot N_d^{1-\alpha} - F,$$

其中利用了式(4.93)、式(4.109)和(4.105)。进一步调整得

$$F = N_d \cdot \left[\left(\frac{K}{N_d}\right)^{\alpha} - \frac{Y}{N_d} \cdot \nu^p\right] \tag{4.123}$$

其中 K/N_d，Y/N_d 和 N_d 的值分别由式(4.106)、(4.107)和(4.122)测算而得。

第三部分

附录

Appendices

第一章　Medium-Sized DSGE 模型的附录

A.1　scaled variables

中性技术冲击 z_t 的增速

$$\mu_{z,t} \equiv \frac{z_t}{z_{t-1}}. \tag{A.1}$$

investment-specific 技术冲击 Ψ_t 的增速

$$\mu_{\Psi,t} \equiv \frac{\Psi_t}{\Psi_{t-1}}. \tag{A.2}$$

结合式(3.5)和式 (A.2)可得，生产成本系数 z_t^+ 的增速

$$\mu_{z^+,t} \equiv \frac{z_{t+1}^+}{z_t^+} = \mu_{\Psi,t}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \mu_{z,t}. \tag{A.3}$$

physical capital stock

$$\bar{k}_{t+1} \equiv \frac{\bar{K}_{t+1}}{z_t^+ \cdot \Psi_t}. \tag{A.4}$$

physical capital service

$$k_{t+1} \equiv \frac{K_{t+1}}{z_t^+ \cdot \Psi_t}. \tag{A.5}$$

投资品

$$i_t \equiv \frac{I_t}{z_t^+ \cdot \Psi_t}. \tag{A.6}$$

消费品

$$c_t \equiv \frac{C_t}{z_t^+}. \tag{A.7}$$

政府支出

$$g_t \equiv \frac{G_t}{z_t^+}. \tag{A.8}$$

产出

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{z_t^+}. \tag{A.9}$$

实际工资水平

$$\bar{w}_t \equiv \frac{W_t}{z_t^+ \cdot P_t}. \tag{A.10}$$

实际资本租金

$$\bar{r}_t^k \equiv \Psi_t \cdot r_t^k. \tag{A.11}$$

t+1 时刻形成的资本存量，在 t 时期的价格

$$p_{k',t} \equiv \Psi_t \cdot P_{k',t}. \tag{A.12}$$

A.1.1 几个没写完的说明

生产成本系数的调整

$$\psi_{z_t^+,t} \equiv v_t \cdot P_t \cdot z_t^+, \tag{A.13}$$

其中 v_t 表示家庭优化问题中，名义预算约束条件的 Lagrangian 乘子，它等于额外 1 单位货币收入带来的边际效用；$v_t \cdot P_t$ 因此等于额外 1 单位消费带来的边际效用。

中间产品生产厂商调整后的产品价格

$$\tilde{p}_t \equiv \frac{\tilde{P}_t}{P_t}. \tag{A.14}$$

劳动者联盟调整后的工资

$$\tilde{w}_t \equiv \frac{\tilde{W}_t}{W_t}. \tag{A.15}$$

通货膨胀率

$$1 + \pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}. \tag{A.16}$$

工资增速

$$1 + \pi_{w,t} \equiv \frac{W_t}{W_{t-1}} \tag{A.17}$$

A.2 Frisch elasticity of labor supply

A.2.1 定义

Frisch elasticity of labor supply 是指在保持财富的边际效用不变的情况下，工资和劳动力供应之间的弹性 (Frisch, 1932)[1]。Frisch 弹性 η^λ 的定义式可以表示如下

$$\eta^\lambda = \frac{\partial n}{\partial w} \cdot \frac{w}{n} ||_\lambda,$$

其中 $||_\lambda$ 表示保持财富的边际效用不变。

定义式。考虑如下 consumer problem

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}, n_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot E_t U(c_t, n_t),$$
$$st. \quad c_t + a_{t+1} = (1+r) \cdot a_t + w_t \cdot n_t.$$

[1] 此外还有 Marshallian elasticity of labor supply（保持收入不变的情况下），和 Hicksian elasiticity of labor supply（保持效用水平不变的情况下）等。

建 Lagrangian

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_t \left\{ U(c_t, n_t) + \lambda_t \cdot [c_t + a_{t+1} = (1+r) \cdot a_t + w_t \cdot n_t] \right\}.$$

FOCs

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow U_{c,t} = \lambda_t, \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_t} = 0 \Rightarrow U_{n,t} = -\lambda_t \cdot w_t, \tag{A.19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{t+1}} = 0 \Rightarrow \beta \cdot E_t \lambda_{t+1} \cdot (1+r) = \lambda_t. \tag{A.20}$$

式(A.18)-(A.18)⇒

$$\frac{\partial U(c_t(\lambda_t, w_t), n(\lambda_t, w_t))}{\partial c_t} = \lambda_t, \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial U(c_t(\lambda_t, w_t), n(\lambda_t, w_t))}{\partial n_t} = -\lambda_t \cdot w_t. \tag{A.22}$$

式(A.18)-(A.19)对 w_t 求导得

$$\frac{\partial U_{c,t}}{\partial w_t} = 0 \Rightarrow U_{cc,t} \cdot \frac{\partial c_t}{\partial w_t} + U_{cn,t} \cdot \frac{\partial n_t}{\partial w_t} = 0, \tag{A.23}$$

$$\frac{\partial U_{n,t}}{\partial w_t} = -\lambda_t \Rightarrow U_{cn,t} \cdot \frac{\partial c_t}{\partial w_t} + U_{nn,t} \cdot \frac{\partial n_t}{\partial w_t} = -\lambda_t. \tag{A.24}$$

可见式(A.23)-(A.24)是有两个未知变量 $\left(\frac{\partial c_t}{w_t}, \frac{\partial n_t}{\partial w_t}\right)$ 的两个方程组。利用式(A.19)替代 λ_t，解得

$$\frac{\partial n_t}{\partial w_t} = \frac{\lambda_t \cdot U_{cc,t}}{U_{cn}^2 - U_{cc,t} \cdot U_{nn,t}} = \frac{-\frac{U_{n,t}}{w_t} \cdot U_{cc,t}}{U_{cn}^2 - U_{cc,t} \cdot U_{nn,t}} \tag{A.25}$$

因此 Frisch elasticity 等于

$$\eta^{\lambda} = \frac{\partial n_t}{\partial w_t} \cdot \frac{w_t}{n_t} = \frac{U_{n,t}}{n_t \cdot \left[U_{nn,t} - \left(\frac{U_{cn,t}^2}{U_{cc,t}} \right) \right]}. \tag{A.26}$$

A.2.2 举例

举例，消费者问题：$\max \beta^t \cdot E_t U_{c_t, n_t}$，$U_{c_t, n_t} = \ln c_t - \alpha \cdot \frac{n_t^{1+\frac{1}{\nu}}}{1+\frac{1}{\nu}}$, subject to $c_t + a_{t+1} = (1+r) \cdot a_t + w_t \cdot n_t$。

FOCs:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t, \tag{A.27}$$

$$n_t = \left(\frac{\lambda_t \cdot w_t}{\alpha} \right)^{\nu}. \tag{A.28}$$

$$\frac{\partial n_t}{\partial w_t} = \nu \cdot \left(\frac{\lambda_t}{\alpha}\right)^{\nu} \cdot w_t^{\nu-1}. \tag{A.29}$$

Frisch elasticity of labor supply 因此等于

$$\eta^{\lambda} = \frac{\partial n_t}{\partial w_t} \cdot \frac{w_t}{n_t} = \nu. \tag{A.30}$$

A.3 调节成本的常见设定形式及比较

经验研究需要将调节成本函数 $F(\cdot)$ 改写为显函数形式，常见的有三种形式

1. 线性调节成本。设 S 近似为常数，式(3.36)改写为

$$F = constant \cdot I_t, \tag{A.31}$$

即调节成本和投资之间呈线性关系，$constant$ 是常数。

2. 投资调节成本。最早可见Lucas and Prescott (1971)，后经Hayashi (1982) 作进一步模型化。

$$F = I_t - \frac{S''}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{\bar{K}_t} - \delta\right)^2 \cdot \bar{K}_t, \tag{A.32}$$

3. 资本调节成本。最早可见Christiano et al. (2005)，如式(3.36)所示。

A.3.1 家庭部门优化条件

在 capital adjustment cost 设定下，家庭部门优化条件表示为通过选择投入组合 $\{C_t, I_t, \Delta_t, B_{t+1}, \bar{K}_{t+1}\}$，基于给定的预算约束式(3.71)、资本积累式(3.73)和资本净收益式(3.75)，来追求式(3.45)效用函数最大化。

建 Lagrangian

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t =& E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \left[\log(C_t - b \cdot C_{t-1}) - A \cdot \int_0^1 \frac{h_t(j)^{1+\eta}}{1+\eta} dj\right] \\
&+ \lambda_{1,t} \cdot \left[\int_0^1 W_t(j) \cdot h_t(j) dj + X_t^k \cdot \bar{K}_t + R_{t-1} \cdot B_t - P_t \cdot \left(C_t + \frac{1}{\Psi_t} \cdot I_t\right) - B_{t+1} - P_t \cdot P_{k',t} \cdot \Delta_t\right] \\
&+ \lambda_{2,t} \cdot \left[(1-\delta) \cdot \bar{K}_t + \left[I_t - \frac{S''}{2} \cdot \left(\frac{I_t}{\bar{K}_t} - \delta\right)^2 \cdot \bar{K}_t\right] + \Delta_t - \bar{K}_{t+1}\right] \\
&+ \lambda_{3,t} \cdot \left[u_{t+1} \cdot P_{t+1} \cdot r_{t+1}^k - \frac{P_{t+1}}{\psi_{t+1}} \cdot a(u_{t+1}) - X_{t+1}^k\right] \}
\end{aligned}$$

FOCs:

$$\frac{\mathcal{L}_t}{\partial C_t} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,t} = \frac{U_{C,t}}{P_t}, \tag{A.33}$$

$$\frac{\mathcal{L}_t}{\partial I_t}=0\Rightarrow\lambda_{1,t}\cdot P_t=\lambda_{2,t}\cdot\left[1-S''\cdot\left(\frac{I_t}{\bar{K}_t}-\delta\right)\right], \tag{A.34}$$

$$\frac{\mathcal{L}_t}{\partial\Delta_t}=0\Rightarrow\lambda_{1,t}\cdot P_t\cdot P_{k',t}=\lambda_{2,t}, \tag{A.35}$$

$$\frac{\mathcal{L}_t}{\partial B_{t+1}}=0\Rightarrow\beta\cdot E_t\lambda_{1,t+1}\cdot R_t^k=\lambda_{1,t}, \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}_t}{\partial\bar{K}_{t+1}}&=0\Rightarrow\beta\cdot E_t\lambda_{1,t+1}\cdot X_{t+1}^k=\lambda_{2,t}\\&+\beta\cdot E_t\lambda_{2,t+1}\cdot\left[\frac{S''}{2}\cdot\left(\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-\delta\right)^2-S''\cdot\left(\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-\delta\right)\cdot\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-(1-\delta)\right].\end{aligned} \tag{A.37}$$

联立式(A.34)、式(A.35)得

$$P_{k',t}=\frac{1}{1-S''\cdot\left(\frac{I_t}{\bar{K}_t}-\delta\right)}. \tag{A.38}$$

式(A.37)改写为

$$\begin{aligned}\lambda_{2,t}&=\beta\cdot E_t\lambda_{1,t+1}\cdot X_{t+1}^k+\beta\cdot E_t\cdot\lambda_{2,t+1}\cdot\mathcal{H}_{t+1},\\\mathcal{H}_{t+1}&\equiv\left[(1-\delta)+S''\cdot\left(\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-\delta\right)\cdot\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-\frac{S''}{2}\cdot\left(\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-\delta\right)^2\right],\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{t+1}$ 反映每 1 单位 $\bar{K}_{t+1}$ 的增加，可能导致 $\bar{K}_{t+2}$ 的增加。等式两侧同时除以 $\lambda_{1,t}$ 得

$$\frac{\lambda_{2,t}}{\lambda_{1,t}}=\frac{\beta\cdot E_t\cdot\lambda_{1,t+1}}{\lambda_{1,t}}\cdot X_{t+1}^k+\frac{\beta\cdot E_t\lambda_{2,t+1}}{\beta\cdot E_t\lambda_{2,t+1}}\cdot\frac{\beta\cdot E_t\lambda_{2,t+1}}{\lambda_{1,t}}\cdot\mathcal{H}_{t+1},$$

进一步整理得

$$\frac{U_{C,t}}{\beta\cdot E_tU_{C,t+1}}=\frac{\frac{X_{t+1}^k}{P_{t+1}}+P_{k',t+1}\cdot\mathcal{H}_{t+1}}{P_{k',t}} \tag{A.39}$$

A.3.2 比较线性和非线性调节成本

式(A.39)以 Euler equation 的形式反映家庭的跨期消费行为决策。定义投资的回报率 (rental rate of return on investment) R_{t+1}^k

$$R_{t+1}^k=\frac{x_{t+1}^k+\left[(1-\delta)+S''\cdot\left(\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-\delta\right)\cdot\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-\frac{S''}{2}\cdot\left(\frac{I_{t+1}}{\bar{K}_{t+1}}-\delta\right)^2\right]\cdot P_{k',t+1}}{P_{k',t}}, \tag{A.40}$$

其中 $x_{t+1}^k\equiv\frac{X_{t+1}^k}{P_{t+1}}$ 表示实际的 cash payment，X_{t+1}^k 由式(3.75)给出。RHS 分母 $P_{k',t}$ 表示每一单位新增 $\bar{K}_t$ 的市场价格，由式(A.38)给出。RHS 分子中 $P_{k',t+1}$ 是以消费品形式表示的每一单位 $\bar{K}_{t+2}$ 资本存量的市场价格，乘以 $[\cdot]$ 之后转化为消费品形式。

在充分竞争的要素市场上，额外一单位资本的价格取决于其边际产出，即

$$\begin{aligned}
P_{k',t} &= -\frac{dC_t}{d\bar{K}_{t+1}} \\
&= -\frac{dC_t}{dI_t}\cdot\frac{dI_t}{d\bar{K}_{t+1}} \\
&= \frac{1}{\frac{d\bar{K}_{t+1}}{dI_t}} \\
&= 1(\text{线性调节成本})\text{，或者} \\
&\frac{1}{1-S''\cdot\left(\frac{I_t}{\bar{K}_t-\delta}\right)}(\text{资本调节成本}),
\end{aligned}$$

其中 $\frac{dC_t}{dI_t}$ 为消费和实物资本积累 (投资) 之间的边际技术替代率 (MRTS)，由式(3.37)-(3.38)给出；$\frac{I_t}{\bar{K}_{t+1}}$ 为投资和实物资本积累之间的边际技术替代率 (MRTS)，由式(3.73)给出。这样，模型中 Tobin's q 与 $P_{k',t}$ 相关，为资本的市场价格除以投资品的价格，其中资本的市场价格等于完全竞争市场假定下的资本的边际成本。或者定义

$$q_t \equiv \frac{\lambda_{2,t}}{\lambda_{1,t}} = P_t\cdot P_{k',t}, \tag{A.41}$$

后一等号由式(A.35)得。拉格朗日乘子 $\lambda_{1,t}$、$\lambda_{2,t}$ 分别表示额外 1 单位实物资本和消费的边际效用 (影子价格)。$\lambda_{2,t}/\lambda_{1,t}$ 因此表示为了在明天多拥有 1 单位的实物资本，个人愿意放弃多少单位的当前消费，即资本相对于消费的价格。

A.3.3 比较投资调节成本和资本调节成本

VAR-based evidence：通过对 actual data 的 observation 可以看出，在一个正的货币冲击发生后，一方面实际利率持久走低，另一方面投资却呈现出 hump-shaped pattern。为了让模型能够更好解释这一现象，就需要在建构模型的时候，使得(A.40)中的真实回报率 R_t^k 随着扩张性货币政策冲击而降低。情境分析如下。

1. 如果 $S''=0$，即不存在 adjustment cost。此时 $q_t = p_{k',t} = 0$，式(A.40)中唯一能让 R_{t+1}^k 下降的便是 x_{t+1}^k，此时

   (a) 若 rate of return on capital $RROC \approx (1-\alpha)\cdot K_{t+1}^{\alpha-1}\cdot H_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \approx 1/\beta$，稳定状态下，不考虑经济增长情况下的年均 $RROC \approx 1.03$，剩余的内生部分的 RROC 只占全部 RROC 的很小一部分。这意味着，为了让 RROC 下降一小部分，需要让内生 RROC($K_{t+1}^{\alpha-1}\cdot H_{t+1}^{1-\alpha}$) 下降非常大的一部分，这意味着需要让投资大幅度增加——而在在现实中很难做到：一方面投资的大幅度上升会压迫消费发生大幅度下降，可是现实世界中消费并没有发生如此大的降低[2]；另一方面作为流量的投资的大幅度变化，也只能导致作为存量的实物资本的小幅度提升。

[2]膏按：habit formation？见第3.2.3节。

(b) VAR based evidence 表明，正的货币政策冲击发生后，就业上升，这意味着 hours worked H_t 上升，这会迫使内生 RROC 上升，压迫实物资本存量，调低投资的回报率。

总之，不引入调节成本的模型，会产生反事实结论：正的货币政策冲击发生后，投资反而会大幅度扩张，而现实数据观测中并未支持这一结论。

2. 如果 $S'' > 0$，则内生 RROC 要比 $S'' = 0$ 情况下的内生 RROC 大得多，这是由于当调节成本存在时，资本这就速度加快，实物资本存量降低，资本的边际产出、进而边际回报变大。分两种情况来说明。

   (a) 资本调节成本 $+S'' > 0$ 的设定如式(A.32)，一次正货币政策冲击所产生的响应有

      i. contemporary response of investment I_t，即投资响应中最大的一次响应发生在冲击产生的当期而非随后。

      ii. a hump-shaped response of capital price $P_{k',t}$。这是由于受到即时变化的投资流响应的影响：一个正的货币政策冲击会产生持续数个时间段的 $P_{k',t+1}/pP_{k',t}$ 上升。将这一现象带回式(A.40)可见，对未来 $P_{k',t+1}$ 的语气上升，及对投资收益率的预期上升，会导家庭产生追加投资的冲动，且短期内这种冲动更强，出现 hump shaped，这使得在均衡状态下，冲击出现当期的投资响应最强，随后减弱。

   (b) 投资调节成本 $+S'' > 0$ 的设定如式(3.36)，投资响应是 hump shaped 且最大响应发生在 shock 出现的时间之后而非当期。这是由于相比资本调节成本设定而言，投资调节成本设定下，当期投资相对于上期投资若想要发生大规模变动，其调节成本会变得更高。hump shaped impulse responses of investment 导致当期 growth rate 相对于上期 growth rate 呈现更强的正相关，且至少会持续一小段时期。

第二章　Post-Keynesian Economics 的一个小综述

主要参考自 Hart and Kriesler (2015)。

B.1　Introduction

B.2　PK 的主要方法论

B.3　PK 下的市场结构与定价

B.3.1　PK 下的市场结构

B.3.2　PK 下的定价策略

markup pricing principle 的一系列变体，如

- Kalecki (1937) 考虑到企业往往面临内部/外部的融资需求，(其他企业所定的)price markup 会影响到企业的现金流，进而使得金融部门，企业融资行为和企业 (家庭) 投资决策这三者之间存在重大关联，可见货币和金融的确会对实体经济产生影响 (Ball, 1964; Eichner, 1973; Wood, 1975; Harcourt and Kenyon, 1976)。

- (企业自身所定的)price markup，也会被理解为企业自己在多变、激烈和难以预测的市场竞争中寻求立足、发展的关键决策之一。

因此价格更多反映企业的利益决策而非其所在产业或市场的条件；价格是基于企业战略而非基于成本制定的；这一价格反映市场的非均衡状态，对于整个经济体动态发展起到重要作用。

PK 视野下，企业不是追求短期利润最大化的行为人，而是在面临巨大不确定性条件下的长期决策制定者。企业的产量和定价决策反映了寡头垄断的市场条件，企业自身及其竞争对手的行为，以及融资情况都是该条件的重要组成部分。

B.4 PK 下的宏观经济

MS 更多遵循萨伊定律，即供应会产生它所对应的需求，导致就业和产出都不受需求的限制。PK 经济体更多强调有效需求，货币非中性，不确定情况下的决策，以及主观并且变化迅速的期望，这使得 PK 对萨伊定律提出挑战。值得指出的是，该挑战并不依赖于对市场完全竞争程度或者“粘性”的假定。由此 PK 坚决反对任何将凯恩斯经济学与一般均衡框架融合在一起的尝试，即反对新古典主义综合。PK 也不同于 New Keynesian，后者致力于将一系列摩擦 (frictions) 引入到 New Classical 体系当中Akerlof (2007)。在 PK 看来，这两种思路忽略了发达资本主义经济体中最本质的不稳定因素，从而仍然使市场运作暴露在重大风险中。

延续 Keynes 和 Kalecki 的思路，PK 强调真实产出和就业的根本决定因素是有效需求的水平，真实产出和就业的波动主要是由投资支出的变化所导致的，投资支出受到对周边情形的期望 (“动物精神”) 的影响。对于“储蓄增加导致投资增加”的传统观点，PK 持相反意见：只要能够寻找到合适的融资渠道，投资通过乘数效应可以增加收入，进而提高储蓄。

PK 在几个方面修正了 Keynes 的理论体系，尤其是在对金融市场、制度的描述上。在 Keynes 看来，不确定性是人们持有货币以追求保值的最关键原因，持有货币的行为将人们过去已经发生了的经济行动和不确定性的未来连接在一起，进一步扩大了不确定性的风险。如Kaldor (1985) 对货币主义者的批判，货币供应的内生性被过分夸大了：随着货币供应增加，金融机构可以放出更多贷款，导致存款增加和/或对金融财产的购买增加。这一系列借入和借出的决策取决于融资成本以及对未来的期望——金融财产的规模和组成结构直接取决于 balance sheet 中放贷者和潜在借款人的立场。他们的乐观或悲观心态，会影响到金融市场整体的行为，进而放大、波及对实体经济运转情况的看法。从这个意义上来讲，金融不稳定性假设认为资本主义经济体中，金融部门和实体经济部门的不稳定性是彼此相关和不可避免的 (Minsky, 2015)，导致中央银行和财政稳定政策的努力注定无效，“有效市场”及其相关资产定价模型也需要被否定。

PK 不再关注于供应-需求互动决定的均衡价格和产品数量，而是关注产业结构和 markup 定价原则，这使得对产品相对价格的分析不再有意义：在宏观经济层面上，产出就业和总物价均发生波动。excess capacity 的存在意味着即便需求增加了，产出也会跟着调整以满足需求，从而不会出现通货膨胀的压力。当逼近 full capacity utilisation 的情况下，通货膨胀的压力也主要来自 mark-up pricing 机制，而不是原材料、工资等要素成本。就业水平主要取决于有效需求水平，而不是实际工资。实际工资不取决于市场，而是取决于以下两方面因素，第一如上文所说的企业定价策略，第二是围绕全部国民收入，在劳动收入和资本收入之间的讨价还价，这就涉及到随时间变化的制度性要素。在 PK 看来，通货膨胀是国民收入中劳动收入和资本收入比重分配不恰当所导致的，也只有重新调整比重分配才能缓解通货膨胀——这呼吁一种 permanent income policy 的出台。

PK 对经济增长和经济发展尤为关注，在 PK 看来它们是资本主义经济发展动态的最核心要素。然而在 PK 看来，它们都不是平稳和连续的。

B.5 PK 视野下的经济政策

与主流经济学衍生出的经济政策相比，根据 PK 所得的经济增侧往往有些反直觉。总的说来，PK 认为市场运作在短期和长期都存在失灵和低效率情况，持干预市场运作的立场。

第三章 Keynesian, New Keynesian and New Classical Economics

主要参考自Greenwald and Stiglitz (1987)。

简要说来。New Classical Economics 学派认为，macro-theory 缺乏 micro 基础，需要从一系列微观行为准则（理性、最大化的企业和个人行为）推导出经济总体层面上的动态；承认动态对于了解宏观行为的重要性；在分析动态行为时，期望扮演核心角色，如理性预期的形成。“理性预期学派”的问题并不在于其假定之一，理性的预期是不是可能，而在于另一个古典主义假定，市场出清。根据这样的假定，理性预期模型会得到如下结果：没有失业，政府宏观政策是不必要的。

另一大流派 New Keynesian Economics 学派，认为现实世界中真实存在的一系列经济现象，如失业、信贷配给、经济周期等，都是不能由标准 micro-theory 所解决的。因此致力于开发 micro 理论，来解释 macro 现象。NK 学派的核心工作就是从 micro 和 macro 层面了解不充分信息和不完全市场及其后果。市场失灵中的表现之一是失业。与 New Classical 相比，NK 同样追求建立一个 single 解释框架，但 NK 的框架致力于解释失业，而不像 New Classical 学派那样忽视甚至否定失业的存在。

C.1 Keynesian 的四个核心

NK 从 traditional Keynesian 经济学发展而来。Keynes 对经济运行有着显著不同于 standard neo-classical 理论的看法，比如企业行为决策并不是基于理性的计算，而是” 动物精神”。他用图形的形式表示他的观点，但当他试图构建理论模型去描述这一观点的时候，他更多回到了传统的 neo classical 框架中——这很有可能是因为他受过严格的 neo-classical 训练，束缚了他表达自己全新思想的能力。Hicks 等后人将 Keynes 的观点进一步模型化系统化理论化，成为理解失业、经济周期等问题的强有力工具。

Keynes 的观点中，如下四点对于我们构建一个解释失业和经济周期波动的模型来说至关重要。

C.1.1 失业与有效工资理论

第一点。该通用模型必须能够解释失业的持续存在，以及一系列关键经济变量的周期性变化。为了解释失业，就需要发展出一个关于劳动力市场的理论，Keynes 从传统经济学思想 (如 fixed price 学派) 中借鉴了 (名义，实际) 工资粘性的假定，但 Keynesian 从经验和理论两个层面批评了 Fixed price 学派的工资粘性假定是不完善的。经验层面，大萧条中工资下跌了 1/3，经历通货膨胀的国家即使调整了实际工资，仍然出现失业情况。理论层面，Fixed Price 学派没能对工资粘性做出解释，没能提供制度上的设计。

根据 Keynes 的理论，工资并不需要是完全粘性的，而仅仅需要确保工资不会跌落到完全市场出清的水平，如有效工资理论 (efficiency wage theories(Stiglitz, 1984, 1987))。有效工资理论的假定如下：

- 对异质劳动者属性特征的信息掌握是不充分的，
- 劳动者的工作表现是无法充分监控的，
- 无法与劳动者签订可以完全反映他劳动成果的工作合同。

根据这样的假定，有效工资理论认为：

- 劳动力的质量及生产率，企业的利润都可能随着工资的增加而增加，
- 工资增加可能导致劳动者周转率降低，
- 由于企业需要承担部分的劳动者周转成本，工资上升在某种程度上可以导致企业利润的上升。

然而当失业存在，工资仍可能不会降低，因为企业认识到如果他们降低员工工资，会导致生产率降低，周转率上升，利润降低。这是指充分竞争市场下，企业只在一定范围内是工资制定者的情况。如果瓦尔拉斯工资 (Walrasian wage)——劳动力需求等于劳动力供应情况下对应的工资水平——相当低，企业有可能有动机提高自己员工的工资以提高利润，对应的有效工资 (efficiency wage) 就是企业利润最大化条件下的工资水平。显然外部经济情况的不同会导致有效工资的不同，使得工资并不是完全刚性的；实际工资并不会跌落到市场出清那么低的水平上。这就肯定了政策干预的重要性，如失业救济等会影响到市场上的均衡工资水平。

C.1.2 价格变化与经济波动

第二点。该通用模型不仅能够解释失业的存在，还要能够解释失业等核心变量的波动。分为两个问题。

1. 导致经济体出现大幅度波动的冲击，是怎么产生的？
    - 战争、油价波动等外生原因。
    - 内部机制。

 – 对投资、尤其是存货的需求变动。然而在理论上，对于 concave 生产函数、低工资、低利率的情况，应当存在生产平滑效果：存货应当降低而不是扩大经济波动。
 – 储蓄的变化。储蓄有助于稳定消费。在储蓄不足的情况下，implicit contracts 提供的保障机制起到稳定收入、进而稳定消费的作用。因此 implicit contracts 应当是降低而不是扩大经济波动。

 Keynes 正确地强调了投资变化对理解经济波动的重要性。但他用动物精神 (unexplained changes in expectations) 来解释投资的变化。这种解释不能让人完全满意：会导致经济周期理论具有无法解释甚至是非理性的特征。

2. 根据 typical micro 模型，利率、工资等价格的变化有助于缓解需求或供应的波动，进而如存货一样起到稳定经济波动的效果。因此大的外部冲击 (影响需求或供应) 只可能导致经济体中均衡价格的小幅度变化。然而为什么工资、利率等价格往往是刚性的?

 Keynes 不仅需要解释为什么对投资的需求曲线 shifted，还需要解释为什么利率调整无法有效缓解投资需求变化所产生的波动。Keynes 的回答不能让人完全满意：他认为对投资需求的降低会导致利率的降低，然而真实世界中当出现经济衰退，利率有时上升；甚至有时利率的变化不会影响到公司的经济决策。

 Keynes 只是指出工资可以保持不变，但未能解释工资为什么会保持不变。有效工资理论解释了为什么工资不会跌落到市场出清条件那么低的水平。Akerlof and Yellen (1985) 的 near-rational 行为模型解释了为什么企业可以调整工资而往往倾向于不这么做。类似地，一个资本市场理论解释了为什么利率不会降低到那么低的水平 (Stiglitz and Weiss, 1981, 1983, 2009)，甚至常常是变动很小的。同时，有效工资理论也强调了一个企业制定的工资往往和其他企业制定的工资之间存在互动关系。

总之，上述理论对工资，利率，和价格刚性做出了解释，它们互相作用，放大了对经济系统的冲击，导致在波动往往很剧烈而不是很缓和 (multiplier effects)。

C.1.3 储蓄与投资，信贷配给

Keynes 敏锐注意到了家庭部门的储蓄和生产部门的投资是不同的，要加以区分。然而在构建模型时，Keynes 又回到 standard neo-classical 模型的老路上，储蓄如何转化为投资，不做进一步分析；投资由利率决定，因此不存在信贷配给 (credit rationing)。这使得尽管 Keynes 强调资本市场的不充分性特征，却也无法做深入的探讨。

C.1.4 供应与技术进步

在 Marshallian 的框架中，经济的波动是由供应波动和需求波动两方面共同作用的结果。Keynes 基于对大萧条的分析，将精力投入到分析导致需求波动的诸因素。然而对于供应端的波动，以及技术进步，他并没有做深入解释。

C.2 New Keynesian 经济学的四个核心

NK 是在 Keynes 思想的基础上发展起来的，但也注意到了 Keynes 过度依赖于 neoclassical 理论分析框架，以及虽然认识到了资本市场是不完善的，但没能充分认识到不完善所带来的信息成本损耗及其经济效果。NK 的核心有以下几点。

C.2.1 有效工资

有效工资模型，用于解释非刚性工资为什么不会完全跌落到市场出清条件下的低水平。

C.2.2 资产配给

资本市场是不充分竞争的，表现在企业经理人与潜在投资者之间的信息不对称，信息不对称导致资产配给问题。资产配给问题的重要性在于，如果企业想要获得更多资本用于扩大生产，就需要从市场上借入更多资金，承担更大的投资风险。风险还表现在，在缺乏期货市场的情况下，企业当期筹资用于扩大生产，在未来时间里用增加的产出换取利润抵付，这就存在风险。在分析企业经营决策时，就必须考虑企业的风险承受意愿。

C.2.3 信贷配给

有意愿承担风险扩大生产的企业，还面临借不到钱的问题，即信贷配给问题。与 neoclassical 的分析框架不同，资本品提供者在面临供不应求的情况下，可能会选择不提高利率，其逻辑类似于失业 (劳动力供大于求) 情况下企业的工资定价：提高利率可能会使资本品所有者的期望回报率降低，其原因之一是选择效应 (selection effects，申请借贷人的集合向不利于借出者的方向变化)，其原因之二是激励效应 (incentive effects，借入者为了偿还更高的利率，会倾向于采取更激进、风险更高的生产形式)。

C.2.4 货币政策

NK 中货币政策的重要性，比起表现在个人持有货币维持账目平衡来，更多体现在信贷的可获得性上。信息不对称导致若商业银行决定缩紧发放贷款，需要资金的生产者很难找到其他合适的放贷人。此外商业银行的放贷决策也类似于企业生产者的生产决策，充满不确定性和风险。中央银行可以通过货币政策影响商业银行的放贷意愿。

C.2.5 小结

总之，NK 提供一套解释经济运行的通用理论，该理论基于微观经济学原理而建立。与 traditional Keynesian 理论相比，NK

1. 弥补了传统 K 理论的不一致性，如
   (a) 内部不一致，如期望的形成机制，

(b) 预测和实际观察情况之间的不一致，

2. 填补了传统 K 理论的空白，如传统 K 仅仅假定工资是刚性的，NK 则至少在一定程度上解释了工资为什么是刚性的。

NK 进一步探讨了

1. 失业问题，如有效工资理论

2. 经济周期波动问题，其基本逻辑是：对经济系统的冲击影响到企业实际利用资本的存量。

   (a) 信贷市场问题，企业面对不充分的信贷市场，信息不对称，融资有风险；即使信贷市场是完全的 (企业能以合理的利率得到自己所需的全部融资)，企业融资数额仍然受自己风险承受能力的限制。

   (b) 根据借款契约的束缚，企业借贷从事生产活动需要承诺的义务是定死的，随着 working capital 的降低，借贷风险 (破产的概率) 升高，生产活动的规模降低，并且需要过了一段时间才能使 working capital 缓慢回升到正常水平。

   这使得 NK 不仅可以解释总量层面上的冲击 (如货币冲击导致的物价暴跌) 如何影响总量层面上的经济系统，还可以解释部门层面上的冲击 (如未提前预知的 demand shift，或操作价格的石油联盟等) 如何影响总量层面上的经济系统。从而生产意愿成为关于 working capital 的 concave 函数，并且 working capital 的再分配也会产生总量效果。

C.3 凯恩斯的不足

NK 能够解释分析一些现象，这些现象都是 traditional Keynesian 理论所很难解释的，如

1. 为什么经济衰退中的企业不降低产品价格，即 markup 的周期运动模式，

2. 投资和存货的周期性变化特征，

3. 失业者在愿意降低工资重新求职的情况下，为什么仍然很难再就业，

4. 为什么一个 unanticipated 工资-物价下降，通过降低企业的 working capital 存量，会导致经济衰退恶化而非好转，

下面做详细说明。

Keynes 最重要的错误在于他的企业理论，以及对货币如何影响经济活动的解释上。这两点不足都是由于他未能充分理解资本市场的本质。

C.3.1 债券和股票的区别

Keynes 未能正确区分长期债券和长期股票，而将二者统称为长期资产。然而区别的确存在：

1. 风险性。即便不考虑破产清算问题，二者在风险性上有本质区别：在经济衰退中，债券的价值上升，股票的价值下降。因此在个人理财账户中，二者是互补品而非替代品。

2. 企业承诺。借入债券/借贷的企业，需要承诺在指定日期偿还；而对于股票，企业则不需要受此承诺约束。从这个角度来说，对于企业和投资者而言，二者远非完全替代品。尤其在经济衰退中，需要融资的企业很少借助股票渠道，见Greenwald et al. (1984) 的 adverse selection model。

C.3.2 需求和供应

Keynes 从需求端对经济波动的解释，有助于回答“为什么企业不改变定价策略，降价促销”，但该解释进一步导致下个问题的出现：为什么一个小的开放经济体会存在 Keynesian 失业的情况？只需要它改变汇率，就可以产生对该经济体商品近乎无限的需求。

NK 不对供应和需求作明确的区分。在有明确需求的情况下，企业倾向于扩大生产 (供应)，此时需求引导生产；在需求不够明确的情况下，企业未必会扩大生产，而会基于供应曲线从事经济活动。这样，NK 可以解释为什么在经济周期中，企业愿意生产的产品数量是波动的。此外 NK 还可以结识为什么在经济衰退时期，(可以调整自己产品价格的) 企业倾向于基于生产成本，做一个更高的 price markup。在不充分竞争和不完全信息的市场上，企业在制定产品价格时，面临现在和未来利润的权衡：今天降价导致今天利润下降，以及明天销量上升、利润上升。衰退时期企业产品定价更高的原因在于，生产企业面对更高的资本成本 (并不是指市场利率)，以及更严重的资产配给问题。

C.3.3 投资的决定因素

Keynes 认为在给定期望水平的情况下，投资的最主要决定因素是利率。不论这里的“利率”应当是指实际利率还是名义利率[1]，通过对现实世界的观察能够发现，实际利率相对于其他经济变量，波动相对较小。NK 模型中在解释投资时，作为解释变量的 (实际) 利率不应当是个常数或近似常数。

此外 NK 认为，投资还受到特定时段信贷可获得程度的影响。所谓特定时段，是指货币政策会对经济活动产生影响的时期。在现实世界中，当面临经济衰退的时候，就算银行仍然愿意以现行利率将款项借出给有良好资质的企业，但很可能愿意借入的企业是不足的，这导致货币政策失效。

Keynesian-neoclassical 理论无法解释存货波动的问题，即为什么存货往往激化而不是缓和经济波动。NK 可以解释这个问题，认为资本的有效成本增加意味着企业倾向于在经济衰退时期减少库存。资本有效成本的增加是由于 equity rationing 和/或 working capital 供应量的减少所导致的。

[1] 目前经济学界通常认为，实际利率更为恰当。

C.3.4 货币政策

在 Keynes 的分析框架中，是不可能通过货币政策影响经济运行的。从最简单的思路出发，可行的方案分三步走：

1. 政府采取改变货币供应量的举措；

   NK：至少对完成交易这一目的而言，存在着货币的替代物，可能使得政府改变货币供应的举动无法完成既定目标。相当多的交易可以不依赖于货币完成，仅靠信用足矣，这使得许多基于 cash-in-advance 的模型无法较好解释现实。此外交易和收入之间的关系较弱：大多数交易体现为财产的交换，而经济周期波动往往伴随着财富的变化，进而财产分配的变化。

2. 在给定个人货币需求函数 (假定个人对货币的需求取决于利率和收入) 的前提下，利率发生变化；

   NK: 既然对货币的需求往往是基于财产的，那么显然财富而非收入成为个人经济行为的关注要素。在交易目的考虑之外，短期债券可以充当货币的完全替代品，此时持有货币的机会成本表现为短期货币利率。但影响投资行为的利率必须是实际利率[2]。

3. 利率变化导致投资变化。

C.4 小结

方法论。

一系列 facts: 市场是很复杂的。经济模型应当致力于描述市场的核心特征，而非完美复制市场中的一切。企业和个人今天的行为决策受到昨天决策的影响，基于对未来的期望。人们对未来的期望是非理性的。市场的确存在但是不完全的。价格的确调整。失业率较高时，工资会下降。

这些 facts 给经济模型构建者带来挑战。无法建立这样一个动态模型来完美反映未来的一切 facts，因为未来是不可完全预知的。构建模型应当致力于解决其中一些核心问题 (而非全部)，比如失业。

政策。长久以来关于在出现失业时政府应当做些什么，存在较大争议：a) 自由放任，什么都不做，b) 致力于降低工资以提升就业，c) 使用货币政策，d) 扩大政府支出。Keynes 理论的成功在于它为持有 d) 立场的人提供了理论依据。New Classical 理论为持有 a) 立场的人提供依据

市场效率。NK 认同 K 的观点，不充分竞争、不完全信息导致市场失灵，从而导致失业的确是资本主义经济面临的核心难题之一。

[2]此外，Cash Management Accounts 方面的最新研究表明，完全可以通过提供 interest bearing ”money” 来替代直接持有货币的方案，此时经济个体的最优决策就变成了考虑他所拟持有债务的 maturity structure。

参考文献

Firm-specific Production Factors in a DSGE Model with Taylor Price Setting.

Monetary Policy, inflation, and the Business Cycle: An introduction to the new Keynesian Framework.

Akerlof GA. The Missing Motivation in Macroeconomics. The American Economic Review 2007;.

Akerlof GA, Yellen JL. A Near-Rational Model of the Business Cycle, With Wage and Price Inertia. The Quarterly Journal of Economics 1985;.

Altig D, Christiano LJ, Eichenbaum M, Lindé J. Firm-specific capital, nominal rigidities and the business cycle. Review of Economic Dynamics 2011;.

Ball RJ. Inflation and the Theory of Money 1964;.

Basu S. Intermediate Goods and Business Cycles: Implications for Productivity and Welfare. The American Economic Review 1995;.

Bernanke BS, Boivin J, Eliasz P. Measuring the Effects of Monetary Policy: A Factor-Augmented Vector Autoregressive (FAVAR) Approach. The Quarterly Journal of Economics 2005;.

Boldrin M, Christiano LJ, Fisher JDM. Habit Persistence, Asset Returns, and the Business Cycle. The American Economic Review 2001;.

Bouakez H, Cardia E, Ruge-Murcia FJ. Habit formation and the persistence of monetary shocks. Journal of Monetary Economics 2005;.

Calvo GA. Staggered prices in a utility-maximizing framework. Journal of Monetary Economics 1983;.

Carroll CD, Overland J, Weil DN. Comparison Utility in a Growth Model. Journal of Economic Growth 1997;.

Carroll CD, Overland J, Weil DN. Saving and Growth with Habit Formation. The American Economic Review 2000;.

Christiano LJ, Eichenbaum M, Evans CL. Chapter 2 Monetary policy shocks: What have we learned and to what end? A2 -. In: Handbook of Macroeconomics. 1999. .

Christiano LJ, Martin Eichenbaum , Evans CL. Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy. Journal of Political Economy 2005;.

Christiano LJ, Trabandt M, Walentin K. Chapter 7 - DSGE Models for Monetary Policy Analysis. In: Handbook of Monetary Economics. 2010. .

Constantinides GM. Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle. Journal of Political Economy 1990;.

Dixit AK, Stiglitz JE. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. The American Economic Review 1977;.

Eichner AS. A Theory of the Determination of the Mark-up Under Oligopoly. The Economic Journal 1973;.

Erceg CJ, Henderson DW, Levin AT. Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts. Journal of Monetary Economics 2000;.

Fernald J. A Quarterly, Utilization-Adjusted Series on Total Factor Productivity. Technical Report; Federal Reserve Bank of San Francisco; 2009.

Frisch R. New methods of measuring marginal utility. Mohr, 1932.

Frisch R. A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors. Econometrica 1959;.

Fuhrer JC. Habit Formation in Consumption and Its Implications for Monetary-Policy Models. The American Economic Review 2000;.

Greenwald B, Stiglitz JE. Keynesian, New Keynesian and New Classical Economics. Oxford Economic Papers 1987;.

Greenwald B, Stiglitz JE, Weiss A. Informational Imperfections in the Capital Market and Macroeconomic Fluctuations. The American Economic Review 1984;.

Greenwood J, Hercowitz Z, Huffman GW. Investment, Capacity Utilization, and the Real Business Cycle. The American Economic Review 1988;.

Guerron-Quintana PA. Refinements on macroeconomic modeling: The role of non-separability and heterogeneous labor supply. Journal of Economic Dynamics and Control 2008;.

Hansen GD. Indivisible labor and the business cycle. Journal of Monetary Economics 1985;.

Harcourt GC, Kenyon P. PRICING AND THE INVESTMENT DECISION. Kyklos 1976;.

Hart N, Kriesler P. Post-Keynesian Economics . Technical Report; UNSW Business School; 2015.

Hayashi F. Tobin's Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation. Econometrica 1982;.

Heer B, Maussner A. Dynamic General Equilibrium Modeling. Springer Science & Business Media, 2009.

Kaldor N. The Scourge of Monetarism 1985;.

Kalecki M. The Principle of Increasing Risk. Economica 1937;.

King RG, Plosser CI, Rebelo ST. Production, growth and business cycles. Journal of Monetary Economics 1988a;.

King RG, Plosser CI, Rebelo ST. Production, growth and business cycles. Journal of Monetary Economics 1988b;.

Krusell P, Mukoyama T, Rogerson R, Şahin A. Aggregate implications of indivisible labor, incomplete markets, and labor market frictions. Journal of Monetary Economics 2008;.

Krusell P, Mukoyama T, Rogerson R, Şahin A. A three state model of worker flows in general equilibrium. Journal of Economic Theory 2011;.

Lucas RE, Prescott EC. Investment Under Uncertainty. Econometrica 1971;.

Minsky HP. Can "It" Happen Again?: Essays on Instability and Finance 2015;.

Mulligan CB. Aggregate implications of indivisible labor. Advances in Macroeconomics 2001;.

Phaneuf L, Sims ER, Victor JG. Inflation, Output, and Markup Dynamics with Forward-Looking Wage and Price Setters. NBER Working Paper 2015;.

Prescott EC. Theory ahead of business-cycle measurement. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1986;.

Rogerson R. Indivisible labor, lotteries and equilibrium. Journal of Monetary Economics 1988;.

Rogerson R, Wallenius J. Micro and macro elasticities in a life cycle model with taxes. Monetary Policy and Capital AccumulationMonetary Policy and Capital 2009a;.

Rogerson R, Wallenius J. Micro and macro elasticities in a life cycle model with taxes. Journal of Economic Theory 2009b;.

Sims CA. Interpreting the macroeconomic time series facts: The effects of monetary policy. European Economic Review 1992;.

Smets F, Wouters R. AN ESTIMATED DYNAMIC STOCHASTIC GENERAL EQUILIBRIUM MODEL OF THE EURO AREA. Journal of the European Economic Association 2003;.

Stiglitz J, Weiss A. Credit rationing and collateral. In: Recent developments in corporate finance. 2009. .

Stiglitz JE. Theories of Wage Rigidity. NBER Working Papers 1984;.

Stiglitz JE. The Causes and Consequences of The Dependence of Quality on Price. Journal of Economic Literature 1987;.

Stiglitz JE, Weiss A. Credit Rationing in Markets with Imperfect Information. The American Economic Review 1981;.

Stiglitz JE, Weiss A. Incentive Effects of Terminations: Applications to the Credit and Labor Markets. The American Economic Review 1983;.

Sveen T, Weinke L. New perspectives on capital, sticky prices, and the Taylor principle. Monetary Policy and Capital AccumulationMonetary Policy and Capital 2005;.

Svensson LEO. Chapter 22 - Inflation Targeting. In: Handbook of Monetary Economics. 2010. .

Wood A. A Theory of Profits 1975;.