

## MỤC LỤC

<b>MỤC LỤC .....</b>	<b>1</b>
<b>PHẦN I – ĐẶT VẤN ĐỀ .....</b>	<b>11</b>
<b>PHẦN II – NỘI DUNG NGHIÊN CỨU.....</b>	<b>13</b>
2.1. CÀI ĐẶT WEBSITE LAPTRINHPHOTHONG.VN.....	13
2.1.1. Giới thiệu về laptrinhphothong.vn .....	13
2.1.2. Hướng dẫn sử dụng cho quản trị viên .....	14
2.1.2.1. Nhập nội dung bài tập mới.....	14
2.1.2.2. Nhập các test case của bài tập .....	15
2.1.2.3. Kiểm tra lại trước khi publish .....	15
2.1.3. Hướng dẫn sử dụng cho người dùng.....	16
2.1.2.1. Đăng ký sử dụng .....	16
2.1.2.2. Đăng nhập và giải bài.....	17
2.2. XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP .....	19
2.2.1. Các nguyên tắc xây dựng .....	19
2.2.2. Các bước xây dựng.....	21
<b>CHƯƠNG 1 – CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA C++ .....</b>	<b>24</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....	24
1. Khung chương trình của C++ .....	24
2. Các lệnh vào ra.....	24
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....	24
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG.....	25
Bài 1.1 – (N0101A) Nhập xuất.....	25
Bài 1.2 – (N0102A) Tính toán 1 .....	25
Bài 1.3 – (N0103A) Tính toán 2 .....	26
Bài 1.4 – (N0104A) Tính toán 3 .....	26
Bài 1.5 – (N0105A) Tính toán 4 .....	26
Bài 1.6 – (N0106A) Tính toán 5 .....	26
Bài 1.7 – (N0107B) Căn n .....	27
Bài 1.8 – (N0108B) Tổng 1 đến n .....	27
Bài 1.9 – (N0109B) Tổng các số lẻ .....	27
Bài 1.10 – (N0110B) Tổng bình phương.....	27

Bài 1.11 – (N0111A)	Chia lấy nguyên - dư.....	28
Bài 1.12 – (N0112A)	Liên sau – liên trước .....	28
Bài 1.13 – (N0113A)	Phần nguyên – phần lẻ.....	28
Bài 1.14 – (N0114B)	Phép chia .....	28
Bài 1.15 – (N0115C)	Tổ hợp .....	29
Bài 1.16 – (N0116B)	Mã ASCII.....	29
Bài 1.17 – (N0117C)	Chỉnh hợp.....	29
Bài 1.18 – (N0118C)	Giao điểm 1 .....	30
Bài 1.19 – (N0119C)	Giao điểm 2 .....	30
Bài 1.20 – (N0120C)	Giao điểm 3 .....	30
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....		30
Bài 1.5 – (N0105A)	Tính toán 4 .....	30
Bài 1.7 – (N0107B)	Căn n .....	31
Bài 1.9 – (N0109B)	Tổng lẻ .....	31
Bài 1.10 – (N0110B)	Tổng bình phương.....	31
Bài 1.11 – (N0111B)	Chia lấy nguyên - dư.....	31
Bài 1.13 – (N0113A)	Phần nguyên – phần lẻ.....	32
Bài 1.14 – (N0114B)	Phép chia .....	32
Bài 1.15 – (N0115C)	Tổ hợp .....	32
Bài 1.17 – (N0117C)	Chỉnh hợp.....	32
Bài 1.18 – (N0118C)	Giao điểm 1 .....	33
<b>CHƯƠNG 2 - CẤU TRÚC Rẽ NHÁNH .....</b>		<b>34</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....		34
1. Cấu trúc rẽ nhánh if.....		34
2. Cấu trúc rẽ nhánh if else .....		34
3. Cấu trúc switch.....		34
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....		34
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG.....		36
Bài 2.1 – (N0201A)	Chẵn lẻ .....	36
Bài 2.2 – (N0202A)	Chia hết.....	36
Bài 2.3 – (N0203B)	Năm nhuận .....	36
Bài 2.4 – (N0204A)	Số lớn hơn 1 .....	36

Bài 2.5 – (N0205B)	Số lớn hơn 2 .....	37
Bài 2.6 – (N0206A)	Số chính phương .....	37
Bài 2.7 – (N0207A)	Ba cạnh tam giác .....	37
Bài 2.8 – (N0208A)	Phương trình bậc hai .....	37
Bài 2.9 – (N0209A)	Số nhỏ nhất 1 .....	38
Bài 2.10 – (N0210A)	Số nhỏ nhất 2 .....	38
Bài 2.11 – (N0211B)	Ba điểm thẳng hàng.....	38
Bài 2.12 – (N0212B)	Chia hết cho 3 .....	39
Bài 2.13 – (N0213B)	Số nhỏ nhì .....	39
Bài 2.14 – (N0214B)	Quy tắc chia .....	39
Bài 2.15 – (N0215A)	Bằng nhau .....	39
Bài 2.16 – (N0216D)	Ngày sinh .....	40
Bài 2.17 – (N0217C)	Nhiều tuổi hơn.....	40
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....		40
Bài 2.3 – (N0203B)	Năm nhuận .....	40
Bài 2.5 – (N0205A)	Số lớn hơn 2.....	41
Bài 2.6 – (N0206A)	Số chính phương .....	41
Bài 2.8 – (N0208A)	Phương trình bậc hai .....	41
Bài 2.11 – (N0211B)	Ba điểm thẳng hàng.....	42
Bài 2.16 – (N0216C)	Ngày sinh .....	42
<b>CHƯƠNG 3 - CẤU TRÚC VÒNG LẶP .....</b>		<b>44</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....		44
1. Cấu trúc vòng lặp for .....		44
2. Cấu trúc vòng lặp while .....		44
3. Cấu trúc vòng lặp do while .....		44
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....		44
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG.....		46
Bài 3.1 – (N0301A)	Dấu sao .....	46
Bài 3.1 – (N0302A)	Số tự nhiên .....	46
Bài 3.2 – (N0303A)	Dấu thẳng.....	46
Bài 3.3 – (N0304A)	Dấu đô la.....	47
Bài 3.4 – (N0305B)	Số không .....	47

Bài 3.5 – (N0306B)	Giai thừa.....	47
Bài 3.6 – (N0307C)	Số dãy nhị phân.....	48
Bài 3.7 – (N0308B)	Dãy số 1 .....	48
Bài 3.8 – (N0309C)	Dãy số 2 .....	48
Bài 3.9 – (N0310C)	Tổng giai thừa .....	48
Bài 3.10 – (N0311B)	Bảng ký tự.....	49
Bài 3.12 – (N0312A)	Tổng mũ bốn .....	49
Bài 3.13 – (N0313B)	Tổng mũ ba .....	49
Bài 3.14 – (N0314B)	Hình vuông dấu \$ .....	50
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....		50
Bài 3.3 – (N0303A)	Dấu đô la.....	50
Bài 3.5 – ( N0305B)	Giai thừa.....	50
Bài 3.6 – (N0306C)	Số dãy nhị phân.....	51
Bài 3.8 – (N0308C)	Dãy số 2 .....	51
Bài 3.9 – (N0309C)	Tổng giai thừa .....	52
<b>CHƯƠNG 4 – KIỂU DỮ LIỆU MẢNG MỘT CHIỀU .....</b>		<b>53</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....		53
1. Khai báo mảng .....		53
2. Cách sử dụng.....		53
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....		53
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG.....		54
Bài 4.1 – (N0401A)	Giá trị nhỏ nhất .....	54
Bài 4.2 – (N0402A)	Tổng mảng .....	55
Bài 4.3 – (N0403A)	Tổng lẻ .....	55
Bài 4.4 – (N0404B)	Giá trị lớn nhất .....	55
Bài 4.5 – (N0405B)	Giá trị lẻ nhỏ nhất.....	56
Bài 4.6 – (N0406A)	Giá trị chia hết cho 3 .....	56
Bài 4.7 – (N0407A)	Tổng trị tuyệt đối .....	56
Bài 4.8 – (N0408A)	Các số không nhỏ hơn X.....	57
Bài 4.9 – (N0409A)	Số thuộc đoạn.....	57
Bài 4.10 – (N0410B)	Số chính phương .....	57
Bài 4.11 – (N0411B)	Đếm nghịch thế .....	58

Bài 4.12 – (N0412B) Sắp xếp .....	58
Bài 4.13 – (N0413B) Tổng bình phương .....	59
Bài 4.14 – (N0414C) Quicksort .....	59
Bài 4.15 – (N0415B) Số lần xuất hiện nhiều nhất .....	59
Bài 4.16 – (N0416A) Chia hết cho 3 .....	60
Bài 4.17 – (N0417B) Ký tự xuất hiện nhiều nhất .....	60
Bài 4.18 – (N0418B) Chia hết 3 và 5 .....	60
Bài 4.19 – (N0419B) Giá trị nhỏ nhất đến k .....	61
Bài 4.20 – (N0420C) Trộn mảng .....	61
Bài 4.21 – (N0421D) Phần tử trung vị .....	62
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....	62
Bài 4.5 – (N0405A) Giá trị lẻ nhỏ nhất .....	62
Bài 4.8 – (N0408A) Các số không nhỏ hơn X .....	63
Bài 4.11 – (N0411B) Đếm nghịch thế .....	63
Bài 4.14 – (N0414B) Quicksort .....	64
Bài 4.17 – (N0417B) Ký tự xuất hiện nhiều nhất .....	64
Bài 4.19 – (N0419B) Giá trị nhỏ nhất đến k .....	65
Bài 4.20 – (N0420C) Trộn mảng .....	65
Bài 4.21 – (N0421D) Phần tử trung vị .....	65
<b>CHƯƠNG 5 – KIỂU DỮ LIỆU MẢNG HAI CHIỀU .....</b>	<b>67</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....	67
1. Khái niệm ma trận .....	67
2. Khai báo mảng hai chiều .....	67
3. Cách sử dụng .....	67
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....	68
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG .....	69
Bài 5.1 – (N0501A) In ma trận .....	69
Bài 5.2 – (N0502A) Tổng trên ma trận .....	69
Bài 5.3 – (N0503B) Hàng có tổng lớn nhất .....	70
Bài 5.4 – (N0504B) Cột có tổng lớn nhất .....	70
Bài 5.5 – (N0505A) Giá trị chẵn lớn nhất .....	71
Bài 5.6 – (N0506A) Tổng trên đường chéo chính .....	71

Bài 5.7 – (N0507B) Tổng trên đường chéo phụ .....	71
Bài 5.8 – (N0508C) Tổng trên biên ma trận .....	72
Bài 5.9 – (N0509A) Tổng hai ma trận .....	72
Bài 5.10 – (N0510B) Tích hai ma trận .....	73
Bài 5.11 – (N0511C) Tổng các bảng vuông .....	74
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....	74
Bài 5.3 – (N0503B) Hàng có tổng lớn nhất .....	74
Bài 5.8 – (N0508B) Tổng trên biên ma trận .....	75
Bài 5.10 – (N0510B) Tích hai ma trận .....	75
Bài 5.11 – (N0511C) Tổng các bảng vuông .....	76
<b>CHƯƠNG 6 – KIỂU DỮ LIỆU XÂU KÝ TỰ</b> .....	<b>78</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....	78
1. Hai kiểu xâu trong C++ .....	78
2. Khai báo và sử dụng .....	78
3. Các phép toán và hàm thành viên .....	78
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....	78
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG .....	80
Bài 6.1 – (N0601A) Độ dài xâu .....	80
Bài 6.2 – (N0602A) Đếm ký tự .....	80
Bài 6.3 – (N0603A) Ký tự hoa .....	80
Bài 6.4 – (N0604A) Ký tự số .....	80
Bài 6.5 – (N0605B) Xâu đối xứng .....	81
Bài 6.6 – (N0606B) Tổng chữ số .....	81
Bài 6.7 – (N0607B) Đếm số từ .....	81
Bài 6.8 – (N0608B) Loại bỏ chữ số .....	81
Bài 6.9 – (N0609B) Số ký tự phân biệt .....	82
Bài 6.10 – (N0610C) Mã hóa 1 .....	82
Bài 6.11 – (N0611C) Mã hóa 2 .....	82
Bài 6.12 – (N0612D) Mã hóa 3 .....	83
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....	83
Bài 6.6 – (N0606B) Tổng chữ số .....	83
Bài 6.7 – (N0607B) Đếm số từ .....	84

Bài 6.9 – (N0609C) Số ký tự phân biệt .....	84
Bài 6.10 – (N0610C) Mã hóa 1 .....	85
Bài 6.11 – (N0611C) Mã hóa 2 .....	85
<b>CHƯƠNG 7 - KIỂU DỮ LIỆU TẬP VĂN BẢN .....</b>	<b>87</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....	87
1. Lệnh đồng bộ tệp và vào ra chuẩn .....	87
2. Tệp văn bản trong C++ với thư viện fstream .....	87
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....	87
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG .....	88
Bài 7.1 – (N0701A) Số âm .....	88
Bài 7.2 – (N0702B) Min max ra hai file .....	89
Bài 7.3 – (N0703B) Sắp xếp dữ liệu ngoài .....	89
Bài 7.4 – (N0703B) Đọc file không biết số lượng .....	90
<b>CHƯƠNG 8 - HÀM VÀ CẤU TRÚC HÀM .....</b>	<b>91</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....	91
1. Cấu trúc rẽ nhánh if .....	91
2. Cấu trúc rẽ nhánh if else .....	91
3. Cấu trúc switch .....	92
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....	93
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG .....	97
Bài 8.1 – (N0801A) Tổng các chữ số .....	97
Bài 8.2 – (N0802A) Tổng chữ số chia hết cho 9 .....	98
Bài 8.3 – (N0803A) Đếm ước chung lớn nhất .....	98
Bài 8.4 – (N0804A) Đếm bội chung nhỏ nhất .....	98
Bài 8.5 – (N0805A) Số ước chia hết cho 7 .....	99
Bài 8.6 – (N0806A) Bội chung tổng chữ số .....	99
Bài 8.7 – (N0807B) Nguyên tố lớn nhất .....	99
Bài 8.8 – (N0808B) Nguyên tố nhỏ nhất .....	100
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....	100
Bài 8.1 – (N0801A) Tổng các chữ số .....	100
Bài 8.3 – (N0803A) Đếm ước chung lớn nhất .....	100
Bài 8.5 – (N0805A) Số ước chia hết cho 7 .....	101

Bài 8.7 – (N0807B) Nguyên tố lớn nhất.....	101
<b>CHƯƠNG 9 – KIỂU DỮ LIỆU STRUCT .....</b>	<b>103</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ.....	103
1. Khai báo .....	103
2. Sử dụng kiểu struct.....	103
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....	104
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG.....	106
Bài 9.1 – (N0901A) Hình bình hành.....	106
Bài 9.2 – (N0902A) Diện tích hình bình hành.....	106
Bài 9.3 – (N0903B) Diện tích đa giác lồi .....	106
Bài 9.4 – (N0904C) Danh sách học sinh.....	107
Bài 9.5 – (N0905B) Cầu thủ trẻ nhất .....	107
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....	108
Bài 9.2 – (N0902A) Diện tích hình bình hành.....	108
Bài 9.3 – (N0903B) Diện tích đa giác lồi .....	108
Bài 9.4 – (N0904C) Danh sách học sinh.....	109
<b>CHƯƠNG 10 – MỘT SỐ THUẬT TOÁN SỐ HỌC CƠ BẢN.....</b>	<b>110</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ .....	110
1. Thuật toán tìm UCLN, BCNN .....	110
2. Thuật toán kiểm tra số nguyên tố.....	111
3. Giải thuật sàng nguyên tố.....	112
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....	112
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG.....	114
Bài 10.1 – (N1001A) Số lượng số nguyên tố .....	114
Bài 10.2 – (N1002B) Số nguyên tố trong đoạn .....	114
Bài 10.3 – (N1003B) Số đặc biệt.....	114
Bài 10.4 – (N1004C) Số bin bon .....	115
Bài 10.5 – (N1005B) Số nguyên tố fibonacci.....	115
Bài 10.6 – (N1006A) Cơ số k .....	115
Bài 10.7 – (N1007B) Ước.....	116
Bài 10.8 – (N1008B) Số thừa số nguyên tố .....	116
Bài 10.9 – (N1009C) Số siêu nguyên tố .....	116



Bài 10.10 – (N1010D) Số supper nguyên tố.....	117
Bài 10.11 – (N1011E) Định đề Bertrand .....	117
Bài 10.12 – (N1012E) Liệt kê số siêu nguyên tố.....	118
Bài 10.13 – (N1013E) Tổng phần nguyên.....	118
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....	118
Bài 10.2 – (N1002B) Số nguyên tố trong đoạn .....	118
Bài 10.3 – (N1003B) Số đặc biệt.....	119
Bài 10.4 – (N1004C) Số bin bon .....	119
Bài 10.5 – (N1005B) Số nguyên tố fibonacci.....	120
Bài 10.7 – (N1007B) Ước.....	121
Bài 10.8 – (N1008B) Số thừa số nguyên tố .....	122
Bài 10.9 – (N1009B) Số siêu nguyên tố .....	122
Bài 10.10 – (N1010D) Số supper nguyên tố.....	123
Bài 10.11 – (N1011E) Định đề Bertrand .....	123
Bài 10.12 – (N1012E) Liệt kê số siêu nguyên tố.....	124
Bài 10.13 – (N1013E) Tổng phần nguyên.....	125
<b>CHƯƠNG 11 – ĐỆ QUY .....</b>	<b>127</b>
A. KIẾN THỨC GHI NHỚ.....	127
1. Khái niệm đệ quy .....	127
2. Ví dụ minh họa.....	127
3. Một số ứng dụng của đệ quy.....	128
B. CÁC VÍ DỤ MẪU .....	129
C. BÀI TẬP ÁP DỤNG.....	132
Bài 11.1 – (N1101A) Số tập con.....	132
Bài 11.2 – (N1102A) Liệt kê nhị phân .....	132
Bài 11.3 – (N1103A) Liệt kê tam phân.....	132
Bài 11.4 – (N1104B) Liệt kê chỉnh hợp.....	133
Bài 11.5 – (N1105C) Liệt kê chỉnh hợp tập A.....	133
Bài 11.6 – (N1106B) Liệt kê tổ hợp .....	134
Bài 11.7 – (N1107C) Liệt kê tổ hợp tập A.....	134
Bài 11.8 – (N1108B) Liệt kê xâu ký tự AB .....	135
Bài 11.9 – (N1109D) Liệt kê xâu hợp lệ.....	135

Bài 11.10 – (N1110E) Liệt kê xâu con .....	135
Bài 11.11– (N1111D) Số mũ 1 .....	136
Bài 11.12 – (N1112E) Số mũ 2.....	136
Bài 11.13 – (N1113E) Số mũ 3.....	136
Bài 11.14 – (N1114E) Quân hậu.....	136
D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP .....	137
Bài 11.4 – (N1104B) Liệt kê chỉnh hợp.....	137
Bài 11.5 – (N1105B) Liệt kê chỉnh hợp tập A.....	137
Bài 11.6 – (N1105B) Liệt kê tổ hợp .....	138
Bài 11.8 – (N1108C) Liệt kê xâu ký tự AB .....	139
Bài 11.9 – (N1109D) Liệt kê xâu hợp lệ.....	140
Bài 11.10 – (N1110E) Liệt kê xâu con .....	141
Bài 11.11 – (N1111D) Số mũ 1 .....	141
Bài 11.12 – (N1112E) Số mũ 2.....	142
Bài 11.13 – (N1113E) Số mũ 3.....	143
Bài 11.14 – (N1114E) Quân hậu.....	143
<b>KẾT LUẬN .....</b>	<b>145</b>
<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO.....</b>	<b>146</b>

## PHẦN I – ĐẶT VẤN ĐỀ

### 1.1. Lý do chọn đề tài

Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018 được Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành kèm Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018, môn Tin học có triết lý cốt lõi tạo ra một thể hệ mới có tư duy áp dụng công nghệ trong giải quyết các vấn đề thực tế. Vì vậy, những kiến thức về phân giải thuật và lập trình đóng vai trò rất quan trọng trong chương trình tin học ở bậc THPT.

Hiện tại chất lượng việc dạy học Tin học ở nhà trường THCS và THPT trong cả nước nói chung, tỉnh Nghệ An nói riêng còn ở mức độ khá thấp, tuy đã được chú trọng, song trình độ giáo viên còn hạn chế, việc tìm tòi kiến thức còn gặp nhiều khó khăn trong xu thế liên tục đổi mới công nghệ nói chung và bộ môn Tin học nói riêng. Lập trình là một phần rất quan trọng trong nội dung chương trình bộ môn Tin học hiện tại và cả nội dung chương trình Giáo dục phổ thông 2018, là mạch kiến thức quan trọng nhất trong 3 mạch kiến thức của Tin học bao gồm: CS, ICT, DL.

Hiện tại phần lập trình trong SGK Tin học cơ bản đang minh họa bằng ngôn ngữ lập trình Pascal. Đây là ngôn ngữ có nhiều đóng góp trong lịch sử phát triển của Tin học thế giới. Tuy nhiên, với xu thế phát triển của thời đại 4.0, ngôn ngữ Pascal không còn được hỗ trợ nhiều và chính thức bị Tổ chức Olympic Tin học Quốc tế đưa ra ngoài danh sách ngôn ngữ lập trình trong nhà trường phổ thông từ năm 2020.

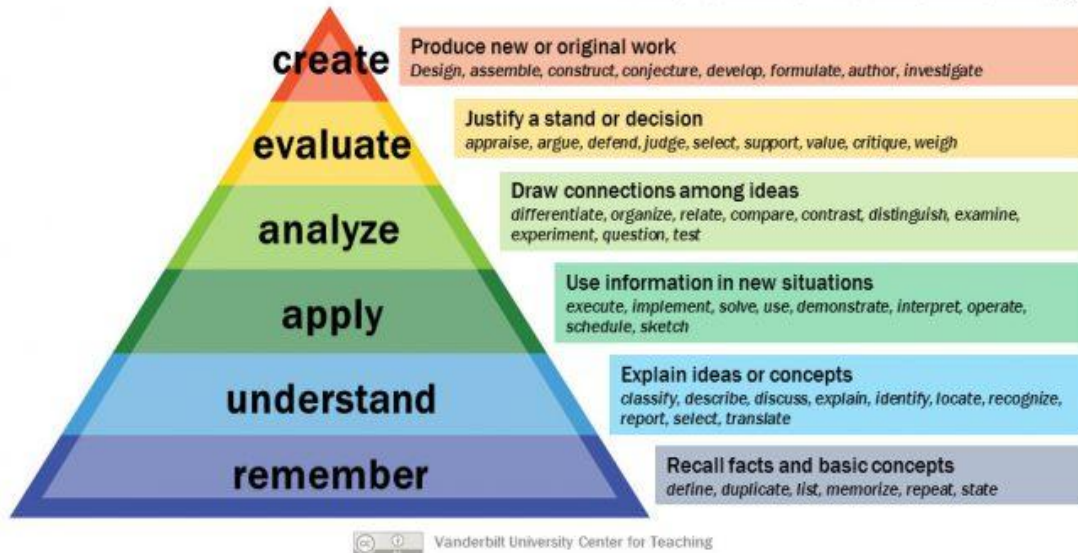
Trước nhu cầu học tập của học sinh theo chương trình giáo dục phổ thông 2018 và hỗ trợ giáo viên có công cụ giảng dạy tốt nhập môn lập trình, chúng tôi thiết kế **“Hệ thống giải bài trực tuyến nhập môn lập trình với C++”** với từng chương và các bài tập vận dụng từ thấp đến cao theo hệ thống đánh giá Bloom.

### 1.2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu một số vấn đề khó khăn gặp phải khi giảng dạy lập trình trong nhà trường phổ thông và đưa ra giải pháp xây dựng một hệ thống bài tập và một công cụ E-learning đi kèm.

Nghiên cứu hệ thống đánh giá Bloom (2001) từ đó tạo ra hệ thống bài tập phân loại theo 6 mức: **Nhớ, Hiểu, Vận dụng, Phân tích, Đánh giá, Sáng tạo.**

## Bloom's Taxonomy



### 1.3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Chúng tôi xây dựng là một hệ thống học tập Elearning bao gồm:

- Website JUDGE có chức năng có thể chấm bài tự động, kiểm tra đánh giá, hỗ trợ học tập cho học sinh, hỗ trợ giáo viên soạn bài giảng môn lập trình một cách dễ dàng, giảm thiểu khó khăn cho giáo viên, tăng cường tính hợp tác, thi đua trong việc dạy và học môn lập trình.
- Hệ thống bài tập nhập môn C++ với nhiều ví dụ chọn lọc và phân loại các mức nhận biết theo thang đánh giá Bloom.

### 1.4. Các phương pháp nghiên cứu chính

- Nghiên cứu lý luận: Chúng tôi xem xét cách phân chia các mức độ nhận thức theo thang Bloom để vận dụng trong việc phân loại hệ thống bài tập.
- Điều tra, quan sát: Thực trạng về tình hình dạy và học lập trình trong nhà trường phổ thông.
- Tổng kết kinh nghiệm: Tổng hợp kinh nghiệm dạy và học của bản thân, đồng nghiệp, học sinh trong quá trình dạy học nhập môn lập trình.

## PHẦN II – NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. CÀI ĐẶT WEBSITE LAPTRINHPHOTHONG.VN

Trong phần này chúng tôi đã sử dụng nền tảng của NTUCoder xây dựng nên một trang web dạng JUDGE – có chức năng chấm bài tự động với nhiều loại ngôn ngữ khác nhau như: C, C++, Python2, Python3 – đây là các ngôn ngữ được chương trình 2018 khuyến khích sử dụng.

#### 2.1.1. Giới thiệu về laptrinhphothong.vn



Từ phía người dùng giao diện của **laptrinhphothong.vn** bao gồm các menu: Trang chủ, Bài tập, Kỳ thi, Hỏi & đáp, Bảng chấm bài, Bài viết, Chaxbox.

Người dùng có thể đăng ký để làm bài tập thông qua chức năng đăng ký.

Các chức năng của trang đều đơn giản dễ sử dụng. Khi vào menu bài tập, sẽ hiển thị hệ thống bài tập. Click vào các bài tập cụ thể ta sẽ có nội dung và qua đó sử dụng chức năng giải bài và nộp bài:

**BÀI TẬP**

NỘP BÀI

BẢNG CHẤM BÀI TONG

CÁC LẦN BẠN NỘP

### TONG - Tổng A + B

Dữ liệu vào: standard input

Dữ liệu ra: standard output

Giới hạn thời gian: 1.0 giây

Giới hạn bộ nhớ: 128 megabyte

Đăng bởi: [admin](#)

Cho hai số nguyên dương A và B, hãy tính tổng A+B.

**Dữ liệu nhập:**

- Là hai số nguyên A, B ( $0 < A, B < 10^9$ ), A và B cách nhau một khoảng trắng.

**Dữ liệu xuất:**

Hệ thống bao gồm một máy chấm được cài đặt trên server online. Người sử dụng có thể nộp bài bất cứ thời điểm nào khi có kết nối internet.

### 2.1.2. Hướng dẫn sử dụng cho quản trị viên

Để đăng nhập có thể sử dụng:

Tài khoản: [hieptt@nghean.edu.vn](mailto:hieptt@nghean.edu.vn) - Mật khẩu: **0983713301**

#### 2.1.2.1. Nhập nội dung bài tập mới

Các nội dung cần nhập:

- Mã bài tập: duy nhất trong toàn bộ danh sách bài tập.
- Tên bài tập: Mô tả tên của bài tập.
- Giới hạn thời gian và bộ nhớ: có thể thiết lập thời gian và bộ nhớ cần dùng cho chương trình.
- Nội dung bài tập: Phát biểu bài toán.
- Giải thích ví dụ: phần xuất hiện bên dưới ví dụ.
- TestType: có 2 dạng
  - o Output Matching: So sánh kết quả của user với kết quả đáp án, được áp dụng khi kết quả đáp án là duy nhất.
  - o Verify Output: áp dụng khi có nhiều đáp án, lúc này cần viết chương trình chấm test, tức đọc kết quả của user để kiểm tra. Trong trường hợp này cần nhập thêm TestCompiler (trình biên dịch code chấm test) và Code chấm test.
- ReviewCoder: mời một ProblemSetter khác tham gia xem lại bài này. Người được mời chỉ có thể xem và test thử, không sửa được bài tập. Nếu không mời người review thì để trống.
- Published: Check vào thì bài tập mới xuất hiện cho user thấy.

## Algorithm with C++

Nhóm bài
**BÀI TẬP MỚI**

Compiler

Thành viên

**Bài tập**

Kỳ thi

Bài viết

Trang người dùng

### Tạo bài tập mới

Mã bài tập:  OK

Tên bài tập:

GH thời gian:

GH bộ nhớ:

Nội dung:

Normal Font Size B I U S x<sub>2</sub> x<sup>2</sup> A- A+

Cho hai số nguyên x và n, hãy tính lũy thừa x^n.

Dữ liệu nhập:

- Là hai số nguyên x và n cách nhau một khoảng trắng ( $1 \leq x \leq 1000, 1 \leq n \leq 10^{12}$ )

Dữ liệu xuất:

- Là 4 số cuối của lũy thừa x^n ( $x^n \bmod 10^4$ )

body p

Giải thích ví dụ

### 2.1.2.2. Nhập các test case của bài tập

Nhóm bài

Compiler

Thành viên

Bài tập

Kỳ thi

Bài viết

Trang người dùng

## BÀI TẬP

Thêm mới

Mã bài tập	Tên bài tập	Người Post	Số lượng test case	Kiểu chấm
HUFF	Mã nén Huffman	admin	20 test	OutputMatching
TRUHAU	Trung tố, Hậu tố	admin	20 test	OutputMatching
HAUTO	Biểu thức hậu tố	admin	11 test	OutputMatching
LUTH	Lũy thừa	admin	17 test	OutputMatching
KEBA	Kết bạn	admin	22 test	OutputMatching

Nhóm bài

Compiler

Thành viên

Bài tập

Kỳ thi















Bài viết

Trang người dùng

TEST CASE

TONG - Tổng A + B

Search:

TestCaseOrder	Input	Output	SampleTest	PreTest	
1	1 2	3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	  
2	5 7	12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	   
3	1234 2345	3579	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	   
4	1010101 303030	1313131	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	  

Thêm mới

Thêm nhiều test case

















Xóa hết test case



Quay lại bài tập

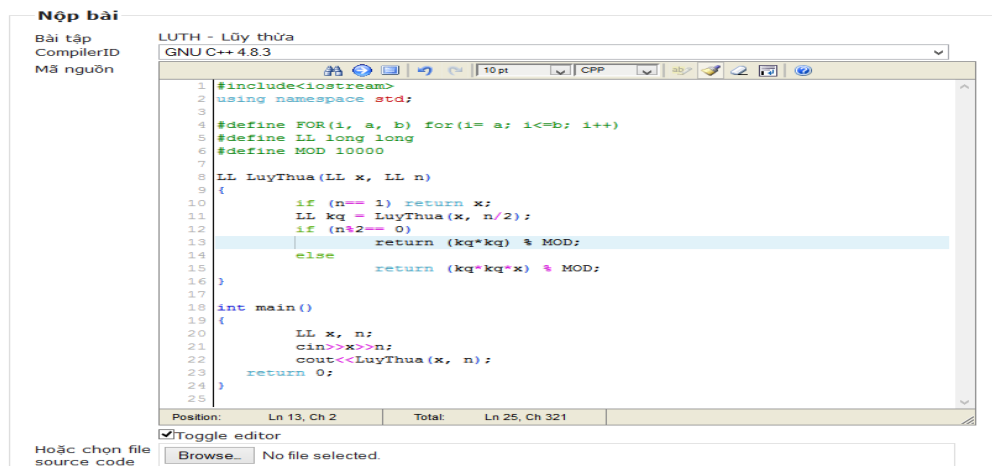
Nhấn nút Thêm mới để đưa vào testcase mới.

- Sample test: là test case sẽ hiển thị khi user xem bài tập.
- PreTest: hiện tại chưa sử dụng

### 2.1.2.3. Kiểm tra lại trước khi publish

BÀI TẬP							
Thêm mới							
Search: <input type="text"/>							
Mã bài tập	Tên bài tập	Người Post	Số lượng test case	Kiểu chấm	Chương trình checker	Published	
HUFF	Mã nén Huffman	admin	20 test	OutputMatching		<input checked="" type="checkbox"/>	   
TRUHAU	Trung tố, Hậu tố	admin	20 test	OutputMatching		<input checked="" type="checkbox"/>	   
HAUTO	Biểu thức hậu tố	admin	11 test	OutputMatching		<input checked="" type="checkbox"/>	   
LUTH	Lũy thừa	admin	17 test	OutputMatching		<input checked="" type="checkbox"/>	   

- **Xem trước:** Chọn nút cái kính lúp , giống như là user bình thường xem một bài tập, kể cả bài này chưa được publish
- **Chạy test trước:** Chọn nút 2 bánh xe :



## 2.1.3. Hướng dẫn sử dụng cho người dùng

### 2.1.2.1. Đăng ký sử dụng

Chức năng đăng ký sử dụng nằm ở góc phải trên của website. Sau khi click vào ô đăng ký, website sẽ cho ta khung đăng ký sau:

Xin vui lòng nhập thông tin (\*: cần nhập)

Tài khoản  \*

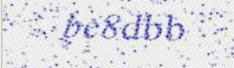
Email  \*

Mật khẩu  \*

Xác nhận mật khẩu  \*

Họ tên - Lớp - MSSV  \*

Ngôn ngữ sử dụng  \*



Mã bảo vệ  \*



Sau khi nhập tên tài khoản (user), đặt **password**, **email** thì một đường dẫn kích hoạt sẽ gửi cho người dùng qua tài khoản email. Việc đăng ký là dễ dàng đối với người sử dụng.

### 2.1.2.2. Đăng nhập và giải bài

Sau khi đăng nhập người dùng có thể sử dụng các chức năng chatbox, nạp bài, comment trên các bài viết. Cụ thể phần giải bài nằm trong menu bài tập như sau:

Danh sách bài tập				tim...
Mã	Tên bài tập	Dạng bài	Số giải được	
DIVEZ	DIVEZ		1	
IBS1704D	IBS1704D	Mức độ D - Phân tích	15	
IBS1704C	IBS1704C	Mức độ C - Vận dụng, Tìm kiếm nhị phân	18	
IBS1704B	IBS1704B	Mức độ B - Hiểu, Tìm kiếm nhị phân	19	
IBS1704A	IBS1704A	Mức độ A - Nhớ, Tìm kiếm nhị phân	20	
N0316C	Dãy fibonacci	3. Cấu trúc lặp, Mức độ C - Vận dụng	10	
IBS1304D	IBS1304D	Mức độ D - Phân tích, Tìm kiếm nhị phân	13	
IBS1304C	IBS1304C	Mức độ C - Vận dụng, Tìm kiếm nhị phân	16	
IBS1304B	IBS1304B	Mức độ B - Hiểu, Tìm kiếm nhị phân	21	

Để giải bài tập nào người dùng click vào mã bài đó, đọc đề và tiến hành giải bài.

Người dùng có thể giải bài trên CodeBlock rồi copy mã nguồn nạp lên trang như sau:

**BÀI TẬP**   **NỘP BÀI**   **BẢNG CHẤM BÀI A0102**   **CÁC LẦN BẠN NỘP**

**A0102 - Tính toán 2**  
Dữ liệu vào: standard input  
Dữ liệu ra: standard output  
Giới hạn thời gian: 1.0 giây  
Giới hạn bộ nhớ: 128 megabyte  
Đăng bởi: **admin**

Cho hai số nguyên dương A và B, hãy tính tổng A+B.

**Dữ liệu nhập:**

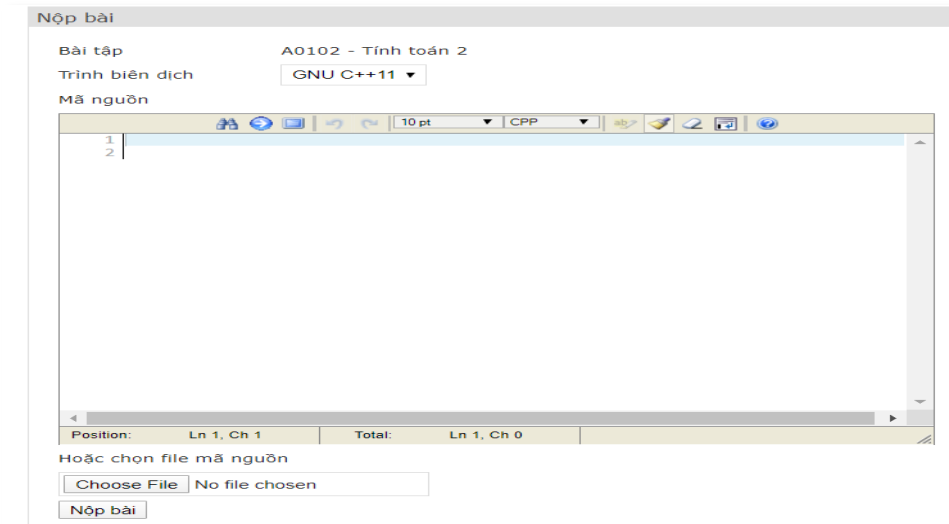
- Là hai số nguyên A, B (  $0 < A, B < 10^9$  ), A và B cách nhau một khoảng trắng.

**Dữ liệu xuất:**

- Là tổng của A và B

Click vào menu Nộp bài, sẽ hiển thị ra ô TextBox để nạp mã nguồn:

## Algorithm with C++



Người dùng có thể sao chép mã nguồn và dán trực tiếp vào ô soạn thảo của website, hoặc có thể upload file chương trình từ bộ nhớ ngoài của máy tính. Sau đó click vào nút Nộp bài và chờ kết quả trả về.

<a href="#">84040 RJ</a>	15/03/2020 21:19:05	admin	A0401 - Giá trị nhỏ nhất	GNU C++11	Accepted	15 ms	916 KB
<a href="#">84039 RJ</a>	15/03/2020 21:18:58	Hung1307	A0403 - Tổng lẻ	GNU C++	Accepted	15 ms	860 KB
<a href="#">84038 RJ</a>	15/03/2020 21:18:01	Minhquan0403	A0101 - Nhập xuất	GNU C++	Accepted	0 ms	860 KB
<a href="#">84037 RJ</a>	15/03/2020 21:16:11	Minhquan0403	A0101 - Nhập xuất	GNU C++	Compilation error	0 ms	0 KB
<a href="#">84036 RJ</a>	15/03/2020 21:16:06	Hung1307	A0402 - Tổng mảng	GNU C++	Accepted	15 ms	1120 KB
<a href="#">84035 RJ</a>	15/03/2020 21:14:08	thesovietunion1922	A0404 - Giá trị lớn nhất	GNU C++	Wrong answer on test 2	15 ms	916 KB
<a href="#">84034 RJ</a>	15/03/2020 21:13:35	Hung1307	A0401 - Giá trị nhỏ nhất	GNU C++	Accepted	15 ms	916 KB
<a href="#">84033 RJ</a>	15/03/2020 21:13:35	Hung1307	A0401 - Giá trị nhỏ nhất	GNU C++	Accepted	15 ms	916 KB

Trình chấm của website sẽ trả về các kết quả sau:

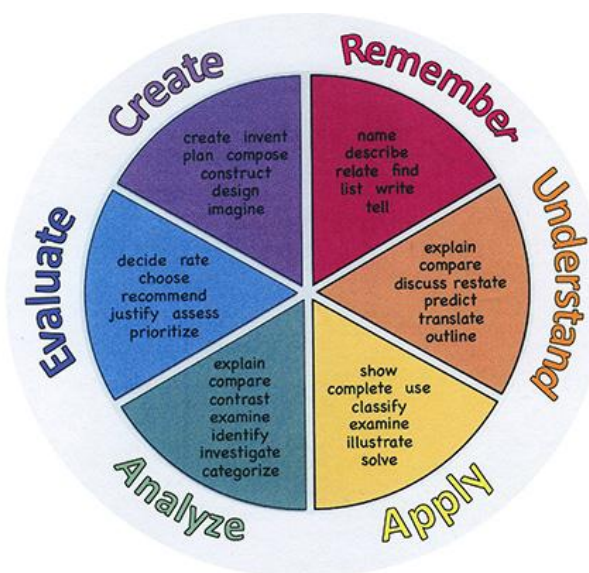
- Accepted: bài làm đúng tất cả các test.
- Wrong answer: có một test cho kết quả sai.
- Runtime error: lỗi chạy chương trình (tràn mảng, chia cho 0, exit code khác 0...).
- Time limit exceed: chạy quá giới hạn thời gian của bài tập.
- Memory limit exceed: chạy quá giới hạn bộ nhớ của bài tập.
- Output size limit exceed: xuất kết quả quá lớn.
- Compilation error: Biên dịch lỗi.

Người sử dụng thông qua kết quả chấm có thể điều chỉnh lại code của mình và tiếp tục nộp để giải bài.

## 2.2. XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP

### 2.2.1. Các nguyên tắc xây dựng

Thang đo Bloom về các cấp độ tư duy được Benjamin Bloom, một giáo sư của trường Đại học Chicago, đưa ra vào năm 1956. Trong đó Bloom có nêu ra sáu cấp độ nhận thức (gọi là thang đo Bloom) với sáu mức độ nhận thức tương ứng là: Biết, Hiểu, Vận dụng, Phân tích, Tổng hợp, Đánh giá. Thang đo này đã được sử dụng trong hơn năm thập kỷ qua đã khẳng định ưu điểm của phương pháp dạy học nhằm khuyến khích và phát triển các kỹ năng tư duy của người học ở mức độ cao. Sau đó vào năm 2001, tiến sỹ Lorin Anderson cùng với các cộng sự đưa ra Thang đánh giá Bloom (2001) phân chia sáu cấp độ nhận thức như sau: Nhớ (Remember), Hiểu (Understand), Vận dụng (Apply), Phân tích (Analyze), Đánh giá (Evaluate), Sáng tạo (Create). Hiện tại, đây là một thang đo các cấp độ nhận thức được sử dụng phổ biến trong nghiên cứu về giáo dục trên thế giới.



Mức độ	Ý nghĩa	Hành động
A – Nhớ	Nhớ thông tin	Xác định, mô tả, gọi tên, phân loại.
B – Hiểu	Hiểu nghĩa, diễn giải khái niệm	Tóm tắt, biến đổi, giải thích.
C – Vận dụng	Sử dụng thông tin hay khái niệm trong tình huống mới	Thiết lập, thực hiện, tạo dựng, mô phỏng, dự đoán, chuẩn bị lập kế hoạch.
D – Phân tích	Chia nhỏ thông tin và khái niệm thành những phần nhỏ	So sánh, đối chiếu, phân chia, phân biệt, lựa chọn, phân tích

	hơn để hiểu đầy đủ hơn.	
E – Đánh giá	Đánh giá vấn đề, khả năng phân xét giá trị, quyết định.	Đánh giá, phê bình, phán đoán chứng minh, tranh luận, biện hộ.
F – Sáng tạo	Tạo ra cái mới từ thông tin đã có.	Tập hợp, sáng tạo, xây dựng, phát minh, chế tạo, lên kế hoạch.

Cụ thể các mức độ nhận thức trong sáu cấp độ ở sơ đồ trên được hiểu chi tiết hơn như sau:

### **Cấp độ 1: Nhớ (remember)**

Ở đây, nhớ là khả năng ghi nhớ và nhận diện thông tin. Nhớ là cần thiết cho tất cả các mức độ tư duy và được hiểu là nhớ lại những kiến thức đã học một cách máy móc và nhắc lại.

Để đánh giá mức độ nhớ của người học, khi xây dựng hệ thống câu hỏi, chúng tôi đưa vào nhóm các bài tập nhắc lại một hoặc hai câu lệnh trong vùng kiến thức đang được học.

### **Cấp độ 2: Hiểu (understand)**

Hiểu là khả năng hiểu, diễn dịch, diễn giải, giải thích hoặc suy diễn (dự đoán được kết quả hoặc hậu quả). Hiểu không đơn thuần là nhắc lại cái gì đó, người học phải có khả năng diễn đạt khái niệm theo ý hiểu của họ.

Với mục đích đánh giá xem người học hiểu bài đến đâu, chúng tôi đưa ra các bài tập vẫn là sử dụng ít câu lệnh nhưng được biến tấu cho những tình huống đòi hỏi phải thay đổi một vài tham số để chương trình hoạt động.

### **Cấp độ 3: Vận dụng (apply)**

Vận dụng là khả năng sử dụng thông tin và chuyển đổi kiến thức từ dạng này sang dạng khác (sử dụng những kiến thức đã học trong hoàn cảnh mới). Vận dụng là bắt đầu của mức tư duy sáng tạo, tức là vận dụng những gì đã học vào đời sống hoặc một tình huống mới.

Để đánh giá khả năng vận dụng của người học, chúng tôi phát biểu bài toán có xem lẫn các dữ kiện cần mô hình hóa toán học trước khi lập trình.

### **Cấp độ 4: Phân tích (analysis)**

Phân tích là khả năng nhận biết chi tiết, phát hiện và phân biệt các bộ phận cấu thành của thông tin hay tình huống. Ở mức độ này đòi hỏi khả năng

phân nhỏ đối tượng thành các hợp phần cấu thành để hiểu rõ hơn cấu trúc của nó.

Muốn đánh giá khả năng phân tích của người học, chúng tôi đưa ra các bài tập cần sử dụng khả năng phân tích độ phức tạp của thuật toán. Với các bài tập dạng này chúng tôi chia thành các sub – với mục đích giúp người học có được cách phân tích các thuật toán khác nhau để giải bài tập đó.

### **Cấp độ 5: Đánh giá (evaluate)**

Đánh giá là khả năng phán xét giá trị hoặc sử dụng thông tin theo các tiêu chí thích hợp (hỗ trợ đánh giá bằng lý do/lập luận). Để sử dụng đúng mức độ này, người học phải có khả năng giải thích tại sao sử dụng những lập luận giá trị để bảo vệ quan điểm.

Ở cấp độ này chúng tôi đưa ra các bài tập được phát biểu ở dưới nhiều phương diện khác nhau, người học cần biết tổng hợp nhiều vùng kiến thức để đưa ra chiến lược giải quyết vấn đề một cách hiệu quả

### **Cấp độ 6: Sáng tạo (create)**

Sáng tạo là khả năng hợp nhất các thành phần để tạo thành một tổng thể/sự vật lớn và trên cơ sở đó tạo ra những sự vật mới. Ở mức độ này người học phải sử dụng những gì đã học để tạo ra hoặc sáng tạo một cái gì đó hoàn toàn mới.

Với mức độ này, chúng tôi xây dựng các mô hình contest, người học có thể tham gia xây dựng bài tập, sáng tạo đề thi. Bên cạnh đó chúng tôi xây dựng các group thảo luận sau khi kết thúc contest. Vì vậy, trong hệ thống bài tập chúng tôi thiết kế sẽ chỉ có 5 mức độ. Mức độ thứ sáu sẽ là mức độ tùy biến trong giảng dạy của giáo viên và người học dựa trên các contest.

### **2.2.2. Các bước xây dựng**

#### **Bước 1. Xác định mục đích của hệ thống bài tập**

- Mục đích xây dựng hệ thống bài tập nhập môn lập trình với C++ nhằm giúp người học tiếp cận bộ môn lập trình thuật toán với ngôn ngữ lập trình C++ theo thang đo Bloom (2001).
- Tạo ra một sân chơi trí tuệ cho bộ môn lập trình thuật toán.

#### **Bước 2. Xác định nội dung hệ thống bài tập**

- Hệ thống lại các kiến thức cơ bản trong từng chương

- Xây dựng hệ thống bài tập nhập môn lập trình với ngôn ngữ C++ bao gồm 11 chương với các kiến thức từ nền tảng đến nâng cao.

**Bước 3. Xác định loại bài tập, các kiểu bài tập**

- Hệ thống bài tập xây dựng trong đề tài là các bài tập nhập môn lập trình, nghĩa là phải phủ hết toàn bộ kiến thức cơ bản của ngôn ngữ C++.
- Trên cơ sở thang đo Bloom, chúng tôi phân loại bài tập trong mỗi chương theo 5 mức độ và được ký hiệu theo thứ tự A – Nhớ, B – Hiểu, C – Vận dụng, D – Phân tích, E – Đánh giá.

**Bước 4. Thu thập thông tin để soạn hệ thống bài tập**

- Thu thập các sách bài tập, tài liệu liên quan đến hệ thống bài tập cần xây dựng; tham khảo sách, báo, tạp chí... có liên quan.
- Tìm hiểu, nghiên cứu về các version mới nhất của C++ trên trang web chính thức <http://cplusplus.com/>.
- Số tài liệu thu thập được càng nhiều và càng đa dạng thì việc biên soạn càng nhanh chóng và có chất lượng, hiệu quả. Vì vậy, cần tổ chức sưu tầm tư liệu một cách khoa học.

**Bước 5. Tiến hành soạn thảo bài tập**

- Xây dựng dàn ý các dạng bài tập theo từng chương.
- Lồng ghép các nội dung thuật toán đi kèm kiến thức về ngôn ngữ.
- Phân dạng bài tập theo 5 mức độ A, B, C, D, E.

**Bước 6. Tham khảo, trao đổi ý kiến với đồng nghiệp**

- Sau khi xây dựng xong các bài tập, giáo viên tham khảo ý kiến các đồng nghiệp về tính chính xác, khoa học và tính vừa sức với trình độ của học sinh.
- Thảo luận trên các diễn đàn để đánh giá về mức độ tư duy của hệ thống bài tập.

**Bước 7. Thực nghiệm, chỉnh sửa và bổ sung**

- Để khẳng định lại mục đích của hệ thống bài tập là nhằm củng cố kiến thức và phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh, giáo viên trao đổi với các giáo viên thực nghiệm về khả năng nắm vững kiến thức và phát triển năng lực vận dụng cho học sinh thông qua hoạt động giải các bài tập.
- Bổ sung thêm các bài tập mới trong quá trình giảng dạy.

### 2.2.3. Hệ thống bài tập

Trong phần này chúng tôi đưa ra một cách hệ thống các bài tập từ đơn giản đến phức tạp cho mỗi chương theo thang đo mức độ Bloom được trình bày ở trên. Với mỗi chương, chúng tôi tổ chức thành 4 phần. Phần thứ nhất là phần A, chúng tôi hệ thống các vấn đề cơ bản nhất về mặt lý thuyết của mỗi chương. Phần thứ hai là phần B, chúng tôi đưa ra các ví dụ chọn lọc để mô tả cho kiến thức của chương, trong đó lồng ghép các kiến thức thuật toán liên quan tới kiến thức lập trình của chương đó. Phần thứ ba là phần C, chúng tôi đề xuất các bài tập lập trình từ đơn giản đến phức tạp trong chương kiến thức đó, các bài tập được phân loại mức độ A, B, C, D, E. Phần cuối cùng là phần D, chúng tôi trình bày lời giải của một số bài tập của phần C. Cụ thể hệ thống bài tập gồm 11 chương như sau:

## CHƯƠNG 1 – CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA C++

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Khung chương trình của C++

Một chương trình C++ có cấu trúc chung như sau:

```
#include <bits/stdc++.h> // Khai báo thư viện
using namespace std;
//Các loại khai báo khác như chương trình con, biến....
int main()
{
    //Các lệnh chính;
}
```

#### 2. Các lệnh vào ra

Với C++, ta có hai câu lệnh vào ra dữ liệu cơ bản là cin và cout.

Cú pháp của lệnh vào dữ liệu như sau:

```
cin >> (biến 1) >> (biến 2) >> (biến 3);
```

Cú pháp của lệnh ra dữ liệu như sau:

```
cout << (biểu thức 1) << (biểu thức 2) << (biểu thức 3);
```

### B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1.1:** Chương trình in ra dòng chào mừng:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    cout << "Hello C++!";
}
```

**Ví dụ 1.2:** Chương trình in ra tổng hai số nguyên a, b.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long a, b;
    cin >> a >> b;
    cout << a + b;
}
```

**Ví dụ 1.3:** Chương trình in ra tổng  $S = 1 + 2 + \dots + n$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
```



```
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    cout<<n*(n+1)/2;
}
```

**Chú ý:** Ta dễ dàng chứng minh được  $S = n(n+1)/2$  bằng quy nạp toán học.

**Ví dụ 1.4:** Chương trình tính toán số học:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long a,b; float c;
    cin>>a>>b>>c;
    cout<<a+b<<endl;
    cout<<a*b<<endl;
    cout<<a/b<<endl;
    cout<<a%b<<endl;
    cout<<c*(float)a/b;
}
```

**Chú ý:** Ta có phép chia lấy nguyên giữa hai số nguyên là:  $a/b$ , phép chia lấy dư giữa hai số nguyên là  $a\%b$ , phép chia lấy số thực của số nguyên ta cần ép sang kiểu thực bằng câu lệnh  $(float)a$ .

## C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

### Bài 1.1 – (N0101A) Nhập xuất

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một số nguyên và in ra số nguyên đó

**Dữ liệu:** Một số nguyên kiểu int.

**Kết quả:** In ra số nguyên vừa nhập vào.

**Ví dụ:**

Input	output
10	10

### Bài 1.2 – (N0102A) Tính toán 1

**Yêu cầu:** Viết chương trình in ra tổng hai số nguyên a và b kiểu int.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên a, b kiểu int.

**Kết quả:** Ghi ra tổng hai số nguyên.

**Ví dụ:**

input	output
2 3	5

**Bài 1.3 – (N0103A)      Tính toán 2**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ). In ra số gấp 3 lần số đó.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi một số nguyên  $n$  kiểu int,

**Kết quả:** Ghi ra số gấp 3 lần  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
3	9

**Bài 1.4 – (N0104A)      Tính toán 3**

**Yêu cầu:** Viết chương trình in ra tích hai số nguyên  $a$  và  $b$  kiểu int.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $a, b$  kiểu int.

**Kết quả:** Ghi ra tích hai số nguyên.

**Ví dụ:**

input	output
2 3	6

**Bài 1.5 – (N0105A)      Tính toán 4**

**Yêu cầu:** Cho ba số nguyên dương  $a, b$  và  $c$ , hãy tính  $S = a * (b + c) + b * (a + c)$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ba số nguyên  $a, b, c$  ( $0 < |a|, |b|, |c| \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** Một dòng ghi giá trị  $S = a * (b + c) + b * (a + c)$ .

**Ví dụ:**

input	output
1 2 3	13

**Bài 1.6 – (N0106A)      Tính toán 5**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào hai số  $a, b$ . In ra  $a + b + a * b$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 2 số  $a, b$  ( $0 \leq |a|, |b| < 10^9$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả  $a + b + a * b$ .

**Ví dụ:**

input	output
1 1	3

**Bài 1.7 – (N0107B) Căn n**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^{18}$ ). In ra:  $n + \left\lceil \sqrt{n} \right\rceil$ . Cho biết hàm lấy phần nguyên căn  $n$  là `int(sqrt(n))`.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 10^{18}$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả  $n + \left\lceil \sqrt{n} \right\rceil$ .

**Ví dụ:**

input	output
10	13

**Bài 1.8 – (N0108B) Tổng 1 đến n**

**Yêu cầu:** Cho tổng  $S = 1 + 2 + \dots + n$ . Tính tổng  $S$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
9	45

**Bài 1.9 – (N0109B) Tổng các số lẻ**

**Yêu cầu:** Tính tổng  $S = 1 + 3 + \dots + (2n + 1)$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
3	16

**Bài 1.10 – (N0110B) Tổng bình phương**

**Yêu cầu:** Tính tổng  $S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
3	14

**Bài 1.11 – (N0111A) Chia lấy nguyên - dư**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$  và  $k$  ( $0 < n, k \leq 10^{18}$ ).

Biết  $n = q.k + r$ , in ra  $q$  và  $r$ . Ta có phép chia lấy nguyên trong C++ là  $n/k$  và phép chia lấy dư là  $n\%k$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $n, k$ .

**Kết quả:** Đưa ra kết quả  $q$  và  $r$  trên một dòng.

**Ví dụ:**

input	output
10 3	3 1

**Bài 1.12 – (N0112A) Liền sau – liền trước**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^9$ ). In ra tích của số liền trước và số liền sau của  $n$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$ .

**Kết quả:** Đưa ra kết quả hai số nguyên là tích của số liền trước và số liền sau của  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
10	99

**Bài 1.13 – (N0113A) Phần nguyên – phần lẻ**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số thực  $x$ . In ra phần nguyên và phần lẻ của  $x$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số thực  $x$ .

**Kết quả:** Đưa ra kết quả là phần nguyên và phần lẻ của  $x$  trên một dòng.

**Ví dụ:**

input	output
1.13	1 0.13

**Bài 1.14 – (N0114B) Phép chia**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào 2 số nguyên  $a, b$ .

In ra  $a/b$  ( $a$  chia  $b$  lấy nguyên),  $a\%b$  ( $a$  chia  $b$  lấy dư),  $a/b$  ( $a$  chia  $b$  lấy thực, lấy 2 chữ số sau dấu phẩy). Ta chú ý câu lệnh chia lấy số thực như sau:

```
cout << setprecision(2); cout<<fixed;cout<<a/(float)b;
```

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $a, b$  ( $0 < a, b \leq 10^9$ ).

**Kết quả:**

- Dòng 1 ghi  $a/b$  là kết quả phép chia lấy nguyên,
- Dòng 2 ghi  $a\%b$  là kết quả phép chia lấy dư,
- Dòng 3 ghi  $a/b$  là kết quả phép chia lấy 2 chữ số sau dấu thập phân.

**Ví dụ:**

input	output
4 2	2 0 2.00

**Bài 1.15 – (N0115C) Tổ hợp**

**Yêu cầu:** Mr X muốn chọn 3 thành viên ban cán sự trong lớp 10A2 có  $n$  học sinh. Hỏi số cách chọn?

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả là số cách chọn.

**Ví dụ:**

input	output
3	1

**Bài 1.16 – (N0116B) Mã ASCII**

**Yêu cầu:** Biết một ký tự trong C++ được khai báo như sau: `char ch`; mỗi một ký tự đều có mã ASCII của nó. Cách in ra ký tự có mã ASCII là  $n$  như sau: `cout<<char(n);`

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $65 \leq n \leq 127$ ).

**Kết quả:** Đưa ra ký tự có mã ASCII là  $n + 1$ .

**Ví dụ:**

input	output
65	B

**Bài 1.17 – (N0117C) Chinh hợp**

**Yêu cầu:** Mr X muốn chọn 2 thành viên trong lớp 10A2 có  $n$  học sinh để cử làm lớp trưởng và lớp phó học tập. Hỏi số cách chọn?

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả là số cách chọn.

**Ví dụ:**

input	output
4	12

**Bài 1.18 – (N0118C) Giao điểm 1**

**Yêu cầu:** Cho  $n$  đường thẳng phân biệt. Hỏi số giao điểm tối đa có thể có của  $n$  đường thẳng?

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả là số giao điểm tối đa.

**Ví dụ:**

input	output
3	3

**Bài 1.19 – (N0119C) Giao điểm 2**

**Yêu cầu:** Cho  $n$  đường tròn phân biệt. Hỏi số giao điểm tối đa có thể có của  $n$  đường tròn trên?

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả là số giao điểm tối đa.

**Ví dụ:**

input	output
4	12

**Bài 1.20 – (N0120C) Giao điểm 3**

**Yêu cầu:** Cho  $m$  đường tròn và  $n$  đường thẳng phân biệt. Hỏi số giao điểm tối đa có thể có của  $m$  đường tròn và  $n$  đường thẳng trên?

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên dương  $m, n$  ( $0 < m, n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** Đưa ra kết quả là số giao điểm tối đa.

**Ví dụ:**

input	output
2 2	11

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP****Bài 1.5 – (N0105A) Tính toán 4**

**Yêu cầu:** Cho ba số nguyên dương  $a, b$  và  $c$ , hãy tính  $S = a * (b + c) + b * (a + c)$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long a,b,c;
```

```
cin>>a>>b>>c;
cout<<a*(b+c)+b*(a+c);
}
```

### Bài 1.7 – (N0107B) Căn n

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^{18}$ ). In ra:  $n + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n,k;
    cin>>n;
    k = sqrt(n);
    cout<<n + k;
}
```

### Bài 1.9 – (N0109B) Tổng lẻ

**Yêu cầu:** Tính tổng  $S = 1 + 3 + \dots + (2n + 1)$ .

Ta chứng minh bằng quy nạp toán học công thức:  $S = (n + 1)^2$ .

### Bài 1.10 – (N0110B) Tổng bình phương

**Yêu cầu:** Tính tổng  $S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .

Ta chứng minh bằng quy nạp toán học công thức:  $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

### Bài 1.11 – (N0111B) Chia lấy nguyên - dư

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$  và  $k$ , ( $0 < n, k \leq 10^{18}$ ).

Biết  $n = q.k + r$ , in ra  $q$  và  $r$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n,k;
    cin>>n>>k;
    cout<<n/k<<" ";
    cout<<n%k;
}
```

**Bài 1.13 – (N0113A) Phần nguyên – phần lẻ**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số thực  $x$ . In ra phần nguyên và phần lẻ của  $x$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long double a;
    long long k;
    cin>>a;
    k = a;
    cout<<a<<" "<<a - k;
}
```

**Bài 1.14 – (N0114B) Phép chia**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào 2 số nguyên  $a, b$ . In ra  $a/b$  ( $a$  chia  $b$  lấy nguyên),  $a\%b$  ( $a$  chia  $b$  lấy dư),  $a/b$  ( $a$  chia  $b$  lấy thực, lấy 2 chữ số sau dấu phẩy).

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long a, b;
    cin>>a>>b;
    cout<<a/b<<endl;
    cout<<a%b<<endl;
    cout<<setprecision(2)<<fixed;
    cout<<(double)(a)/b;
}
```

**Bài 1.15 – (N0115C) Tổ hợp**

**Yêu cầu:** Mr X muốn chọn 3 thành viên ban cán sự trong lớp 10A2 có  $n$  học sinh. Hỏi số cách chọn?

Số cách chọn 3 phần tử trong  $n$  phần tử là  $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ .

**Bài 1.17 – (N0117C) Chinh hợp**

**Yêu cầu:** Mr X muốn chọn 2 thành viên trong lớp 10A2 có  $n$  học sinh để cử làm lớp trưởng và lớp phó học tập. Hỏi số cách chọn?

Số cách chọn 2 phần tử trong  $n$  phần tử là và sắp thứ tự là  $A_n^2 = n(n-1)$ .



**Bài 1.18 – (N0118C)      Giao điểm 1**

**Yêu cầu:** Cho  $n$  đường thẳng phân biệt. Hỏi số giao điểm tối đa có thể có của  $n$  đường thẳng? Số giao điểm tối đa có thể có của  $n$  đường thẳng là

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

## CHƯƠNG 2 - CẤU TRÚC RỄ NHÁNH

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Cấu trúc rẽ nhánh if

Cú pháp của lệnh if như sau:

```
if (biểu thức điều kiện) <lệnh>;
```

Nếu biểu thức điều kiện đúng thì sẽ thực hiện lệnh, nếu không chương trình sẽ bỏ qua và thực hiện lệnh kế tiếp.

#### 2. Cấu trúc rẽ nhánh if else

Cú pháp của lệnh if như sau:

```
if (biểu thức điều kiện) <lệnh 1>;
    else <lệnh 2>;
```

Nếu biểu thức điều kiện đúng thì sẽ thực hiện lệnh thứ nhất, nếu không chương trình sẽ thực hiện lệnh thứ 2.

#### 3. Cấu trúc switch

Cú pháp của lệnh switch như sau:

```
switch(biểu thức)
{
    case hằng 1: các lệnh nhóm 1;
    case hằng 2: các lệnh nhóm 2;
    default: cout<<"OTHER";
}
```

Nếu biểu thức điều kiện đúng thì sẽ thực hiện lệnh thứ nhất, nếu không chương trình sẽ thực hiện lệnh thứ 2.

### B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 2.1:** Đoạn chương trình sau sử dụng cấu trúc `if` để nhập vào một số nguyên in ra 1 nếu số đó là nguyên dương, in ra  $-1$  nếu số đó là nguyên âm và in ra 0 nếu  $n = 0$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    if(n>0) cout<<1;
    if(n==0) cout<<0;
    if(n<0) cout<<-1;
}
```

**Ví dụ 2.2:** Chương trình sử dụng cấu trúc `if else` để nhập vào hai số nguyên a, b và in ra số nhỏ hơn.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    if(n>0) cout<<1;
    if(n==0) cout<<0;
    if(n<0) cout<<-1;
}
```

**Ví dụ 2.3:** Chương trình sử dụng cú pháp `if else` lồng nhau

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long a,b;
    cin>>a>>b;
    if(N==0) cout<<"MATH ERROR";
    else if(a%b==0) cout<<"YES";
    else cout<<"NO";
}
```

**Ví dụ 2.4:** Chương trình sử dụng cú pháp `switch () case`.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    switch(n)
    {
        case 1: cout<<"ONE"; break;
        case 2: cout<<"TWO"; break;
        default: cout<<"OTHER";
    }
}
```

**C. BÀI TẬP ÁP DỤNG****Bài 2.1 – (N0201A) Chẵn lẻ**

**Yêu cầu:** Cho số nguyên  $n$ . In ra ODD nếu  $n$  lẻ, in ra EVEN nếu  $n$  chẵn.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 1 số nguyên  $0 < n \leq 10^9$

**Kết quả:** Ghi ra ODD hoặc EVEN

**Ví dụ:**

input	output
1	ODD

**Bài 2.2 – (N0202A) Chia hết**

**Yêu cầu:** Cho hai số nguyên  $a, b$ . In ra YES nếu  $a$  chia hết cho  $b$ , in ra -1 nếu  $b = 0$ , in ra NO nếu  $a$  không chia hết cho  $b$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $a, b$  là số nguyên kiểu 64 – bit.

**Kết quả:** Ghi ra YES, -1, NO như yêu cầu đề bài.

**Ví dụ:**

input	output
1 2	NO

**Bài 2.3 – (N0203B) Năm nhuận**

**Yêu cầu:** Năm Nhuận là năm chia hết cho 4 mà không chia hết cho 100, nhưng chia hết cho 400 thì vẫn là năm Nhuận. Nhập một năm, nếu năm đó là năm Nhuận thì in ra YES, nếu không in ra NO.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 1 số nguyên là năm cần xét

**Kết quả:** Ghi ra YES, NO như yêu cầu đề bài

**Ví dụ:**

input	output
4	YES

**Bài 2.4 – (N0204A) Số lớn hơn 1**

**Yêu cầu:** Nhập vào 2 số phân biệt  $a, b$ . In ra số lớn hơn.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 2 số nguyên  $a, b$ , là các số nguyên 32 – bit.

**Kết quả:** In ra số lớn hơn.

**Ví dụ:**

input	output
2 3	3

**Bài 2.5 – (N0205B) Số lớn hơn 2**

**Yêu cầu:** Nhập vào 4 số phân biệt a, b, c, d. In ra số lớn nhất trong 4 số đó.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 4 số nguyên a, b, c, d là các số nguyên 64 – bit.

**Kết quả:** In ra giá trị lớn nhất trong 4 số a, b, c, d.

**Ví dụ:**

input	output
1 2 3 4	4

**Bài 2.6 – (N0206A) Số chính phương**

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên n, in ra YES nếu n là số chính phương, in ra NO nếu n không chính phương. Ta có thể kiểm tra số chính phương bằng cách kiểm tra n có bằng  $\text{sqrt}(n) * \text{sqrt}(n)$  hay không.

Cú pháp so sánh như sau: `n==int(sqrt(n))* int(sqrt(n))`.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên n số nguyên 64 – bit.

**Kết quả:** In ra YES hoặc NO nếu n là chính phương hoặc không tương ứng.

**Ví dụ:**

input	output
9	YES

**Bài 2.7 – (N0207A) Ba cạnh tam giác**

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên ba số nguyên a, b, c. Kiểm tra xem 3 số đó có lập thành 3 cạnh của tam giác hay không?

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 3 số nguyên a, b, c là số nguyên 64 – bit.

**Kết quả:** In ra YES hoặc NO nếu 3 số có thể lập thành 3 cạnh của tam giác hay không.

**Ví dụ:**

input	output
1 1 1	YES

**Bài 2.8 – (N0208A) Phương trình bậc hai**

Nhập vào số nguyên ba số nguyên a, b, c. Giải phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$ , ta có nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm, nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có 1 nghiệm, còn khi  $\Delta > 0$  thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

**Yêu cầu:**

- In ra NOSOL nếu phương trình vô nghiệm,
- In ra ONE nếu phương trình có nghiệm kép,
- In ra TWO nếu có 2 nghiệm phân biệt.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 3 số nguyên  $a, b, c$  là số nguyên 64 - bit ( $a$  khác 0)

**Kết quả:** In ra NOSOL, ONE, TWO theo yêu cầu đề bài.

**Ví dụ:**

input	output
1 1 1	NOSOL

### **Bài 2.9 – (N0209A) Số nhỏ nhất 1**

**Yêu cầu:** Cho ba số nguyên  $a, b, c$  ( $|a|, |b|, |c| \leq 10^9$ ), tìm giá trị nhỏ nhất của ba số  $a, b, c$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi ba số nguyên  $a, b, c$ .

**Kết quả:** Đưa ra giá trị nhỏ nhất trong ba số  $a, b, c$ .

**Ví dụ:**

input	output
1 3 4	1

### **Bài 2.10 – (N0210A) Số nhỏ nhất 2**

**Yêu cầu:** Cho ba số nguyên  $a, b, c$  ( $|a|, |b|, |c| \leq 10^9$ ), tìm giá trị nhỏ nhất của bốn số  $a, b, c, d$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi bốn số nguyên  $a, b, c, d$ .

**Kết quả:** Đưa ra giá trị nhỏ nhất trong bốn số  $a, b, c, d$ .

**Ví dụ:**

input	output
1 3 5 7	1

### **Bài 2.11 – (N0211B) Ba điểm thẳng hàng**

Trong hệ trục tọa độ Oxy, ba điểm A, B, C thẳng hàng nếu tọa độ ba điểm tương

ứng tỷ lệ với nhau:  $\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} = \frac{x_A - x_C}{y_A - y_C}$ .

**Yêu cầu:** Cho tọa độ 3 điểm A, B, C. Kiểm tra xem 3 điểm A, B, C có thẳng hàng không?

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 6 số nguyên  $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$  có kiểu dữ liệu int là tọa độ của A, B, C.

**Kết quả:** Đưa ra YES nếu A, B, C thẳng hàng, NO nếu A, B, C không thẳng hàng.

**Ví dụ:**

input	output
1 1 2 2 3 3	YES

### Bài 2.12 – (N0212B) Chia hết cho 3

**Yêu cầu:** Cho hai số  $a, b$ . Kiểm tra xem 2 chữ số cuối cùng của tích  $a \times b$  có chia hết cho 3 hay không?

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $a, b, c$  ( $|a|, |b|, |c| \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** Ghi YES nếu hai chữ số cuối cùng của  $a*b$  chia hết cho 3, ghi NO nếu ngược lại.

**Ví dụ:**

input	output
10 10	YES

### Bài 2.13 – (N0213B) Số nhỏ nhì

**Yêu cầu:** Cho 5 số nguyên  $a, b, c, d, e$  kiểu int đôi một khác nhau. In ra số nhỏ thứ nhì.

**Dữ liệu:** Một dòng gồm 5 số nguyên  $a, b, c, d, e$ .

**Kết quả:** In ra số nhỏ thứ nhì.

**Ví dụ:**

input	output
1 2 3 4 5	2

### Bài 2.14 – (N0214B) Quy tắc chia

**Yêu cầu:** Cho 3 số nguyên  $a, b, c$ . In ra dấu / nếu  $a/b = c$  hoặc  $b/c = a$  hoặc  $c/a = b$  và in ra NOSOL nếu không thỏa mãn.

**Dữ liệu:** Một dòng gồm 3 số nguyên  $a, b, c$  ( $|a|, |b|, |c| \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** Ghi ra / nếu  $a/b = c$  hoặc  $b/c = a$  hoặc  $c/a = b$  in ra NOSOL nếu không thỏa mãn.

**Ví dụ:**

input	output
1 2 2	/

### Bài 2.15 – (N0215A) Bằng nhau

**Yêu cầu:** Cho 5 số kiểu int. In ra YES nếu có ít nhất 4 số bằng nhau, in ra NO nếu không thỏa mãn.

**Dữ liệu:** Một dòng gồm 5 số nguyên  $a, b, c, d, e$  ( $0 < |a|, |b|, |c|, |d|, |e| \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** Ghi ra YES nếu có 4 số bằng nhau, ghi NO nếu ngược lại.

**Ví dụ:**

input	output
1 1 1 1 2	YES

**Bài 2.16 – (N0216D) Ngày sinh**

**Yêu cầu:** Cho ngày sinh của một người. In ra thứ của ngày sinh người đó.

**Dữ liệu:** Một dòng gồm 3 số nguyên  $d, m, y$  ( $0 < d, m, y \leq 10^9$ ) là ngày, tháng, năm sinh.

**Kết quả:** Ghi ra thứ bằng tiếng Anh tương ứng (Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday, Friday, Saturday, Sunday).

**Ví dụ:**

input	output
3 9 2019	Tuesday

**Bài 2.17 – (N0217C) Nhiều tuổi hơn**

**Yêu cầu:** Cho ngày tháng năm sinh của hai người. In ra 1 nếu người thứ nhất nhiều tuổi hơn người thứ hai, in ra - 1 nếu người thứ hai nhiều tuổi hơn người thứ nhất, in ra 0 nếu cả hai bằng tuổi nhau.

**Dữ liệu:**

- Dòng 1 ghi 3 số nguyên kiểu int  $d1, m1, y1$  là ngày tháng năm sinh của người thứ nhất.
- Dòng 2 ghi 3 số nguyên kiểu int  $d2, m2, y2$  là ngày tháng năm sinh của người thứ hai.

**Kết quả:** in ra kết quả tương ứng  $-1, 0, 1$ .

**Ví dụ:**

input	output
1 2 2004	1
1 3 2004	

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP****Bài 2.3 – (N0203B) Năm nhuận**

**Yêu cầu:** Năm Nhuận là năm chia hết cho 4 mà không chia hết cho 100, nhưng chia hết cho 400 thì vẫn là năm Nhuận. Nhập một năm, nếu năm đó là năm Nhuận thì in ra YES, nếu không in ra NO.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n;
```



```

cin>>n;
if(((n%4==0)and(n%100!=0))or(n%400==0))
    cout<<"YES";
else cout<<"NO";
}

```

### Bài 2.5 – (N0205A) Số lớn hơn 2

**Yêu cầu:** Nhập vào 4 số phân biệt  $a, b, c, d$ . In ra số lớn nhất trong 4 số đó.

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long a,b,c,d, LN = -1e9;
    cin>>a>>b>>c>>d;
    if(LN<a) LN = a;
    if(LN<b) LN = b;
    if(LN<c) LN = c;
    if(LN<d) LN = d;
    cout<<LN;
}

```

### Bài 2.6 – (N0206A) Số chính phương

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên  $n$ , in ra YES nếu  $n$  là số chính phương, in ra NO nếu  $n$  không chính phương.

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    long long c = sqrt(n);
    if(n==c*c)
        cout<<"YES";
    else cout<<"NO";
}

```

### Bài 2.8 – (N0208A) Phương trình bậc hai

Nhập vào số nguyên ba số nguyên  $a, b, c$ . Giải phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$ . Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$ , ta có nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm, nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có 1 nghiệm, còn khi  $\Delta > 0$  thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

```

```

#define ll long long
ll a,b,c;
int main ()
{
    cin>>a>>b>>c;
    ll delta=b*b-4*a*c;
    if (delta<0) cout<<"NOSOL";
    else
    {
        if (delta>0) cout<<"TWO";
        else cout<<"ONE";
    }
}

```

### Bài 2.11 – (N0211B) Ba điểm thẳng hàng

Trong hệ trục tọa độ Oxy, ba điểm A, B, C thẳng hàng nếu tọa độ ba điểm tương

$$\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} = \frac{x_A - x_C}{y_A - y_C}$$

ứng tỷ lệ với nhau:  $\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} = \frac{x_A - x_C}{y_A - y_C}$ .

```

#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main ()
{
    int xa,ya,xb,yb,xc,yc;
    cin>>xa>>ya>>xb>>yb>>xc>>yc;
    if ((yc-ya)*(xb-xa)==(xc-xa)*(yb-ya))
        cout<<"YES";
    else cout<<"NO";
    return 0;
}

```

### Bài 2.16 – (N0216C) Ngày sinh

**Yêu cầu:** Cho ngày sinh của một người. In ra thứ của ngày sinh người đó.

```

#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    int day, month, year, tpn, ans, kq;
    cin>>day>>month>>year;
    year=year-1;
    tpn=year*365+year/4-year/100+year/400;
    year=year+1;
}

```

```

    month=month-1;
    if (month>=1) ans=ans+31;
    if (month>=2) ans=ans+28;
    if (month>=3) ans=ans+31;
    if (month>=4) ans=ans+30;
    if (month>=5) ans=ans+31;
    if (month>=6) ans=ans+30;
    if (month>=7) ans=ans+31;
    if (month>=8) ans=ans+31;
    if (month>=9) ans=ans+30;
    if (month>=10) ans=ans+31;
    if (month>=11) ans=ans+30;
    month=month+1;
    if (((year%4==0)&&(year%100!=0))||(year%400==0)) if (month>
2) ans=ans+1;
    kq=(tpn+ans+day)%7; kq=kq+1;
    if (kq==2) cout<<"Monday";
    if (kq==3) cout<<"Tuesday";
    if (kq==4) cout<<"Wednesday";
    if (kq==5) cout<<"Thursday";
    if (kq==6) cout<<"Friday";
    if (kq==7) cout<<"Saturday";
    if ((kq==8)||(kq==1)) cout<<"Sunday";
    return 0;
}

```

## CHƯƠNG 3 - CẤU TRÚC VÒNG LẶP

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Cấu trúc vòng lặp for

Cú pháp của lệnh **for** như sau:

```
for (<biểu thức 1>;<biểu thức 2>;<biểu thức 3>) <lệnh>;
```

Trong đó <biểu thức 1> là biểu thức khởi tạo biến lặp, <biểu thức 2> là biểu thức dừng vòng lặp, <biểu thức 3> là điều khiển lặp.

Ví dụ đơn giản tính tổng  $S = 1 + 2 + \dots + 10$ .

```
for (int i=1;i<=10;i=i+1) S=S+i;
```

#### 2. Cấu trúc vòng lặp while

Cú pháp của lệnh **while** như sau:

```
while (<biểu thức điều kiện>)
{
    <lệnh 1>;
    <lệnh 2>;
    ...
    <lệnh n>;
}
```

Nếu biểu thức điều kiện đúng thì sẽ thực hiện tất cả các lệnh. Vòng lặp sẽ dừng khi biểu thức điều kiện có kết quả sai.

#### 3. Cấu trúc vòng lặp do while

Cú pháp của lệnh **do while** như sau:

```
do
{
    <lệnh 1>;
    <lệnh 2>;
    ...
    <lệnh n>;
}
while(biểu thức điều kiện);
```

Vòng lặp do while sẽ lần lượt thực hiện các câu lệnh từ <lệnh\_1> đến <lệnh\_n> và sau đó kiểm tra xem biểu thức điều kiện có đúng không để tiếp tục lặp hoặc thoát ra.

### B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 3.1:** Chương trình sau sử dụng vòng lặp for tính  $n!$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n, S = 1;
    cin >> n;
    for(int i=1; i<=n; i++)
        S*=i;
    cout << S;
}
```

**Ví dụ 3.2:** Chương trình sử dụng vòng lặp for lồng nhau in ra bảng cửu chương.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    for(int i=1; i<=9; i++)
    {
        cout << "Bang nhan " << i << endl;
        for(int j=1; j<=9; j++)
            cout << i << " x " << j << " = " << i*j << endl;
    }
}
```

**Ví dụ 3.3:** Chương trình sau sử dụng vòng lặp while để in ra số nguyên dương nhỏ nhất sao tổng  $S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > A$  với  $A$  là một số cho trước.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    float A, n = 0, S = 0;
    cin >> A;
    while(S < A)
    {
        ++n;
        S = S + 1/n;
    }
    cout << n;
}
```

**Ví dụ 3.4:** Chương trình sau sử dụng vòng lặp do while để đọc dữ liệu từ bàn phím cho đến khi phím Y được nhấn.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    char ch;
    do { cin>>ch;}
    while (ch!='Y');
}
```

### C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

#### Bài 3.1 – (N0301A) Dấu sao

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ). In ra  $n$  dấu \* trên cùng một dòng

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$ .

**Kết quả:** Đưa ra  $n$  dấu \* viết liền nhau.

**Ví dụ:**

input	output
4	****

#### Bài 3.1 – (N0302A) Số tự nhiên

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^5$ ). In ra các số nguyên dương từ 1 đến  $n$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất.

**Kết quả:** In ra các số nguyên dương từ 1 đến  $n$  mỗi số cách nhau 1 dấu cách trống, kết thúc bằng dấu !

**Ví dụ:**

input	output
5	1 2 3 4 5 !

#### Bài 3.2 – (N0303A) Dấu thăng

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 10^5$ ). In ra 3 hàng dấu #

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất

**Kết quả:** Dòng 1 ghi  $n$  dấu #, dòng 2 ghi  $n-1$  dấu #, dòng 3 ghi  $n-2$  dấu #.

**Ví dụ:**

input	output
4	####

	###
	##

**Bài 3.3 – (N0304A) Dấu đô la**

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 10^3$ ). In ra một hình vuông cạnh  $n$  gồm các dấu \$.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất.

**Kết quả:** một hình vuông gồm  $n^2$  dấu \$.

**Ví dụ:**

input	output
4	\$\$\$\$ \$\$\$\$ \$\$\$\$ \$\$\$\$

**Bài 3.4 – (N0305B) Số không**

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 10^3$ ). In ra một tam giác vuông cân cạnh  $n$  gồm các số 0 với dòng cuối cùng là cạnh đáy gồm  $n$  số 0.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất.

**Kết quả:** Dòng 1 ghi 1 số 0, dòng thứ 2 ghi 2 số 0, ..., dòng thứ  $i$  ghi  $i$  số 0.

**Ví dụ:**

input	output
4	0 00 000 0000

**Bài 3.5 – (N0306B) Giai thừa**

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 10^3$ ). In ra  $n!$  chia lấy dư cho  $10^9 + 7$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất.

**Kết quả:** Ghi ra  $n! \% (10^9 + 7)$ .

**Ví dụ:**

input	output
4	24

**Bài 3.6 – (N0307C) Số dãy nhị phân**

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 15$ ). In ra số dãy nhị phân độ dài  $n$ . Chẳng hạn với  $n = 2$  ta có các dãy nhị phân là 00, 01, 10, 11. Với  $n = 3$  ta có các dãy nhị phân 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất.

**Kết quả:** Ghi ra số lượng dãy nhị phân độ dài  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
4	16

**Bài 3.7 – (N0308B) Dãy số 1**

Cho dãy số: 
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$$

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 10^6$ ). In ra số thứ  $n$  của dãy.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất.

**Kết quả:** Ghi ra số thứ  $n$  của dãy số.

**Ví dụ:**

input	output
4	1

**Bài 3.8 – (N0309C) Dãy số 2**

Cho dãy số: 
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$$

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 10^6$ ) In ra số thứ  $n$  của dãy. Kết quả có thể rất lớn nên ta chia lấy dư cho  $10^9 + 7$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất.

**Kết quả:** Ghi ra số thứ  $n$  của dãy số chia lấy dư cho  $10^9 + 7$ .

**Ví dụ:**

input	output
3	2

**Bài 3.9 – (N0310C) Tổng giai thừa**

Cho tổng  $S = 1! + 2! + \dots + n!$



**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 10^6$ ). In ra tổng  $S(n)$ . Kết quả có thể rất lớn nên sẽ chia lấy dư cho  $10^9 + 7$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số  $n$  duy nhất.

**Kết quả:** Ghi ra  $S(n)$  tương ứng chia lấy dư cho  $10^9 + 7$ .

**Ví dụ:**

input	output
2	3

### Bài 3.10 – (N0311B) Bảng ký tự

**Yêu cầu:** Nhập vào hai số nguyên dương  $m, n$  ( $0 < m, n \leq 10^3$ ) và một ký tự ch. In ra bảng  $m$  hàng,  $n$  cột ký tự vừa nhập.

**Dữ liệu:**

- Dòng 1 ghi hai số nguyên  $m, n$ ;
- Dòng 2 ghi ký tự ch.

**Kết quả:** Ghi ra bảng  $m$  hàng,  $n$  cột ký tự ch.

**Ví dụ:**

input	output
2 3 a	aaa aaa

### Bài 3.12 – (N0312A) Tổng mũ bốn

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ). In ra tổng  $S = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên.

**Kết quả:** Đưa ra tổng  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
2	17

### Bài 3.13 – (N0313B) Tổng mũ ba

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 10^6$ ). In ra tổng  $S = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ .

**Dữ liệu:**

- Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** Đưa ra tổng  $S$  chia lấy dư cho  $10^9 + 7$ .

**Ví dụ:**

input	output
3	36

### **Bài 3.14 – (N0314B) Hình vuông dấu \$**

**Yêu cầu:** Tìm số nguyên  $k$  sao cho tổng từ 1 đến  $k$  bằng  $n$  cho trước.

**Dữ liệu:** Cho 1 số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** In ra YES nếu tồn tại  $k$ , in ra NO nếu không tồn tại  $k$ .

**Yêu cầu:** Tìm số nguyên  $k$  sao cho tổng từ 1 đến  $k$  bằng  $n$  cho trước.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$ , ( $0 < n \leq 10^6$ ).

**Kết quả:** In ra YES nếu tồn tại  $k$ , in ra NO nếu không tồn tại  $k$ .

**Ví dụ:**

input	output
10	YES

## **D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP**

### **Bài 3.3 – (N0303A) Dấu đô la**

**Yêu cầu:** Nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $2 < n \leq 10^3$ ). In ra một hình vuông cạnh  $n$  gồm các dấu \$.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int j = 1;j<=n;j++)
            cout<<"$";
        cout<<endl;
    }
}
```

### **Bài 3.5 – (N0305B) Giai thừa**

**Yêu cầu:** In ra  $n!$  chia lấy dư cho  $10^9 + 7$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
#define mod 1000000007
```

```
using namespace std;
int main()
{
    long long n, res=1;
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        res=(res*i)%mod;
    cout<<res;
}
```

Ở đây ta sử dụng tính chất  $((a \% m) * (b \% m)) \% m = (a * b) \% m$  để tránh hiện tượng tràn số của các kiểu dữ liệu nguyên.

### Bài 3.6 – (N0306C) Số dãy nhị phân

**Yêu cầu:** In ra số dãy nhị phân độ dài  $n$ .

Ta có số lượng dãy nhị phân độ dài  $n$  là  $2^n$ , vậy nên ta có chương trình như sau:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n, res=1;
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        res*=2;
    cout<<res;
}
```

### Bài 3.8 – (N0308C) Dãy số 2

Cho dãy số: 
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$$

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll mod=1e9+7, f[1000005], n;
int main ()
{
    cin>>n;
    f[1]=1;
    f[2]=1;
    for (ll i=3;i<=n;++i)
    {
```

```

        f[i]=(3*f[i-1]-f[i-2])%mod;
    }
    cout<<f[n];
}

```

### Bài 3.9 – (N0309C) Tổng giai thừa

Tính tổng  $S = 1! + 2! + \dots + n!$

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll mod=1e9+7,n,s=0;
int main ()
{
    cin>>n;
    ll gt=1;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
    {
        gt=(gt*i)%mod;
        s=(s+gt)%mod;
    }
    cout<<s;
}

```

## CHƯƠNG 4 – KIỂU DỮ LIỆU MẢNG MỘT CHIỀU

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Khai báo mảng

Cú pháp khai báo mảng như sau:

```
<tên kiểu dữ liệu> <tên mảng>[số_pt];
```

Trong đó <tên kiểu dữ liệu> là kiểu nguyên int, long long hoặc kiểu thực float, double hay kiểu ký tự... Ví dụ ta khai báo: `int a[100];` sẽ cho ta 100 phần tử từ `a[0]` đến `a[99]`.

#### 2. Cách sử dụng

Sau khi khai báo mảng ta truy cập phần tử thông qua chỉ số của phần tử như sau:

<tên\_mảng> [chỉ\_số], ví dụ muốn truy cập phần tử thứ 5 của mảng `a` ta viết `a[5]`.

Để đọc dữ liệu cho mảng ta kết hợp vòng lặp để đọc cho từng phần tử như ví dụ sau:

```
for(int i=1;i<=10;i++) cin>>a[i];
```

Để in dữ liệu mảng ta kết hợp vòng lặp để in cho từng phần tử như ví dụ sau:

```
for(int i=1;i<=10;i++) cout<<a[i];
```

Muốn tác động tới từng phần tử của mảng ta truy cập qua chỉ số như ví dụ sau:

```
for(int i=1;i<=10;i++) a[i]=a[i]+3;
```

### B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 4.1:** Chương trình nhập dữ liệu mảng một chiều 100 phần tử, in ra tổng các phần tử.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a[105],n,S = 0;
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        cin>>a[i];
        S = S + a[i];
    }
    cout<<S;
}
```

**Ví dụ 4.2:** Chương trình nhập dữ liệu mảng một chiều 100 phần tử, in ra phần tử nhỏ nhất.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a[105], n, NN = 1e9;
int main()
{
    long long n;
    cin >> n;
    for(int i=1; i<=n; i++)
    {
        cin >> a[i];
        if(NN > a[i]) NN = a[i];
    }
    cout << NN;
}
```

**Ví dụ 4.3:** Chương trình nhập vào mảng một chiều 100 phần tử, đếm số số chẵn.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a[105], n, dem = 0;
int main()
{
    long long n;
    cin >> n;
    for(int i=1; i<=n; i++)
    {
        cin >> a[i];
        if(a[i] % 2 == 0) dem++;
    }
    cout << dem;
}
```

## C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

### Bài 4.1 – (N0401A) Giá trị nhỏ nhất

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra giá trị nhỏ nhất.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra giá trị nhỏ nhất của  $n$  số nguyên.

**Ví dụ:**

input	output
4 2 3 4 6	2

#### **Bài 4.2 – (N0402A) Tổng mảng**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra tổng của  $n$  số nguyên đó.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra tổng của  $n$  số nguyên

**Ví dụ:**

input	output
4 2 3 4 6	15

#### **Bài 4.3 – (N0403A) Tổng lẻ**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra tổng các số lẻ.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra tổng các số lẻ của  $n$  số nguyên.

**Ví dụ:**

input	output
4 2 3 4 5	8

#### **Bài 4.4 – (N0404B) Giá trị lớn nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra giá trị lớn nhất của  $n$  số nguyên đó.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra giá trị lớn nhất của  $n$  số nguyên đó.

**Ví dụ:**

input	output
4 2 3 4 5	5

#### **Bài 4.5 – (N0405B) Giá trị lẻ nhỏ nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra giá trị lẻ nhỏ nhất trong dãy số.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra giá trị lẻ nhỏ nhất của  $n$  số nguyên.

**Ví dụ:**

input	output
4 2 3 4 7	3

#### **Bài 4.6 – (N0406A) Giá trị chia hết cho 3**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra số lượng số chia hết cho 3 của  $n$  số nguyên đó.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra số các số chia hết cho 3.

**Ví dụ:**

input	output
4 2 3 4 7	1

#### **Bài 4.7 – (N0407A) Tổng trị tuyệt đối**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra tổng các giá trị tuyệt đối trong dãy số.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra tổng các giá trị tuyệt đối của  $n$  số nguyên trong dãy.

**Ví dụ:**



input	output
4 -2 3 -4 7	16

**Bài 4.8 – (N0408A) Các số không nhỏ hơn X**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên và số nguyên X. In ra số lượng các số không nhỏ hơn X trong dãy số đó.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  và số nguyên X,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra số các số không nhỏ hơn X trong dãy.

**Ví dụ:**

input	output
4 1 -2 3 -4 7	2

**Bài 4.9 – (N0409A) Số thuộc đoạn**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra số lượng các số thuộc đoạn [500;3000] trong dãy số.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra số lượng các số thuộc đoạn [500;3000] trong dãy số.

**Ví dụ:**

input	output
5 501 1 4 600 200	3

**Bài 4.10 – (N0410B) Số chính phương**

**Yêu cầu:** Một số  $a$  được gọi là chính phương nếu tồn tại số nguyên  $b$  thỏa mãn  $b^2=a$ . Ta có thể sử dụng một số lệnh để kiểm tra một số có chính phương hay không như sau:

```
c=int(sqrt(a));
if(c*c==a) <a là chính phương>;
else <a không là chính phương>;
```

Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra số lượng các số chính phương trong dãy.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra số lượng các số chính phương trong dãy.

**Ví dụ:**

input	output
5 1 3 4 9 20	3

#### **Bài 4.11 – (N0411B) Đếm nghịch thế**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra số lượng các cặp  $a[i]$  và  $a[j]$  thỏa mãn  $i < j$  và  $a[i] > a[j]$  trong dãy số.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra số lượng các cặp  $a[i]$  và  $a[j]$  thỏa mãn  $i < j$  và  $a[i] > a[j]$ .

**Ví dụ:**

input	output
5 1 20 4 9 5	4

#### **Bài 4.12 – (N0412B) Sắp xếp**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các số nguyên đó

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Một dòng ghi  $n$  số nguyên theo thứ tự tăng dần cách nhau một dấu cách trống. Yêu cầu không được sử dụng hàm sort mà hãy sắp xếp bằng thuật toán “nổi bọt”.

**Ví dụ:**

input	output
5 1 20 4 9 5	1 4 5 9 20

**Bài 4.13 – (N0413B) Tổng bình phương**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 10^3$ ) số nguyên. In ra giá trị lớn nhất của tổng bình phương  $a_i^2 + a_j^2, 0 < i < j \leq n$  trong dãy số.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra số lượng giá trị lớn nhất của tổng bình phương  $a_i^2 + a_j^2, 0 < i < j \leq n$  trong dãy số.

**Ví dụ:**

input	output
5 1 2 3 4 5	41

**Bài 4.14 – (N0414C) Quicksort**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 10^5$ ) số nguyên. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các số nguyên đó. Sử dụng hàm `sort(a+1, a+n+1)` với độ phức tạp thuật toán  $O(n \log n)$ .

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Một dòng ghi  $n$  số nguyên theo thứ tự tăng dần.

**Ví dụ:**

input	output
5 6 2 3 4 5	2 3 4 5 6

**Bài 4.15 – (N0415B) Số lần xuất hiện nhiều nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên  $a_i$  ( $0 \leq a_i \leq 100$ ). In ra số lần xuất hiện của số xuất hiện nhiều nhất trong dãy số trên.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra số lần xuất hiện của số xuất hiện nhiều nhất trong dãy số trên.

**Ví dụ:**

input	output
5 6 2 3 4 6	2

**Bài 4.16 – (N0416A) Chia hết cho 3**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 10^5$ ) số nguyên. Xóa các phần tử chia hết cho 3 của dãy và in ra dãy sau khi xóa.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Một dòng ghi dãy sau khi xóa đi các phần tử chia hết cho 3.

**Ví dụ:**

input	output
5 6 2 3 4 6	2 4

**Bài 4.17 – (N0417B) Ký tự xuất hiện nhiều nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) ký tự latin thường ('a' - '>'z'). In ra ký tự xuất hiện nhiều nhất trong  $n$  ký tự đã cho.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  ký tự cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:** Đưa ra ký tự xuất hiện nhiều nhất trong dãy số trên, nếu có 2 ký tự có cùng số lần xuất hiện thì in ra ký tự có thứ tự từ điển nhỏ hơn.

**Ví dụ:**

input	output
5 a a b c d	a

**Bài 4.18 – (N0418B) Chia hết 3 và 5**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 10^5$ ) số nguyên. Xóa các phần tử chia hết cho 3 của dãy và in ra dãy sau khi xóa. Sau đó lại xóa các phần tử chia hết cho 5 trong dãy còn lại và in ra dãy

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống.

**Kết quả:**

- Dòng đầu tiên ghi dãy sau khi xóa đi các phần tử chia hết cho 3,
- Dòng thứ hai ghi dãy sau khi xóa hết các phần tử chia hết cho cả 3 và 5.

**Ví dụ:**

input	output
7	1 2 4 5 10
1 2 3 4 5 6 10	1 2 4

#### **Bài 4.19 – (N0419B) Giá trị nhỏ nhất đến k**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên  $a_i$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của dãy số từ phần tử thứ 1 đến phần tử thứ  $k$  nào đó.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  ký tự cách nhau một dấu cách trống,
- Dòng 3 ghi số câu hỏi  $t$ ,
- $t$  dòng sau mỗi dòng ghi một số nguyên  $k$ .

**Kết quả:** Đưa ra  $t$  dòng, mỗi dòng ghi một số nguyên *min* là giá trị nhỏ nhất trong các số  $a_1$  đến  $a_k$  tương ứng.

**Ví dụ:**

input	output
5	2
5 2 3 4 1	2
3	1
2	
4	
5	

#### **Bài 4.20 – (N0420C) Trộn mảng**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào 2 mảng A và B mỗi mảng có  $n$  ( $0 < n \leq 10^5$ ) số nguyên. Trộn hai mảng lại thành một mảng và sắp xếp theo thứ tự giảm dần và in ra.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$ ,
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống biểu diễn mảng A,
- Dòng 3 ghi  $n$  số nguyên dương cách nhau một dấu cách trống biểu diễn mảng B.

**Kết quả:** Một dòng ghi mảng C là trộn hai mảng trên lại và sắp xếp theo thứ tự giảm dần.

**Ví dụ:**

input	output
5	6 6 5 5 4 3 3 2
1 3 2 5 6	2 1
2 3 4 5 6	

#### **Bài 4.21 – (N0421D) Phần tử trung vị**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một mảng, in ra số trung vị của mảng. Số trung vị là số có giá trị trung bình trong mảng. Nếu mảng có  $2n + 1$  phần tử thì sau khi sắp xếp phần tử trung vị là phần tử thứ  $n + 1$ . Nếu mảng có  $2n$  phần tử thì số trung vị là trung bình cộng của hai phần tử ở giữa sau khi sắp xếp mảng.

**Dữ liệu:**

- Dòng 1 ghi số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 10^5$ )
- Dòng 2 ghi  $n$  số nguyên cách nhau một dấu cách trống

**Kết quả:** Một số duy nhất là phần tử trung vị của mảng.

**Ví dụ:**

input	output
6	3.5
1 3 5 2 4 6	

## **D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP**

### **Bài 4.5 – (N0405A) Giá trị lẻ nhỏ nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra giá trị lẻ nhỏ nhất trong dãy số.

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    int n,x,res=1e9;
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        cin>>x;
        if(x%2!=0 && res>x) res=x;
    }
    cout<<res;
}
```

**Bài 4.8 – (N0408A) Các số không nhỏ hơn X**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên và số nguyên X. In ra số lượng các số không nhỏ hơn X trong dãy số đó.

```
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
using namespace std;
int main()
{
    ll n,a[105],sl,x;
    cin>>n>>x;
    sl=0;
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        cin>>a[i];
        if(a[i]>=x) sl=sl+1;
    }
    cout<<sl;
}
```

**Bài 4.11 – (N0411B) Đếm nghịch thế**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) số nguyên. In ra số lượng các cặp  $a[i]$  và  $a[j]$  thỏa mãn  $i < j$  và  $a[i] > a[j]$  trong dãy số.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,a[105],d;
int main ()
{
    d=0;
    cin>>n;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        cin>>a[i];
    for (ll i=1;i<n-1;++i)
        for (ll j=i+1;j<=n;++j)
            if (a[i]>a[j]) d++;
    cout<<d;
}
```

**Bài 4.14 – (N0414B) Quicksort**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 10^5$ ) số nguyên. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các số nguyên đó. Sử dụng hàm  $sort(a + 1, a + n + 1)$  với độ phức tạp thuật toán  $O(n \log n)$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,a[100005];
int main ()
{
    cin>>n;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        cin>>a[i];
    sort(a+1,a+1+n);
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        cout<<a[i]<<" ";
}
```

**Bài 4.17 – (N0417B) Ký tự xuất hiện nhiều nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ) ký tự latin thường ('a' -> 'z'). In ra ký tự xuất hiện nhiều nhất trong  $n$  ký tự đã cho.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,dem[105],ts=-1e18;
char a[105],kt;
int main ()
{
    cin>>n;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
    {
        cin>>a[i];
        dem[a[i]]++;
    }
    for (ll i=1;i<=n;++i)
    {
        if (dem[a[i]]>ts)
        {
            ts=dem[a[i]];
            kt=a[i];
        }
    }
}
```



```

    }
    cout<<kt;
}

```

#### Bài 4.19 – (N0419B) Giá trị nhỏ nhất đến k

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,a[105],mink=1e18,k,t;
int main ()
{
    cin>>n;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        cin>>a[i];
    cin>>t;
    while(t>0)
    {
        cin>>k;
        for (ll i=1;i<=k;++i)
            mink=min(mink,a[i]);
        cout<<mink<<endl;
        t--;
    }
}

```

#### Bài 4.20 – (N0420C) Trộn mảng

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n,i;
    cin>>n;
    int a[n*2];
    for (i=1;i<=n*2;i++) cin>>a[i];
    sort(a+1,a+1+n*2);
    for (i=n*2;i>=1;i--) cout<<a[i]<<" ";
}

```

#### Bài 4.21 – (N0421D) Phần tử trung vị

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long

```

```
ll n;  
float a[100005];  
int main ()  
{  
    cin>>n;  
    for (ll i=1;i<=n;++i)  
        cin>>a[i];  
    sort(a+1,a+1+n);  
    if (n%2==1) cout<<a[n/2+1];  
    else cout<<(a[n/2]+a[n/2+1])/2;  
}
```

## CHƯƠNG 5 – KIỂU DỮ LIỆU MẢNG HAI CHIỀU

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Khái niệm ma trận

Ma trận là một khái niệm toán học cơ bản. Theo định nghĩa của đại số tuyến tính, ma trận là một bảng số gồm  $m$  hàng và  $n$  cột. Từng ô trong ma trận ta gọi là phần tử. Ví dụ ta cho ma trận 2 hàng và 3 cột như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Ta đánh số phần tử của ma trận bằng chỉ số hàng và chỉ số cột  $A[i][j]$ , trong đó  $i$  là chỉ số hàng và  $j$  là chỉ số cột. Chẳng hạn với ma trận trên ta có  $A[1][1] = 1, A[1][2] = 2, A[1][3] = 3, A[2][1] = 6, A[2][2] = 5, A[2][3] = 4$ .

Khi ma trận chỉ có 1 hàng, ta có ma trận hàng như sau:  $[a_1 \quad \dots \quad a_n]$  và thường gọi là vector hàng.

Khi ma trận chỉ có 1 cột, ta có ma trận cột như sau:  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$  và ta gọi là vector cột.

Khi số hàng và số cột bằng nhau ta có khái niệm ma trận vuông. Chẳng hạn ma trận vuông cấp 3 như sau:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Trong tin học lập trình ta mở rộng khái niệm ma trận, phần tử của ma trận không chỉ là số thực mà còn có thể là ký tự hay là một kiểu dữ liệu khác. Ví dụ sau đây

là một ma trận ký tự:  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ a & s & d \end{bmatrix}$ .

Ngôn ngữ lập trình C++ cung cấp kiểu dữ liệu mảng hai chiều để biểu diễn ma trận. Ta chú ý rằng kiểu dữ liệu này rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu như xử lý ảnh, thống kê, trí tuệ nhân tạo...

#### 2. Khai báo mảng hai chiều

Cú pháp khai báo mảng như sau:

```
<tên kiểu dữ liệu> <tên mảng>[số_pt_hàng][số_pt_cột];
```

Trong đó <tên kiểu dữ liệu> là kiểu nguyên int, long long hoặc kiểu thực float hay kiểu ký tự... Ví dụ ta khai báo: `int a[100][100];` sẽ cho ta  $100 \times 100$  phần tử từ  $a[0][0]$  đến  $a[99][99]$ .

#### 3. Cách sử dụng

Sau khi khai báo mảng ta truy cập phần tử thông qua chỉ số của phần tử như sau: `<tên_mảng> [chỉ_số_hàng][chỉ_số_cột]`, ví dụ muốn truy cập phần tử hàng 5 cột 6 của mảng `a` ta viết `a[5][6]`.

Để đọc dữ liệu cho mảng ta kết hợp hai vòng lặp lồng nhau để đọc cho từng phần tử như ví dụ sau:

```
for(int i=1;i<=10;i++)
    for(int i=1;i<=10;i++)
        cin>>a[i][j];
```

Để in dữ liệu mảng ta kết hợp hai vòng lặp lồng nhau để in cho từng phần tử như ví dụ sau:

```
for(int i=1;i<=10;i++)
{
    for(int i=1;i<=10;i++)
        cout<<a[i][j];
    cout<<endl; //lệnh này để ngắt dòng
}
```

Muốn tác động tới từng phần tử của mảng ta truy cập qua chỉ số như ví dụ sau:

```
for(int i=1;i<=10;i++)
    for(int i=1;i<=10;i++)
        S = S + a[i][j];
```

## B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 5.1:** Ma trận là một bảng số gồm m hàng, n cột. Khi số hàng bằng số cột ta có khái niệm ma trận vuông. Ta sử dụng cấu trúc mảng hai chiều để biểu diễn ma trận. Chương trình sau nhập vào một ma trận vuông và in ra tổng tất cả các phần tử trong ma trận.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a[105][105], n, S = 0;
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    for(int i = 1; i<=n;i++)
        for(int j = 1; j<=n; j++)
        {
            cin>>a[i][j];
            S = S + a[i][j];
        }
    cout<<S;
}
```

**Ví dụ 5.2:** Chương trình sau nhập vào một ma trận vuông và in ra các phần tử trên đường chéo chính.

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a[105][105], n, S = 0;
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    for(int i = 1; i<=n;i++)
        for(int j = 1; j<=n; j++)
        {
            cin>>a[i][j];
        }
    for(int i = 1; i<=n;i++)
        cout<<a[i][j]<< " ";
}

```

### C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

#### Bài 5.1 – (N0501A) In ma trận

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. In ra chính ma trận vừa nhập.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n(n \leq 100)$ ,
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận.

**Kết quả:** In ra chính ma trận vừa nhập.

**Ví dụ:**

input	output
2	1 1
1 1	2 2
2 2	

#### Bài 5.2 – (N0502A) Tổng trên ma trận

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. In ra chính tổng các phần tử trong mảng

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n(n \leq 100)$ ,
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận.

**Kết quả:** In ra tổng các phần tử trong mảng.

**Ví dụ:**

input	output
2 1 2 2	6

### **Bài 5.3 – (N0503B) Hàng có tổng lớn nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. In ra tổng lớn nhất của một hàng trong ma trận đã cho.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $n \leq 100$ ),
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận.

**Kết quả:** In ra tổng lớn nhất của một hàng trong ma trận.

**Ví dụ:**

input	output
3 1 1 1 2 2 3 4 4 4	12

### **Bài 5.4 – (N0504B) Cột có tổng lớn nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. In ra tổng lớn nhất của một cột trong ma trận đã cho.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $n \leq 100$ ),
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận.

**Kết quả:** In ra tổng lớn nhất của một cột trong ma trận.

**Ví dụ:**

input	output
3 1 1 1 2 2 3 4 4 4	8

**Bài 5.5 – (N0505A) Giá trị chẵn lớn nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. In ra giá trị chẵn lớn nhất trong ma trận.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $n \leq 100$ ).
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận.

**Kết quả:** In ra giá trị chẵn lớn nhất trong ma trận.

**Ví dụ:**

input	output
3 1 1 1 2 2 3 4 4 6	6

**Bài 5.6 – (N0506A) Tổng trên đường chéo chính**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. In ra tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận, đường chéo chính là các phần tử có chỉ số hàng bằng chỉ số cột.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $n \leq 100$ ),
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận.

**Kết quả:** In ra tổng các phần tử trên đường chéo chính.

**Ví dụ:**

input	output
3 1 1 1 2 2 3 4 4 6	9

**Bài 5.7 – (N0507B) Tổng trên đường chéo phụ**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. Tính tổng các phần tử lẻ trên đường chéo phụ, phần tử thuộc đường chéo phụ có tổng chỉ số hàng và chỉ số cột bằng  $n+1$  với  $n$  là cỡ ma trận.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $n \leq 100$ ),

- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận.

**Kết quả:** In ra tổng các phần tử lẻ trên đường chéo phụ.

**Ví dụ:**

input	output
3 1 1 1 2 2 3 3 4 6	4

### Bài 5.8 – (N0508C) Tổng trên biên ma trận

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. Tính tổng các phần tử nằm trên biên của ma trận.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $n \leq 100$ ),
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận.

**Kết quả:** In ra tổng các phần tử nằm trên biên của ma trận. Chẳng hạn với ma

trận  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , tổng trên biên của ma trận M là  $1+2+3+1+1+1+1+4=14$ .

**Ví dụ:**

Input	output
3 1 2 3 4 5 1 1 1 1	14

### Bài 5.9 – (N0509A) Tổng hai ma trận

**Yêu cầu:** Cho hai ma trận cùng cỡ, việc tính tổng hai ma trận chỉ đơn giản là lấy tương ứng các phần tử của hai ma trận cộng cho nhau. Ví dụ ma trận  $C = A + B$  có  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Hãy viết chương trình cộng hai ma trận với nhau.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi 2 số nguyên không âm  $m, n$  ( $m, n \leq 100$ ),
- $m$  dòng tiếp, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận  $A$  ( $0 < |a_{ij}| \leq 10^9$ ),
- $m$  dòng tiếp, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận  $B$  ( $0 < |a_{ij}| \leq 10^9$ )



**Kết quả:**  $m$  dòng, mỗi dòng ghi  $n$  số biểu diễn ma trận tổng.

**Ví dụ:**

input	output
2 2	3 4
1 1	3 4
1 1	
2 3	
2 3	

### Bài 5.10 – (N0510B) Tích hai ma trận

**Yêu cầu:** So với phép toán cộng ma trận thì phép toán tích ma trận có sự phức tạp hơn rất nhiều. Cho hai ma trận A có cỡ  $m \times n$  và ma trận B có cỡ  $n \times p$ . Khi đó ta mới thực hiện được phép nhân hai ma trận  $C = A \times B$  như sau:

- Ma trận C sẽ có cỡ  $m \times p$ ,
- Phần tử  $c_{ij}$  của ma trận C được tính bởi công thức

$$c_{ij} = a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + \dots + a_{in} * b_{nj}.$$

Chú ý rằng phép nhân ma trận không có tính giao hoán, nghĩa là  $A \times B \neq B \times A$ .

Ví dụ: Cho  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi 3 số nguyên không âm  $m, n, p$  ( $m, n, p \leq 100$ ),
- $m$  dòng tiếp, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận A ( $0 < |a_{ij}| \leq 10^9$ ),
- $n$  dòng tiếp, mỗi dòng ghi  $p$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận B ( $0 < |a_{ij}| \leq 10^9$ ),

**Kết quả:**  $m$  dòng, mỗi dòng ghi  $p$  số biểu diễn ma trận tích  $C = A \times B$ .

**Ví dụ:**

input	output
2 3 2	2 2
1 1 1	3 3
1 2 1	
1 0	
1 1	
0 1	

**Bài 5.11 – (N0511C) Tổng các bảng vuông**

**Yêu cầu:** Ta xem xét một bảng số vuông, còn gọi là ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Xét các hình vuông đồng tâm có tâm là tâm của bảng số ban đầu. Hãy tính tổng các số có trên các cạnh của mỗi hình vuông đó. Ví dụ với  $n$  là số lẻ thì tâm của ma trận là phần tử  $a[n/2 + 1; n/2 + 1]$ , còn với  $n$  chẵn thì tâm được xem là giao điểm của đường chéo chính và đường chéo phụ.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n (n \leq 300)$ ,
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi  $n$  số nguyên biểu diễn hàng thứ  $i$  của ma trận (các số nguyên đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn  $10^6$ ).

**Kết quả:** một dòng gồm các số lần lượt là tổng các số trên cạnh của những hình vuông đồng tâm với hình vuông ban đầu (từ hình vuông có kích thước nhỏ nhất tới hình vuông có kích thước lớn nhất  $n \times n$ )

Ví dụ: ma trận  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  có hai bảng vuông tương ứng có kích thước

$1 \times 1$  và  $3 \times 3$  với các tổng là 5 và  $1 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 14$ .

**Ví dụ:**

input	output
4 1 2 3 1 4 5 6 1 1 2 3 1 1 1 1 1	16 18

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP****Bài 5.3 – (N0503B) Hàng có tổng lớn nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. In ra tổng lớn nhất của một hàng trong ma trận đã cho.

```
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
using namespace std;
ll n,k,a[106][106],kq=0,ht=-1e9;
int main()
{
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++)
```

```

        for(int j=1;j<=n;j++)
            cin>>a[i][j];
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        kq=0;
        for(int j=1;j<=n;j++)
            {kq=kq+a[i][j];}
        ht=max(kq,ht);
    }
    cout<<ht;
}

```

### Bài 5.8 – (N0508B) Tổng trên biên ma trận

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một ma trận vuông. Tính tổng các phần tử nằm trên biên của ma trận.

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,a[105][105],tonghang=0,tongcot=0;
int main ()
{
    cin>>n;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        for (ll j=1;j<=n;++j)
            cin>>a[i][j];
    for (ll j=1;j<=n;++j)
        tonghang=tonghang+a[1][j]+a[n][j];
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        tongcot=tongcot+a[i][1]+a[i][n];
    cout<<tonghang+tongcot-a[1][1]-a[1][n]-a[n][1]-a[n][n];
}

```

### Bài 5.10 – (N0510B) Tích hai ma trận

**Yêu cầu:** Viết chương trình tính tích hai ma trận.

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll a[105][105],b[105][105],c[10005][10005],m,n,p;
int main ()
{
    cin>>m>>n>>p;
    for (ll i=1;i<=m;++i)

```

```

        for (ll j=1;j<=n;++j)
            cin>>a[i][j];
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        for (ll j=1;j<=p;++j)
            cin>>b[i][j];
    for (ll i=1;i<=m;++i)
        for (ll j=1;j<=p;++j)
            for (ll k=1;k<=n;++k)
                c[i][j]+=a[i][k]*b[k][j];
    for (ll i=1;i<=m;++i)
    {
        for (ll j=1;j<=p;++j)
        {
            cout<<c[i][j]<<" ";
        }
        cout<<endl;
    }
}

```

### Bài 5.11 – (N0511C) Tổng các bảng vuông

**Yêu cầu:** Ta xem xét một bảng số vuông, còn gọi là ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Xét các hình vuông đồng tâm có tâm là tâm của bảng số ban đầu. Hãy tính tổng các số có trên các cạnh của mỗi hình vuông đó. Ví dụ với  $n$  là số lẻ thì tâm của ma trận là phần tử  $a[n/2 + 1; n/2 + 1]$ , còn với  $n$  chẵn thì tâm được xem là giao điểm của đường chéo chính và đường chéo phụ.

```

#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
using namespace std;
ll n,a[305][305],s[305][305],tmp;
int main()
{
    cin>>n;
    for(int i = 1; i <= n; ++i)
        for(int j = 1; j <= n; ++j)
            cin>>a[i][j];
    for(int i = 1; i <= n; ++i)
        for(int j = 1; j <= n; ++j)
            s[i][j]=s[i][j-1]+s[i-1][j]-s[i-1][j-1]+a[i][j];
    if(n==1){
        cout<<a[1][1];
        return 0;
    }
}

```

```
}  
if(n==2){  
    cout<<s[2][2];  
    return 0;  
}  
ll k;  
if(n%2!=0) k=n/2;  
else k=n/2-1;  
for(int i = n/2+1; i <= n; ++i){  
    cout<<s[i][i]-s[i][k]-s[k][i]+s[k][k]-tmp<<" ";  
    tmp=s[i][i]-s[i][k]-s[k][i]+s[k][k];  
    k--;  
}  
}
```

## CHƯƠNG 6 – KIỂU DỮ LIỆU XÂU KÝ TỰ

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Hai kiểu xâu trong C++

Trong C++ có 2 kiểu xâu. Một là kiểu C – style, đây bản chất là mảng các ký tự. Hai là kiểu string – C<sup>++</sup> – style, đây là một kiểu dữ liệu dạng vector với nhiều tiện lợi. Trong hai kiểu thì kiểu string có nhiều ưu điểm và các phiên bản mới nhất luôn có những cập nhật cho kiểu này. Trong tài liệu này chỉ đề cập tới kiểu string.

#### 2. Khai báo và sử dụng

Cú pháp khai báo của kiểu string:

```
string <tên xâu>;
```

Đọc dữ liệu xâu ta có 2 câu lệnh sau:

```
cin >> <tên xâu>;
```

hoặc:

```
getline(cin, <tên xâu>;
```

Lệnh thứ nhất sẽ đọc xâu tới dấu trắng đầu tiên và dừng lại, có nghĩa là lệnh này sẽ không đọc được xâu có ký tự cách trống. Lệnh thứ hai sẽ khắc phục được việc không đọc được ký tự trống như lệnh thứ nhất.

Về bản chất xâu ký tự vẫn là các ký tự đặt cạnh nhau và truy cập vào các ký tự thông qua chỉ số. Ví dụ, để truy cập tới phần tử thứ  $i$  của xâu  $S$  ta viết  $S[i]$ .

Ta chú ý rằng xâu trong C<sup>++</sup> được đánh số từ 0.

#### 3. Các phép toán và hàm thành viên

- Hàm quản lý số lượng ký tự `length()` hoặc `size()`.

```
cout<<s.length(); //in ra độ dài xâu
cout <<s.size(); //cũng in ra độ dài xâu
```

- Hàm `s.front()` trả về phần tử đầu tiên.
- Hàm `s.back()` trả về phần tử cuối cùng.
- Hàm `s.substr( $k, l$ )` trích xuất xâu con từ vị trí  $k$  với số ký tự  $l$ .
- Phương thức chèn xâu  $S1$  và xâu  $S2$  với cú pháp  $S1.insert(vị trí, S2)$
- Phương thức `s.erase( $k, l$ )` xóa xâu  $s$  từ vị trí  $k$  đi  $l$  ký tự.
- Hàm `S2.find(S1)` để tìm kiếm xâu  $S1$  trong xâu  $S2$ .

### B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 6.1:** Chương trình sau nhập vào một xâu ký tự và biến các ký tự của xâu thành ký tự hoa rồi in ra xâu mới.

```
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
```

```
using namespace std;
string S
int main()
{
    getline(cin,S);
    S = " " + S;
    for(int i = 1; i<S.size();i++)
        S[i] = toupper(S[i]);
    cout<<S;
}
```

**Ví dụ 6.2:** Chương trình sau nhập vào hai chuỗi ký tự và ghép hai chuỗi ký tự thành một chuỗi.

```
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
using namespace std;
string S1,S2
int main()
{
    getline(cin,S1);
    getline(cin,S2);
    string S = S2 + S1;
    cout<<S;
}
```

**Ví dụ 6.3:** Chương trình sau nhập vào một chuỗi ký tự bao gồm cả dấu cách trống, đếm và in ra các dấu cách trống trong chuỗi.

```
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
using namespace std;
string S;
int dem = 0;
int main()
{
    getline(cin,S);
    for(int i = 0;i<S.size();i++)
        if(S[i]==' ') dem++;
    cout<<dem;
}
```

**C. BÀI TẬP ÁP DỤNG****Bài 6.1 – (N0601A) Độ dài chuỗi**

**Yêu cầu:** In ra độ dài của chuỗi ký tự S. Trong kiểu string có 2 hàm thành viên quản lý độ dài chuỗi là `S.length()` và `S.size()`.

**Dữ liệu:** Một chuỗi ký tự S có độ dài bất kỳ.

**Kết quả:** Là độ dài của chuỗi ký tự S trên.

**Ví dụ:**

input	output
abcd	4

**Bài 6.2 – (N0602A) Đếm ký tự**

**Yêu cầu:** Viết chương trình đếm số ký tự Ch xuất hiện trong chuỗi S.

**Dữ liệu:**

- Dòng 1 là chuỗi ký tự S có độ dài nhỏ 100 ký tự,
- Dòng 2 là ký tự Ch.

**Kết quả:** Là số lượng ký tự Ch trong chuỗi S.

**Ví dụ:**

input	output
bcdaaavab a	4

**Bài 6.3 – (N0603A) Ký tự hoa**

**Yêu cầu:** Viết chương trình làm hoa các ký tự trong chuỗi S cho trước.

**Dữ liệu:** Một dòng là chuỗi ký tự S có độ dài nhỏ hơn 1000 ký tự bao gồm các ký tự là tính thường và hoa.

**Kết quả:** Là chuỗi S sau khi đã được làm hoa các ký tự.

**Ví dụ:**

input	output
abcd	ABCD

**Bài 6.4 – (N0604A) Ký tự số**

**Yêu cầu:** Viết chương trình đếm các ký tự chữ số trong chuỗi S cho trước.

**Dữ liệu:** Một dòng là chuỗi ký tự S có độ dài nhỏ hơn 1000 ký tự bao gồm các ký tự là tính và các chữ số.

**Kết quả:** Là số lượng chữ số trong chuỗi ký tự S.



**Ví dụ:**

input	output
abcd123abde	3

### **Bài 6.5 – (N0605B) Xâu đối xứng**

**Yêu cầu:** Một xâu đối xứng là xâu mà khi viết ngược lại thì ta được xâu ban đầu. Ví dụ xâu ABBA là một xâu đối xứng. Hãy viết chương trình kiểm tra tính đối xứng của một xâu.

**Dữ liệu:** Một dòng là xâu kí tự  $S$  có độ dài nhỏ hơn 1000 ký tự bao gồm các ký tự la tinh.

**Kết quả:** Ghi YES nếu  $S$  là xâu đối xứng, ghi NO nếu  $S$  là xâu không đối xứng.

**Ví dụ:**

input	output
ABBA	YES

### **Bài 6.6 – (N0606B) Tổng chữ số**

**Yêu cầu:** Cho một số nguyên dương  $X$ . Yêu cầu: Hãy tính tổng các chữ số của số nguyên dương  $X$ .

**Dữ liệu:** Một dòng là số nguyên dương  $X$  ( $X < 10^{100}$ ).

**Kết quả:** Ghi tổng các chữ số của  $X$ .

**Ví dụ:**

input	output
1234	10

### **Bài 6.7 – (N0607B) Đếm số từ**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một văn bản là một chuỗi kí tự và có thể chứa các kí tự cách trống. Đếm số từ trong chuỗi ký tự đó.

**Dữ liệu:** Một dòng là chuỗi ký tự  $S$  ( $0 < \text{length}(S) \leq 1000$ ).

**Kết quả:** Số từ trong chuỗi  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
Cong hoa xa hoi	4

### **Bài 6.8 – (N0608B) Loại bỏ chữ số**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một văn bản là một chuỗi kí tự bao gồm chữ cái và chữ số. Loại bỏ các chữ số trong chuỗi ký tự đó.

**Dữ liệu:** Một dòng là chuỗi ký tự  $S$  ( $0 < \text{length}(S) \leq 1000$ ).

**Kết quả:** Chuỗi  $S$  sau khi đã loại bỏ các ký tự số.

**Ví dụ:**

input	output
ABCD1234abcd	ABCDabcd

### Bài 6.9 – (N0609B) Số ký tự phân biệt

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một văn bản là một chuỗi kí tự bao gồm chữ cái la tinh thường. Hãy in ra số lượng các ký tự phân biệt trong chuỗi.

**Dữ liệu:** Một dòng là chuỗi ký tự  $S$  ( $0 < length(S) \leq 2000$ ).

**Kết quả:** Số lượng các ký tự phân biệt trong chuỗi ký tự  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
abca	3

### Bài 6.10 – (N0610C) Mã hóa 1

**Yêu cầu:** Mr X cần gửi một văn bản quan trọng tới các coder của mình. Để đảm bảo tính bảo mật của thông tin được ghi trong văn bản, ông quyết định sẽ mã hóa văn bản trước khi gửi. Văn bản là một xâu  $S$  gồm các chữ cái latin thường. Ông ấy chia đoạn văn bản thành hai đoạn liên tiếp nhau là  $S_a$  và  $S_b$ . Lần lượt viết các xâu  $S_a$  và  $S_b$  theo thứ tự ngược lại ta nhận được xâu mã hóa  $Q$ . Ví dụ, nội dung bức thư  $S = \text{'programming'}$  với với khóa  $k = 7$  sẽ được chia thành 2 đoạn:  $S_a = \text{'program'}$ ,  $S_b = \text{'ming'}$ , nhận được xâu mã hóa  $Q = \text{'margorpgnim'}$ . Để cho coder của mình có thể hiểu được nội dung bức thư ông ấy đã gửi kèm theo xâu mã hóa  $Q$  là một số nguyên dương  $k$  cho biết độ dài xâu  $S_a$ . Bạn hãy giải mã bức thư này.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $k$ .
- Dòng thứ hai ghi xâu mã hóa  $Q$ ; độ dài của xâu  $Q$  không vượt quá  $10^6$

**Kết quả:** Đưa ra xâu kí tự sau khi được giải mã.

**Ví dụ:**

input	output
7 margorpgnim	programming

### Bài 6.11 – (N0611C) Mã hóa 2

**Yêu cầu:** Trước công nguyên, nhà quân sự người La Mã Julius Ceasar đã nghĩ ra phương pháp mã hóa một bản tin như sau: thay thế mỗi chữ cái trong bản tin

bảng chữ cái đứng sau nó  $k$  vị trí trong bảng chữ cái. Giả sử với  $k = 3$ , ta có bảng chuyển đổi như sau:

*Chữ ban đầu:* a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

*Chữ thay thế:* d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z a b c

Khi đó bản tin: ‘attack’ sau khi mã hóa sẽ có bản mã ‘dwwdfn’ và sau đó Ceasar gửi bản mã cho cấp dưới của mình.

Nhận được bản mã và khóa  $k$ , cấp dưới của ông sẽ phải giải mã bản tin để đọc nội dung của nó.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi khóa  $k$ ,
- Dòng thứ 2 ghi bản tin sau khi đã được mã hóa.

**Kết quả:** Đưa ra bản tin ở trạng thái chưa được mã hóa.

**Giới hạn:**  $1 \leq k \leq 25$ , độ dài bản tin không vượt quá 100 kí tự.

**Ví dụ:**

input	output
7 wyvnyhttpun	programming

### **Bài 6.12 – (N0612D) Mã hóa 3**

**Yêu cầu:** Trong bảng mã ASCII, 26 kí tự chữ cái thường từ ‘a’ đến ‘z’ được mã hóa tương ứng bằng các số tự nhiên từ 97 đến 122. Cho một xâu kí tự  $S$  chỉ chứa toàn các kí tự chữ cái thường. Gọi  $P$  là xâu mã hóa tương ứng của xâu  $S$  bằng cách mã hóa từng ký tự trong  $S$  (theo bảng mã ASCII) và viết liên tiếp nhau. Ví dụ:  $S = \text{‘ab’}$  thì  $P = \text{‘9798’}$ . Hãy viết chương trình nhập vào từ bàn phím một xâu đã mã hóa  $P$  (có không quá 255 kí tự) và in ra màn hình xâu kí tự  $S$ .

**Dữ liệu:** Chứa một xâu đã mã hóa  $P$ .

**Kết quả:** In ra màn hình xâu kí tự  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
979899	abc

## **D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP**

### **Bài 6.6 – (N0606B) Tổng chữ số**

**Yêu cầu:** Cho một số nguyên dương  $X$ . Yêu cầu: Hãy tính tổng các chữ số của số nguyên dương  $X$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
string a;
ll sum(string s)
{
    ll d=0;
    for (ll i=0;i<s.length();++i)
        d=d+s[i]-48;
    return d;
}
int main ()
{
    cin>>a;
    cout<<sum(a);
}
```

### Bài 6.7 – (N0607B) Đếm số từ

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một văn bản là một chuỗi kí tự và có thể chứa các kí tự cách trống. Đếm số từ trong chuỗi ký tự đó.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
string s;
ll d;
int main ()
{
    getline(cin,s);
    if (s[0]!=' ') d=1;
    for (ll i=0;i<s.length()-1;++i)
        if (s[i]==' ' and s[i+1]!=' ') d++;
    cout<<d;
}
```

### Bài 6.9 – (N0609C) Số ký tự phân biệt

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào một văn bản là một chuỗi kí tự bao gồm chữ cái la tinh thường. Hãy in ra số lượng các ký tự phân biệt trong chuỗi.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
```

```

string s;
ll dem[999],d=0;
int main ()
{
    cin>>s;
    for (ll i=0;i<s.length();++i)
    {
        dem[s[i]]++;
    }
    for (char j='a';j<='z';++j)
    {
        if (dem[j]>0) d++;
    }
    cout<<d;
}

```

### Bài 6.10 – (N0610C) Mã hóa 1

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll k;
string s,s1,s2;
int main ()
{
    cin>>k>>s;
    s1=s.substr(0,k);
    s2=s.substr(k,s.length());
    reverse(s1.begin(),s1.end());
    reverse(s2.begin(),s2.end());
    cout<<s1<<s2;
}

```

### Bài 6.11 – (N0611C) Mã hóa 2

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n;
string s;
int main ()
{
    cin>>n;

```

```
cin>>s;
for (ll i=0;i<s.length();++i)
{
    if (s[i]-n>=97) s[i]=s[i]-n;
    else
        s[i]=s[i]+26-n;
}
cout<<s;
}
```

## CHƯƠNG 7 - KIỂU DỮ LIỆU TẬP VĂN BẢN

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Lệnh đồng bộ tệp và vào ra chuẩn

Bản chất vào ra chuẩn cũng là tương tác trực tiếp với tệp bộ nhớ đệm bàn phím và tệp bộ nhớ đệm màn hình. Ta có các lệnh đồng bộ việc đọc vào từ tệp với việc đọc vào từ bàn phím như sau

```
freopen("Tentep.inp", "r", stdin);
```

Tương tự ta có các lệnh đồng bộ việc ghi ra màn hình và file dữ liệu như sau:

```
freopen("Tentep.out", "w", stdout);
```

Sau khi có các lệnh đồng bộ này ta đọc dữ liệu từ bàn phím sẽ tương đương với đọc từ tệp và ghi dữ liệu ra màn hình tương đương với ghi dữ liệu ra tệp.

#### 2. Tệp văn bản trong C++ với thư viện fstream

Ngoài việc đồng bộ như trên ta có thể sử dụng thư viện fstream để đọc và ghi dữ liệu với tệp như sau:

- Đọc dữ liệu vào với lệnh **ifstream** như sau:

```
ifstream in1("file.INP");
in1>>a;//Đọc dữ liệu từ tệp
in1.close();
```

- Ghi dữ liệu ra với lệnh **ofstream** như sau:

```
ofstream out1("file.OUT");
out1<<a;//Ghi dữ liệu vào tệp
out1.close();
```

### B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 7.1:** Chương trình sau mở file văn bản có tên BT.INP và đọc hai số nguyên a, b từ đó và ghi vào file văn bản BT.OUT tổng của hai số a + b.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
long long n, dem = 0;
int main()
{
    freopen("BT.INP", "r", stdin);
    freopen("BT.OUT", "w", stdout);
    long long a, b;
    cin>>a>>b;
    cout<<a+b;
}
```

**Chú ý:** Trong các kỳ thi lập trình thuật toán thường chỉ mở file để đọc và ghi một lần nên cách làm trên là ngắn gọn và đủ dùng. Ta có thể thay tên file bằng đường dẫn tuyệt đối, còn nếu không thì các file phải được đặt trong thư mục chứa chương trình.

**Ví dụ 7.2:** Chương trình sau mở một file văn bản BT1.INP chứa số nguyên a, sau đó đóng file và mở file văn bản BT2.INP chứa số nguyên b, đóng file và ghi kết quả  $a*b$  vào file văn bản BT3.OUT. Trong chương trình sau ta sử dụng các câu lệnh `ifstream` để hướng luồng vào tới file cần vào dữ liệu vào câu lệnh `ofstream` để hướng luồng ra tới file ra dữ liệu.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
long long n, dem = 0;
int main()
{
    long long a,b;
    ifstream in1("BT1.INP");
    in1>>a;
    in1.close();
    ifstream in2("BT2.INP");
    in2>>b;
    in2.close();
    ofstream out("BT3.OUT");
    out<<a*b;
}
```

## C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

### Bài 7.1 – (N0701A) Số âm

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập các số nguyên từ file “BT.INP” cho đến khi gặp số nguyên âm đầu tiên, in số dương trước số âm đầu tiên đó vào file “BT.OUT”.

**Dữ liệu: vào từ file BT.INP**

- Một dòng ghi các số nguyên.

**Kết quả: ghi ra file BT.OUT**

- Một dòng ghi số dương trước số âm đầu tiên.

**Ví dụ:**

BT.INP	BT.OUT
5	30



11	22	33	44	55	
----	----	----	----	----	--

**Bài 7.2 – (N0702B) Min max ra hai file**

**Yêu cầu:** Viết chương trình đọc một dãy số nguyên từ file văn bản “SO.INP”. Tìm và in ra phần tử lớn nhất vào file SO.OU1 đồng thời tìm và in ra phần tử nhỏ nhất vào file SO.OU2.

**Dữ liệu: file văn bản SO.INP**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ),
- Dòng thứ 2 ghi  $n$  số nguyên dương kiểu 64 – bit.

**Kết quả:**

- In ra **file văn bản SO.OU1** phần tử lớn nhất.
- In ra **file văn bản SO.OU2** phần tử nhỏ nhất.

**Ví dụ:**

SO.INP	SO.OU1	SO.OU2
3 1 4 7	7	1

**Bài 7.3 – (N0703B) Sắp xếp dữ liệu ngoài**

**Yêu cầu:** Viết chương trình đọc một dãy số nguyên từ file văn bản “SORT.IN1” và một dãy số nguyên từ file văn bản “SORT.IN2”. Trộn hai dãy số lại sau đó sắp xếp và in ra file văn bản “SORT.OUT”.

**Dữ liệu 1: file văn bản SORT.IN1**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ),
- Dòng thứ 2 ghi  $n$  số nguyên dương kiểu 64 – bit.

**Dữ liệu 2: file văn bản SORT.IN2**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $m$  ( $0 < m \leq 100$ ),
- Dòng thứ 2 ghi  $m$  số nguyên dương kiểu 64 – bit.

**Kết quả:**

- In ra file văn bản SORT.OUT dãy sau khi trộn và sắp xếp.

**Ví dụ:**

SORT.IN1	SORT.IN2	SORT.OUT
3 1 4 7	4 2 3 5 9	1 2 3 4 5 7 9

### **Bài 7.4 – (N0703B) Đọc file không biết số lượng**

**Yêu cầu:** Viết chương trình đọc nhiều số nguyên trên nhiều dòng từ file văn bản “SUM.INP”. File gồm nhiều dòng, mỗi dòng là một dãy gồm nhiều số nguyên không xác định. In ra file văn bản “SUM.OUT” gồm số dòng tương ứng, mỗi dòng là một số nguyên là tổng số của các số nguyên trên dòng dữ liệu từ file đầu vào.

**Dữ liệu: file văn bản SUM.INP**

- Gồm nhiều dòng, mỗi dòng ghi nhiều số nguyên kiểu 32 bit
- Số lượng dòng không quá 100

**Kết quả: file văn bản SUM.OUT**

- Gồm nhiều dòng tương ứng, mỗi dòng là tổng của các số nguyên tương ứng trong file đầu vào.

**Ví dụ:**

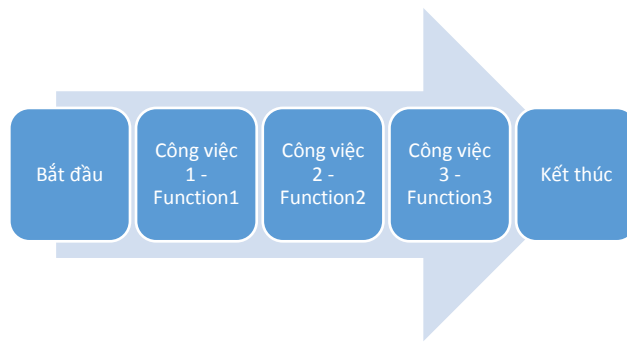
SUM.INP	SUM.OUT	SUM.INP	SUM.OUT
1 2 3	6	1 2 5 6	14
1 4	5	1 2	3
1 2 3 6	12		

## CHƯƠNG 8 - HÀM VÀ CẤU TRÚC HÀM

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Khái niệm về hàm

Hàm trong ngôn ngữ lập trình gọi là function. Nó là một phần không thể thiếu của ngôn ngữ lập trình. Có nhiều định nghĩa khác nhau về hàm, sau đây là một cách hiểu: “Function là một đoạn các câu lệnh có thể tái sử dụng. Function cho phép lập trình viên cấu trúc chương trình thành những phân đoạn khác nhau để thực hiện những công việc khác nhau”. Ta có thể hình dung một chương trình là một công việc, công việc đó có thể phân ra thành nhiều công việc nhỏ, mỗi công việc nhỏ như vậy ta có thể chia nhỏ hơn các nhiệm vụ. Trong các nhiệm vụ và công việc như vậy ta thiết kế thành các hàm thực hiện. Một mô hình đơn giản



nhất về hàm như sau:

**Function** (hàm) được người ta ví như một cái hộp đen, chúng ta không biết bên trong nó là gì, nhưng nó có một đầu vào (input) và một đầu ra (output). Việc của chúng ta khi sử dụng cái hộp đen này (thực hiện lời gọi hàm) là đưa những dữ liệu đầu vào tương thích vào đầu vào của nó, và nó sẽ cho kết quả tại đầu ra.

#### 2. Khai báo và sử dụng hàm

Để sử dụng hàm thì ta phải khai báo hàm. Ta thường có hai cách khai báo hàm như sau. Cách thứ nhất ta khai báo hàm trên chương trình chính trong đó cài đặt hàm và sử dụng trong thân chương trình chính như ví dụ sau:

```

#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 100
using namespace std;
long long sum(long long a, long long b)
{
    return a + b;
}
long long x = 2, y = 10
int main()
{

```

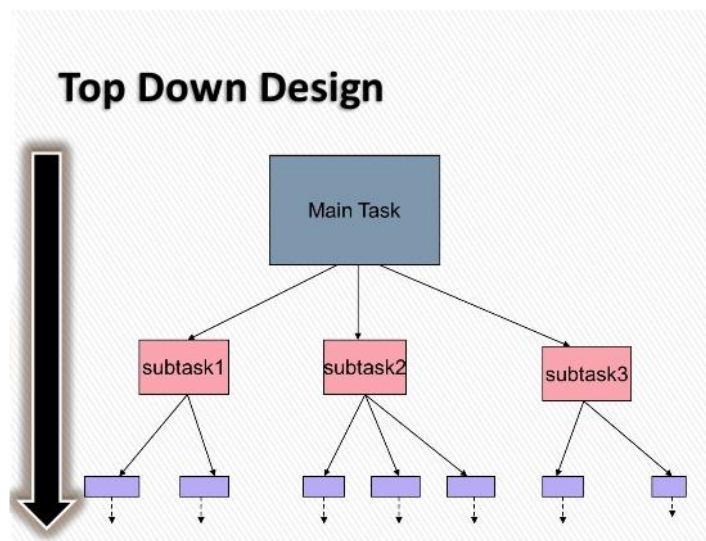
```
cout<<sum(x,y);
}
```

Trong ví dụ trên ta khai báo một hàm sum tác động tới hai tham số a, b và cho kết quả là tổng của hai số a, b. Với hàm sum, trong chương trình chính ta thực hiện lệnh gọi tổng hai số x, y.

Bên cạnh cách thứ nhất, ta có thể sử dụng cách thứ hai là khai báo hàm nguyên mẫu như sau:

```
#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 100
using namespace std;
long long sum(long long a, long long b);
long long x,y;
int main()
{
    cin>>x>>y;
    cout<<sum(x,y);
}
long long sum(long long a, long long b)
{
    return a+b;
}
```

Cách này phù hợp với việc khai báo hàm trước, viết hàm sau với tư duy phân hoạch công việc từ tổng quát cho tới chi tiết – là một đặc trưng của hướng tiếp cận top – down khi giải quyết một vấn đề.



## 4. Biến địa phương và biến toàn cục

Các biến được khai báo trong các hàm được gọi là biến địa phương. Biến địa phương chỉ có tầm ảnh hưởng trong chính hàm đó. Khi hàm kết thúc, các biến

địa phương sẽ được giải phóng và phá hủy. Ngôn ngữ lập trình C++ xem tất cả mọi đoạn chương trình thực hiện đều là hàm, kể cả chương trình chính main() cũng là một hàm, ta gọi là hàm chính; các vòng lặp for cũng xem như là một hàm, các biến chạy trong vòng lặp sẽ giải phóng khi ra khỏi vòng lặp.

Các biến được khai báo ở trên cùng có ảnh hưởng tới tất cả các đoạn chương trình ta gọi là biến toàn cục. Biến toàn cục có thể sử dụng ở bất cứ đâu, tuy nhiên nếu nó đặt tên cùng với tên của một biến địa phương thì sẽ xảy ra hiện tượng “phép vua thua lệ làng”, khi vào trong hàm sẽ ưu tiên biến địa phương. Vì vậy khi đặt tên biến cần tránh tình trạng đặt tên trùng. Chúng ta lưu ý không khai báo nhiều biến để chiếm bộ nhớ trong hàm, vì ngăn xếp chương trình con của C++ có dung lượng hữu hạn. Vì hàm main() cũng là một hàm nên chúng ta không được khai báo các mảng cỡ lớn trong thân hàm main().

### 5. Tham số - tham biến, tham trị

Khi xây dựng hàm, thông thường hàm sẽ có các đối số để tác động vào, ta gọi chung là tham số. Tham số khi nằm trong hàm mà chưa có lời gọi hàm thì ta gọi là tham số hình thức. Còn khi lời gọi hàm được thực hiện, tham số hình thức sẽ được truyền cụ thể các biến số và khi đó các tham số được gọi là tham số thực sự. Ta xem xét lại ví dụ trên:

```
#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 100
using namespace std;
long long sum(long long a, long long b)
//Tham số a, b là tham số hình thức
{
    return a + b;
}
long long x = 2, y = 10
int main()
{
    cout<<sum(x,y);
    //Lời gọi hàm được thực hiện thì x, y là
    //tham số thực sự
}
```

Khi có lời gọi hàm thì các tham số thực sự sẽ được truyền vào hàm và các tham số hình thức sẽ được thay thế bởi các tham số thực sự.

Khi ra khỏi hàm, các tham số thực sự sẽ có hai tình huống. Tình huống thứ nhất là trong thân hàm không có những lệnh làm thay đổi giá trị của tham số thực sự. Với tình huống này không có gì phải nói, vì như thế các đối số sau khi tham gia vào chương trình con sẽ trở lại tham gia vào các đoạn chương trình khác. Tình

huống thứ hai là, trong thân hàm có những lệnh làm thay đổi giá trị của tham số thực sự. Nếu khi ra khỏi hàm, kết quả không được bảo toàn mà trả về giá trị của tham số thực sự trước khi tham gia hàm thì ta có khái niệm tham trị. Cụ thể ta xét đoạn chương trình sau:

```
#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 100
using namespace std;
long long doicho(long long a, long long b)
{
    long long tam = a;
    a = b;
    b = tam;
}
long long x,y;
int main()
{
    long long x = 1, y = 2;
    doicho(x,y);
    cout<<x<<" "<<y;
}
Output: 1 2
```

Trong đoạn chương trình trên dù rằng trong hàm doicho() đã thực hiện đổi chỗ 2 số  $a, b$  tuy nhiên khi in ra kết quả không cho ta điều này vì các tham số được khai báo trong hàm doicho() là các tham trị.

Để lưu giữ lại sự thay đổi của các tham số, ta có khái niệm tham biến. Tham biến là tham số mà sau khi thực thi hàm thì kết quả các phép toán tác động lên tham số sẽ được bảo toàn. Cụ thể ta xét đoạn chương trình sau:

```
#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 100
using namespace std;
long long doicho(long long &a, long long &b)
//Thêm các ký tự & trước a, b
{
    long long tam = a;
    a = b;
    b = tam;
}
long long x,y;
int main()
```

```
{
    long long x = 1, y = 2;
    doicho(x,y);
    cout<<x<<" "<<y;
}
```

Output: 2 1

Như vậy để cài đặt tham biến ta cần thêm ký hiệu & vào trước danh sách tham số.

Từ trên ta có kết luận sau:

- Dùng tham trị khi bạn không muốn giá trị của biến bị thay đổi.
- Dùng tham biến khi bạn muốn hàm thay đổi giá trị biến của bạn.
- Dùng tham biến sẽ tiết kiệm bộ nhớ hơn.
- Nếu bạn dùng tham biến, bạn cũng không muốn hàm thay đổi giá trị của bạn thì bạn cần thêm từ khóa `const` vào tham số đó. Ví dụ: `int f(const int &x)`.
- Nếu tham số là mảng ta phải truyền theo tham biến

Xét ví dụ tham biến là mảng như sau:

```
#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 100
using namespace std;
long long sum(long long x[], int x_size)
{
    long long temp = 0;
    for(int i=0;i<x_size;i++)
    {
        temp = temp+x[i];
        x[i]++;
    }
    return temp;
}
long long a[]={1,2,3,4,5},n = 5;
int main()
{
    cout<<sum(a,n)<<endl;
    for(int i = 0; i<n;i++)
        cout<<a[i]<<" ";
}
Output: 15
       2 3 4 5 6
```

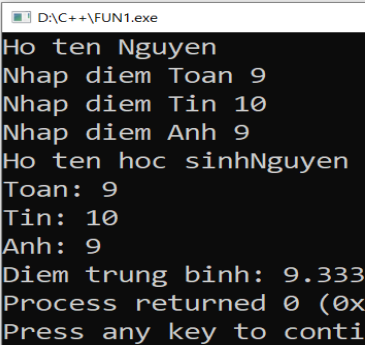
## B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 8.1:** Chương trình nhập điểm toán, điểm tin, điểm tiếng Anh và in ra điểm trung bình. Trong chương trình ta thiết lập ba hàm nhap() có chức năng nhập dữ liệu, xuly() có chức năng tính điểm trung bình, xuất() có chức năng đưa dữ liệu ra màn hình.

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  float To, Ti, Anh, dtb;
4  string Hoten;
5  void nhap()
6  {
7      cout<<"Ho ten "; cin>>Hoten;
8      cout<<"Nhap diem Toan "; cin>>To;
9      cout<<"Nhap diem Tin "; cin>>Ti;
10     cout<<"Nhap diem Anh "; cin>>Anh;
11 }
12 void xuly()
13 {
14     dtb = (To+Ti+Anh)/3;
15 }
16 void xuất()
17 {
18     cout<<"Ho ten hoc sinh"<<Hoten<<endl;
19     cout<<"Toan: "<<To<<endl;
20     cout<<"Tin: "<<Ti<<endl;
21     cout<<"Anh: "<<Anh<<endl;
22     cout<<"Diem trung binh: " << dtb;
23 }
24 int main()
25 {
26     nhap();
27     xuly();
28     xuất();
29 }

```



```

D:\C++\FUN1.exe
Ho ten Nguyen
Nhap diem Toan 9
Nhap diem Tin 10
Nhap diem Anh 9
Ho ten hoc sinhNguyen
Toan: 9
Tin: 10
Anh: 9
Diem trung binh: 9.333
Process returned 0 (0x)
Press any key to conti

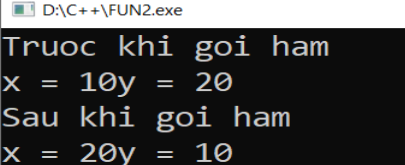
```

**Ví dụ 8.2:** Chương trình sau đổi chỗ hai biến a, b và in ra. Chú ý ta có ký hiệu & trước các tham số hình thức a, b nhằm mục đích giữ nguyên sự thay đổi giá trị của a, b sau khi gọi hàm doicho().

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3
4  void doicho(int &a, int &b)
5  {
6      int x = a;
7      a = b;
8      b = x;
9  }
10 int main()
11 {
12     int x = 10, y = 20;
13     cout<<"Truoc khi gọi ham "<<endl;
14     cout<<"x = "<<x<<"y = "<<y<<endl;
15     doicho(x,y);
16     cout<<"Sau khi gọi ham "<<endl;
17     cout<<"x = "<<x<<"y = "<<y<<endl;
18 }

```



```

D:\C++\FUN2.exe
Truoc khi gọi ham
x = 10y = 20
Sau khi gọi ham
x = 20y = 10

```

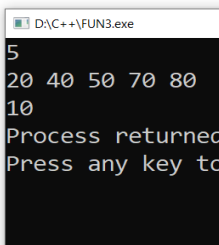


**Ví dụ 8.3:** Chương trình sau viết hàm tìm ước chung lớn nhất của hai số và áp dụng tìm ước chung lớn nhất của  $n$  số nguyên cho trước.

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  int gcd(int a, int b)
4  {
5      while(b!=0)
6      {
7          int tam = a%b;
8          a = b;
9          b = tam;
10     }
11     return a;
12 }
13 int main()
14 {
15     int n,a[105], res;
16     cin>>n;
17     for(int i=1;i<=n;i++) cin>>a[i];
18     res=a[1];
19     for(int i=2;i<=n;i++) res=gcd(res,a[i]);
20     cout<<res;
21 }

```

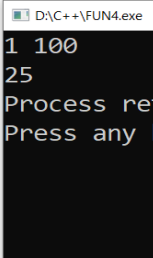


**Ví dụ 8.4:** Chương trình sau viết hàm kiểm tra một số nguyên có là nguyên tố hay không và đếm số nguyên tố trong đoạn  $[a;b]$ .

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  bool NT(int x)
4  {
5      if(x==1) return false;
6      for(int i=2;i<=sqrt(x);i++)
7          if(x%i==0) return false;
8      return true;
9  }
10 int main()
11 {
12     int a,b, dem=0;
13     cin>>a>>b;
14     for(int i=a;i<=b;i++)
15         if(NT(i)) dem++;
16     cout<<dem;
17 }

```



## C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

### Bài 8.1 – (N0801A) Tổng các chữ số

**Yêu cầu:** Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Hãy tính tổng các chữ số của các số hạng trong dãy số đã cho.

Ví dụ: cho dãy  $a = (11, 22, 33, 44, 55)$  có tổng các chữ số là:  $1+1+2+2+3+3+4+4+5+5=30$ .

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 10^5$ ),
- Dòng thứ 2 ghi  $n$  số nguyên dương kiểu 64 – bit.

**Kết quả:** in ra tổng các chữ số của các số trong dãy.

**Ví dụ:**

input	output
-------	--------

5	30
11 22 33 44 55	

**Bài 8.2 – (N0802A) Tổng chữ số chia hết cho 9**

**Yêu cầu:** Đặt  $T(x)$  là hàm tính tổng các chữ số của số nguyên  $x$ . Cho dãy số nguyên  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , hãy đếm số cặp  $(i, j)$  thỏa mãn:  $1 \leq i < j \leq n$  và  $T(a_i) + T(a_j)$  chia hết cho 9.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ),
- Dòng thứ 2 ghi  $n$  số nguyên dương kiểu 64 – bit.

**Kết quả:** In ra số lượng cặp  $(i, j)$  thỏa mãn yêu cầu.

**Ví dụ:**

input	output
3 12 30 24	2

**Bài 8.3 – (N0803A) Đếm ước chung lớn nhất**

**Yêu cầu:** Cho dãy số nguyên  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , hãy đếm số cặp  $(i, j)$  thỏa mãn:  $1 \leq i < j \leq n$  và  $\gcd(a_i, a_j) > 1$  với  $\gcd$  là phép lấy ước chung lớn nhất của hai số.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ),
- Dòng thứ 2 ghi  $n$  số nguyên dương kiểu 64 – bit.

**Kết quả:** In ra số lượng cặp  $(i, j)$  thỏa mãn yêu cầu.

**Ví dụ:**

input	output
3 21 6 57	3

**Bài 8.4 – (N0804A) Đếm bội chung nhỏ nhất**

**Yêu cầu:** Cho dãy số nguyên  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , hãy đếm số cặp  $(i, j)$  thỏa mãn:  $1 \leq i < j \leq n$  và  $\text{lcm}(a_i, a_j) < K$  với  $\text{lcm}$  là phép lấy bội chung nhỏ nhất của hai số.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ),

- Dòng thứ 2 ghi  $n$  số nguyên dương kiểu 64 – bit.

**Kết quả:** In ra số lượng cặp  $(i, j)$  thỏa mãn yêu cầu.

**Ví dụ:**

input	output
3 6	2
3 2 4	

### Bài 8.5 – (N0805A) Số ước chia hết cho 7

**Yêu cầu:** Đặt  $P(x)$  là hàm tính số các ước số của số nguyên  $x$ . Cho dãy số nguyên  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , hãy đếm số cặp  $(i, j)$  thỏa mãn:  $1 \leq i < j \leq n$  và  $P(a_i) + P(a_j)$  chia hết cho 7.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 100$ ),
- Dòng thứ 2 ghi  $n$  số nguyên dương kiểu 64 – bit.

**Kết quả:** In ra màn hình xâu kí tự S.

**Ví dụ:**

input	output
3	2
3 5 16	

### Bài 8.6 – (N0806A) Bội chung tổng chữ số

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào hai số nguyên. In ra bội chung nhỏ nhất của tổng chữ số của hai số nhập vào.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 2 số nguyên  $a, b$  kiểu 64 - bit.

**Kết quả:** Bội chung nhỏ nhất của tổng các chữ số của  $a, b$ .

**Ví dụ:**

input	output
12 34	21

### Bài 8.7 – (N0807B) Nguyên tố lớn nhất

**Yêu cầu:** Viết chương trình tìm số nguyên tố lớn nhất không vượt quá  $n$  ( $0 < n \leq 10^7$ ).

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên dương  $n$ .

**Kết quả:** In ra số nguyên tố lớn nhất không vượt quá  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
10	7

### **Bài 8.8 – (N0808B) Nguyên tố nhỏ nhất**

**Yêu cầu:** Viết chương trình tìm số nguyên tố nhỏ nhất lớn hơn  $n$  ( $0 < n \leq 10^7$ ).

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên dương  $n$ .

**Kết quả:** In ra số nguyên tố nhỏ nhất lớn hơn  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
10	11

## **D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP**

### **Bài 8.1 – (N0801A) Tổng các chữ số**

**Yêu cầu:** Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Hãy tính tổng các chữ số của các số hạng trong dãy số đã cho.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll d,n; string a;
ll sum(string a)
{
    ll s=0;
    for (ll i=0;i<a.length();++i) s=s+a[i]-48;
    return s;
}
int main ()
{
    d=0;
    cin>>n;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
    {
        cin>>a;
        d+=sum(a);
    }
    cout<<d;
}
```

### **Bài 8.3 – (N0803A) Đếm ước chung lớn nhất**

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,a[105],cnt=0;
```

```

int main ()
{
    cin>>n;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        cin>>a[i];
    for (ll i=1;i<=n-1;++i)
        for (ll j=i+1;j<=n;++j)
        {
            if (__gcd(a[i],a[j])>1) cnt++;
        }
    cout<<cnt;
}

```

### Bài 8.5 – (N0805A) Số ước chia hết cho 7

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,d=0,a[105];
ll demuoc(ll n)
{
    ll s=0;
    for (ll i=1;i*i<=n;++i)
        if (n%i==0)
        {
            ll j=n/i;
            if (i==j) s=s+1;
            else s=s+2;
        }
    return s;
}
int main ()
{
    cin>>n;
    for (ll i=1;i<=n;++i)
        cin>>a[i];
    for (ll i=1;i<=n-1;++i)
        for (ll j=i+1;j<=n;++j)
            if ((demuoc(a[i])+demuoc(a[j]))%7==0) d++;
    cout<<d;
}

```

### Bài 8.7 – (N0807B) Nguyên tố lớn nhất

**Yêu cầu:** Viết chương trình tìm số nguyên tố lớn nhất không vượt quá  $n$ .

```

#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
using namespace std;
bool NT(ll x)

```

```
{
    if(x==1) return false;
    for(ll i=2;i*i<=x;i++)
        if(x%i==0) return false;
    return true;
}

int main()
{
    ll n;
    cin>>n;
    while(n++)
    {
        if(NT(n))
        {
            cout<<n;
            break;
        }
    }
}
```

## CHƯƠNG 9 – KIỂU DỮ LIỆU STRUCT

### A.

### B. KIẾN THỨC GHI NHỚ

Trong nhiều tình huống ta cần làm việc với kiểu dữ liệu có nhiều thành phần như xét một đối tượng học sinh bao gồm các thông số: họ và tên, ngày tháng năm sinh, điểm môn Toán, điểm môn Tin, ... Với tình huống như vậy, ngôn ngữ lập trình C++ cung cấp kiểu dữ liệu cấu trúc – **struct**.

#### 1. Khai báo

Cú pháp khai báo của kiểu dữ liệu **struct** như sau:

```
struct <tên kiểu dữ liệu>
{
    <kiểu dữ liệu 1> thành phần thứ 1;
    <kiểu dữ liệu 2> thành phần thứ 2;
    ...
    <kiểu dữ liệu n> thành phần thứ n;
};
```

Sau khi khai báo như trên ta có thể sử dụng kiểu dữ liệu mới như một kiểu dữ liệu chuẩn. Chẳng hạn ta khai báo kiểu dữ liệu sau:

```
struct HS
{
    string hoten;
    float diemToan, diemTin;
};
HS hocsinh1, hocsinh2;
```

Với khai báo kiểu HS trong struct, ta sẽ sử dụng HS như một kiểu dữ liệu chuẩn.

#### 2. Sử dụng kiểu struct

Mỗi kiểu struct thường bao gồm nhiều thành phần mà mỗi thành phần ta gọi là trường. Ví dụ kiểu HS ở trên có tới 3 trường là hoten, diemToan, diemTin.

Để truy cập vào mỗi trường ta có cú pháp sau:

```
<Tên biến kiểu struct>.<tên bản ghi>;
```

Chẳng hạn với khai báo trên ta có thể truy cập vào trường hoten của biến hocsinh1 như sau:

```
hocsinh1.hoten;
```

Vậy để đọc dữ liệu vào một biến struct ta đọc vào từng trường một. Tương tự như vậy để in dữ liệu một biến struct ta in ra từng trường một. Ta có thể gán dữ liệu cho từng trường của biến struct hoặc có thể gán hai biến struct cho nhau:

```
cin>>hocsinh1.hoten;
cin>>hocsinh1.diemToan;
```

cin>>hocsinh1.diemTin;
cout<<hocsinh1.hoten<<endl; cout<<hocsinh1.diemToan<<endl; cout<<hocsinh1.diemTin<<endl;
hocsinh1.hoten = "Nguyen Van A"; hocsinh2 = hocsinh1;

## B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 9.1:** Chương trình nhập vào hai phân số  $\frac{a}{b}, \frac{x}{y}$  và in ra phân số tổng  $\frac{a}{b} + \frac{x}{y}$  dưới dạng tối giản.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct ps
{
    int tu; //Thành phần thứ nhất là tử số
    int mau; //Thành phần thứ hai là mẫu số
};
ps cong(ps p, ps q) //Hàm tính tổng hai số
{
    ps tam;
    tam.tu = p.tu*q.mau + p.mau*q.tu;
    tam.mau = tam.tu/tam.tu;
    int gcd = __gcd(tam.tu, tam.mau);
    //Tối giản phân số
    tam.tu = tam.tu/gcd;
    tam.mau = tam.mau/gcd;
}
int main()
{
    ps a, b, c;
    cin>>a.tu>>a.mau;
    cin>>b.tu>>b.mau;
    c = cong(a, b);
    cout<<c.tu<<" "<<c.mau;
}
```

Ở đây ta đã sử dụng cấu trúc struct với hai thành phần tử và mẫu để biểu diễn cho kiểu phân số hữu tỷ.

**Ví dụ 9.2:** Chương trình nhập vào hai điểm và in ra khoảng cách giữa hai điểm:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct toado //Khai báo kiểu struct tọa độ
{
    int x; //Thành phần thứ nhất là hoành độ
```



```

    int y; //Thành phần thứ hai là tung độ
}:
//Hàm tính khoảng cách giữa hai điểm A,B
double kc(toado A, toado B)
{
    double t1 = (A.x-B.x)*(A.x-B.x);
    double t2 = (A.y-B.y)*(A.y-B.y);
    return(sqrt(t1+t2));
}
int main()
{
    toado A, B;
    cin>>A.x>>A.y;
    cin>>B.x>>B.y;
    cout<<kc(A,B);
}

```

Ở đây ta sử dụng cấu trúc struct với hai thành phần x và y mô tả một điểm trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ .

**Ví dụ 9.3:** Chương trình sau sử dụng kiểu struct để nhập vào ba điểm A, B, C và in ra diện tích tam giác ABC.

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct toado //Khai báo kiểu struct tọa độ
{
    int x; //Thành phần thứ nhất là hoành độ
    int y; //Thành phần thứ hai là tung độ
};
//Hàm tính diện tích tam giác ABC
double dientich(toado A, toado B, toado C)
{
    toado AB, AC;
    AB.x = B.x - A.x;
    AB.y = B.y - A.y;
    AC.x = C.x - A.x;
    AC.y = C.y - A.y;
    //Công thức tính diện tích tam giác ABC
    return(abs(AB.x*AC.y-AC.x*AB.y)/2.0);
}
int main()

```

```

{
    toado A, B, C;
    cin>>A.x>>A.y;
    cin>>B.x>>B.y;
    cin>>C.x>>C.y;
    cout<<diện tích(A,B,C);
}

```

Ở đây ta vẫn sử dụng kiểu struct để mô tả điểm và vector trong hệ trục  $Oxy$ .

Công thức diện tích tam giác ở đây là:  $S = \frac{1}{2} |x_{AB}y_{AC} - x_{AC}y_{AB}|$ .

### C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

#### Bài 9.1 – (N0901A) Hình bình hành

**Yêu cầu:** Cho 3 điểm A, B, C. In ra điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 6 số nguyên  $xa, ya, xb, yb, xc, yc$  là tọa độ của A, B, C.

**Kết quả:** Ghi ra hai số nguyên là tọa độ điểm D.

**Ví dụ:**

input	output
1 0 0 0 0 1	1 1

#### Bài 9.2 – (N0902A) Diện tích hình bình hành

**Yêu cầu:** Cho 3 điểm A, B, C. Tính diện tích của hình bình hành ABCD

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 6 số nguyên  $xa, ya, xb, yb, xc, yc$  là tọa độ của A, B, C.

**Kết quả:** Ghi ra một số nguyên là diện tích của hình bình hành ABCD.

**Ví dụ:**

input	output
0 0 1 0 0 1	1

#### Bài 9.3 – (N0903B) Diện tích đa giác lồi

**Yêu cầu:** Cho đa giác lồi  $A_1A_2 \dots A_n$ . Hãy tính diện tích của đa giác lồi đó theo tọa độ của các đỉnh.

**Dữ liệu** gồm 2 dòng:

- Dòng 1 ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^6$ ).
- $n$  dòng kế tiếp mỗi dòng ghi 2 số nguyên  $x, y$  kiểu 32 – bit.

**Kết quả**

- Hai dòng ghi ra phân số tối giản biểu diễn diện tích đa giác; biết rằng diện tích của đa giác có tọa độ nguyên luôn là một phân số hữu tỷ.

**Ví dụ:**

input	output
3 0 0 1 0 0 1	1 2

#### Bài 9.4 – (N0904C) Danh sách học sinh

**Yêu cầu:** Có  $n$  học sinh, mỗi học sinh có 3 thông tin: Họ tên, điểm toán, điểm tin. Sắp xếp danh sách học sinh theo tiêu chí:

- Họ tên tăng dần.
- Nếu họ tên giống nhau thì tổng điểm (= điểm toán + điểm tin) tăng dần.
- Nếu họ tên và tổng điểm giống nhau thì điểm toán tăng dần.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu ghi số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 10^5$ ).
- $n$  dòng sau, mỗi dòng ghi 3 thông tin: Họ tên, điểm toán, điểm tin (họ tên là dãy kí tự latin thường, độ dài không quá 5; điểm toán và điểm tin là một số nguyên từ 0 đến 10).

**Kết quả:** ghi ra  $n$  dòng ghi thông tin của  $n$  học sinh được sắp xếp.

**Ví dụ:**

input	output
3 6 3 2 4	2

#### Bài 9.5 – (N0905B) Cầu thủ trẻ nhất

**Yêu cầu:** Thông tin của một cầu thủ bao gồm: Họ tên, cân nặng, chiều cao, tuổi. Hãy nhập vào danh sách một nhóm cầu thủ, in ra cầu thủ có tuổi trẻ nhất biết các cầu thủ có độ tuổi khác nhau.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 100$ )
- $n$  dòng kế tiếp, mỗi dòng ghi thông tin của cầu thủ bao gồm theo thứ tự họ tên, cân nặng, chiều cao, tuổi.

**Kết quả:** In ra thông tin cầu thủ có tuổi trẻ nhất.

**Ví dụ:**

input	output
3 An 70 180 20 Binh 75 183 26 Cuong 70 180 30	An 70 180 20

## D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP

### Bài 9.2 – (N0902A) Diện tích hình bình hành

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
struct diem
{
    ll x,y;
}a,b,c,d;
int main ()
{
    cin>>a.x>>a.y>>b.x>>b.y>>c.x>>c.y;
    d.x=a.x+c.x-b.x;
    d.y=a.y+c.y-b.y;
    cout<<abs((N.x-a.x)*(d.y-a.y)-(d.x-a.x)*(N.y-a.y));
}
```

### Bài 9.3 – (N0903B) Diện tích đa giác lồi

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ii pair <int,int>
#define fi first
#define se second
long long n,s=0;
ii a[1000005];
int main()
{
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        cin>>a[i].fi>>a[i].se;
    a[n+1]=a[1];
    for(int i=1;i<=n;i++)
        s=s+(a[i+1].fi-a[i].fi)*(a[i+1].se+a[i].se);
    s=abs(s);
    if(s%2==0)cout<<s/2<<" "<<1;
    else cout<<s<<" "<<2;
}
```

**Bài 9.4 – (N0904C) Danh sách học sinh**

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct HS
{
    string ht;
    float toan, tin;
};
HS hs[100005];
bool cmp(HS A, HS B)
{
    if(A.ht<B.ht) return true;
    else if(A.toan+A.tin<B.toan+B.tin) return true;
    else if(A.toan<B.toan) return true;
    return false;
}
int main()
{
    int n;
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        cin>>hs[i].ht>>hs[i].toan>>hs[i].tin;
    sort(hs+1,hs+n+1,cmp);
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        cout<<hs[i].ht<<" "<<hs[i].toan<<" "<<hs[i].tin;
        cout<<endl;
    }
}

```

## CHƯƠNG 10 – MỘT SỐ THUẬT TOÁN SỐ HỌC CƠ BẢN

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Thuật toán tìm UCLN, BCNN

Thuật toán tìm ước chung lớn nhất là một thuật toán cơ bản được đề cập đến trong SGK Tin học 10 hiện hành. Giải thuật này được Euclide đưa ra trong cuốn *Element* vào năm 300 trước công nguyên. Thuật toán này dựa trên bổ đề sau đây:

“Với  $a, b$  là hai số nguyên ( $a \geq b$ ), ta thực hiện chia  $a$  cho  $b$  được thương  $q$ , số dư  $r$  ( $r \geq 0$ ) tức là  $a = bq + r$ , khi đó ta có:

$$\text{UCLN}(a, b) = \begin{cases} b \text{ nếu } r = 0 \\ \text{UCLN}(b, r) \text{ nếu } r \neq 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có thuật toán tìm UCLN của hai số nguyên dương  $a, b$  như sau:

```
long long UCLN(long long a, long long b) {
    long long temp;
    while (b != 0)
    {
        temp = a % b;
        a = b;
        b = temp;
    }
    return a;
}
```

Giải thuật trên có độ phức tạp  $O(\log(\max(a, b)))$ . Ta chú ý rằng có một phiên bản khác của thuật toán tìm UCLN như sau:

```
long long UCLN(long long a, long long b)
{
    long long temp;
    while (a != b)
    {
        if(a > b) a = a - b;
        if(b > a) b = b - a;
    }
    return a;
}
```

Thuật toán này trong trường hợp xấu nhất có thể độ phức tạp của nó là  $O(\max(a, b))$  và sẽ thời gian chạy sẽ vượt quá mức 1s với  $a, b$  có khoảng cách cỡ  $10^9$ .

## 2. Thuật toán kiểm tra số nguyên tố

- Thuật toán duyệt hết ước:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
bool Check(long long x)
{
    if(x==1) return false;
    for(long long i=2;i<x;i++)
        if(x%i==0) return false;
    return true;
}
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    if(Check(n)) cout<<"YES";
    else cout<<"NO";
}
```

- Thuật toán duyệt đến  $\sqrt{n}$ :

- ✓ Nhận xét thấy nếu  $n$  có một ước nguyên dương  $i$  thì nó sẽ có ước nguyên dương  $n/i$ .
- ✓ Từ đó ta chỉ cần kiểm tra xem nếu  $n$  không chia hết cho các phân tử từ 2 đến  $\sqrt{n}$  thì  $n$  là số nguyên tố.

Từ đó ta có hàm kiểm tra nguyên tố như sau:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
bool Check(long long x)
{
    for(long long i=2;i*i<=x;i++)
        if(x%i==0) return false;
    return x>1;
}
int main()
{
    long long n;
    cin>>n;
    if(Check(n)) cout<<"YES";
    else cout<<"NO";
}
```

}

### 3. Giải thuật sàng nguyên tố

Khi liệt kê các số nguyên tố nhỏ hơn  $n$  ta có thể sử dụng hàm kiểm tra nguyên tố ở trong mục 3 như sau:

```
for(long long i = 1; i <= n; ++i)
    if(Check(i)) cout<<i<<endl;
```

Khi đó với  $n$  cỡ  $10^7$  việc sử dụng thuật toán ở trên sẽ vượt quá tốc độ xử lý của máy tính hiện nay vì tốc độ máy tính hiện tại chỉ có thể thực hiện tối đa  $10^8$  phép toán trên một giây mà trong trường hợp trên đã có cỡ  $10^9$  lệnh thực thi. Vì vậy trong trường hợp này ta nên sử dụng thuật toán sàng nguyên tố nhằm lưu toàn bộ số nguyên tố vào một mảng `isPrime[]` như sau:

- Đánh dấu tất cả mọi số từ 1 đến  $n$  là true,

Hiển nhiên số 1 không là số nguyên tố, ta gán `isPrime[1] = false`;

- Duyệt từ 2 đến  $\sqrt{n}$ , lần lượt đánh dấu các bội của các số nguyên tố, đầu tiên 2 là số nguyên tố, ta đánh dấu các bội của 2 là hợp số, sau đó lần lượt các số kế tiếp ta sẽ đánh dấu các bội của nó bằng đoạn mã sau:

```
for(long long i = 2; i * i <= nmax; ++i)
    if(isPrime[i])
        for(long long j = i * i; j <= nmax; j += i)
            isPrime[j] = false;
```

Khi đó mảng `isPrime[]` sẽ đánh dấu tính nguyên tố của các số nguyên.

## B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 10.1:** Chương trình đếm số lượng số nguyên tố trong đoạn  $[a;b]$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
bool Check(long long x)
{
    if(x==1) return false;
    for(long long i=2;i*i<=x;i++)
        if(x%i==0) return false;
    return true;
}
int main()
{
    long long a,b,dem = 0;
    cin>>a>>b;
    for(long long i=a;i<=bi++)
```



```

        if(Check(i)) dem++;
        cout<<dem;
    }

```

**Ví dụ 10.2:** Chương trình sau sử dụng sàng nguyên tố để liệt kê số nguyên tố trong đoạn  $[a; b]$ .

```

#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 10000007
using namespace std;
bool isPrime[nmax];
void sieve()
{
    memset(isPrime, true, sizeof(isPrime));
    isPrime[1] = false;
    for(long long i = 2; i * i <= nmax; ++i)
        if(isPrime[i])
            for(long long j = i * i; j <= nmax; j += i)
                isPrime[j] = false;
}
int main()
{
    sieve();
    int n;
    cin>>n;
    for(int i=1; i<=n; i++)
        if(isPrime[i]) cout<<i<<"\n";
}

```

**Ví dụ 10.3:** Chương trình sau phân tích đếm số lượng ước nguyên dương của số nguyên dương  $n$ .

Tương tự **Ví dụ 10.1**, nếu  $n$  có ước nguyên dương là  $i$  thì  $n$  cũng có ước tương ứng là  $n/i$ . Vì vậy ta chỉ cần duyệt đến  $\sqrt{n}$ , mỗi lần  $n$  chia hết cho  $i$  ta sẽ cập nhật luôn 2 ước. Với cách làm này ta có thể đếm số ước của  $n$  lên đến  $10^{12}$  trong thời gian 1s. Chú ý trong trường hợp  $n$  là số chính phương thì ta cần trừ đi 1 ước do  $\sqrt{n} = n/\sqrt{n}$ .

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
long long n, i, dem = 0;
int main()
{
    cin>>n;

```

```

for(i=1;i*i<=n;i++)
    if(n%i==0) dem+=2;
if(n==i*i) dem--;
cout<<dem;
}

```

### C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

#### Bài 10.1 – (N1001A) Số lượng số nguyên tố

**Yêu cầu:** Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Hãy đếm số nguyên tố có mặt trong dãy đã cho.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 10^3$ ),
- Dòng thứ 2 ghi  $n$  số nguyên dương kiểu 32 – bit.

**Kết quả:** in ra số lượng số nguyên tố có mặt trong dãy.

**Ví dụ:**

input	output
5 2 5 7 9 11	4

#### Bài 10.2 – (N1002B) Số nguyên tố trong đoạn

**Yêu cầu:** Đếm số lượng số nguyên tố trong đoạn  $[a; b]$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $a, b$  với  $0 < a, b \leq 10^7$ .

**Kết quả:** Một dòng là số lượng số nguyên tố trong đoạn  $[a; b]$ .

**Ví dụ:**

input	output
1 10	4

#### Bài 10.3 – (N1003B) Số đặc biệt

**Yêu cầu:** Ta gọi dãy  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là dãy đặc biệt nếu tồn tại số nguyên dương  $x > 1$  sao cho tất cả các phân tử của dãy trên đều chia hết cho  $x$ . Cho một dãy đặc biệt  $A$  và số nguyên dương  $k$ . Hãy tìm số nguyên  $l$  lớn nhất thỏa mãn:  $0 \leq l \leq k$  và  $A \cup \{l\}$  là dãy đặc biệt.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên  $n$  và  $k$ ,
- Dòng thứ 2 chứa dãy đặc biệt  $A$ .

**Kết quả:** Một dòng là số nguyên dương  $k$  thỏa mãn bài toán.

**Ví dụ:**

input	output
3 5 2 6 4	4

**Bài 10.4 – (N1004C) Số bin bon**

**Yêu cầu:** Mr Bon là cậu em trai song sinh của Mr Bin. Cậu ấy cũng đang học các con số, cậu ấy tính tổng các chữ số của một số nguyên dương  $n$  cho trước được một số nguyên dương  $a$ . Tiếp đến cậu lại đi tìm chữ số lớn nhất của  $n$  và viết ghép chữ số lớn nhất đó vào sau số  $a$  thu được số nguyên dương  $k$ . Mr Bon muốn biết  $k$  có phải là số nguyên tố hay không? Nếu số đó là nguyên tố thì cậu gọi số đó là số "binbon". Ví dụ số 111 là một số "binbon" vì tổng các chữ số là  $a = 3$ , chữ số lớn nhất là 1 nên số  $k$  lập được là 31, số 31 là một số nguyên tố nên  $n = 111$  là số "binbon". Thử ví với suy nghĩ này cậu bé muốn kiểm tra một loạt các số có phải là số "binbon" hay không? Hãy giúp cậu bé nhé!

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu ghi số nguyên dương  $t$  là số test ( $0 < t \leq 1000$ ).
- $t$  dòng sau mỗi dòng ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^{1000}$ ).

**Kết quả:** in ra  $t$  dòng, mỗi dòng ghi YES hoặc NO nếu số tương ứng là "binbon" hoặc không?

**Ví dụ:**

input	output
2	NO
123	YES
111	

**Bài 10.5 – (N1005B) Số nguyên tố fibonacci**

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$ . In ra số nguyên tố là số Fibonacci lớn nhất không vượt quá  $n$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi 1 số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq n^{12}$ ).

**Kết quả:** Ghi ra số nguyên tố Fibonacci lớn nhất không vượt quá  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
10	5

**Bài 10.6 – (N1006A) Cơ số k**

**Yêu cầu:** Một số nguyên khi biểu diễn trong hệ cơ số  $k$  chỉ có đúng  $k$  ký tự để biểu diễn. Ví dụ trong hệ nhị phân chỉ có 2 ký tự 0 và 1. Số 8 trong hệ 10 được biểu diễn trong hệ nhị phân như sau: 100(2), số 15 là dãy bit 1111(2). Cho một

số nguyên dương  $n$  và một số nguyên dương  $k$ . Hãy đưa ra cách biểu diễn  $n$  trong hệ cơ số  $k$ .

**Input:** Một dòng duy nhất chứa hai số nguyên dương  $n, k (n \leq 10^9, k \leq 9)$ .

**Output:** In ra số  $n$  trong hệ cơ số  $k$ .

**Ví dụ:**

input	output
15 2	1111

### Bài 10.7 – (N1007B) Ước

**Yêu cầu:** Hôm nay Hệ được thầy giáo dạy về chủ đề ước và bội của các số nguyên. Thầy giáo đố Hệ đếm được có bao nhiêu số có đúng 3 ước dương trong  $n$  số nguyên không âm thầy đã cho và treo thưởng 50k nếu Hệ làm được. Hệ rất phấn khích, nhưng mà cu cậu nghĩ mãi vẫn chưa ra cách làm. Các bạn hãy giúp Hệ lấy giải 50k của thầy giáo nhé.

**Dữ liệu:**

- Dòng 1 chứa số nguyên dương  $n (0 < n \leq 10^5)$ ,
- Dòng 2 chứa  $n$  số nguyên dương  $a_i (0 < a_i \leq 10^{12})$ .

**Kết quả:** In ra  $n$  dòng, dòng thứ  $i$  ghi YES nếu  $a_i$  có đúng 3 ước dương, còn ngược lại thì ghi NO.

**Ví dụ:**

input	output
3	YES
4 10 12	NO
	NO

### Bài 10.8 – (N1008B) Số thừa số nguyên tố

**Yêu cầu:** Hãy đếm số thừa số nguyên tố có trong số tự nhiên.

**Input:** Một dòng ghi số nguyên  $n (0 < n \leq 10^{12})$ .

**Output:** ghi ra số lượng thừa số nguyên tố có trong  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
10	2

### Bài 10.9 – (N1009C) Số siêu nguyên tố

**Yêu cầu:** Ta định nghĩa  $n$  là số siêu nguyên tố nếu  $n$  là một số nguyên tố và khi liên tục bỏ đi một chữ số bên phải  $n$  vẫn là số nguyên tố cho tới khi  $n$  chỉ còn 1 chữ số. Ví dụ, số 23 là số siêu nguyên tố vì 23 và 2 là các số nguyên tố, ngoài ra 413 không phải là số siêu nguyên tố vì 3 nguyên tố, 41 nguyên tố nhưng 4

không nguyên tố. Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$ . In ra YES nếu  $n$  là siêu nguyên tố, in ra NO nếu  $n$  không là siêu nguyên tố.

**Dữ liệu vào:** Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^9$ ).

**Dữ liệu ra:** In ra YES nếu  $n$  là số siêu nguyên tố, NO nếu  $n$  ngược lại.

**Ví dụ:**

input	output
23	YES

### Bài 10.10 – (N1010D) Số supper nguyên tố

**Yêu cầu:** Ta mở rộng thêm khái niệm số nguyên tố theo hướng sau. Ta liệt kê các số nguyên tố từ 2 trở đi: 2,3,5,7,11,13,... Một số ta gọi là supper nguyên tố nếu chỉ số của nó cũng là nguyên tố. Ví dụ 3 là một số supper nguyên tố do 3 là số nguyên tố thứ 2 và 2 là một số nguyên tố, ngoài ra 5, 11 cũng là các số supper nguyên tố.

**Yêu cầu:** Viết chương trình in ra số supper nguyên tố thứ  $n$ .

**Input:** Một dòng chứa số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 500$ ).

**Output:** Số supper nguyên tố thứ  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
3	11

### Bài 10.11 – (N1011E) Định đề Bertrand

**Yêu cầu:** Định đề Bertrand phát biểu rằng với bất kỳ số nguyên  $n$ , luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố  $P$  sao cho  $n+1 \leq p \leq 2n$ . Cho  $n$ , đếm số lượng số nguyên tố thuộc đoạn  $[n+1; 2n]$ .

**Input:**

- Dòng 1 ghi số  $T$  là số bộ dữ liệu ( $0 < T \leq 10^6$ ),
- $T$  dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi số nguyên  $n$  tương ứng ( $0 < n \leq 10^6$ ).

**Output:** gồm  $T$  dòng, mỗi dòng ghi số lượng số nguyên tố tương ứng với dữ liệu vào.

**Ví dụ:**

input	output
10	11

**Bài 10.12 – (N1012E) Liệt kê số siêu nguyên tố**

**Yêu cầu:** Với khái niệm số siêu nguyên tố trong bài 10.9 hãy viết chương trình đếm số lượng số siêu nguyên tố có số chữ số là  $n$ .

**Dữ liệu vào:** Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10$ ).

**Dữ liệu ra:** In ra số lượng số siêu nguyên tố có số chữ số là  $n$ .

**Ví dụ:**

input	output
3	11

**Bài 10.13 – (N1013E) Tổng phần nguyên**

**Yêu cầu:** Cho số nguyên dương  $n$ . Hãy tính  $S = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$ .

**Dữ liệu vào:** Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$  ( $0 < n \leq 10^9$ ).

**Dữ liệu ra:** In ra tổng  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
5	10

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP****Bài 10.2 – (N1002B) Số nguyên tố trong đoạn**

**Yêu cầu:** Đếm số lượng số nguyên tố trong đoạn  $[a; b]$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 10000007
using namespace std;
bool isPrime[nmax];
void sieve()
{
    memset(isPrime, true, sizeof(isPrime));
    isPrime[1] = false;
    for(long long i = 2; i * i <= nmax; ++i)
        if(isPrime[i])
            for(long long j = i * i; j <= nmax; j += i)
                isPrime[j] = false;
}
int main()
{
```

```

sieve();
int a,b,dem = 0;
cin>>a>>b;
for(int i=a;i<=b;i++)
    if(isPrime[i]) dem++;
cout<<dem;
}

```

### Bài 10.3 – (N1003B) Số đặc biệt

**Yêu cầu:** Ta gọi dãy  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là dãy đặc biệt nếu tồn tại số nguyên dương  $x > 1$  sao cho tất cả các phần tử của dãy trên đều chia hết cho  $x$ . Cho một dãy đặc biệt A và số nguyên dương k. Hãy tìm số nguyên  $l$  lớn nhất thỏa mãn:  $0 \leq l \leq k$  và  $A \cup \{l\}$  là dãy đặc biệt.

```

#include <bits/stdc++.h>
#define fo(i,a,b) for(int i=a; i<=b; ++i)
using namespace std;
ll b,n,a[100005],t,k;
int main()
{
    cin>>n>>k;
    fo(i,1,n) cin>>a[i];
    fo(i,1,n)
        t=__gcd(t,a[i]);
    for(ll i=2;i*i<=t;i++)
        if (t % i == 0)
        {
            t=i;
            break;
        }
    cout<<k-k%t;
}

```

### Bài 10.4 – (N1004C) Số bin bon

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll t;

```

```

string a;
bool bibo(string s)
{
    ll tcs=0,csln=-1e18,tmp;
    for (ll i=0;i<s.length();++i)
    {
        tcs=tcs+s[i]-48;
        tmp=a[i]-48;
        csln=max(csln,tmp);
    }
    ll n=tcs*10+csln;
    if (n<2) return false;
    for (ll i=2;i*i<=n;++i)
        if (n%i==0) return false;
    return true;
}
int main ()
{
    cin>>t;
    while(t>0)
    {
        cin>>a;
        if (Nibo(a)) cout<<"YES"<<endl;
        else cout<<"NO"<<endl;
        t--;
    }
}

```

### Bài 10.5 – (N1005B) Số nguyên tố fibonacci

**Yêu cầu:** Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$ . In ra số nguyên tố là số Fibonacci lớn nhất không vượt quá  $n$ .

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n;
bool nt(ll n)
{
    if (n<2) return false;
    for (ll i=2;i*i<=n;++i)
        if (n%i==0) return false;
    return true;
}

```



```

}
int main ()
{
    cin>>n;
    ll f1=1,f2=1,f,res;
    do
    {
        f=f1+f2;
        f1=f2;
        f2=f;
        if (nt(f1)) res=f1;
    }
    while(f<=n);
    cout<<res;
}

```

### Bài 10.7 – (N1007B) Ước

```

#include <bits/stdc++.h>
#define nmax 10000001
using namespace std;
int n; long long a,a1; bool nt[nmax];
void Sang(int n)
{
    memset(nt,true,sizeof(nt));
    nt[0]= nt[1] = false;
    for (int i=2;i*i<=n;i++)
        for (int j=i*i;j<=n;j+=i)
            if (nt[i]==true) nt[j]=false;
}
int main()
{
    Sang(nmax-1);
    cin>>n;
    for (int i=1;i<=n;i++)
    {
        cin>>a;
        a1=trunc(sqrt(a));
        if (nt[a1]&&(a1*a1==a)) cout<<"YES"<<endl;
        else cout<<"NO"<<endl;
    }
}

```

**Bài 10.8 – (N1008B) Số thừa số nguyên tố**

**Yêu cầu:** Hãy đếm số thừa số nguyên tố có trong số tự nhiên.

```
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
using namespace std;
int main()
{
    ll n,t=0;
    cin>>n;
    ll x = n, i=2;
    while(i<=sqrt(n)){
        while(x%i==0){
            x/=i;
            t++;
        }
        i++;
    }if (x==1) cout<<t;
    else cout<<t+1;
}
```

**Bài 10.9 – (N1009B) Số siêu nguyên tố**

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll a;
bool nt(ll n)
{
    if (n<2) return false;
    for (ll i=2;i*i<=n;++i)
        if (n%i==0) return false;
    return true;
}
int main ()
{
    cin>>a;
    while(a>0)
    {
        if (nt(a)==false)
        {
            cout<<"NO";
            return 0;
        }
    }
}
```

```

    }
    a/=10;
}
cout<<"YES";
}

```

### Bài 10.10 – (N1010D) Số supper nguyên tố

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#include<bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define fo(i,a,b) for(int i=a;i<=b;i++)
#define nmax 10000000
const ll mod=1e9+7;
ll n,dem=0,f[505],t=0,s=0;
bool prime[nmax+5];
void sang()
{
    memset(prime,true,sizeof(prime));
    prime[1]=false;
    for (long long i=2;i*i<=nmax;i++)
        if (prime[i]==true)
            for (long long j=i*i;j<=nmax;j+=i)
                prime[j]=false;
}
int main()
{
    sang();
    fo(i,1,10005)
        if(prime[i])
        {
            s++;
            if(prime[s]) f[++t]=i;
        }
    cin>>n;
    cout<<f[n];
}

```

### Bài 10.11 – (N1011E) Định đề Bertrand

**Yêu cầu:** Định đề Bertrand phát biểu rằng với bất kỳ số nguyên  $n$ , luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố  $p$  sao cho  $n + 1 \leq p \leq 2n$ . Cho  $n$ , đếm số lượng số nguyên tố thuộc đoạn  $[n + 1; 2n]$ .

```

#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define maxx 2000010
using namespace std;
ll n,a[maxx],t;
bool NT[maxx];
void SNT()
{
    for (ll i=1;i<=maxx;i++)
        NT[i]=true;
    NT[1]=false;
    for (ll i=2;i*i<=maxx;i++)
        if (NT[i])
            for(int j=i*i;j<=maxx;j+=i)
                NT[j]=false;
}
int main()
{
    SNT();
    a[1]=0;
    for (int i=2;i<=maxx;i++)
    {
        if (NT[i]) a[i]=a[i-1]+1;
        else a[i]=a[i-1];
    }
    cin>>t;
    while(t-->0)
    {
        cin>>n;
        cout<<a[2*n]-a[n]<<"\n";
    }
}

```

### Bài 10.12 – (N1012E) Liệt kê số siêu nguyên tố

```

#include <bits/stdc++.h>
#define fo(i,a,b) for(int i=a;i<=b;i++)
#define ll long long
using namespace std;
ll nt(ll n)
{
    fo(i,2,sqrt(n))
        if(n%i==0) return false;
}

```

```

        return true;
    }
    ll n,a[105],b[105],c[105],t=4,k=0;
    int main()
    {
        cin>>n;
        a[1]=2,a[2]=3,a[3]=5,a[4]=7;
        b[1]=1,b[2]=3,b[3]=7,b[4]=9;
        n--;
        while(n--)
        {
            fo(i,1,t)
            fo(j,1,4)
                if(nt(a[i]*10+b[j]))
                    c[++k]=a[i]*10+b[j];
            fo(i,1,k)
                a[i]=c[i];
            t=k;k=0;
        }
        cout<<t;
    }

```

### Bài 10.13 – (N1013E) Tổng phần nguyên

**Yêu cầu:** Cho số nguyên dương  $n$ . Hãy tính  $S = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$ .

Nhận xét thấy: có nhiều đoạn mà  $\left\lfloor \frac{i}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{i+1}{n} \right\rfloor = \dots = \left\lfloor \frac{j}{n} \right\rfloor$ . Vì vậy ta sẽ tìm các đoạn như vậy và nhân với độ dài của đoạn với độ lớn của  $\left\lfloor \frac{i}{n} \right\rfloor$ .

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
long long n,s=0,i=1;
int main()
{
    cin>>n;
    while(i<=n)
    {
        long long t=n/i;
        s+=(n/t-i+1)*t;
    }
}

```

## Algorithm with C++

```
        i=n/t+1;  
    }  
    cout<<s;  
}
```

## CHƯƠNG 11 – ĐỆ QUY

### A. KIẾN THỨC GHI NHỚ

#### 1. Khái niệm đệ quy

Chương trình con đệ quy là các chương trình con có lời gọi nó trong chính chương trình của nó. Điều này có thể hơi khác lạ với phương thức lập trình logic tuần tự nhưng đây lại là một điểm mạnh của các ngôn ngữ lập trình với việc quản lý ngăn xếp chương trình con để cất giữ cảnh hiện tại và tiếp tục giải bài toán ở mức nhỏ hơn cho đến khi gặp trường hợp nhỏ nhất. Chương trình con đệ quy có ưu thế khi giải quyết các bài toán có dạng công thức truy hồi, các bài toán về chia để trị, các bài toán quay lui vét cạn. Một chương trình đệ quy thường có cấu trúc như sau:

```
<kiểu dữ liệu> <tên hàm> (danh sách tham số)
{
    if(trường hợp dừng đệ quy)
        return <kết quả dừng>;
    else
        return <tên hàm>(tham số cấp nhỏ hơn);
}
```

Ta chú ý rằng chương trình con đệ quy phải có hai phần rõ rệt. Một là phần trường hợp dừng – trường hợp nhỏ nhất của bài toán, không có phần trường hợp dừng này hoàn toàn chương trình sẽ lặp tới mức tràn ngăn xếp chương trình con. Hai là trường hợp gọi đệ quy, trường hợp này sẽ đưa bài toán đang giải về bài toán cùng dạng với cấp độ nhỏ hơn. Khi có lời gọi đệ quy, trình biên dịch sẽ liên tục cất giữ cảnh vào bộ nhớ ngăn xếp chương trình con cho tới trường hợp dừng sẽ lại quay trở lại lấy giá trị các biến trong ngăn xếp chương trình con để tính ngược lên lời gọi đầu tiên. Vì vậy khi gọi đệ quy chúng ta lưu ý không để lời gọi quá sâu để dẫn tới việc tràn bộ nhớ ngăn xếp chương trình con.

#### 2. Ví dụ minh họa

Ta xét một ví dụ mở đầu về đệ quy như sau: Tính  $n!$

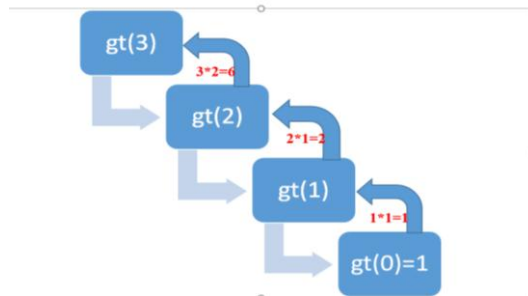
```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
long long gt(long long n){
    if(n==0) return 1; // Trường hợp dừng
    else return n*gt(n-1); //Lời gọi đệ quy cấp thấp hơn
}
int main()
```

```

{
    long long n;
    cin>>n;
    cout<<gt(n);
}

```

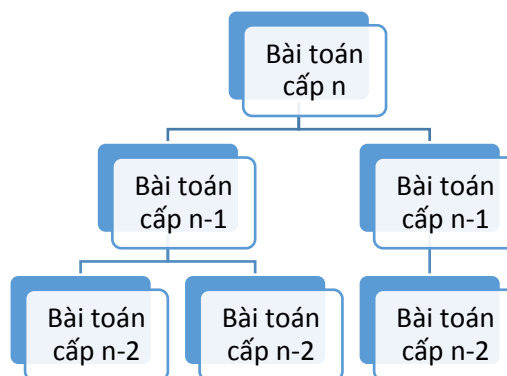
Với chương trình trên khi nhập  $n$  bằng 3 ta có một sơ đồ đệ quy như sau:



Chú ý rằng trong chương trình con đệ quy dứt khoát phải có trường hợp dừng, khi đó mới thoát ra khỏi vòng lặp đệ quy. Câu lệnh đệ quy thường ngắn gọn, súc tích, gần với bản chất toán học của bài toán. Tuy nhiên việc gọi đệ quy quá sâu sẽ phải cất giữ cảnh quá nhiều dẫn tới tràn ngăn xếp chương trình con. Mỗi trình biên dịch ngôn ngữ thường được cấp một dung lượng nhất định cho ngăn xếp chương trình con, ta cũng có thể mở rộng trong phạm vi cho phép, tuy nhiên nó sẽ phụ thuộc nhiều vào bộ nhớ trên máy tính. Thực tế, với việc tính  $n!$  theo cách viết đệ quy không đem lại ưu thế. Vì vậy đây chỉ là một ví dụ mô tả cho đệ quy mà thôi, chúng ta ít sử dụng nó trực tiếp trong tính toán như trên.

### 3. Một số ứng dụng của đệ quy

Đệ quy có nhiều ứng dụng trong lập trình. Một trong những ứng dụng thường gặp là chia để trị và liệt kê tổ hợp. Cấu trúc của các giải thuật chia để trị đưa việc giải quyết bài toán về giải nhiều bài toán cùng dạng nhưng có cấp thấp hơn theo mô hình cây và sử dụng được lời giải ở cấp thấp hơn để độ phức tạp bài



toán giảm xuống:

Điền hình cho dạng toán này được mô tả trong **Ví dụ 11.1**



Ngoài ra để liệt kê các cấu hình tổ hợp thì cấu trúc đệ quy quay lui rất thuận tiện cho việc liệt kê này.

Ta có mô hình liệt kê tổ hợp như sau:

```
void Try (int i)//Xây dựng thành phần thứ i
{
    <Xác định Si>;
    for(xi thuộc Si)
    {
        <ghi nhận thành phần thứ i>
        if (tìm thấy nghiệm) <in ra nghiệm>;
        else Try(i+1);
        <loại thành phần i>;
    }
}
```

Trong đó **Si** là tập hợp các giá trị mà **xi** có thể nhận được với **xi** là thành phần thứ **i** của cấu hình ta cần xây dựng.

Ta xem xét ví dụ minh họa cho dạng toán này trong **Ví dụ 11.2**

## B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 11.1:** Xét chương trình tính  $a^n \bmod (10^9 + 7)$  bằng chia để trị với độ phức tạp  $O(\log n)$ .

```
#include <bits/stdc++.h>
#define mod 1000000007
#define ll long long
using namespace std;
ll mu(ll a, ll n) // tính a^n%mod bằng đệ quy chia để trị
{
    if(n==0) return 1;
    ll tam = mu(a,n/2);
    tam = (tam*tam)%mod;
    if(n%2==1) tam = (tam*a)%mod;
    return tam;
}
int main()
{
    long long a,n;
    cin>>a>>n;
    cout<<mu(a,n); // độ phức tạp thuật toán là O(logn)
}
```

Chú ý rằng nếu chúng ta sử dụng vòng lặp for để tính  $a^n$  thì độ phức tạp của giải thuật sẽ là  $O(n)$  – chỉ có thể giải được cho  $n$  cỡ  $10^6 - > 10^8$  trong thời gian 1 giây.

**Ví dụ 11.2:** Ta xét ví dụ liệt kê dãy nhị phân có độ dài  $n$  như sau:

```
#include<bits/stdc++.h>
#define ll long long
using namespace std;
int x[30],n;
void Xuat()
{
    for(int k=1;k<=n;k++) cout<<x[k];
    cout<<endl;
}
void Try(ll i)
{
    for(int j=0;j<=1;j++)
    {
        x[i]=j;
        if(i==n) Xuat();
        else Try(i+1);
    }
}
int main()
{
    cin>>n;
    Try(1);
}
```

Lời gọi đệ quy vết cặn thường bắt đầu với  $i = 1$  nghĩa là xây dựng thành phần thứ nhất của  $i$ .

**Ví dụ 11.3:** Chương trình sau sẽ liệt kê ra các hoán vị của tập  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Ta biết khi xây dựng hoán vị thì các thành phần xây dựng không được phép lặp lại. Vì vậy ta phải sử dụng một mảng đánh dấu  $d[]$  để đánh dấu cho các giá trị đã được chọn để không chọn lại. Đoạn chương trình liệt kê hoán vị như sau:

```

#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define fo(i,a,b) for(int i=a;i<=b;i++)
using namespace std;
ll n,x[30],d[30];
void Xuat()
{
    fo(k,1,n) cout<<x[k];
    cout<<'\\n';
}
ll Try(ll i)
{
    fo(j,1,n)
    if(d[j]==0)// nếu j chưa được chọn
    {
        x[i]=j;//chọn x[i] là j
        d[j]=1;//đánh dấu j đã được chọn
        if(i==n) Xuat();// in ra khi chọn tới xn
        else Try(i+1); // chưa chọn đến xn thì chọn tiếp
        d[j]=0;// quay lại bỏ đánh dấu để chọn tiếp sau
    }
}
int main()
{
    cin>>n;
    Try(1);
}

```

Bên cạnh phương pháp này kể từ phiên bản C14, ta có hàm `next_permutation()` để sinh hoán vị kế tiếp, đây là một cách code khá gọn gàng như sau:

```

#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
long long n,a[30];
int main()
{
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;i++) a[i]=i;
    do
    {
        for(int i=1;i<=n;i++) cout<<a[i];
        cout<<'\\n';
    }
}

```

```

    }
    while(next_permutation(a+1,a+n+1));
}

```

## C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

### Bài 11.1 – (N1101A) Số tập con

**Yêu cầu:** Hãy đếm số tập hợp con của tập  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** In ra số các tập con của tập  $X$ . Kết quả có thể rất lớn nên ta sẽ chia lấy dư cho  $10^9 + 7$  khi in ra.

**Ví dụ:**

input	output
3	8

### Bài 11.2 – (N1102A) Liệt kê nhị phân

**Yêu cầu:** Hãy in ra các dãy nhị phân độ dài  $n$

**Input:** Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 20$ )

**Output:** In ra các dãy nhị phân theo thứ tự từ điển.

**Ví dụ:**

input	output
2	00 01 10 11

### Bài 11.3 – (N1103A) Liệt kê tam phân

**Yêu cầu:** Dãy tam phân là dãy chỉ gồm các ký tự 0, 1, 2 dùng để biểu diễn các số trong hệ cơ số 3. Ví dụ ta có các dãy tam phân độ dài 2 là: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22. Hãy liệt kê theo thứ tự từ điển các dãy tam phân độ dài  $n$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên không âm  $n$  ( $0 < n \leq 10$ ).

**Kết quả:** In ra các dãy tam phân theo thứ tự từ điển.

**Ví dụ:**

input	output
2	00 01 02 10 11

	12
	20
	21
	22

#### Bài 11.4 – (N1104B) Liệt kê chỉnh hợp

**Yêu cầu:** Trong toán học, chỉnh hợp là cách chọn những phần tử từ một nhóm lớn hơn và có phân biệt thứ tự, trái với tổ hợp là không phân biệt thứ tự.

Theo định nghĩa, chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử là bộ sắp thứ tự gồm  $k$  phần tử của tập hợp gồm  $n$  phần tử. Hãy liệt kê các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử của  $X = \{1, 2, \dots, n\}$

**Dữ liệu nhập:** Một dòng một gồm  $k, n$  ( $1 \leq k \leq n \leq 8$ ).

**Kết quả:** Mỗi dòng in một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$ , các chỉnh hợp in theo thứ tự từ điển.

**Ví dụ:**

input	output
2 3	1 2 1 3 2 1 2 3 3 1 3 2

#### Bài 11.5 – (N1105C) Liệt kê chỉnh hợp tập A

**Yêu cầu:** Trong bài tập này bạn được cho một tập hợp A gồm  $n$  phần tử số nguyên khác nhau. Bạn hãy liệt kê các chỉnh hợp không lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử này.

**Dữ liệu nhập:**

- Dòng một gồm  $k, n$  ( $1 \leq k \leq n \leq 8$ ).
- Dòng hai là  $n$  phần tử của tập A.

**Kết quả:**

- Mỗi dòng in một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$ , các chỉnh hợp in theo thứ tự từ điển.
- Dòng cuối cùng in số lượng chỉnh hợp liệt kê được.

**Ví dụ:**

input	output
2 3 1 9 4	1 4 1 9

	4 1
	4 9
	9 1
	9 4
	6

### Bài 11.6 – (N1106B) Liệt kê tổ hợp

**Yêu cầu:** Trong toán học, tổ hợp chập  $k$  của  $n$  là cách chọn tập con gồm  $k$  phần tử trong tập có  $n$  phần tử. Ở đây, bạn được yêu cầu in ra tất cả các tổ hợp chập  $k$  của tập  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Dữ liệu:** Một dòng một gồm  $k, n$  ( $1 \leq k \leq n \leq 8$ ).

**Kết quả:**

- Mỗi dòng in một tổ hợp chập  $k$  của theo thứ tự từ điển.
- Dòng cuối cùng in số lượng tổ hợp liệt kê được.

**Ví dụ:**

input	output
2 3	1 2 1 3 2 3 3

### Bài 11.7 – (N1107C) Liệt kê tổ hợp tập A

**Yêu cầu:** Hãy in ra các tổ hợp chập  $k$  của tập số nguyên A gồm  $n$  phần tử.

**Dữ liệu:**

- Dòng đầu tiên một gồm hai số nguyên  $k, n$  ( $1 \leq k \leq n \leq 8$ ).
- Dòng tiếp theo gồm  $n$  số nguyên trong tập A.

**Kết quả:**

- Mỗi dòng in một tổ hợp chập  $k$  của theo thứ tự từ điển.
- Dòng cuối cùng in số lượng tổ hợp liệt kê được.

**Ví dụ:**

input	output
2 3 1 9 4	1 4 1 9 4 9 3

**Bài 11.8 – (N1108B) Liệt kê xâu ký tự AB**

**Yêu cầu:** Hãy liệt kê các xâu độ dài  $n$  chỉ gồm hai ký tự 'A' hoặc 'B' mà không có hai ký tự 'B' nào đứng cạnh nhau.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $n \leq 20$ ).

**Kết quả:** In ra các xâu ký tự theo thứ tự từ điển.

**Ví dụ:**

input	output
3	AAA AAB ABA BAA BAB

**Bài 11.9 – (N1109D) Liệt kê xâu hợp lệ**

**Yêu cầu:** Hãy liệt kê các cách đặt  $n$  dấu mở ngoặc và  $n$  dấu đóng ngoặc sao cho biểu thức đó hợp lệ.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi số nguyên  $n$  ( $n \leq 20$ ).

**Kết quả:** In ra các xâu ký tự theo thứ tự từ điển.

**Ví dụ:**

input	output
3	AAA AAB ABA BAA BAB

**Bài 11.10 – (N1110E) Liệt kê xâu con**

**Yêu cầu:** Hãy liệt kê tất cả các xâu con khác nhau của xâu S.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi xâu S ( $S.length \leq 15$ ) gồm các ký tự từ a đến z.

**Kết quả:** In ra các xâu con khác nhau của S theo thứ tự từ điển.

**Ví dụ:**

input	output
abc	a ab abc ac b bc c

### Bài 11.11– (N1111D) Số mũ 1

**Yêu cầu:** Cho hai số nguyên  $a, n$ . Tính  $a^n \% (10^9 + 7)$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $a, n (0 < a, n \leq 10^9)$ .

**Kết quả:** In ra kết quả là tổng  $a^n \% (10^9 + 7)$ .

**Ví dụ:**

input	output
2 3	8

### Bài 11.12 – (N1112E) Số mũ 2

**Yêu cầu:** Cho số nguyên  $n, K$  tính  $S = (1.2^0 + 2.2^1 + \dots + n.2^{n-1}) \% K$ .

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $n, K (0 < n, K \leq 10^9)$ .

**Kết quả:** In ra kết quả là tổng  $S$ .

**Ví dụ:**

input	output
1 10	1

### Bài 11.13 – (N1113E) Số mũ 3

**Yêu cầu:** Cho số nguyên  $n$ , tính  $S = 1 + a^1 + a^2 + \dots + a^n$ . Kết quả có thể rất lớn nên chia lấy dư cho  $10^9 + 7$  khi in ra.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi hai số nguyên  $a, n (0 < a, n \leq 10^9)$ .

**Kết quả:** In ra kết quả là tổng  $S \% (10^9 + 7)$ .

**Ví dụ:**

input	output
2 9	1023

### Bài 11.14 – (N1114E) Quân hậu

**Yêu cầu:** Cho bàn cờ vua có kích cỡ  $n \times n$ . Hãy tìm cách xếp  $n$  quân hậu trên bàn cờ sao cho các quân hậu không ăn được nhau.

**Dữ liệu:** Một dòng ghi một số nguyên dương  $n (0 < n \leq 12)$

**Kết quả:** In ra kết quả là số cách sắp xếp  $n$  quân hậu trên bàn cờ.

**Ví dụ:**

input	output
8	92



**D. HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP****Bài 11.4 – (N1104B) Liệt kê chỉnh hợp**

```

#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define fo(i,a,b) for(int i=a;i<=b;i++)
#define nmax 10000005
using namespace std;
ll n,k,a[30],b[30],dem=0;
ll qlui(ll x)
{
    fo(i,1,n)    if(N[i]==0)
    {
        a[x]=i;
        b[i]=1; // Đánh dấu i đã được chọn
        if(x==k)
        {
            fo(j,1,k) cout<<t[a[j]]<<' ';
            cout<<'\n';
        }
        else qlui(x+1);
        b[i]=0; // Bỏ đánh dấu để quay lui chọn lại
    }
}
int main()
{
    cin>>k>>n;
    fo(i,1,n) cin>>t[i];
    sort(t+1,t+1+n);
    qlui(1);
    cout<<dem;
}

```

**Bài 11.5 – (N1105B) Liệt kê chỉnh hợp tập A**

```

#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define fo(i,a,b) for(int i=a;i<=b;i++)
#define nmax 10000005
using namespace std;
ll n,k,a[30],b[30],t[30],dem=0;
ll Try(ll x)
{

```

```

fo(i,1,n)    if(N[i]==0)
{
    a[x]=i;
    b[i]=1;
    if(x==k)
    {
        fo(j,1,k) cout<<t[a[j]]<<' ';
        cout<<'\n';
        dem++;
    }
    else Try(x+1);
    b[i]=0;
}
}
int main()
{
    cin>>k>>n;
    fo(i,1,n) cin>>t[i];
    sort(t+1,t+1+n);
    Try (1);
    cout<<dem;
}

```

### Bài 11.6 – (N1105B) Liệt kê tổ hợp

**Yêu cầu:** Trong toán học, tổ hợp chập  $k$  của  $n$  là cách chọn tập con gồm  $k$  phần tử trong tập có  $n$  phần tử. Ở đây, bạn được yêu cầu in ra tất cả các tổ hợp chập  $k$  của tập  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ .

```

#include <bits/stdc++.h>
#define fo(i,a,b) for(int i=a;i<=b;i++)
using namespace std;
long long n,k,a[20],t=1,m=1;
void Try(int i)
{
    fo(j,a[i-1]+1,n-k+i)
    {
        a[i]=j;
        if(i==k)
        {
            fo(N,1,i) cout<<a[b]<<' ';
            cout<<'\n';
        }
    }
}

```

```

        else Try(i+1);
    }
}
int main()
{
    cin>>n>>k;
    fo(i,1,n)
    {
        t*=i;
        if(i<=min((n-k),k)) m=m*i*i;
        else if(i<=max((n-k),k)) m*=i;
    }
    cout<<t/m<<"\n";
    a[0]=0;
    Try(1);
}

```

### Bài 11.8 – (N1108C) Liệt kê xâu ký tự AB

**Yêu cầu:** Hãy liệt kê các xâu độ dài n chỉ gồm hai ký tự 'A' hoặc 'B' mà không có hai ký tự 'B' nào đứng cạnh nhau.

```

#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,k,x[25];
bool check(ll x[]){
    for(int i = 1;i<=k;i++){
        if(x[i]=='B' and x[i+1]=='B'){
            return false;
        }
    }
    return true;
}
void Xuat(ll x[])
{
    for(int i = 1;i<=k;i++){
        cout<<char(x[i]);
    }
    cout<<endl;
}
void Try(ll i){
    for(int j = 'A';j<='B';j++){

```

```

        x[i]=j;
        if(i==k){
            if(check(x)) Xuat(x);
        }
        else Try(i+1);
    }
}
int main()
{
    cin>>k;
    Try(1);
}

```

### Bài 11.9 – (N1109D) Liệt kê xâu hợp lệ

**Yêu cầu:** Hãy liệt kê các cách đặt  $n$  dấu mở ngoặc và  $n$  dấu đóng ngoặc sao cho biểu thức đó hợp lệ.

```

#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
ll n,k,x[25];
bool check(ll x[]){
    for(int i = 1;i<=k;i++){
        if(x[i]=='B'and x[i+1]=='B') return false;
    }
    return true;
}
void Xuat(ll x[])
{
    for(int i = 1;i<=k;i++){
        cout<<char(x[i]);
    }
    cout<<endl;
}
void Try(ll i){
    for(int j = 'A';j<='B';j++){
        x[i]=j;
        if(i==k){
            if(check(x)) Xuat(x);
        }
        else Try(i+1);
    }
}

```

```

}
int main()
{
    cin>>k;
    Try(1);
}

```

### Bài 11.10 – (N1110E) Liệt kê xâu con

**Yêu cầu:** Hãy liệt kê các cách đặt  $n$  dấu mở ngoặc và  $n$  dấu đóng ngoặc sao cho biểu thức đó hợp lệ.

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
string s, t;
int n;
set < string > res;
void Try(int x)
{
    if(x > n)
    {
        if(t.size() != 0) res.insert(t);
        return;
    }
    for(int i = 0; i <= 1; i++)
    {
        if(i) t += s[x];
        Try(x + 1);
        if(i) t.erase(t.size() - 1, 1);
    }
}
int main()
{
    cin >> s;
    n = s.size() - 1;
    Try(0);
    for(auto s : res) cout << s << '\n';
}

```

### Bài 11.11 – (N1111D) Số mũ 1

```

#include<bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define mod 1000000007

```

```

using namespace std;
ll power(ll a, ll n)
{
    if(n == 0) return 1;
    ll tam = power(a,n/2);
    tam= (tam*tam)%mod;
    if(n % 2 == 1)
        tam=(tam*a)%mod;
    return tam;
}
int main()
{
    ll a,n;
    cin>>a>>n;
    cout<<power(a,n);
}

```

### Bài 11.12 – (N1112E) Số mũ 2

**Yêu cầu:** Cho số nguyên  $n$ ,  $K$  tính  $S = (1.2^0 + 2.2^1 + \dots + n.2^{n-1}) \% K$ .

Trong bài này, ta sử dụng hàm tính nhanh mũ và phép nhân chia lấy dư chống tràn như sau:

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
//Nhân chống tràn
long long nhan(long long a,long long b,long long mod)
{
    a%=mod;
    b%=mod;
    long long q=(long double) a*b/mod;
    return ((a*b-q*mod)%mod+mod)%mod;
} // Đây là một trick khá hay trong C++
long long mu(long long x,long long y,long long z)
{
    if(y==0) return 1;
    if(y==1) return x%z;
    long long r=mu(x,y/2,z);
    r=nhan(r,r,z);
    if(y%2==1) r=nhan(r,x,z);
    return r;
}
int main()

```

```
{
    long long n,k;
    while(cin>>n>>k)
        cout<<nhan(mu(2,n,k),(n-1),k)+1<<'\\n';
}
```

### Bài 11.13 – (N1113E) Số mũ 3

**Yêu cầu:** Cho số nguyên  $n$ , tính  $S = 1 + a^1 + a^2 + \dots + a^n$ . Kết quả có thể rất lớn nên chia lấy dư cho  $10^9 + 7$  khi in ra.

Ta có  $S = 1 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ . Từ đó ta sử dụng phép mũ chia để trị và định lý Fermat nhỏ để chia lấy dư cho một số nguyên tố để có được kết quả.

Nội dung định lý Fermat nhỏ như sau: “Với  $p$  là số nguyên tố và  $a \geq 2$  thì  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ”. Từ đó suy ra đẳng thức  $\frac{a}{b} \% p = ((a \% p) \times (b^{p-2} \% p)) \% p$ .

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int mod=1e9+7;
long long mu(long long a, long long b)
{
    if (N==0) return 1;
    long long tmp=mu(a,b/2);
    tmp=(tmp*tmp)%mod;
    if (N%2==1) tmp=(tmp*a)%mod;
    return tmp;
}
long long a,n;
int main()
{
    cin>>a>>n;
    if (a==1) {cout<<n+1<<'\\n';return 0;}
    cout<<((mu(a,n+1)-1)*mu(a-1,mod-2))%mod;//Fermat nhỏ
}
```

### Bài 11.14 – (N1114E) Quân hậu

**Yêu cầu:** Cho bàn cờ vua có kích cỡ  $n \times n$ . Hãy tìm cách xếp  $n$  quân hậu trên bàn cờ sao cho các quân hậu không ăn được nhau.

Ở đây ta sử dụng kỹ thuật đệ quy quay lui và đánh dấu các hàng, cột, chéo chính, chéo phụ.

```

#include <bits/stdc++.h>
#define fo(i,a,b) for(int i=a;i<=b;i++)
#define ll long long
using namespace std;
ll n,q[20],s=1,t,dem=0;
bool ok;
void Try(ll r) //Quay lui vết cạn
{
    fo(j,1,n)
    {
        ok=true;
        fo(i,1,r-1) //Đánh dấu hàng, cột, chéo chính phụ
            if(q[i]==j||q[i]==j+r-i||q[i]==j-r+i) ok=false;
        if(ok)
        {
            q[r]=j;
            if(r==n) dem++;
            else Try(r+1);
        }
    }
}
int main()
{
    cin>>n;
    Try(1);
    cout<<dem;
}

```



## KẾT LUẬN

Đề tài đã tạo được một hệ thống các ví dụ, bài tập nhập môn lập trình thuật toán với ngôn ngữ C<sup>++</sup> phong phú đa dạng, phân hóa mức độ từ thấp đến cao theo thang đo Bloom (2001); hệ thống ví dụ và bài tập này sẽ góp phần giúp giáo viên, học sinh sử dụng trong thực tế học tập và giảng dạy lập trình thuật toán một cách dễ dàng hơn.

Đề tài đã cài đặt thành công website JUDGE có tên <http://laptrinhphothong.vn/> - một dạng elearning trong giảng dạy lập trình là một công cụ rất hữu hiệu đang được nhiều quốc gia phát triển trên thế giới áp dụng.

Đề tài góp phần tạo ra một sân chơi học tập và giảng dạy cho môn Tin học lập trình trong xu thế của thời đại 4.0.

Hướng phát triển kế tiếp của đề tài là trên cơ sở cài đặt công cụ <http://laptrinhphothong.vn/> - trang web có khả năng biên dịch, thông dịch các mã nguồn của nhiều loại ngôn ngữ; chúng tôi sẽ biên tập tiếp tục cuốn tài liệu nhập môn với Python và cuốn tài liệu nâng cao lập trình thuật toán với C<sup>++</sup>, đồng thời hoàn thiện các tính năng nâng cao khác cho website <http://laptrinhphothong.vn.>

## **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1. Bộ Giáo dục và Đào tạo, Chương trình giáo dục phổ thông môn Tin học 2018. Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT, Hà Nội.
2. Hồ Sỹ Đàm, Sách giáo khoa Tin học 10 (2011). Nhà xuất bản giáo dục, Hà Nội.
3. Hồ Sỹ Đàm, Sách giáo khoa Tin học 11 (2011). Nhà xuất bản giáo dục, Hà Nội.
4. Hồ Sỹ Đàm, Sách bài tập Tin học 11 (2011). Nhà xuất bản giáo dục, Hà Nội.
5. Stephen Prata, C Prime Plus (2014). Adison Wesley, NewYork.
6. Thomas H. Cormen, Introduce to Algorithm (2001). The MIT Press.