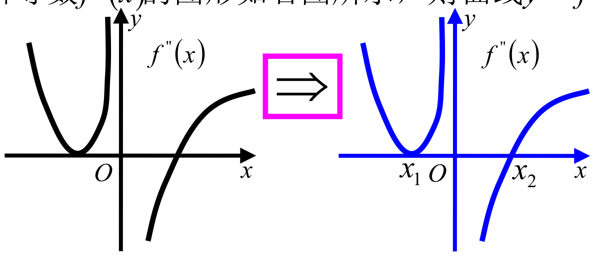
2015年考研数学一真题学习训练网络

试题考点结构

核心弹头

第一部分：单选题（八×4 分）

(1)设函数在$(-\infty,+\infty)$上连续，其二阶导数$f''(x)$的图形如右图所示，则曲线$y=f(x)$的拐点个数为



$(A)0$

$(B)1$

$(C)2$

$(D)3$

解：由右图知$f''(x_1)=f''(x_2)=0$，$f''(0)$不存在，其余点上二阶导数$f''(x)$存在且为非零，则曲线$y=f(x)$最多有三个拐点(? ?)，但在$x=x_1$的两侧二阶导数不变号。因此，$x=x_1$不是拐点，而在$x=0$两侧、$x=x_2$两侧，二阶导数均变号；

综上，曲线$y=f(x)$有两个拐点；选择C

(2)设$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$是二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的一个特解，则

$(A)a=-3$，$b=2$，$c=-1$

$(B)a=3$，$b=2$，$c=-1$

$(C)a=-3$，$b=2$，$c=1$

$(D)a=3$，$b=2$，$c=1$

解：把$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$带入微分方程，使用待定系数法即可求解$a$，$b$，$c$。

由$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$得：$\begin{cases} y'=e^{2x}+e^x+xe^x-\frac{1}{3}e^x=e^{2x}+\frac{2}{3}e^x+xe^x \\ y''=2e^{2x}+e^x+e^x+xe^x-\frac{1}{3}e^x=2e^{2x}+\frac{5}{3}e^x+xe^x \end{cases}$，将$y$、$y'$、$y''$带入，

得$2e^{2x}+\frac{5}{3}e^x+xe^x+a\left(e^{2x}+\frac{2}{3}e^x+xe^x\right)+b\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x\right]-ce^x=0$，

即$2e^{2x}+\frac{5}{3}e^x+xe^x+\left(ae^{2x}+\frac{2a}{3}e^x+axe^x\right)+\left(\frac{b}{2}e^{2x}-\frac{b}{3}e^x+bxe^x\right)-ce^x=0$，

有$\begin{cases} 2+a+\frac{b}{2}=0 \\ \frac{5}{3}+\frac{2a}{3}-\frac{b}{3}-c=0 \\ 1+a+b=0 \end{cases}$，$\begin{cases} 1-\frac{b}{2}=0 \\ 1+a+b=0 \\ 5+2a-b-3c=0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} b=2 \\ a=-3 \\ c=-1 \end{cases}$$\Rightarrow$综合得，选择A

(3)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的

(A)收敛点，收敛点

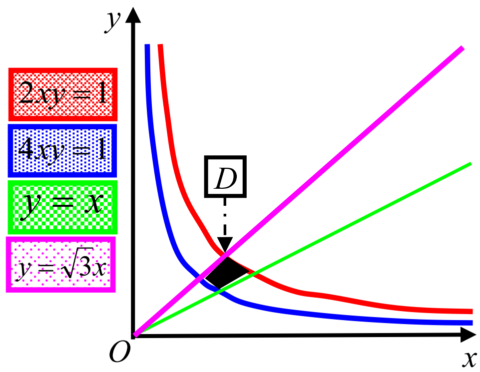
(B)收敛点，发散点

(C)发散点，收敛点

(D)发散点，发散点

解：用阿贝尔定理(？？？)，由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛知，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$x=1$处收敛，在$x=-1$处发散，其收敛区间为$(-1,1)$；由此得，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在$x=2$处收敛，在$x=0$处发散，其收敛区间为$(0,2)$；幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$整体求导一次$\left(\begin{array}{l}\text{即逐项求导}\\\text{一次}\end{array}\right)$，得到幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}$的收敛区间也为$(0,2)$【为什么？？】，所以幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛区间也是$(0,2)$，而$x=\sqrt{3}\in(0,2)$、$x=3\notin(0,2)$；综合得到，$x=\sqrt{3}$是收敛点、$x=3$是发散点，选择B。

(4)设D是第一象限中曲线$2xy=1, 4xy=1$与直线$y=x$，$y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f(x, y)$在D上连续，则$\iint\limits_D f(x, y)dxdy=$



(A)$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

(B)$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

(C)$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

(D)$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

解：画出积分区域D，将二重积分化为一重积分。

曲线$2xy=1, 4xy=1$的极坐标方程分别为：

$r=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$，$r=\dfrac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$，【为什么？？？】

直线$y=x$，$y=\sqrt{3}x$的极坐标方程分别为，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$；

综上，$\iint\limits_D f(x, y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$，选择B

(5)设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\d\\d^2\end{bmatrix}$，若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$有无穷多个解的充分必要条件为

(A)$a\notin\Omega$，$d\notin\Omega$
(B)$a\notin\Omega$，$d\in\Omega$
(C)$a\in\Omega$，$d\notin\Omega$
(D)$a\in\Omega$，$d\in\Omega$

n 元线性方程组 $\mathbf{A}x=\boldsymbol{b}$ 的解与矩阵秩的**充分必要关系**：
①无解，就是系数矩阵少（隐含未知数少）、常数矩阵多；形如 $0\bullet x_i=1$；
②唯一解：系数矩阵与常数矩阵恰好一一对应；形如 $2\bullet x_i=1$；
③无穷解；就是系数矩阵和常数矩阵一样少；形如 $0\bullet x_i=0$。

解：方法一：线性方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$有$\infty$解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})<n$，即有

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&3&a^2-1&d^2-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&a^2-3a+2&d^2-3d+2\end{bmatrix}$$

则有$\begin{cases}a^2-3a+2=0\\d^2-3d+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1或2\\d=1或2\end{cases}\Leftrightarrow a\in\Omega，d\in\Omega$

$Ax=b$
无解：$R(A)<R(A,\ b)$
唯一解：$R(A)=R(A,\ b)=n$
无穷解：$R(A)=R(A,\ b)<n$
$|A|=0$无解或无穷解
$|A|\neq0$唯一解

方法二：线性方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$有$\infty$解的必要条件$|\boldsymbol{A}|=0$，即有

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot1\bullet\begin{vmatrix}2&a\\4&a^2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot1\bullet\begin{vmatrix}1&a\\1&a^2\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot1\bullet\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}$$

$=(2a^2-4a)-(a^2-a)+2=a^2-3a+2=(a-1)\cdot(a-2)\Rightarrow a=1或2$

当$a=1$时，线性方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$有$\infty$解，得到……

当$a=2$时，线性方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$有$\infty$解，得到……

综上，选择D

(6)设二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$在正交变换$x=\boldsymbol{P}y$下的标准型为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$，若$Q=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)$，则$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$在正交变换$x=\boldsymbol{Q}y$下的标准型为

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$
(B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$
(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$
(D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

解：f在正交变换$x=\boldsymbol{P}y$下的标准型为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，意味着A的特征值为$2,1,-1$；【为什么？】

又$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$，说明$2,1,-1$的特征向量依次为$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$；【为什么？？】

由$\boldsymbol{e}_3$是-1的特征向量知$-\boldsymbol{e}_3$仍然是-1的特征向量，所以$Q=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)$，对应的特征值依次为$2,-1,1$，从而得到$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$在正交变换$x=\boldsymbol{Q}y$下的标准型为$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，综上，选择A

(7)若A，B为任意两个随机事件，则

(A)$P(AB)\le P(A)P(B)$

(B)$P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C)$P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

(D)$P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

解：根据概率加法公式：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

则$P(A+B)+P(AB)=P(A)+P(B)$，由于$(AB)\subset(A+B)$，所以，$P(A+B)\ge P(AB)$，由此得到

$P(A)+P(B)=P(A+B)+P(AB)\ge 2P(AB)$，所以：$P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$，综上，选择C

(8)设随机变量X，Y不相关，且$E[X]=2$，$E[Y]=1$，$D[X]=3$，则$E[X(X+Y-2)]=$

$(A)-3$

$(B)3$

$(C)-5$

$(D)5$

解：$E[X(X+Y-2)]=E[X^2+XY-2X]=E(X^2)+E(XY)-E(2X)$

$=D[X]+(E[X])^2+E(X)\bullet E(Y)-2E(X)=3+4+2-4=5$

第二部分：填空题（六×4 分）

$(9)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$

解：方法一：原极限在极限变量条件下，属于$\dfrac{0}{0}$型，考虑使用洛必达法则，即有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{-\sin x}{2x}\right)=-\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan x}{2x}=-\dfrac{1}{2}\end{cases};$$

方法二：利用等价无穷小代换(注意到等价无穷小的条件)，

$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]$，在$x\to 0$时，$(\cos x-1)\to 0$，从而

$\ln[1+(\cos x-1)]\to\cos x-1$，而$x\to 0$时，$\cos x-1\to\dfrac{-x^2}{2}$，所以

$x\to 0$时，$\ln\cos x\to\dfrac{-x^2}{2}$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

$(10)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=$

解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}dx+2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=0+2\cdot\left(\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

(11)若函数$z=z(x,y)$由方程$e^z+xyz+x+\cos x=2$确定，则$dz|_{(0,1)}=$

解：根据方程代表的隐函数，构造关于x、y、z三个独立变量的函数$F(x,y,z)=e^z+xyz+x+\cos x-2$，

则$F_x'(x,y,z)=yz+1-\sin x$；$F_y'(x,y,z)=xz$；$F_z'(x,y,z)=e^z+xy$；

而根据隐函数的偏导数公式，有：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$；根据全微分的定义，有

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$，所以，$dz=-\dfrac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\cdot dx-\dfrac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\cdot dy=-\dfrac{yz+1-\sin x}{e^z+xy}\cdot dx-\dfrac{xz}{e^z+xy}\cdot dy$；

当$x=0$，$y=1$时，由原方程得$e^z+0\cdot 1\cdot z+0+\cos 0=2\Rightarrow e^z=1\Rightarrow z=0$，

$\therefore dz|_{(0,1)}=-\dfrac{F_x'(0,1,0)}{F_z'(0,1,0)}\cdot dx-\dfrac{F_y'(0,1,0)}{F_z'(0,1,0)}\cdot dy=-\dfrac{1\cdot 0+1-\sin 0}{e^0+0\cdot 1}\cdot dx-\dfrac{0\cdot 0}{e^0+0\cdot 1}\cdot dy=-dx$

(12)设Ω是由平面$x+y+z=1$与三个坐标平面所围成的空间区域，则$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$

解：方法一：利用直角坐标化三重积分为三次积分进行计算，以及使用先二后一积分法

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y)dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}3zdxdydz$$

而$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y)dxdydz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+2y)dz$

$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x+2y)dy\cdot\int_0^{1-x-y}1dz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x+2y)\cdot(1-x-y)dy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x+2y)\cdot(1-x-y)dy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\left[(-2)y^2+(2-3x)y+\left(x-x^2\right)\right]dy=\int_0^1\left[\frac{-2}{3}y^3+\frac{2-3x}{2}y^2+\left(x-x^2\right)y\right]\Bigg|_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{-2}{3}(1-x)^3+\frac{2-3x}{2}(1-x)^2+\left(x-x^2\right)(1-x)\right]dx=\int_0^1\left[\frac{2+x}{6}\cdot(1-x)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\left(x^3-3x+2\right)dx=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}3zdxdydz=3\cdot\int_0^1z\frac{(1-z)^2}{2}dz=\frac{3}{2}\cdot\int_0^1\left(z^3-2z^2+z\right)dz=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{z^4}{4}-\frac{2}{3}z^3+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

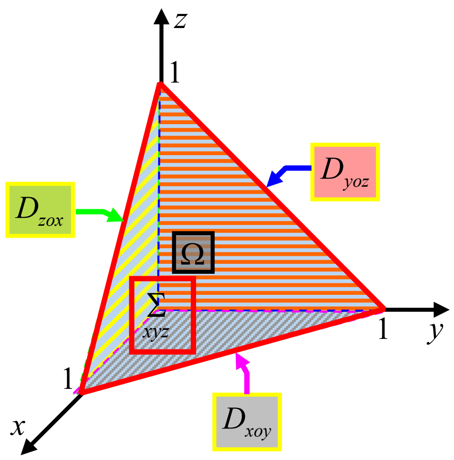
$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y)dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}3zdxdydz=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

曲面$\underset{xyz}{\Sigma}$方程：$x+y+z=1$；其法向量$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\lambda)$

即$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}},\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}},\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)$

$$\begin{cases}\text{曲面}\underset{xyz}{\Sigma}\text{投影到}xoy\text{平面得到}D_{xoy}\text{，方程为}\begin{cases}\text{令}z=0\\x+y=1\end{cases},\quad dxdy=dS\cdot\cos\lambda;\\ \text{曲面}\underset{xyz}{\Sigma}\text{投影到}yoz\text{平面得到}D_{yoz}\text{，方程为}\begin{cases}\text{令}x=0\\y+z=1\end{cases},\quad dydz=dS\cdot\cos\alpha;\\ \text{曲面}\underset{xyz}{\Sigma}\text{投影到}zox\text{平面得到}D_{zox}\text{，方程为}\begin{cases}\text{令}y=0\\z+x=1\end{cases},\quad dzdx=dS\cdot\cos\beta;\end{cases}$$



方法二：分类截面法

$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(x)dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}(2y)dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}(3z)dxdydz$，由于积分区域$\Omega$

$=\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz+2\iiint\limits_{\Omega}ydxdydz+2\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，

【截面法的特点，被积函数是单个x变量的函数$f(x)$，截面选取为平行于yoz平面】

曲面$\begin{cases}x+y+z=1\\x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$确定的区域$\Omega$对于$\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz$、$\iiint\limits_{\Omega}ydxdydz$、$\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$具有轮换相等性，

因而$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz$，$\begin{cases}\text{截面}S\text{：}\ y+z\le 1-x\\ dS=\frac{1}{2}(1-x)(1-x)\text{【投影的视角】}\end{cases}$,$0\le x\le 1$

$\therefore\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=6\int_0^1xdx\iint\limits_{y+z\le 1-x}1dydz=6\int_0^1x\bullet\frac{(x-1)^2}{2}dx$

$=3\int_0^1x^3-2x^2+xdx=3\bullet\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=3\cdot\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)-0\right]=\frac{1}{4}$

$(13)n$阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

解：方法一：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{按第一行展开}}{\overbrace{\Rightarrow}} D_n = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot D_{n-1} + (-1)^{1+n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow D_n = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot D_{n-1} + (-1)^{1+n} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^2 \bullet 2D_{n-1} + (-1)^{2n} \bullet 2 = 2D_{n-1} + (2)$，则

$D_n = 2D_{n-1} + 2 = 2^1 \cdot D_{n-1} + 2^1 = 2^1 \cdot (2^1 \cdot D_{n-2} + 2^1) + 2 = 2^2 \cdot D_{n-2} + (2^2 + 2^1)$

$= 2^2 \cdot (2^1 \cdot D_{n-3} + 2^1) + 2^2 + 2^1 = 2^3 \cdot D_{n-3} + (2^3 + 2^2 + 2^1) \to = 2^k \cdot D_{n-k} + (2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2^2 + 2^1)$

$\to$当$k = n-1$时，$D_n = 2^{n-1} \cdot D_1 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1) = 2^{n-1} \cdot 2 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1)$,

$\therefore D_n = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = \dfrac{2^1 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 2 \cdot (2^n - 1)$

方法二：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{化为上三角形式}}{\overbrace{\Rightarrow}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2}{2^1} \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2}{2^1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2+2^3}{2^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2+2^3}{2^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \frac{2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2+\cdots+2^n}{2^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \bullet \cdots \bullet 2}_{n-1\text{个}2} \cdot \frac{2+2^2+\cdots+2^n}{2^{n-1}} = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{2 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 2 \cdot (2^n - 1)$$

(14)设二维随机变量$(X，Y)$服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，则$P\{(XY-Y)<0\}=$

解：由$(X，Y)\sim N(1,0;1,1;0)$中$\rho_{XY}=0$知，X与Y相互独立，【？？？？？】且根据$X\sim N(1,1)$；$Y\sim N(0,1)$，则有$(X-1)\sim N(0,1)$与Y相互独立，

由于高斯分布关于$x=\mu$对称，则$P\{(X-1)<0\}=P\{(X-1)>0\}=\frac{1}{2}$；

$P(Y<0)=P(Y>0)=\frac{1}{2}$；则有$P\{(XY-Y)<0\}=P\{(X-1)\cdot Y<0\}$，

而$P\{(X-1)\cdot Y<0\}=P\{X-1<0，Y>0\}+P\{X-1>0，Y<0\}$

$=P(X-1<0)\cdot P(Y>0)+P(X-1>0)\cdot P(Y<0)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

第三部分：解答题（五×10 分+二×11 分+二×11 分）

(15)设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a，b，k 的值。

解：尝试用洛必达，此路不通，联想泰勒级数(MP)

$$\mathrm{MP}[\ln(1+x)]=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3);\quad \mathrm{MP}[\sin x]=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

根据题意，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$，利用 N 阶带佩亚诺余项的麦克劳林公式代换，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]+bx\left[x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\frac{2b-a}{2}x^2+\frac{a}{3}x^3+\frac{-b}{3}x^4+(a+bx)o(x^3)}{kx^3}=1,$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-b}{3}x^4}{kx^3}=0,\lim_{x\to 0}\frac{(a+bx)o(x^3)}{kx^3}=0\ \therefore \text{有}\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\frac{2b-a}{2}x^2+\frac{a}{3}x^3}{kx^3}=1,\text{ 利用待定系数法得}\begin{cases}1+a=0\\ \dfrac{2b-a}{2}=0,\\ \dfrac{a}{3}=k\end{cases}$$

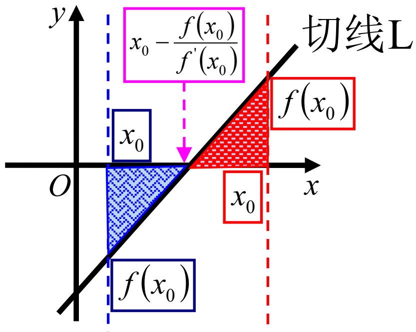
$$\text{解得}\begin{cases}a=-1\\ b=\dfrac{-1}{2}\\ k=\dfrac{-1}{3}\end{cases}\text{，所以，题求 } a=-1,\ b=-\frac{1}{2},\ k=-\frac{1}{3}$$

(16)设函数$f(x)$在定义域上I上的导数恒大于0，若对任意的$x_0 \in I$，曲线$y=f(x)$在点$(x_0,\ f(x_0))$处的切线与直线$x=x_0$及x轴围成的面积恒为4，且$f(0)=2$，求$f(x)$的表达式。

解：曲线$y=f(x)$在点$(x_0,\ f(x_0))$处的切线L(这是直线)的方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，

切线L与x轴的交点：令$y=0 \Rightarrow x=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$；

切线L与x轴、铅直线$x=x_0$围成的图形是一个三角形，



$\left(\begin{array}{l}\text{题给条件导数恒大于0:} \\ \text{①在定义域}I\text{上的导数存在，切线}L\text{不会是铅直线；} \\ \text{②导数恒大于0，切线}L\text{不会是水平线；}\end{array}\right)$

根据三角形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}\cdot\left|x_0-\left[x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right]\right|\cdot|f(x_0)|$，

或者是$S=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left(x_0-\left[x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right]\right)\cdot f(x_0)\right|$，则有

(因为面积、底、高都必须大于0)

$4=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}\right|$，由于$f'(x_0)>0$、$f^2(x_0)>0$(因为$f(x_0)$不能为0)

$\Rightarrow 8f'(x_0)=f^2(x_0)$，由于$x_0\in I$，则$8f'(x)=f^2(x)$

$\Rightarrow$ 微分方程$y^2=8y',(y\neq 0)$即$y^2=8\dfrac{dy}{dx},(y\neq 0)$，分离变量得

$dx=8\dfrac{dy}{y^2}$，两边同取积分(注意积分后的常数项C)，得到

$x=\dfrac{-8}{y}+C(y\neq 0,\ x\text{不知})$，根据$f(0)=2$得到$C=4$，

$\therefore x=\dfrac{-8}{y}+4\Rightarrow x-4=\dfrac{-8}{y},\underbrace{(y\neq 0\text{且}x\neq 4)}_{\text{得到函数的定义域}}$；由于$y$是$x$的函数，

函数解析式的定义域由x确定，并且注意到限制条件$y\neq 0$，

$\Rightarrow y=\dfrac{8}{4-x}$，这个解析式满足$y\neq 0$且$x\neq 4$

综上：所求$f(x)$的表达式为$y=\dfrac{8}{4-x}$

(17)已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，曲线C：$x^2+y^2+xy=3$，求$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数。

解：最大方向导数：是一个数；在哪个方向上导数最大呢？沿梯度方向：是一个向量。

梯度的模即为最大方向导数。

$f_x'(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=1+y$；$f_y'(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=1+x$；在点$(x,y)$处的最大方向导数为：

$$l=|\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2} \qquad ①;$$

要求$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数，即要求①式在曲线C的条件下的最大值(这属于条件极值)，

而①式中$\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$取得最大时，等价于$(1+y)^2+(1+x)^2$取得最大值，

(考研所隐含的化简思想，能去根号，为啥不呢？)

那么问题就变为：令$m(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$，求$m(x,y)$在曲线C的条件下取得的最大值。

曲线C：$x^2+y^2+xy=3$，令$\varphi(x,y)=x^2+y^2+xy-3$，构造拉格朗日函数：$L(x,y,\lambda)=m(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，

即$L(x,y,\lambda)=[(1+y)^2+(1+x)^2]+\lambda\cdot(x^2+y^2+xy-3)$，(就按照这个式子，不要化简)，得到：

$$\begin{cases}L_x'(x,y,\lambda)=2(1+x)+\lambda(2x+y)=(2\lambda+2)x+\lambda y+2\\ L_y'(x,y,\lambda)=2(1+y)+\lambda(2y+x)=(2\lambda+2)y+\lambda x+2\\ L_\lambda'(x,y,\lambda)=x^2+y^2+xy-3\end{cases}，令\begin{cases}L_x'(x,y,\lambda)=0\\ L_y'(x,y,\lambda)=0\\ L_\lambda'(x,y,\lambda)=0\end{cases}，得到方程组(目标求出x、y)$$

$$②\begin{cases}(2\lambda+2)x+\lambda y+2=0 & \mathrm{I}\\ (2\lambda+2)y+\lambda x+2=0 & \mathrm{II}\\ x^2+y^2+xy-3=0 & \mathrm{III}\end{cases}$$，方程组②有一个特点：x、y具有轮换对称性；

$\mathrm{II}-\mathrm{I}$得：$(\lambda+2)(x-y)=0\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ \lambda=-2\end{cases}$；当$x=y$时，带入III得$x=y=\pm1$，即得到极值点$(1,1)$、$(-1,-1)$；

当$\lambda=-2$时，带入I(或II)得：$x+y=1$，即$x=1-y$，再带入III得：$(y-2)(y+1)=0$，得到$\begin{cases}y=2\\ y=-1\end{cases}$，

即得到极值点$(-1,2)$、$(2,-1)$；综上所述：得到四个极值点$D_1(1,1)$、$D_2(-1,-1)$、$D_3(-1,2)$、$D_4(2,-1)$；

由于$m(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$的最大值只能在$D_1\sim D_4$四个极值点中取得，则题目所求

$l=|\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$的最大值也只能在$D_1\sim D_4$四个极值点中取得，分别带入得到：

$$\begin{cases}l_1=\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}\\ l_2=\sqrt{(1-1)^2+(1-1)^2}=0\\ l_3=\sqrt{(1+2)^2+(1-1)^2}=3\\ l_4=\sqrt{(1-1)^2+(1+2)^2}=3\end{cases}$$，显然$l_4=l_3>l_1>l_2$，则题求最大方向导数$l_{\max}=3$

(18)(I)设函数$u(x)$，$v(x)$可导，利用导数的定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(II)设$u_1(x)$，$u_2(x)$，$\cdots$，$u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出$f(x)$的求导公式。

(I)证：令$g(x)=u(x)v(x)$，由导数的定义知：$g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$，即

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

根据题意，$u(x)$、$v(x)$可导，那么根据极限运算法则有：

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=\left\{\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right]\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\right]\right\}+\left\{\left[\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\right]\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\right\}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

(II)(注意题目说得是写出)根据I题的结果，易得：$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，其导数

$$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[u_i'(x)\cdot\prod_{\underbrace{j=1}_{j\neq i}}^{n}\left[u_j(x)\right]\right]$$

(19)已知曲线L的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases}$，起点为$A(0,\sqrt{2},0)$、终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分

$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$。

解：方法一：用空间曲线的参数方程求解。曲线$L\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases},(-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2})$，

曲线L投影到xoy面上的平面曲线方程为：$\Rightarrow x^2=2-x^2-y^2$（沿$z$轴投影，在方程中变现为消除$z$轴）

$\Rightarrow$ 直线$L_z\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{2}=1 \\ z=0 \end{cases},(-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2})$

（投影到坐标平面上，在方程中表现为限定投影轴的变量为常数值）

曲线L的参数方程$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \\ z=\cos\theta \end{cases}$，根据且为$A(0,\sqrt{2},0)\to B(0,-\sqrt{2},0)$，得$\theta$：$\underbrace{\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{-\pi}{2}}_{\text{积分区间！！}}$

$$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left[(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)d\cos\theta+(\cos^2\theta-\cos^2\theta+\sqrt{2}\sin\theta)d\sqrt{2}\sin\theta+(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)d\cos\theta\right]$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(-\sqrt{2}\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)d\theta+(2\sin\theta\cos\theta)d\theta+(-\sin\theta\cos^2\theta-2\sin^3\theta)d\theta$$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(-2\sin^3\theta-\sin\theta\cos^2\theta-\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)d\theta$，观察该积分式，分类计算

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-2\sin^3\theta d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{3}d\cos^3\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin^2\theta d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}d\sin^2\theta$，反对幂指三，降幂思想

$$=\left(2\cos\theta+\frac{-2}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\cos^3\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}+\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\theta+\frac{\sqrt{2}\sin2\theta}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin^2\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$=[(0+0)-(0+0)]+[(0)-(0)]+\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+0\right)-\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\pi+0\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

若利用奇偶性：则$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\overbrace{-2\sin^3\theta}^{\text{奇函数}}\overbrace{-\sin\theta\cos^2\theta}^{\text{奇函数}}\overbrace{-\sqrt{2}\sin^2\theta}^{\text{偶函数}}+\overbrace{\sin\theta\cos\theta}^{\text{奇函数}}\right)d\theta$，对称积分区间内奇函数、偶函数的积分

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin^2\theta d\theta=-\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(20)设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$是R^3的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$。

(I)证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$为R^3的一个基；

(II)当k为何值时，存在非零向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标相同，并求所有的$\boldsymbol{\xi}$。

(I)证明向量组为R^3的一个基，即判断该向量组的系数矩阵的行列式的值，$\neq 0$，就有同基。

$$\text{证:}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix},$$

$$\because\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}\text{的行列式}\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=2\cdot[2(k+1)-1(2k)]=4\neq 0,$$

$\therefore r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，即$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$是$R^3$的一组基。

(II)假设存在$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$满足题意，根据题设条件，有

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3\Rightarrow x_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=0,$$

$$\text{根据}\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}\Rightarrow x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=0\qquad(\Delta)$$

$$\begin{cases}\text{存在}\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3\text{满足题意，意味着}\Delta\text{式代表的方程组有解；}\\\boldsymbol{\xi}\text{为非零向量，即}x_1,\ x_2,\ x_3\text{不同时为0，意味着}\Delta\text{式代表的方程组有非零解。}\end{cases}$$

根据“齐次线性方程组定理：若有非零解，则系数行列式$D=0$；若为全0解，则$D\neq 0$”得到

$$D_\Delta=|(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3),(\boldsymbol{\alpha}_2),(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)|=0\Leftrightarrow\left|[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{bmatrix}\right|=0,$$
由于$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，

$$\Rightarrow\left|\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0,\text{得到}1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2k&k\end{vmatrix}=0,$$
即$k=0$；当$k=0$时，Δ式变为：

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1)=0\qquad(\Gamma)\Leftrightarrow\overbrace{\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\boldsymbol{\alpha}_1x_3=0}^{\text{向量形式}}\Rightarrow[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

$$\text{由于}\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3\text{线性无关,}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2=0\end{cases},\text{解得:}\begin{cases}x_1=t\\x_2=0\\x_3=-t\end{cases},\ \boldsymbol{\xi}=t\boldsymbol{\alpha}_1-t\boldsymbol{\alpha}_3$$

因此，存在$k=0$，使得非零向量$\boldsymbol{\xi}=t\boldsymbol{\alpha}_1-t\boldsymbol{\alpha}_3\ (t\neq 0)$满足题意。

(21)设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{bmatrix}$相似于矩阵$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{bmatrix}$。

(I)求a，b的值；

(II)求可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$为对角矩阵。

相似矩阵的性质：①行列式的值相等②矩阵的秩相等③可逆性相同

④特征方程相同，特征值相同(而矩阵的特征值之和＝矩阵主对角线元素之和)

由④得到⑤主对角线元素之和相等

解(I)$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}\Rightarrow\begin{cases}|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|\\ \sum a_{ii}=\sum b_{ii}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\cdot\left(2\begin{vmatrix}-1&-3\\1&a\end{vmatrix}\right)+(-3)\begin{vmatrix}-1&3\\1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&0\\3&1\end{vmatrix}\\0+3+a=1+b+1\end{cases}$，即有

$\begin{cases}-2[(-a)-(-3)]+(-3)[(2)-(3)]=b\\a=b-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a-6+3=b\\a=b-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$

(II)由(I)得，$a=4$，$b=5$，则$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{bmatrix}$，

先求矩阵$\mathbf{A}$的特征值，由$\mathbf{A}x=(\lambda\mathbf{E})\mathbf{x}\Leftrightarrow(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$，得

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\lambda&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3&3\\2&\lambda-4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&3\\-1&\lambda-4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&\lambda-3\\-1&2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[(\lambda-3)(\lambda-4)-(6)]+2[(\lambda-4)-(-3)]+3[(2)-(3-\lambda)]=\lambda(\lambda^2-7\lambda+6)+2(\lambda-1)+3(\lambda-1)$$

$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-6)+5(\lambda-1)=(\lambda-1)[\lambda(\lambda-6)+5]=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5)=(\lambda-1)^2(\lambda-5)\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=1\\\lambda_3=5\end{cases}$$

当$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$时，$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1-2x_2+3x_3=0$解得$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)^T\\\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,-1)^T\end{cases}$

当$\lambda=\lambda_3=5$时，$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&-2&3\\1&2&3\\-1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$解得$\{\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-1)^T$，

则$\mathbf{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}$，有$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{5}\end{bmatrix}$，满足题意。

(22)设随机变量X的概率密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2，& x>0\\ 0 \quad ，& x\le 0\end{cases}$，对$X$进行独立重复的观测，直到第2个大于3的观测值出现时停止，记Y为观测次数。

(I)求Y的概率分布。【Y是离散型随机变量，其概率分布就是求概率】

(II)求$E[Y]$。

解：设事件$A=\{$对X进行一次观测出现的观测值大于3$\}$，那么$P(A)=P\{X>3\}$，即

$$P(A)=\int_3^{+\infty} f_X(x)dx=\int_3^{+\infty} 2^{-x}\ln 2dx=-1\cdot\int_3^{+\infty}\left[(-1)\ln 2\cdot 2^{-x}\right]dx=-1\cdot 2^{-x}\Big|_3^{+\infty}=2^{-x}\Big|_{+\infty}^{3}=2^{-3}-\lim_{x\to+\infty}2^{-x}=\frac{1}{8},$$

令$p=P(A)=\dfrac{1}{8}$ (I)根据题意，Y的取值为$t=2,3,\cdots$，且服从独立二项分布，

即有$P(Y=t)=\left[C_{t-1}^{1}(1-p)^{t-2}\cdot p\right]\cdot p$，则有：$P(Y=t)=(t-1)p^2(1-p)^{t-2}$，

由$p=\dfrac{1}{8}$得，$P(Y=t)=\dfrac{(t-1)\cdot 7^{t-2}}{8^t}$(化简虽好，但不利于幂级数求和)

$$(\mathrm{II})E[Y]=\sum_{t=2}^{+\infty}\left[(t-0)^1\bullet P(Y=t)\right]=\sum_{t=2}^{+\infty}\left[t\cdot P(Y=t)\right]=\sum_{t=2}^{+\infty}\left[t(t-1)p^2(1-p)^{t-2}\right]$$

$p=\dfrac{1}{8}$为常数,$1-p=\dfrac{7}{8}$为常数，令$1-p=q$，则

$$E[Y]=p^2\sum_{t=2}^{+\infty}\left[t(t-1)q^{t-2}\right]=p^2\underbrace{\sum_{t=2}^{+\infty}}_{积分变量}\left[t\cdot\frac{dq^{t-1}}{dq}\right]=p^2\sum_{t=2}^{+\infty}\left[\frac{d^2q^t}{dq^2}\right]=p^2\frac{d^2}{dq^2}\left[\sum_{t=2}^{+\infty}q^t\right]$$

令$s=\displaystyle\sum_{t=2}^{+\infty}q^t=\lim_{t\to+\infty}\frac{q^2\left(1-q^{t-2}\right)}{1-q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{q^2-q^t}{1-q}=\frac{q^2}{1-q}-\left(\frac{1}{1-q}\cdot\lim_{t\to+\infty}q^t\right)$，由于$q=\dfrac{7}{8}<1$，所以

$$s=\frac{q^2}{1-q}\Rightarrow\frac{ds}{dq}=\frac{2q(1-q)-q^2(-1)}{(1-q)^2}=\frac{2q-q^2}{(1-q)^2}\Rightarrow\frac{d^2s}{dq^2}=\frac{(2-2q)(1-q)^2-\left(2q-q^2\right)2(1-q)(-1)}{(1-q)^4}$$

$$=\frac{2}{(1-q)^3},\therefore E[Y]=p^2\frac{d^2}{dq^2}\left[\sum_{t=2}^{+\infty}q^t\right]=p^2\cdot\frac{2}{(1-q)^3}\Bigg|_{p=\frac{1}{8},\ q=\frac{7}{8}}=\frac{2}{p}=\frac{2}{\frac{1}{8}}=16$$

$$E[Y]=\frac{1}{8^2}\sum_{t=2}^{+\infty}\left[t(t-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{t-2}\right]=\frac{1}{8^2}\underbrace{\sum_{t=2}^{+\infty}}_{积分变量}\left[t\cdot\frac{d\left(\frac{7}{8}\right)^{t-1}}{dt}\right]=\frac{1}{8^2}\sum_{t=2}^{+\infty}\left[\frac{d^2\left(\frac{7}{8}\right)^t}{dt^2}\right]=\frac{1}{8^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\sum_{t=2}^{+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^t\right]$$

令$s=\displaystyle\sum_{t=2}^{+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^t$，根据等比数列求和公式得到：$s=\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\frac{7}{8}\right)^2\left[1-\left(\frac{7}{8}\right)^{t-2}\right]}{1-\frac{7}{8}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{7}{8}\left[1-\left(\frac{7}{8}\right)^{t-2}\right]$，则

$\dfrac{ds}{dt^2}=$知道错在哪了么？？？？？？？？？？？？？？？？？？？

求和变量、积分变量、微分变量，你区分清楚了么？？？？？？？？？？？？？？？？？？

(23)设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中$\theta$为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自该总体的简单随机样本。

(I)求θ的矩估计量；

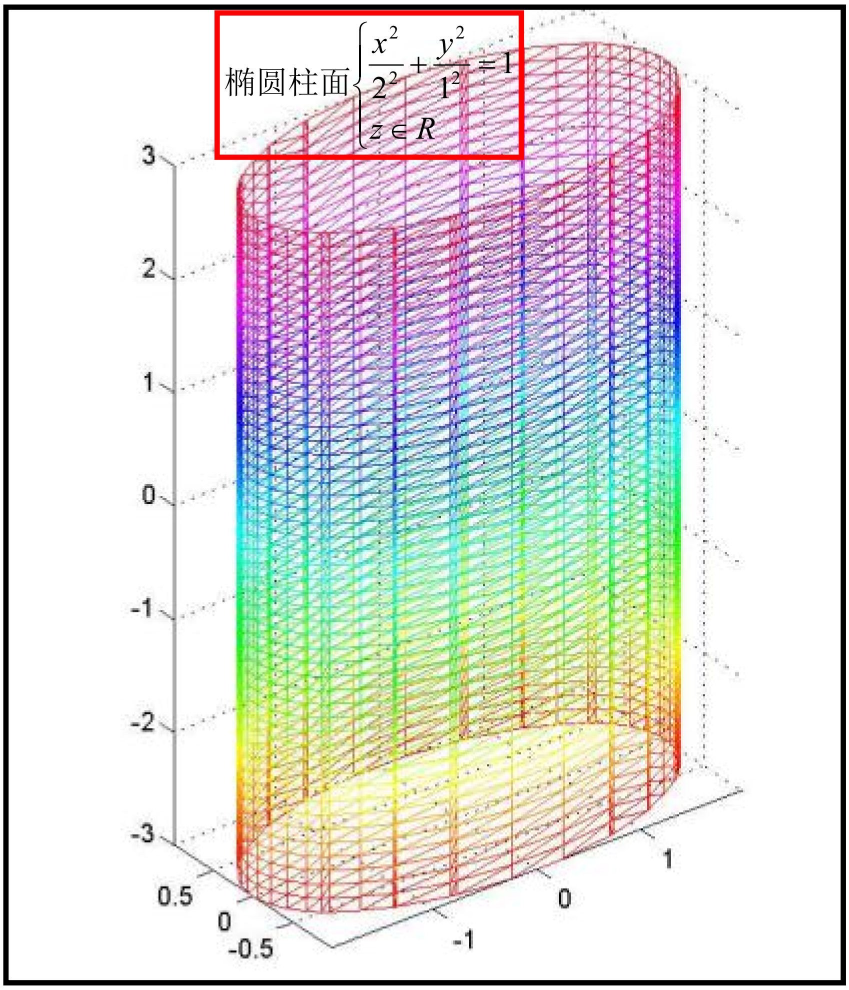
(II)求θ的最大似然估计量。

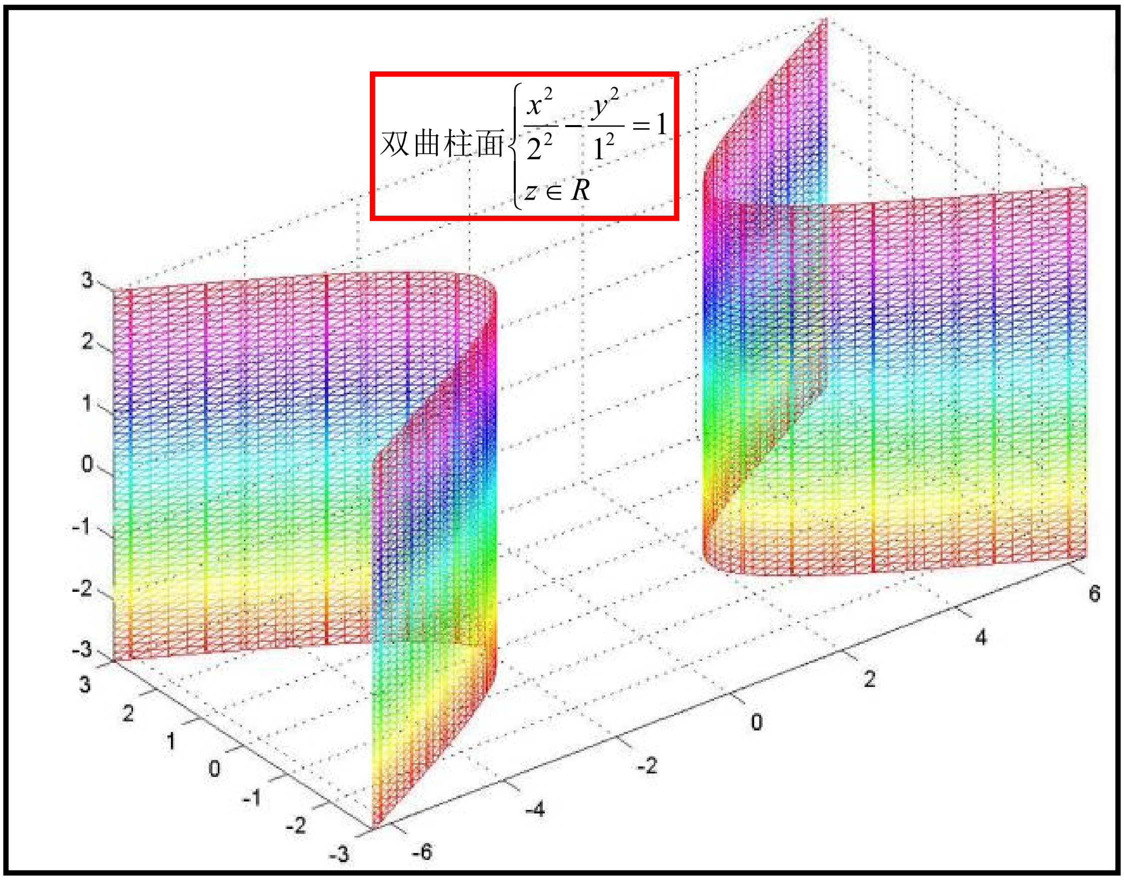
解(I)矩估计量，即一阶原点矩$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{\theta}^{1}\frac{1}{1-\theta}xdx=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\theta}^{1}=\frac{1+\theta}{2}$；

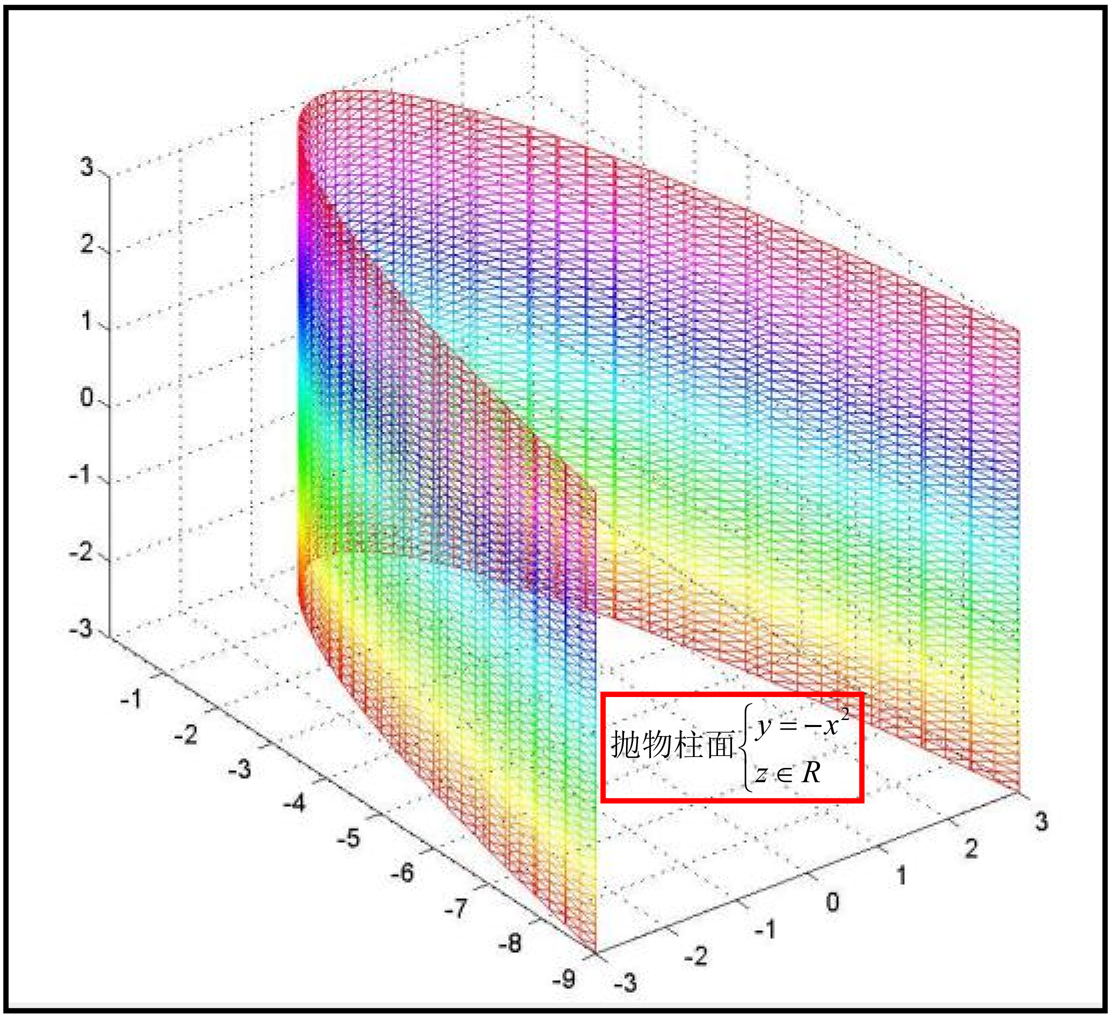
则$\overline{X}=E[X]=\frac{1+\theta}{2}\Rightarrow\theta=2\overline{X}-1$，那么$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}_1=2\overline{X}-1$，其中$\overline{X}=E[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$。

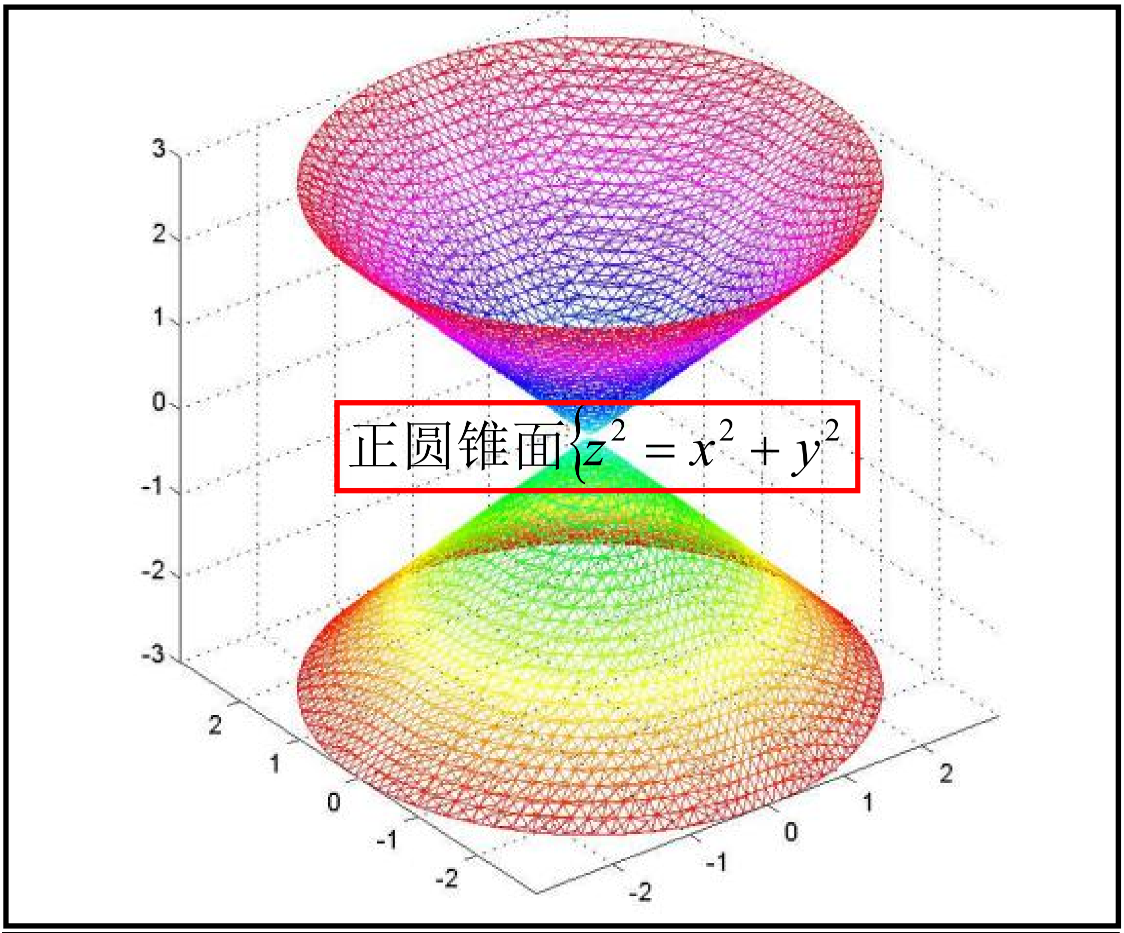
(II)似然估计量$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n, & \theta\le\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{matrix}\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，当$(1-\theta)$尽量小，亦即$\theta$尽可能接近1时，即为所求，得到：$\begin{cases}\theta\to 1^-\\ \theta\le\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{matrix}\le 1\end{cases}\Rightarrow\theta=\min\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$【或$\theta=\min\limits_{1\le i\le n}\theta_i$】，从而得到$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}_2=\min\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$

二次曲面

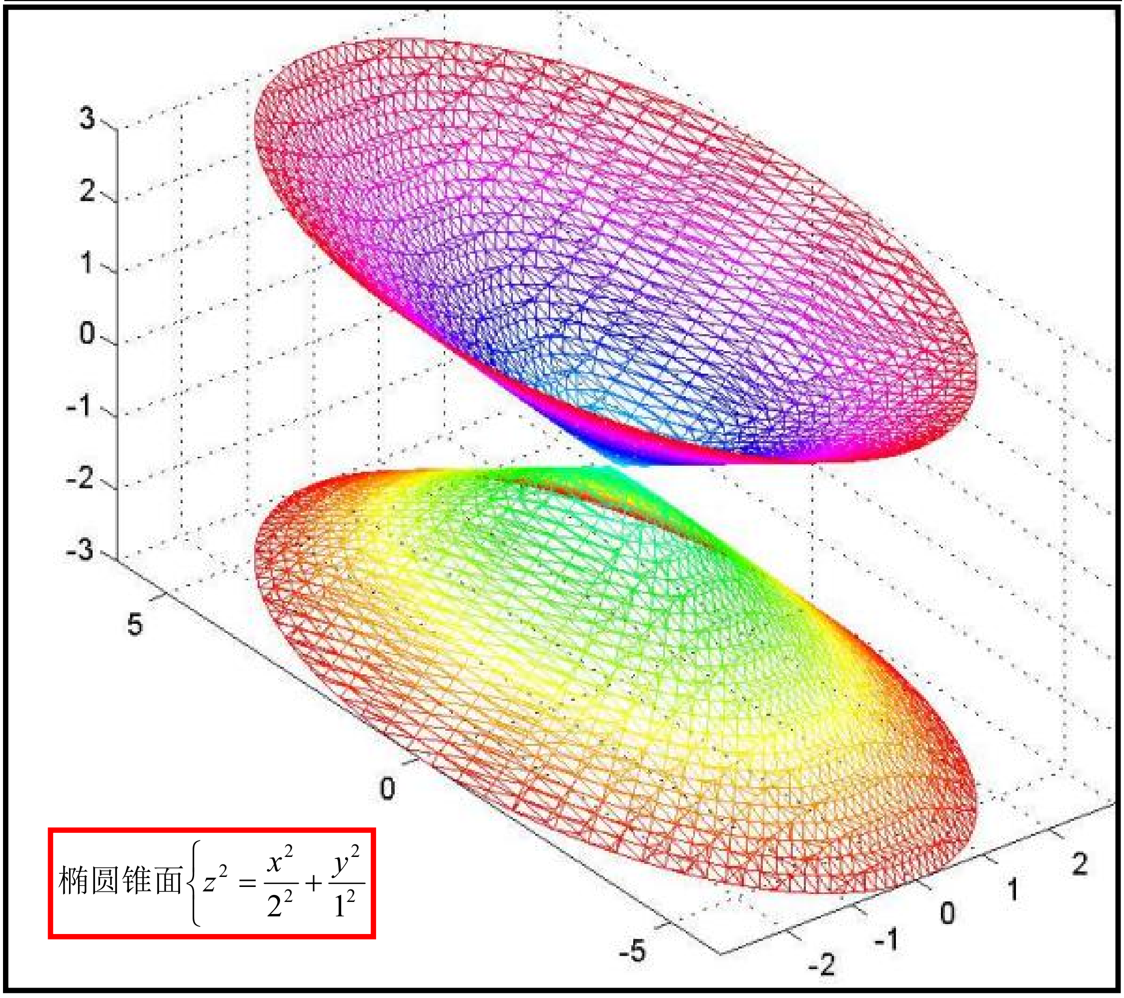

椭圆柱面$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1\\ z\in R\end{cases}$
3
2
1
0
-1
-2
-3
0.5
0
-0.5
-1
0
1


双曲柱面$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1 \\ z\in R \end{cases}$
3
2
1
0
-1
-2
-3
6
4
2
0
-2
-4
-6

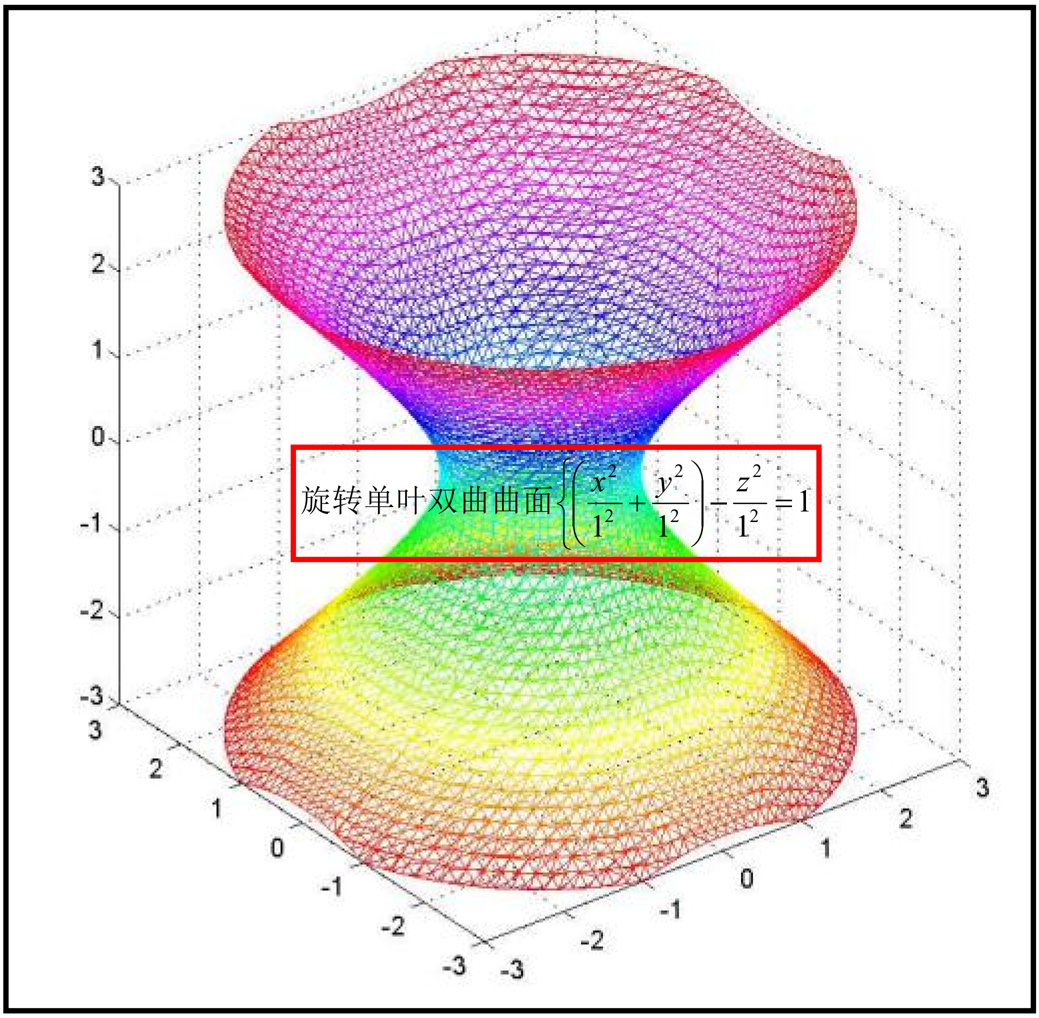

抛物柱面$\begin{cases} y=-x^2 \\ z\in R \end{cases}$
3
2
1
0
-1
-2
-3
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-3
-2
-1
0
1
2
3

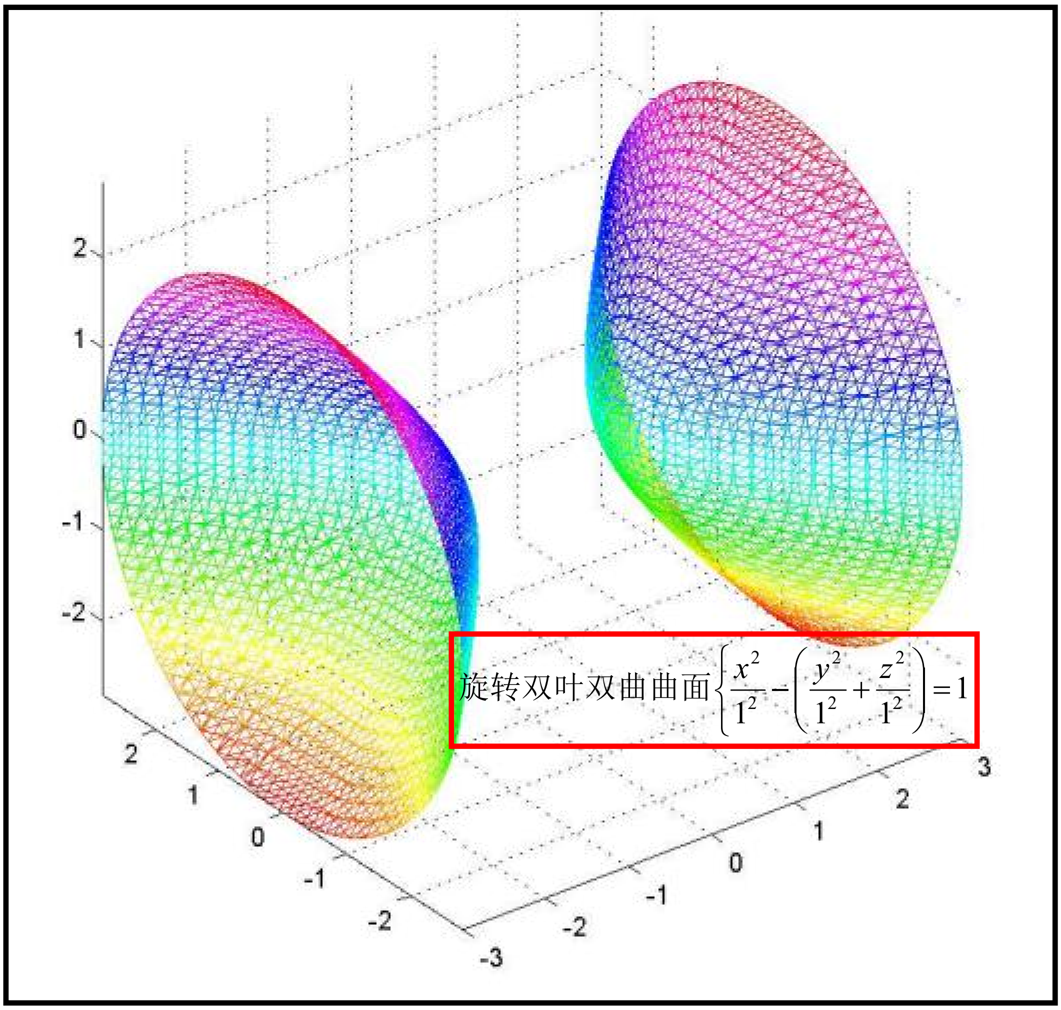


3
2
1
0
-1
-2
-3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
正圆锥面$\left\{ z^2 = x^2 + y^2 \right.$

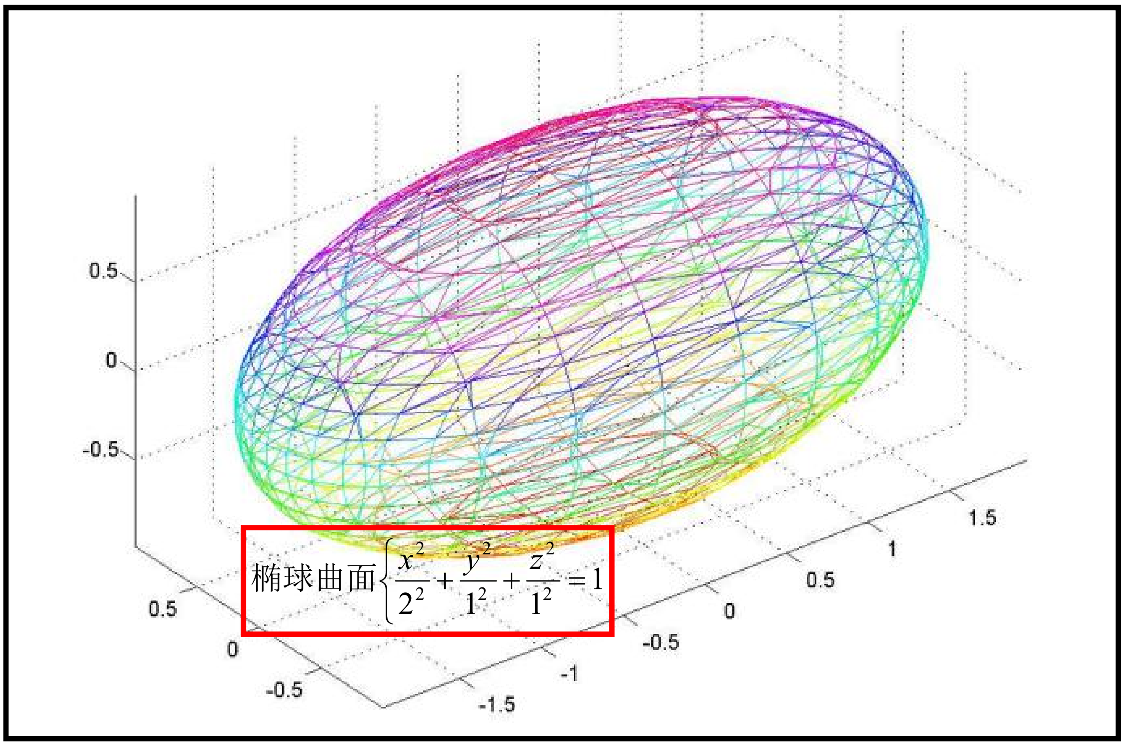


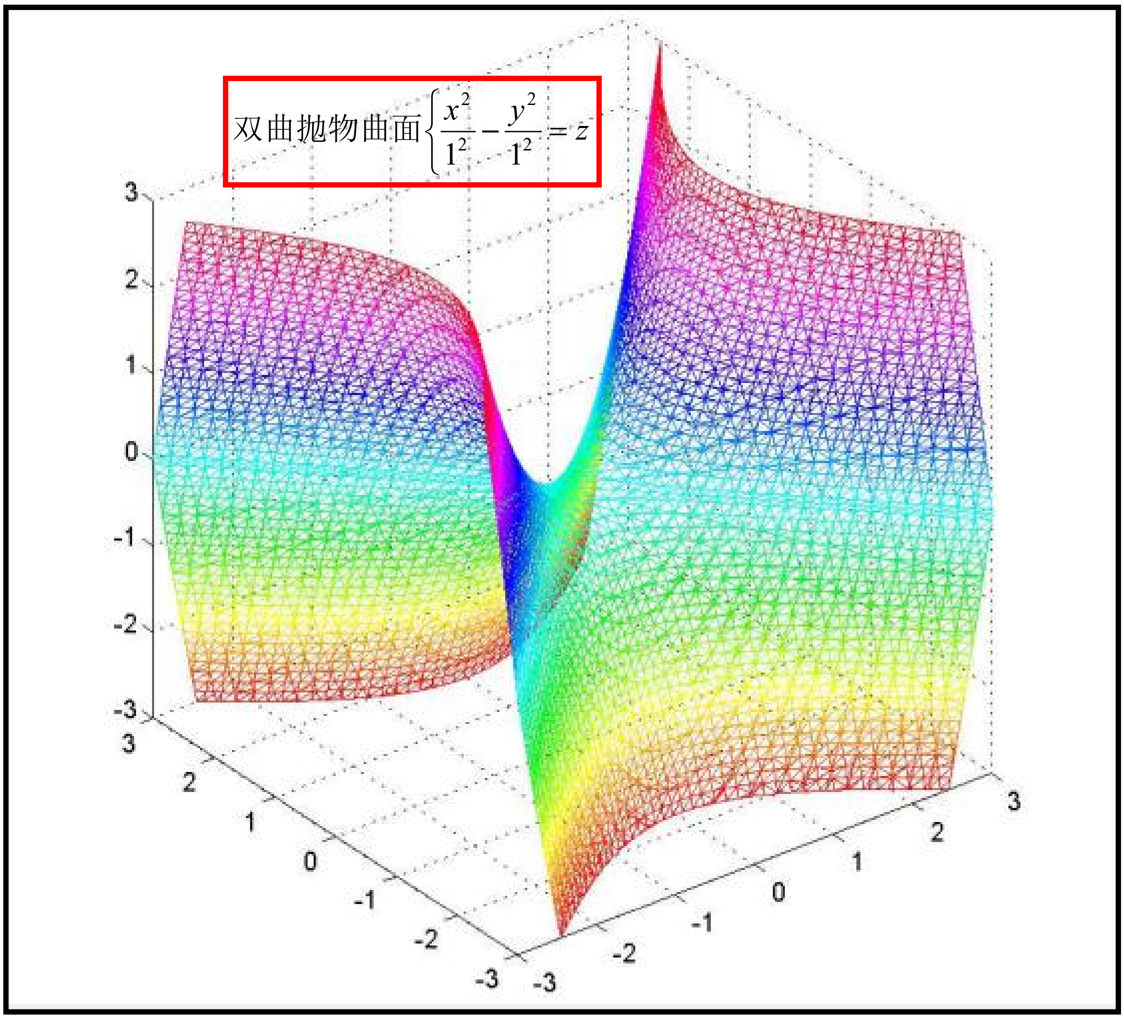
3
2
1
0
-1
-2
-3
5
0
-5
-2
-1
0
1
2
椭圆锥面$\left\{ z^2 = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} \right.$

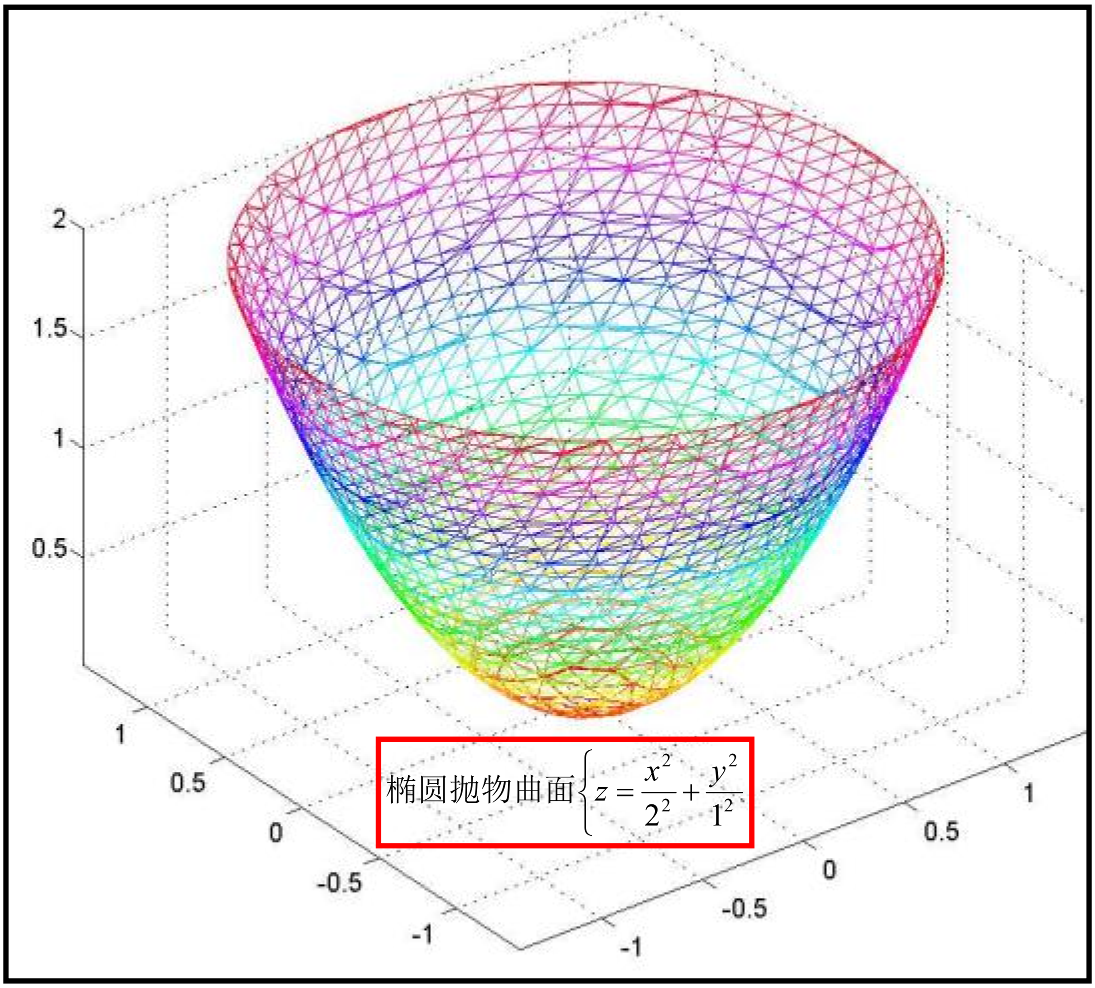

旋转单叶双曲曲面$\left\{\left(\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{1^2}\right)-\frac{z^2}{1^2}=1\right.$
3
2
1
0
-1
-2
-3



旋转双叶双曲曲面$\left\{\frac{x^2}{1^2}-\left(\frac{y^2}{1^2}+\frac{z^2}{1^2}\right)=1\right.$
2
1
0
-1
-2
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3


椭球曲面 $\left\{\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}+\frac{z^2}{1^2}=1\right.$
0.5
0
-0.5
0.5
0
-0.5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5


双曲抛物曲面$\left\{\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{1^2}=z\right.$
3
2
1
0
-1
-2
-3


2
1.5
1
0.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
椭圆抛物曲面 $\left\{ z = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} \right.$