

信号与系统重要公式总结

一、信号抽样与复原系统

$f(t)$ 为非周期带限信号, $F(\omega)$ 、 ω_m ; 冲击序列 $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T_s)$

抽样信号 $f_s(t) = f(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s)$, $F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n \cdot \omega_s)$ $\begin{cases} \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \\ \omega_s \geq 2\omega_m \end{cases}$

再经滤波器 $H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_H(\omega)}$ 得到输出信号 $y(t)$, $|Y(j\omega)| = |F_s(\omega)| \cdot |H(j\omega)|$,
 $\varphi_Y(\omega) = \varphi_{F_s}(\omega) + \varphi_H(\omega)$, 输出信号 $y(t)$: 要注意是原始信号 $x(t)$ 本身有相移, 还是滤波器有相移, 往往把相移等效在滤波器上。

$E \cdot G_\tau(t) \leftrightarrow (E\tau) \cdot \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2} \cdot \omega\right)$, $A \cdot \text{Sa}(B \cdot t) \leftrightarrow \left(\pi \cdot \frac{A}{B}\right) \cdot G_{2B}(\omega)$; 波形对称相似性

$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$ 【左上】、 $e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$ 【右上】;

$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ 【实轴: 左上右上】、【相位: 左右都为0】;

$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ 【虚轴: 左上右下】、【相位: 左 $+\frac{\pi}{2}$, 右 $-\frac{\pi}{2}$ 】;

$M \cdot \delta(t) \leftrightarrow M(\omega)$; $M(t) \leftrightarrow 2\pi \cdot M \cdot \delta(\omega)$

$x(t)$ 为周期信号, T_1 、 ω_1 , 当 $x(t)$ 为矩形脉冲时, 选取基本周期 $x_0(t) \leftrightarrow X_0(\omega)$,

傅里叶指数形式的系数 $F_n = \frac{1}{T_1} \cdot X_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{T_1} \cdot X_0(n\omega_1)$;

傅里叶级数指数形式: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{j(n\omega_1)t} = \frac{1}{T_1} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(n\omega_1) \cdot e^{j(n\omega_1)t}$;

傅里叶级数三角形形式系数: $\begin{cases} F(+n) = \frac{a_n - jb_n}{2} \\ F(-n) = \frac{a_n + jb_n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = F(0), a_n = F(n) + F(-n) \\ b_n = j[F(n) - F(-n)] \end{cases}$;

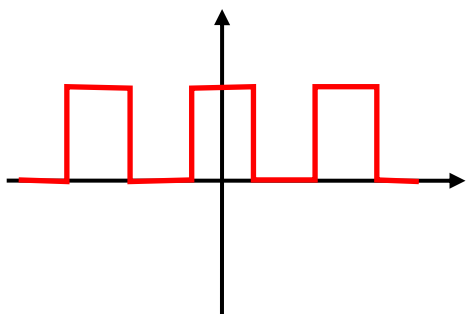
周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega) = \frac{2\pi}{T_1} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1) = \omega_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$;

区别于非周期信号 $f(t)$ 经冲激序列得到的抽样信号 $f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_s)$

傅里叶变换的系数【WD】、傅里叶级数的系数 $F(n\omega_1)$ 、偶频率分量的系数 a_n 、奇频率分量系数 b_n

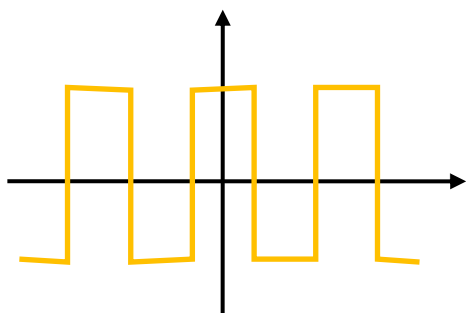
$x(t) \leftrightarrow [\text{BL}] \cdot F_0(\omega) \Rightarrow 2\pi \cdot \sum F(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$, $F(n\omega_1) = \frac{[\text{BL}]}{T_1} \cdot F_0(n\omega_1)$, $F(n\omega_1) = \frac{a_n}{2} - j \frac{b_n}{2}$

$[\text{WD}] = 2\pi \cdot F(n\omega_1) \Rightarrow F(n\omega_1) = \frac{[\text{WD}]}{2\pi} = \frac{[\text{BL}]}{T_1} \cdot \overbrace{a_n \cdot \cos(n\omega_1)}^{\text{偶频率分量}} = 2 \cdot F(n\omega_1) = \left(2 \cdot \frac{[\text{BL}]}{T_1}\right) \cdot \cos(n\omega_1)$



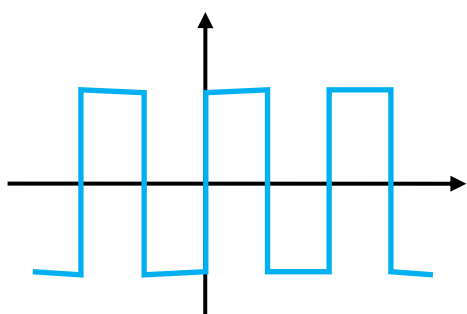
$$f_{T_1}(t) = \frac{E \cdot \tau}{T_1} + (2 \cdot E \cdot \tau) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[Sa\left(\frac{\tau}{2} \cdot n\omega_1\right) \cdot \cos(n\omega_1) \right]$$

$$\text{周期矩形脉冲信号: } a_0 = \frac{E \cdot \tau}{T_1}, \quad a_n = [2 \cdot (E \cdot \tau)] \cdot Sa\left(\frac{\tau}{2} \cdot n\omega_1\right)$$



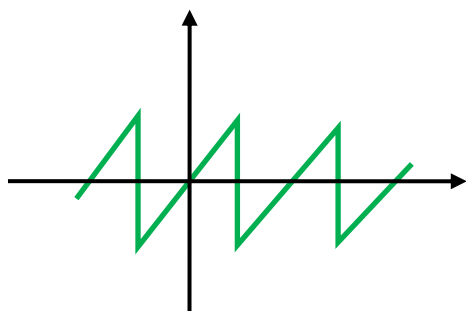
$$f_{T_1}(t) = 0 + U \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[Sa\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \cos(n\omega_1) \right]$$

$$\text{周期对称偶方波信号: } a_0 = 0, \quad a_n = U \cdot Sa\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$$



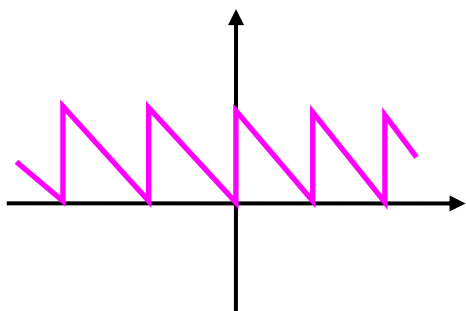
$$f_{T_1}(t) = 0 + \frac{U \cdot n \cdot \pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[Sa^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \sin(n\omega_1) \right]$$

$$\text{周期对称奇方波信号: } b_0 = 0, \quad b_n = U \cdot \left[\frac{n \cdot \pi}{2} \cdot Sa^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right]$$



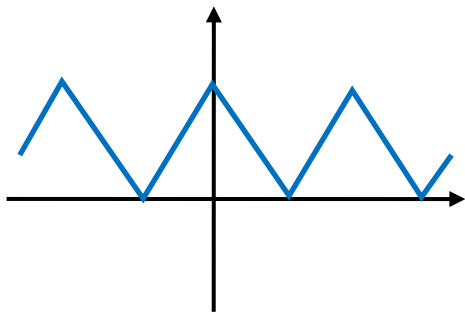
$$f_{T_1}(t) = 0 + \frac{U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n\omega_1) \right]$$

$$\text{周期奇函数锯齿信号: } b_0 = 0, \quad b_n = U \cdot \left(\frac{1}{n \cdot \pi} \right)$$



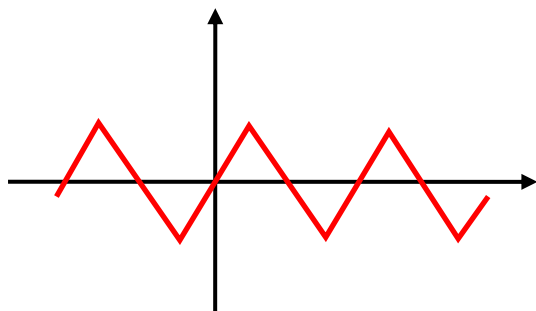
$$f_{T_1}(t) = \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sin(n\omega_1) \right]$$

$$\text{周期直角形锯齿信号: } a_0 = \frac{N}{2}, \quad b_0 = 0, \quad b_n = N \cdot \left(\frac{1}{n \cdot \pi} \right)$$



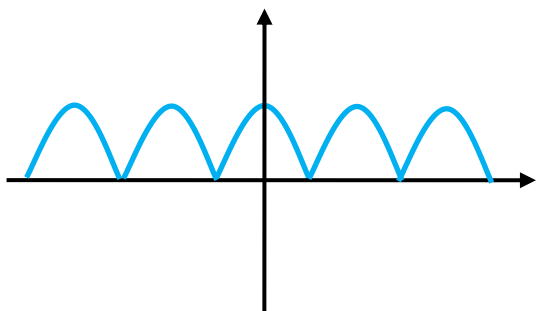
$$f_{T_1}(t) = \frac{E}{2} + E \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[Sa^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \cos(n\omega_1) \right]$$

$$\text{周期偶三角信号: } a_0 = \frac{E}{2}, \quad a_n = E \cdot Sa^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$$



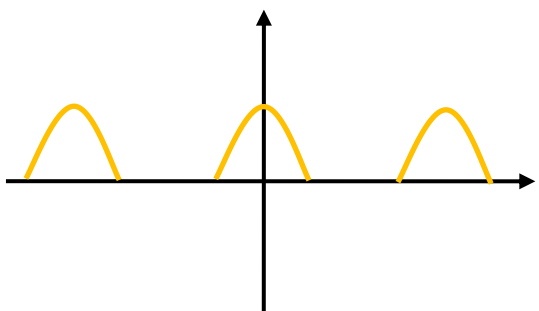
$$f_{T_1}(t) = 0 + \frac{2 \cdot U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)}{n} \cdot \sin(n\omega_1) \right]$$

$$\text{周期奇三角信号: } a_0 = 0, \quad a_n = \frac{2 \cdot U}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot Sa\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right]$$



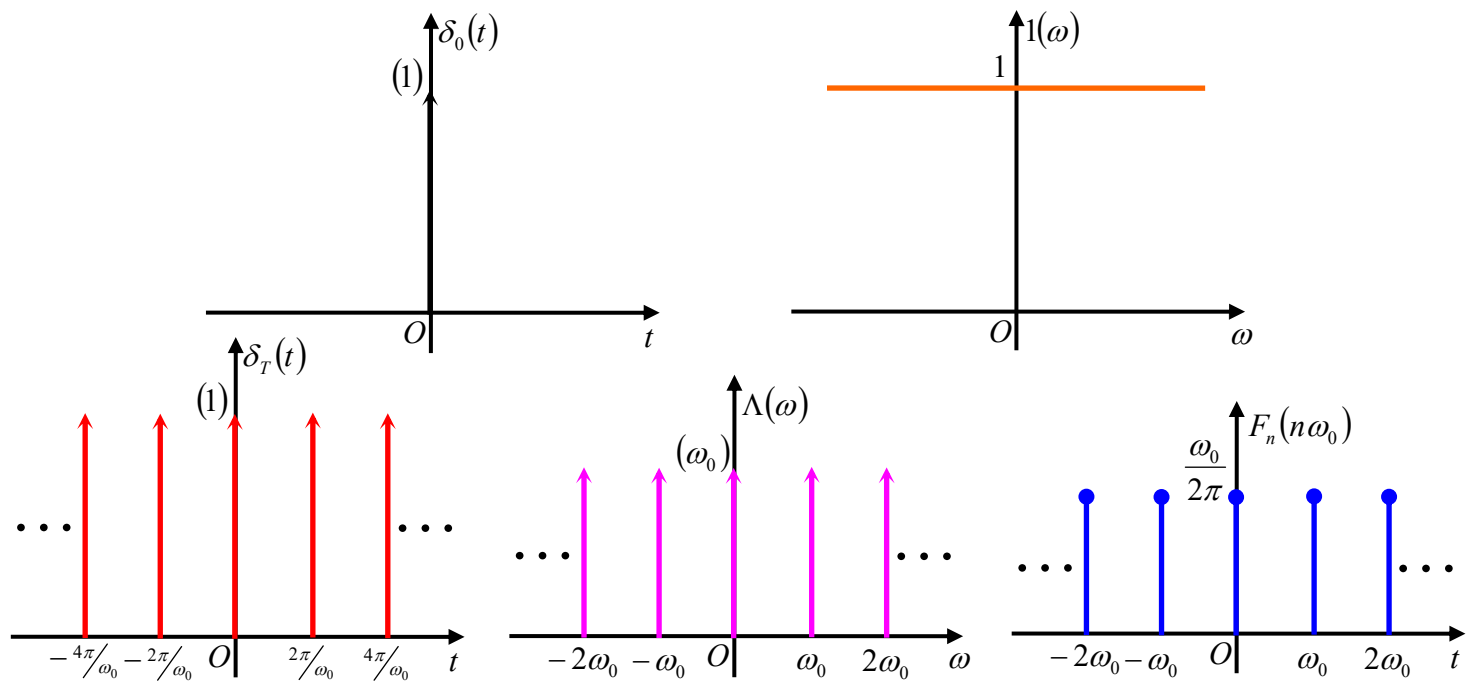
$$f_{T_1}(t) = \frac{2 \cdot E}{\pi} + \frac{4 \cdot E}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2 - 1)} \cdot \cos(n\omega_1) \right]$$

$$\text{周期全波余弦信号: } a_0 = \frac{2 \cdot E}{\pi}, \quad a_n = \frac{4 \cdot E}{\pi} \cdot \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{4n^2 - 1} \right]$$

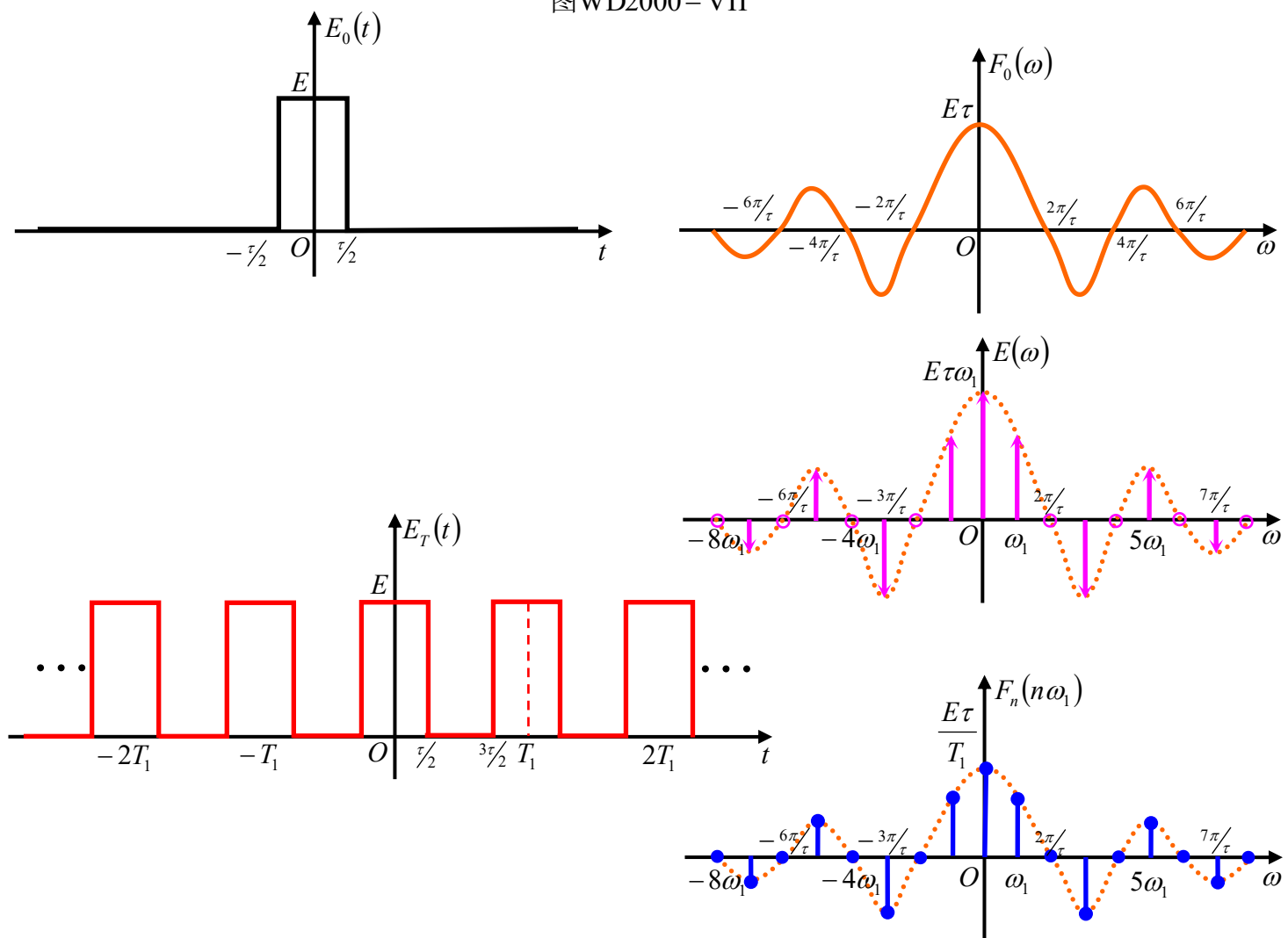


$$f_{T_1}(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{2 \cdot E}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)}{1 - n^2} \cdot \cos(n\omega_1) \right]$$

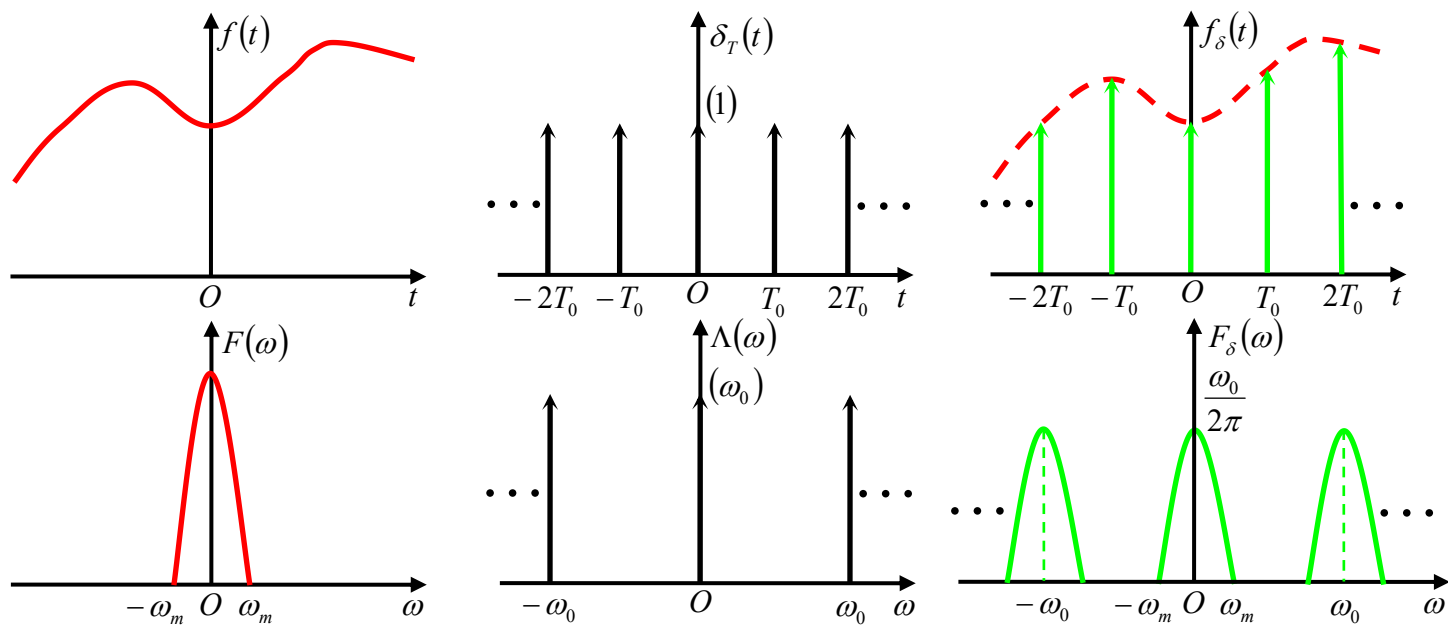
$$\text{周期半波余弦信号: } a_0 = \frac{E}{\pi}, \quad a_n = \frac{2 \cdot E}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{1 - n^2} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right]$$



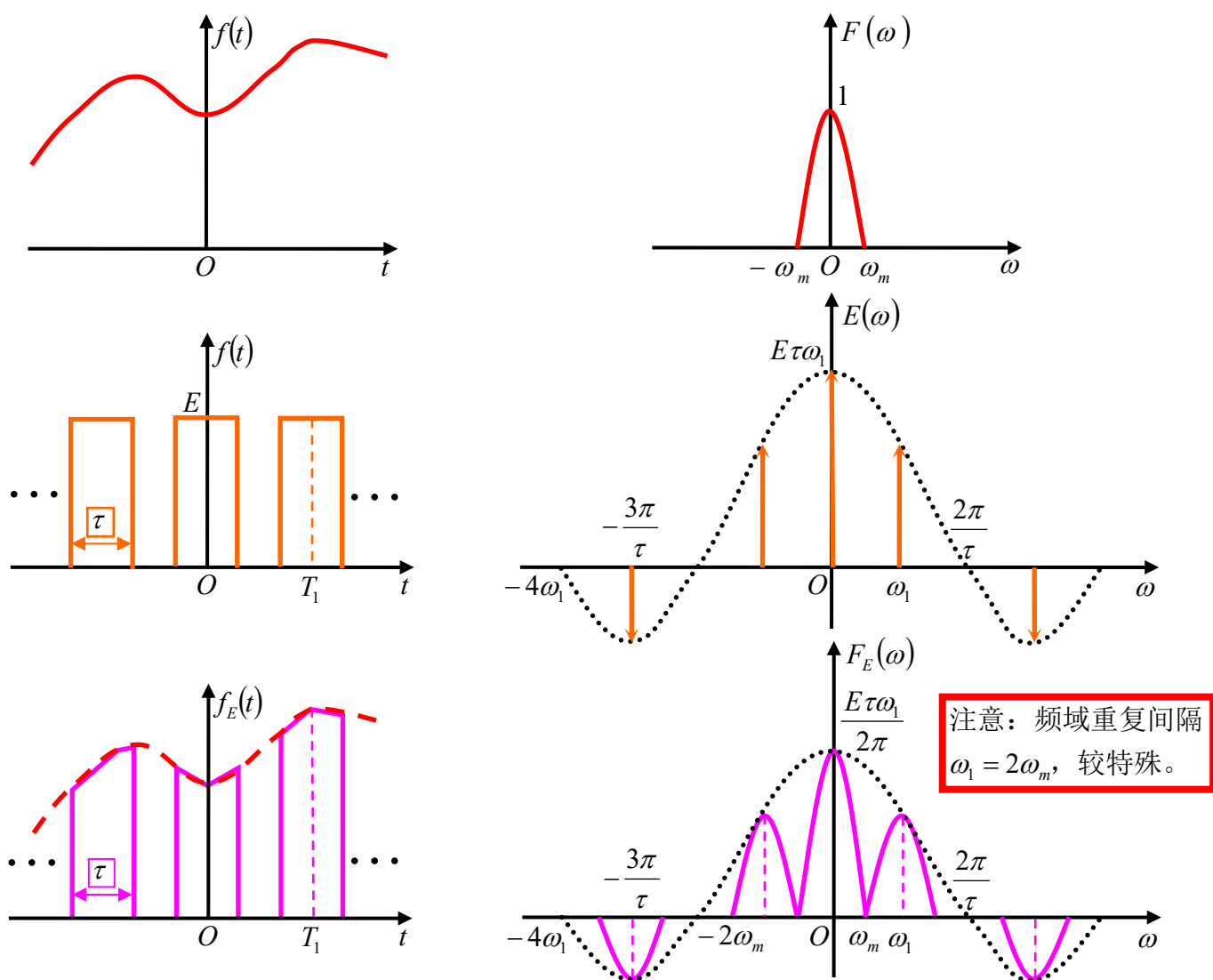
图WD2000-VII



图WD2000-VIII



图WD2000-IX



图WD2000-X

二、离散差分系统、连续微分系统

$$\begin{aligned} \text{带初始状态的} z \text{变换: } \begin{cases} \text{前向差分因果系统: } \begin{cases} x(n+1) \leftrightarrow z^{+1} \bullet X(z) - z^{+1} \bullet x(0) \\ x(n+2) \leftrightarrow z^{+2} \bullet X(z) - z^{+2} \bullet x(0) - z^{+1} \bullet x(1) \end{cases} \\ \text{后向因果差分系统: } \begin{cases} x(n-1) \leftrightarrow z^{-1} \bullet X(z) + z^0 x(-1) \\ x(n-2) \leftrightarrow z^{-2} \bullet X(z) + z^{-1} x(-1) + z^0 x(-2) \end{cases} \end{cases} \\ \text{带初始状态的} s \text{变换: 因果系统: } \begin{cases} \frac{d[y(t)]}{dt} \leftrightarrow s^1 \bullet Y(s) - s^0 \bullet y(0_-) \\ \frac{d^2[y(t)]}{dt^2} \leftrightarrow s^2 \bullet Y(s) - s^1 \bullet y'(0_-) - s^0 \bullet y''(0_-) \end{cases} \end{aligned}$$

①如何使用 z 变换求解差分方程的全响应？

根据题意，求出系统函数 $H(z)$ ，根据 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 得到原始差分方程，

再对该差分方程进行带初始状态的 z 变换，再求 $Y(z)$ ，带 $X(z)$ 的就是零状态响应；根据题目给出的初始状态值，迭代差分方程求出目的初始状态，就得到零输入响应。

②如何使用 s 变换求解微分方程的全响应？

根据题意，得到系统函数 $H(s)$ ，根据 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 得到原始微分方程。

再对该微分方程进行带初始状态的 s 变换，再求 $Y(s)$ ，带 $X(s)$ 的就是零状态响应；题目往往给出 0_- 时刻的状态，而零输入响应 0_- 等于 0_+ 等于 0 时刻的状态，也就是说，直接把题目给的初始状态带入，就可求出零输入响应。

三、滤波器、频响响应系统

连续时间系统：滤波器、频响响应，抓住 $H(j\omega) = |H(j\omega)| \bullet e^{j\varphi(\omega)}$ ；

$$\begin{cases} \text{幅频特性: 低通、高通、带通; 余弦搬, 正弦搬} \\ \text{相频特性: } t_0 \bullet \omega, t_0 = 0, \text{ 余弦搬、正弦搬} \left(\underbrace{\text{负频率相移} + \frac{\pi}{2}, \text{ 正频率相移} - \frac{\pi}{2}}_{\text{时域波形以正频率为准}} \right); \end{cases}$$

如果是求响应，那么由 $H(j\omega)$ 的表达式，根据输入信号频率 ω_0 得到 $(|H(j\omega)| \bullet e^{j\varphi(\omega)})_{\omega=\omega_0}$ ；

如果是判断系统的因果性、稳定性、因果稳定性，使用 $H(s)$ 零极点判断；

其中，系统的因果性可以用输入检验法，还可以有 $h(t)$ 必须为因果图形进行判断；如果是判断系统是否为低通、高通、带通、带阻系统，使用 $H(j\omega)$ 的几何法，

得到 $H(j\omega)$ 的幅频特性和相频特性，再进行判断；这还不如使用 $H(j\omega)$ 的代数法呢！根据 $H(s)$ 的零极点：①如果全部极点都在 s 域左半平面，全部零点都在 s 域右半平面，并且，全部极点与全部零点一一对应，关于 $s = j\omega$ 对称，那么该系统就是全通系统；②如果全部零点都在 s 域左半平面或者虚轴 $j\omega$ 上，那么该网络就是最小相移系统；

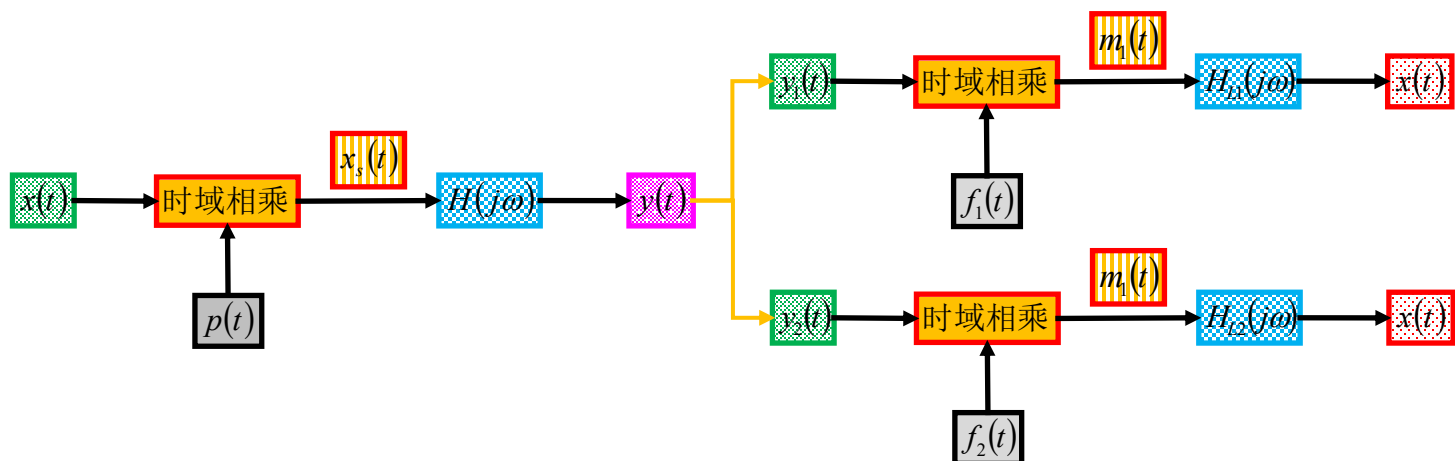
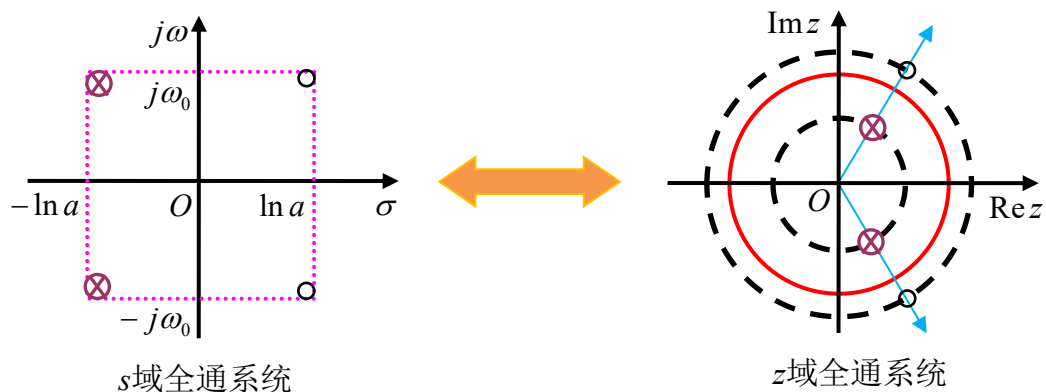
离散时间系统：稳定条件下，直接由系统函数 $H(z)|_{z=e^{j\omega}} \Rightarrow H(e^{j\omega})$ ，借助 $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$ ，如果是求响应，往往给出的离散输入信号的频率为 $\frac{\pi}{2}$ 、 π 、 $\frac{3\pi}{2}$ 等特殊值，因而容易求得响应；如果是判断系统的因果性、稳定性、因果稳定性，使用 $H(z)$ 零极点判断；

其中，系统的因果性可以用输入检验法，还可以有 $h(n)$ 必须为因果图形进行判断；如果是判断系统是否为低通、高通、带通、带阻系统，必须使用 $H(e^{j\omega})$ 的几何法，得到 $H(e^{j\omega})$ 的幅频特性大致图形和相频特性大致图形，再进行判断；

根据 $H(z)$ 的零极点，以及 $\ln z = s$ 的 z 域 \rightarrow s 域的映射关系，将 z 域的零极点变换到 s 域的零极点，根据全通系统、最小相移系统的定义进行判定；

但是根据规律，如果 z 域的全部极点都在单位圆内， z 域全部零点都在单位圆外，并且，全部极点与全部零点一一对应，极点的半径为 R^{-1} ，零点的半径为 R ，并且极点、零点都在同一射线上，那么该系统即为离散域全通系统；

如果 z 域全部零点都在单位圆内以及单位圆上，那么该系统即为 z 域最小相移系统。



滤波器专机

全通滤波器： $H_A(j\omega) = |1 \cdot e^{j[(-t_0) \cdot \omega]}|$ ，其冲激响应 $h_A(t) = \delta(t - t_0)$ ，
 全通网络 【差别与联系】
 无失真传输

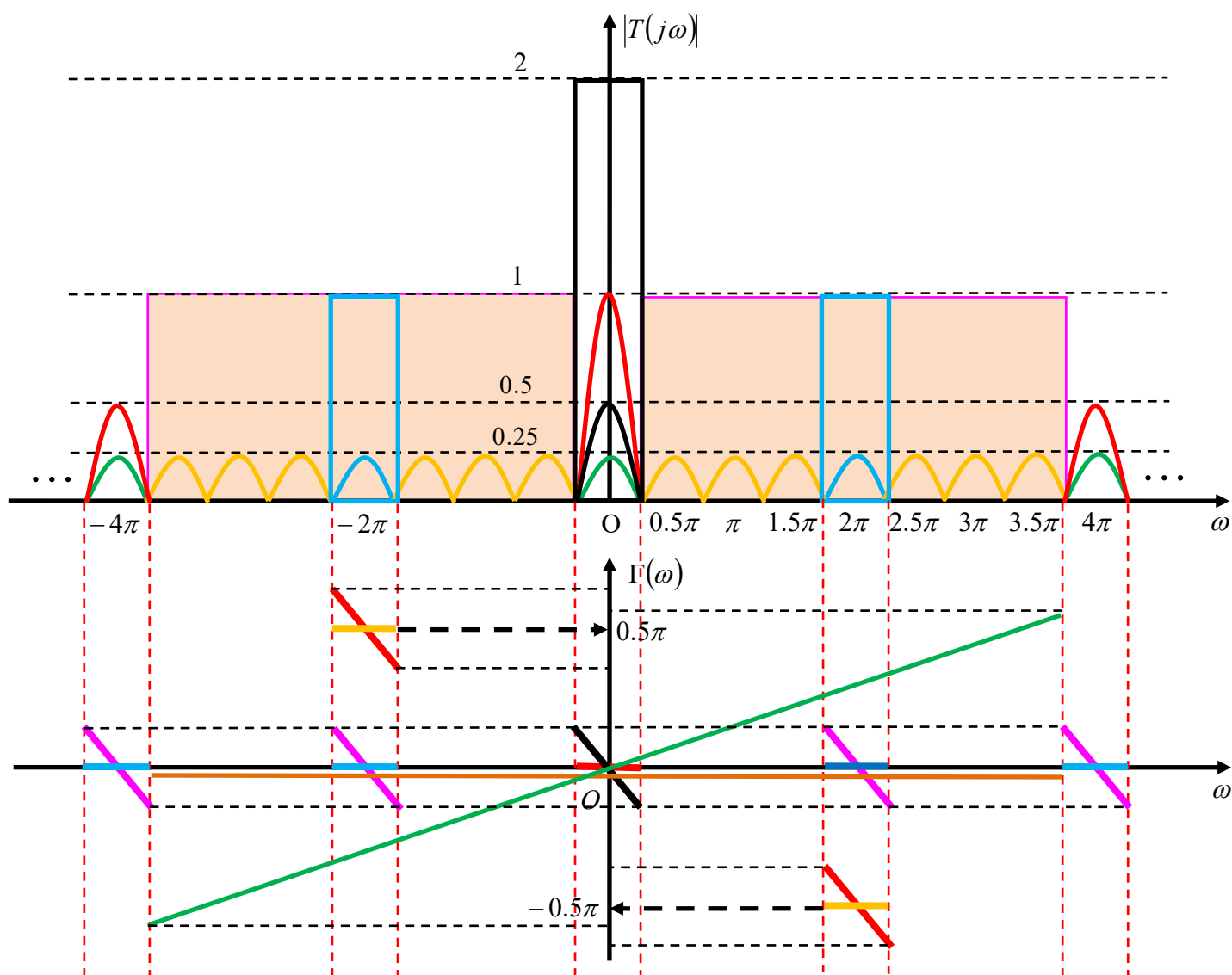
低通滤波器： $H_L(j\omega) = |1 \cdot G_{2\omega_c}| \cdot e^{j[(-t_0) \cdot \omega]}$ ，其冲激响应 $h_L(t) = \frac{\pi}{\omega_c} \cdot \text{Sa}[\omega_c \cdot (t - t_0)]$ ；

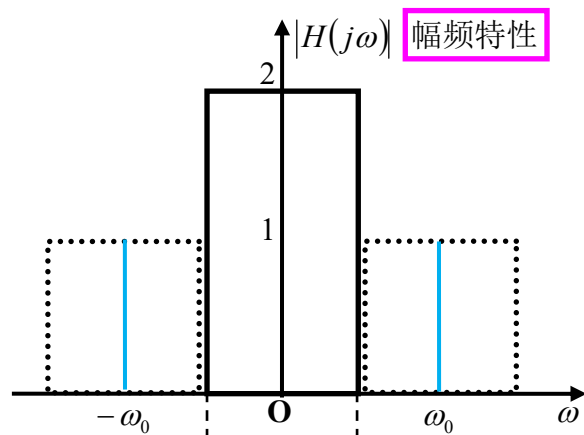
高通滤波器：记忆规则：全通滤波器减去低通滤波器。

$$H_H(j\omega) = |1 - G_{2\omega_c}| \cdot e^{j[(-t_0) \cdot \omega]}，其冲激响应 $h_H(t) = \delta(t - t_0) - \frac{\pi}{\omega_c} \cdot \text{Sa}[\omega_c \cdot (t - t_0)]$ ；$$

带通滤波器：记忆规则：低通滤波器进行余弦或正弦频谱搬移。

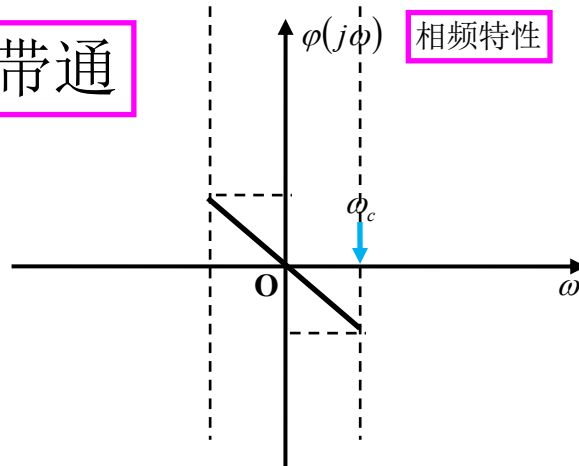
$$H_B(j\omega) = |1 \cdot G_{2\omega_c} \text{【左右频谱搬移 } \omega_0 \text{】}| \cdot e^{j[(-t_0) \cdot \omega]}，其冲激响应 $h_B(t) = \left\{ \frac{\pi}{\omega_c} \cdot \text{Sa}[\omega_c \cdot (t - t_0)] \right\} \cdot \begin{cases} \cos(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$$



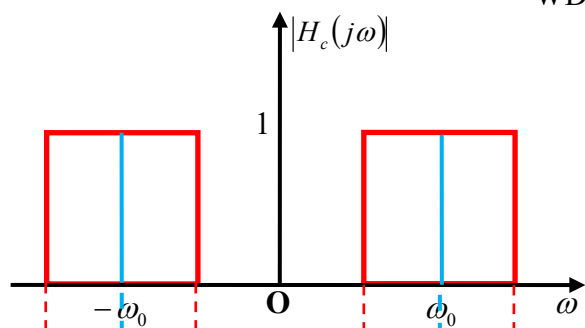


WD2016-3-I

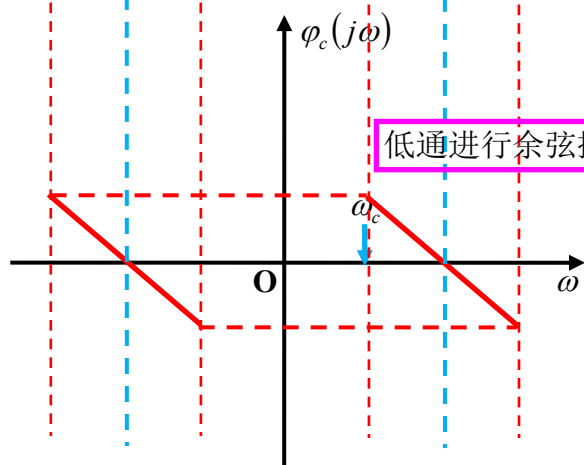
低通和带通



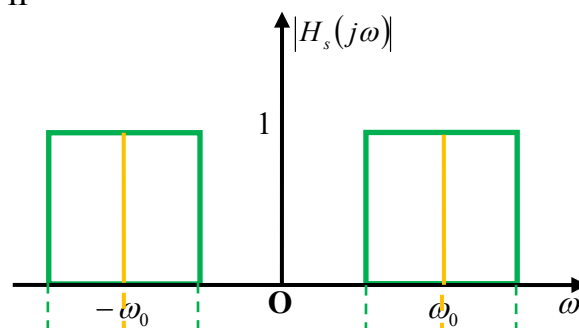
WD2016-3-II



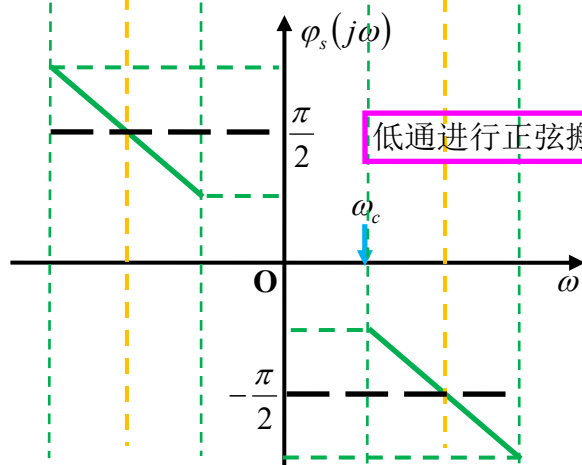
WD2016-3-III



WD2016-3-IV

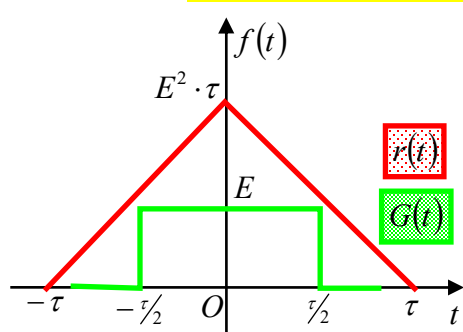


WD2016-3-V

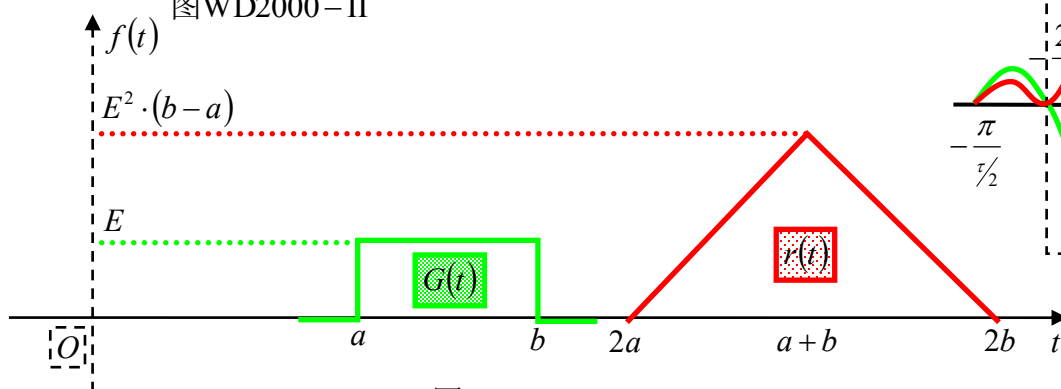


WD2016-3-VI

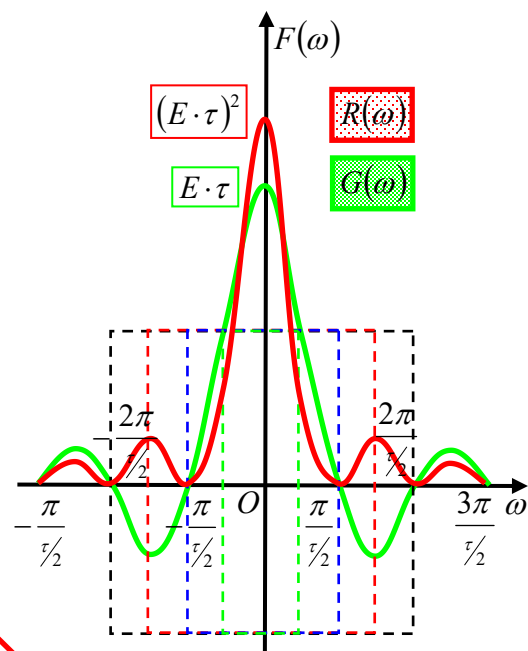
四、卷积、傅里叶变换性质系统



图WD2000-II



图WD2000-IV



图WD2000-III

$$\begin{cases}
 g(t) = E \bullet G_{\tau} \leftrightarrow G(\omega) = (E \bullet \tau) \bullet Sa\left(\frac{\tau}{2} \bullet \omega\right); \\
 r(t) = (E \bullet G_{\tau}) * (E \bullet G_{\tau}) \leftrightarrow \text{三角形} \begin{cases} \text{顶点: } (0, E^2 \bullet \tau) \\ \text{左端点: } (-\tau, 0) \\ \text{右端点: } (+\tau, 0) \end{cases} \leftrightarrow R(\omega) = (E^2 \bullet \tau^2) \bullet Sa^2\left(\frac{\tau}{2} \bullet \omega\right) \\
 \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \bullet G_{\frac{\tau}{2}} \leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{E \bullet \tau}{2}}\right) \bullet Sa\left(\frac{\tau}{4} \bullet \omega\right) \\
 \text{三角形} \begin{cases} \text{顶点: } (0, E) \\ \text{左端点: } \left(-\frac{\tau}{2}, 0\right) \\ \text{右端点: } \left(+\frac{\tau}{2}, 0\right) \end{cases} \leftrightarrow \left(\frac{E \bullet \tau}{2}\right) \bullet Sa^2\left(\frac{\tau}{4} \bullet \omega\right)
 \end{cases}$$

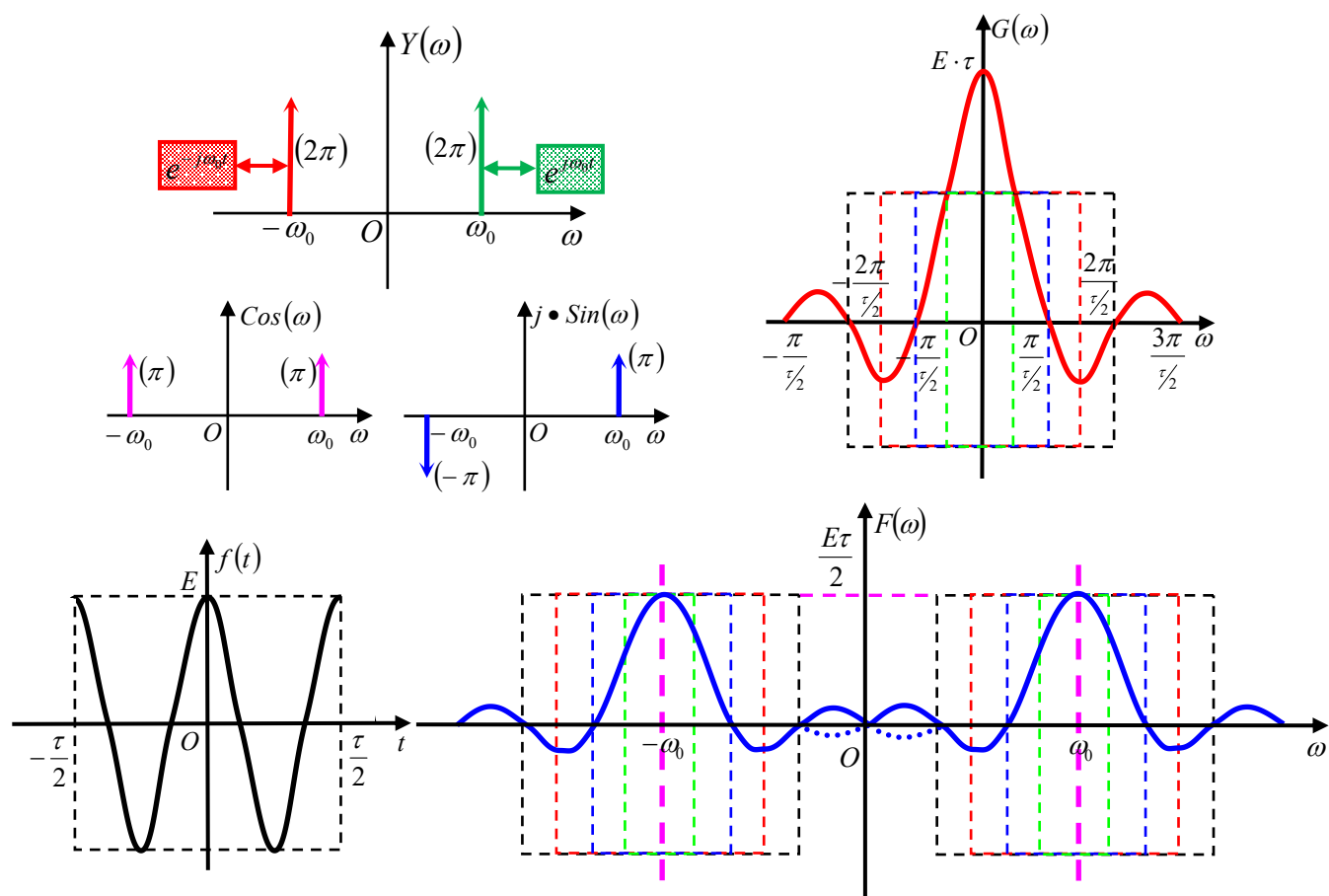
$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0); \quad e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)];$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]; \quad \text{【以 } j \cdot F(\omega) \text{ 为纵轴，左下右上】}$$

$$\text{有限长余弦信号 } f(t) = G_\tau(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow F(\omega) = \frac{E \cdot \tau}{2} \left[\text{Sa} \left[\frac{\tau}{2} (\omega + \omega_0) \right] + \text{Sa} \left[\frac{\tau}{2} (\omega - \omega_0) \right] \right];$$

如图WD-2000VI所示。



图WD2000 - VI

五、信号流图系统

梅森公式: $\frac{H(s)}{H(z)} = \frac{1}{1 - \sum L_a + \sum L_a \cdot L_b - \sum L_a \cdot L_b \cdot L_c + \dots} \cdot \left(\sum_{i=1}^m P_i \cdot \Delta_i \right)$

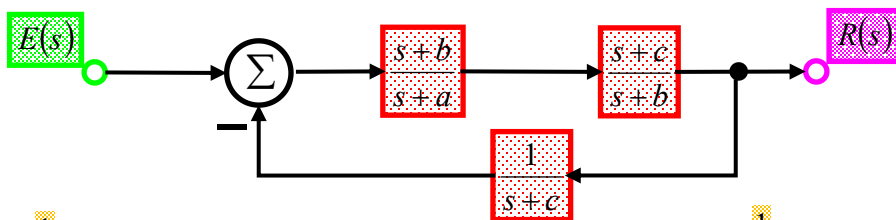


图4-a

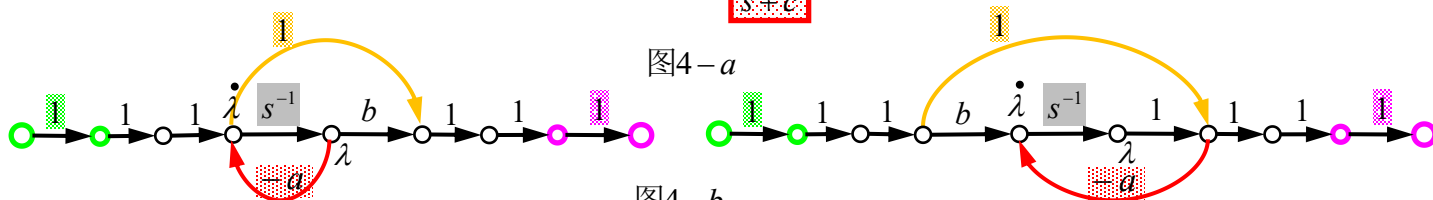


图4-b

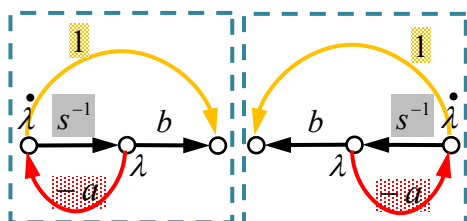


图4-c

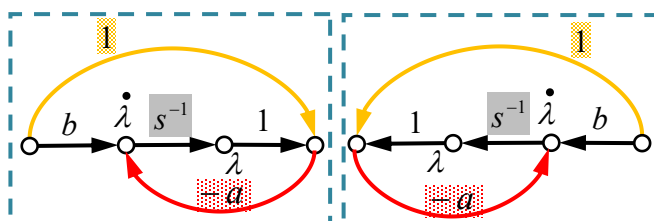


图4-d

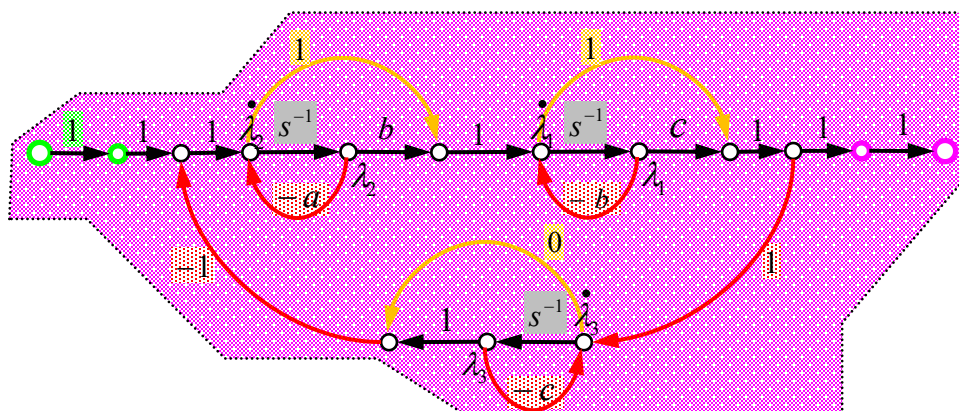


图4-e

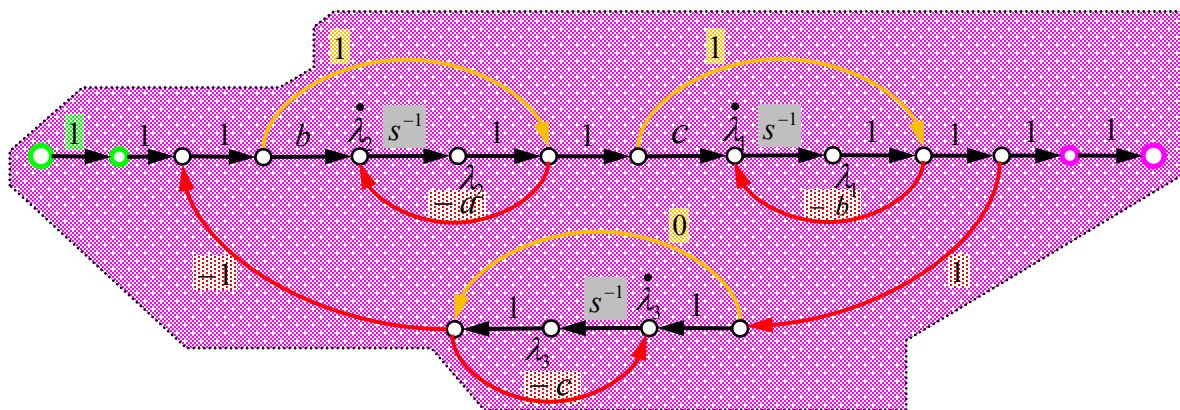
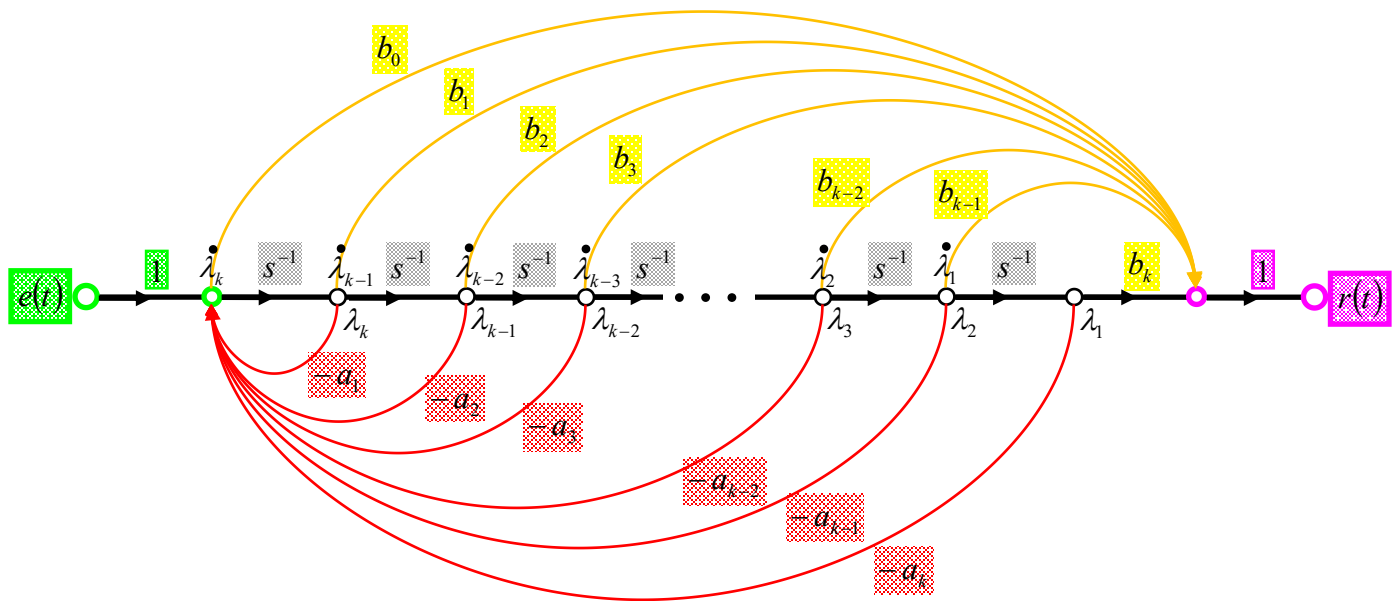
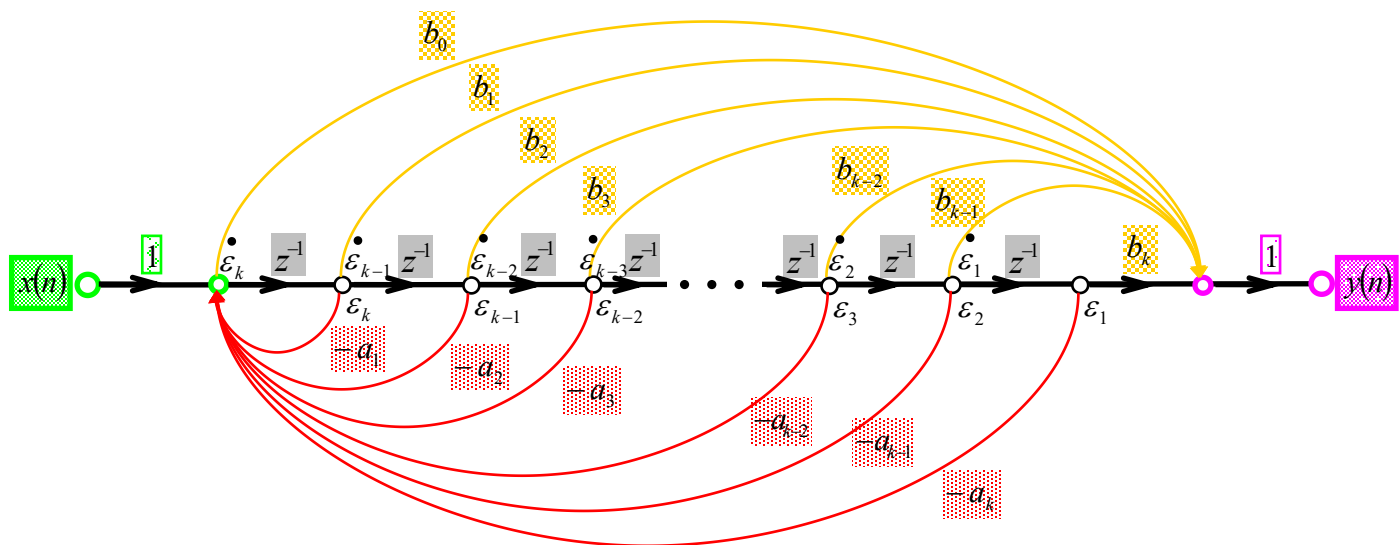


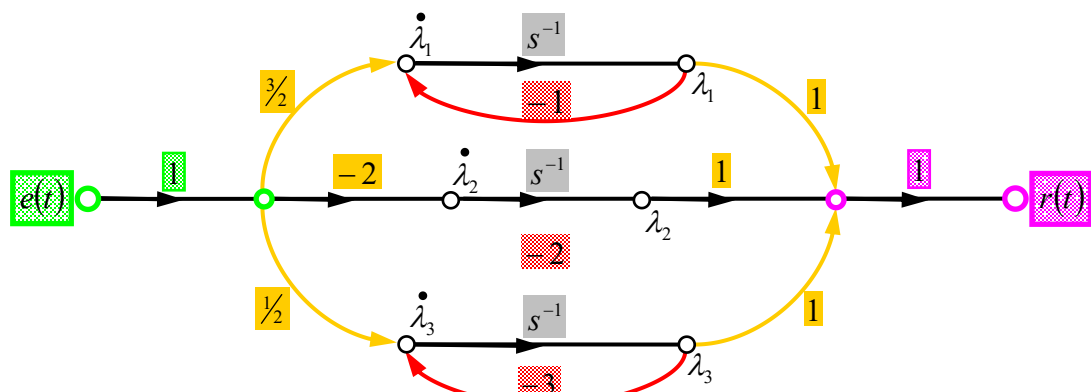
图4-f



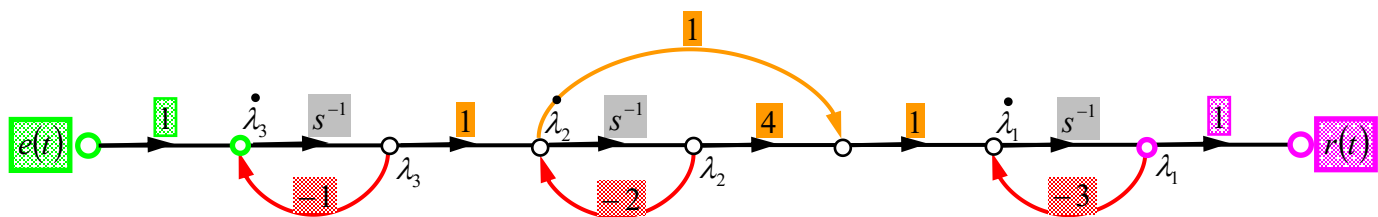
图WD2000 – XIII



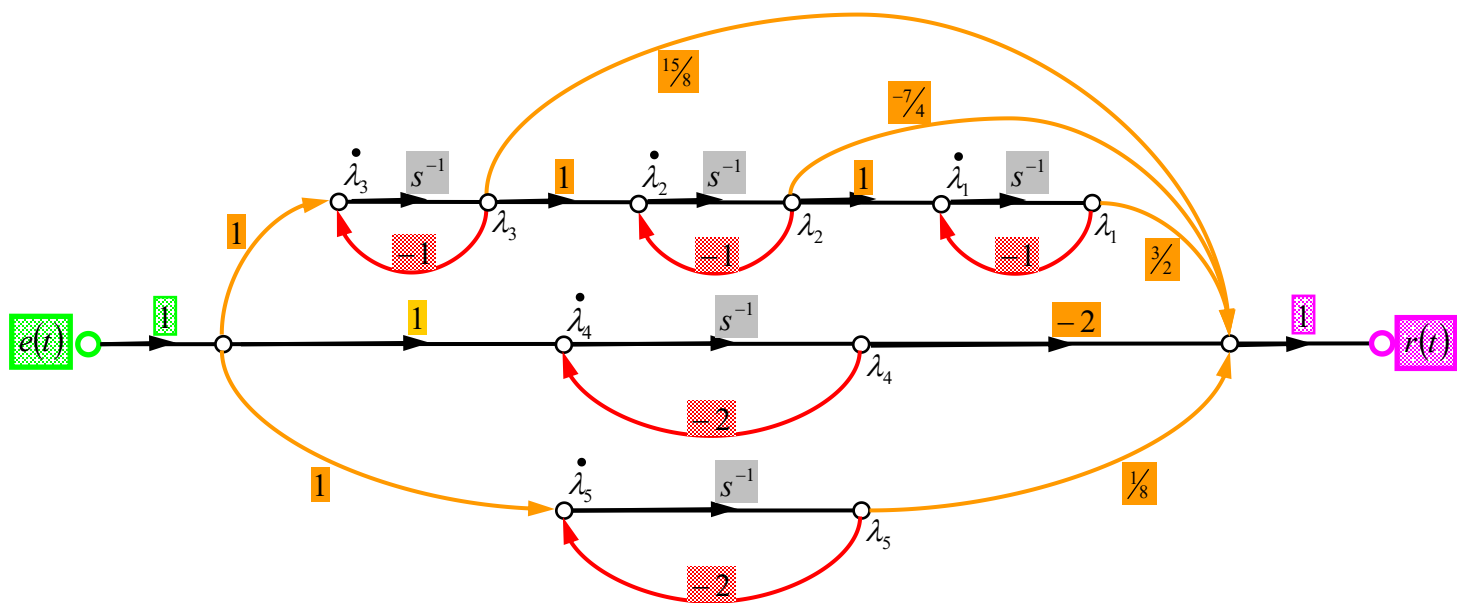
图WD2000 – XIV



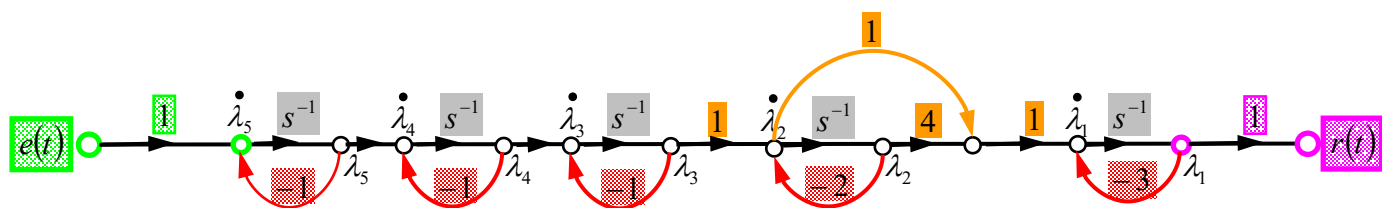
图WD2000-XV



图WD2000-XVI



图WD2000-XVII



图WD2000-XVIII

六、零极点框图稳定系统

根据框图，求出该框图系统函数 $\begin{cases} H(s) \\ H(z) \end{cases}$ ，一般来说，根据零极点就可以判定系统的稳定性；

但是，考试有另外一种题型，就是连续时间系统的系统函数 $H(s)$ 的分母

$p(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s^1 + K s^0$ ；即极点表达式与一个参数 K 相关，并且极点表达式 $p(s)$

无从进行因式乘积分解，这时就要借助劳斯表对该系统的稳定性进行判定。

不过，因为考试涉及的系统为三阶、二阶系统，对于这两种系统，有更为简单的方法：

劳斯-赫尔维茨判别法：

对于三阶系统：系统函数 $H(s)$ 的分母 $p(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s^1 + K s^0$ ，

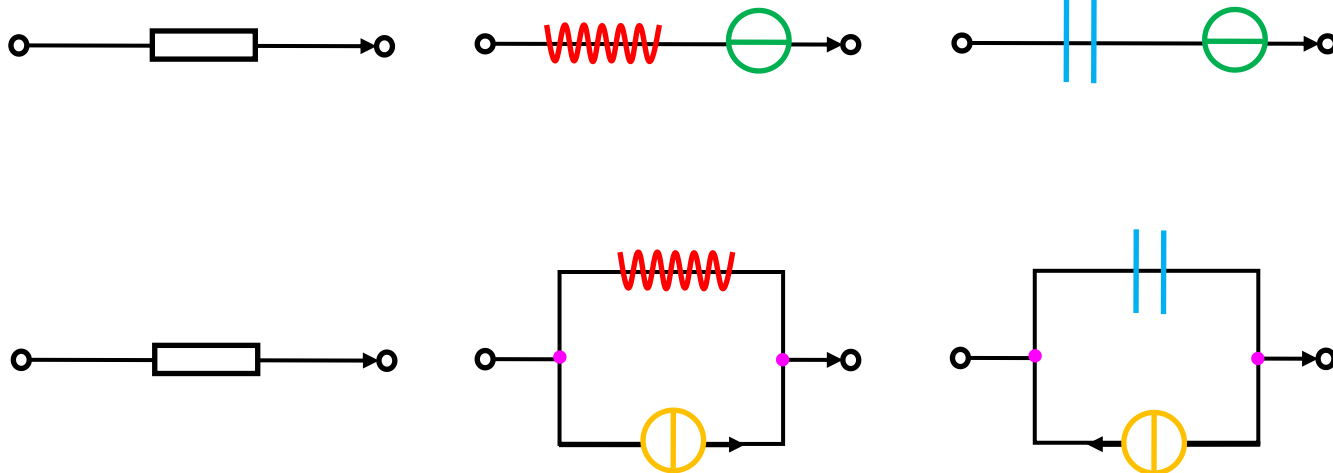
$$\text{稳定的充要条件} \begin{cases} a_0、a_1、a_2、a_3 > 0 \\ a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \end{cases}$$

对于二阶系统：系统函数 $H(s)$ 的分母 $p(s) = a_0 s^2 + a_1 s^1 + a_2 s^0$ ，稳定的充要条件： $a_0、a_1、a_2 > 0$ ；

对于四阶系统：系统函数 $H(s)$ 的分母 $p(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s^1 + a_4 s^0$ ，

$$\text{稳定的充要条件} \begin{cases} a_{0,1,2,3,4} > 0 \\ a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3) \cdot a_3 - (a_1 a_4) \cdot a_1 > 0 \end{cases}$$

S 域元件分析电路方法



串联电压源法

并联电流源法

s域元件分析电路两种方法

七、傅里叶变换公式与性质

性质	时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$	时域频域 对应关系
① 奇偶虚实性	$\begin{cases} f(-t) \\ f^*(t) \\ f^*(-t) \end{cases}$	$\begin{cases} F(-\omega) \\ F^*(-\omega) \\ F^*(\omega) \end{cases}$	实函数的偶分量对应 $R(\omega)$ 实函数的奇分量对应 $jX(\omega)$ 偶函数同实虚， 奇函数反实虚， 时域频域同奇偶。
	$\begin{cases} f(t) \text{ 为实偶函数} \\ f(t) \text{ 为实奇函数} \\ f(t) \text{ 为虚偶函数} \\ f(t) \text{ 为虚奇函数} \end{cases}$	$\begin{cases} F(\omega) \text{ 为实偶函数} \\ F(\omega) \text{ 为虚奇函数} \\ F(\omega) \text{ 为虚偶函数} \\ F(\omega) \text{ 为实奇函数} \end{cases}$	
② 尺度变换特性	$f(at+b)$	$\frac{1}{ a } \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right) \cdot e^{j\left(\omega \cdot \frac{b}{a}\right)}$	时域压缩，频域扩展 时域扩展，频域压缩
	$f(-t)$	$F(-\omega)$	反褶
③ 波形对称相似性	时域波形 $\begin{cases} f(t) \\ F(t) \end{cases}$	$\begin{cases} F(\omega) \\ 2\pi \cdot f(-\omega) \end{cases}$ 频域波形	时域波形与频域波形的对应 关系具有对称相似特性
	$\begin{cases} E \cdot \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \\ A \cdot Sa(B \cdot t) \end{cases}$	$\begin{cases} (E \cdot \tau) \cdot Sa\left(\frac{\tau}{2} \cdot \omega\right) \\ \left(\pi \cdot \frac{A}{B}\right) \cdot [u(\omega + B) - u(\omega - B)] \end{cases}$	
④ 时移特性	$f(t \pm t_0)$	$F(\omega) \cdot e^{\pm j(\omega t_0)}$ 、滤波器！	时移同号 频移反号
⑤ 频移特性	$f(t) \cdot e^{\mp j(\omega_0 t)}$	$F(\omega \pm \omega_0)$	
⑥ 线性性质	$f(t) = \sum_{i=1}^n [a_i \cdot f_i(t)]$	$F(\omega) = a_i \cdot \sum_{i=1}^n [F_i(\omega)]$	由积分的线性性质决定
⑦ 时域微分特性	$f^{(n)}(t) = \frac{d^n [f(t)]}{dt^n}$	$F[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n \cdot F(\omega)$	时域微分 n 次 频域 $\times (j\omega)$ 因式 n 次
⑧ 频域微分特性	$F^{-1}[F^{(n)}(\omega)] = (-jt)^n \cdot f(t)$	$F^{(n)}(\omega) = \frac{d^n [F(\omega)]}{d\omega^n}$	频域微分 n 次 时域 $\times (-jt)$ 因式 n 次
⑨ 时域积分特性	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot F(0)$	时域积分至 t ， 频域 $\div (j\omega)$ 因式 + 冲激 δ

⑩ 频域积分特性	$\frac{f(t)}{-jt} + \pi \cdot \delta(t) \cdot f(0)$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega) d\Omega$	频域积分至 Ω , 时域 $+(-jt)$ 因式+冲激 δ
XI 时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$	时域卷积, 频域乘积
XII 频域卷积定理	$2\pi \cdot [f_1(t) \cdot f_2(t)]$	$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\Omega) \cdot F_2(\omega - \Omega) d\Omega$	频域卷积, 时域乘积
XIII 时域抽样定理	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f(t) \cdot \delta(t - n \cdot T_s)]$	$\frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [F(\omega - n \cdot \omega_s)]$	时域冲激抽样
XIV 频域抽样定理	$\frac{1}{\omega_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f(t - n \cdot T_s)]$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [F(\omega) \cdot \delta(\omega - n \cdot \omega_s)]$	频域冲激抽样
XV 相关性	$\begin{Bmatrix} R_{12}(\tau) \\ R_{21}(\tau) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega) \\ F_1^*(\omega) \cdot F_2(\omega) \end{Bmatrix}$	
XVI 自相关性	$R(\tau)$	$ F(\omega) ^2$	
XVII 频谱搬移	$f(t) \bullet \cos(\omega_0 t)$	$\frac{[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]}{2}$	实轴: 余弦搬移, 左右之和的一半
	$f(t) \bullet \sin(\omega_0 t)$	$\frac{j \bullet [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]}{2}$	虚轴: 正弦搬移, 左右之差的一半

冲激信号: $\delta(t) \leftrightarrow 1(\omega)$
阶跃信号: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \bullet \delta(\omega)$
三角信号: $\leftrightarrow \left(\frac{E \bullet \tau}{2}\right) \bullet Sa^2\left(\frac{\tau \bullet \omega}{4}\right)$
梯形信号: $\leftrightarrow \left[\frac{E \bullet (\tau + \tau_1)}{2}\right] \bullet Sa\left[\left(\frac{\tau + \tau_1}{4}\right) \bullet \omega\right] \bullet Sa\left[\left(\frac{\tau + \tau_1}{4}\right) \bullet \omega\right]$
右边余弦信号: $\cos(\omega_0 \bullet t) \bullet u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \bullet \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
右边正弦信号: $\sin(\omega_0 \bullet t) \bullet u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \bullet j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
有限长余弦信号(矩形调幅信号): $(E \bullet G_\tau) \bullet \cos(\omega_0 \bullet t)$, 利用 $(E \bullet \tau) \bullet Sa\left(\frac{\tau \bullet \omega}{2}\right)$ 频谱余弦搬移

八、拉普拉斯变换公式与性质

拉普拉斯的性质(高仿傅立叶变换)

①线性性质: $L[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(s)+bF_2(s)$

②时域微分性质: $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 则 $\frac{d}{dt}[f(t)] \leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$;

$\frac{d^2}{dt^2}[f(t)] \leftrightarrow s[sF(s)-f(0_-)]-f'(0_-)=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$;

$\frac{d^3}{dt^3}[f(t)] \leftrightarrow s[s[sF(s)-f(0_-)]-f'(0_-)]-f''(0_-)=s^3F(s)-s^2f^{(0)}(0_-)-s^1f^{(1)}(0_-)-s^0f^{(2)}(0_-)$;

以此类推: $\frac{d^n}{dt^n}[f(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f^{(0)}(0_-)-s^{n-2}f^{(1)}(0_-)-s^{n-3}f^{(2)}(0_-)-\dots-s^{n-1-k}f^{(k)}(0_-)-\dots$

③时域积分性质: $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 则 $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau)d\tau}{s}$, 记作 $\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$

④s域微分: $F(s) \leftrightarrow f(t)$, 则 $\frac{d}{ds}[F(s)] \leftrightarrow (-t)f(t)$; $\frac{d^n}{ds^n}[F(s)] \leftrightarrow (-t)^n f(t)$

⑤s域积分: $F(s) \leftrightarrow f(t)$, 则 $\int_s^\infty F(\Theta)d\Theta$

⑥延时性质: $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 则 $f(t-t_0) \cdot u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} \cdot F(s)$, 请注意这条性质!

它只对于时域右移求单边拉普拉斯变换! 这要求原来的时域函数 $f(t)$ 是因果信号,

如果不是因果信号, 那么拉氏变换的结果把 $t < 0$ 的信号忽略掉了!

⑤复频移性质(s域移位): $F(s) \leftrightarrow f(t)$, 则 $F(s \pm s_0) \leftrightarrow e^{\mp s_0 t} \cdot f(t)$

延时性质和s域移位性质仍然符合“时减s负”、“s加时负”的傅里叶变换口诀。

⑦尺度变换: $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 则 $f(at-b) = e^{-\frac{b}{a}s} \cdot \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$

⑧初值定理: $f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$, 如果 $f(t)$ 包含冲激函数 $k\delta(t)$, 则 $f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - ks]$

⑨终值定理: 在 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 确实存在的条件下, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, 如何判断左边极限是否存在呢?

根据 $sF(s)$ 的图像(具体来说是零极点), 当且仅当 $sF(s)$ 在 s 平面第I、第III象限内(剔除原点、实轴、虚轴)。

X时域卷积定理: $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$

XI.s域卷积定理: $\frac{F_1(s) * F_2(s)}{j2\pi} \leftrightarrow f_1(t) \cdot f_2(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) \leftrightarrow 1(s) \\ u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \\ e^{(-\alpha) \cdot t} \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha} \\ t^n \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\omega_0 \cdot t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \\ \sin(\omega_0 \cdot t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [t^n \cdot e^{(-\alpha) \cdot t}] \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}} \\ t \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \\ t \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \leftrightarrow \frac{2\omega_0 \cdot s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \end{array} \right.$$

九、Z变换公式与性质

Z 变换	Z 逆变换	
	$ z > \text{正数}$, 因果序列	$ z < \text{正数}$, 反因果序列
$\frac{z}{z-1}$	$u(n) = 1 \cdot (1)^n \cdot u(n), z > 1$	$-u(-n-1) = (-1) \cdot (1)^n \cdot u(-n-1), z < 1$
$\frac{z}{z-a}$	$a^n u(n) = 1 \cdot (a)^n \cdot u(n), z > a$	$-a^n u(-n-1) = (-1) \cdot (a)^n \cdot u(-n-1), z < a$
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$(n+1) \cdot a^n u(n), z > a$	$-(n+1) \cdot a^n u(-n-1), z < a$
$\frac{1 \cdot z}{(z-1)^2}$	$n \cdot u(n), z > 1$, 线性加权	$-n \cdot u(-n-1), z < 1$
$\frac{a \cdot z}{(z-a)^2}$	$n \cdot a^n u(n), z > a$	
1	$\delta(n)$, z 域全平面	
$\frac{z \cdot \sin \omega_0}{z^2 - 2 \cdot z \cos \omega_0 + 1}$	$\sin(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n), z > 1$	
$\frac{z \cdot (z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2 \cdot z \cos \omega_0 + 1}$	$\cos(\omega_0 \cdot n) \cdot u(n), z > 1$	

①单边Z变换: $Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} [y(n) \cdot z^{-n}]$ ②双边Z变换: $Y_B(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [y(n) \cdot z^{-n}]$

③常用Z变换及其逆变换公式(注意收敛域), 这要记得、写得、用得滚瓜烂熟!

④Z变换的性质

$$\text{I. 位移性质} \begin{cases} \text{双边: } x(n \pm m) \leftrightarrow z^{\pm m} \cdot X(z) \\ \text{单边因果序列: } \begin{cases} \overbrace{x(n-m)}^{m \text{ 为正数}} \cdot u(n) \leftrightarrow z^{-m} \cdot X(z) \begin{cases} x(n-1) \cdot u(n) \leftrightarrow z^{-1} \cdot X(z) + z^0 \cdot x(-1) \\ x(n-2) \cdot u(n) \leftrightarrow z^{-2} \cdot X(z) + z^{-1} \cdot x(-1) - z^0 \cdot x(-2) \end{cases} \\ \overbrace{x(n+m)}^{m \text{ 为正数}} \cdot u(n) \leftrightarrow \begin{cases} x(n+1) \cdot u(n) \leftrightarrow z^1 \cdot X(z) - z^1 \cdot x(0) \\ x(n+2) \cdot u(n) \leftrightarrow z^2 \cdot X(z) - z^2 \cdot x(0) - z^1 \cdot x(1) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{II. 序列线性加权: } n \cdot x(n) \leftrightarrow (-z) \cdot \frac{d[X(z)]}{dz} \Rightarrow n^k \cdot x(n) \leftrightarrow (-z)^k \cdot \frac{d^k[X(z)]}{dz^k}$$

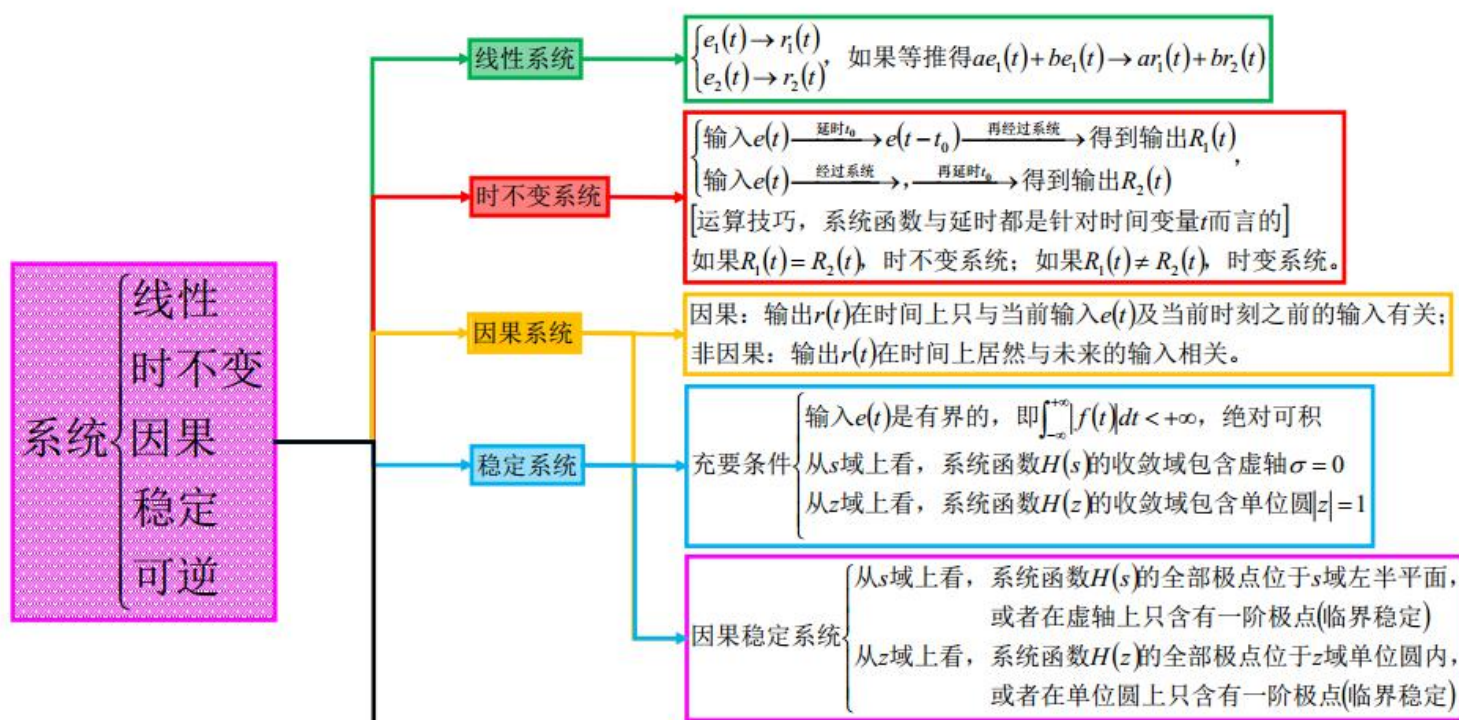
$$\text{III. 序列指数加权: } a^n \cdot x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right), \text{ 举例: } (-1)^n \cdot x(n) \leftrightarrow X(-z) \Leftrightarrow (-1)^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z+1}$$

$$\text{IV. 初值定理: 若 } x(n) \text{ 为因果序列, 则有 } x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$$

V. 终值定理: **NO.1** 终值存在条件: $X(z)$ 的全部极点都位于单位圆内, 或极点位于 $z=1$ 处且为一阶极点, 也就是使得系统稳定的条件; (对应的s域存在条件为, 极点全部在虚轴左半平面, 或虚轴上且为一阶极点)

$$\text{NO.2 若 } x(n) \text{ 是因果序列, 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 0} [(z-1) \cdot X(z)]$$

十、线性时不变因果稳定输出响应系统



关于各种名为“XX响应”的概念极其特征剖析

- ①自由响应: 对应微分方程(差分方程)的齐次解, 解的形式由微分方程(差分方程)的形式决定, 其中系数的求解只能由 0_+ 时刻的相关量带入, 故而要使用 0 时刻的冲激函数匹配法, 根据 0_- 时刻求出 0_+ 时刻的物理量; 注意: 自由响应与系统函数的极点相关联;
- ②强迫响应: 对应微分方程(差分方程)的特解, 解的形式由激励信号(输入信号)的形式决定, 可根据二阶及高阶线性常微分方程的公式求解, 也可根据常用结论求解; 注意: 强迫响应与输入信号的极点相关联;
- ③零输入响应: 激励信号(输入信号)为 0 的条件下, 求解对应的微分方程(差分方程)的齐次解, 与自由响应的差别在于, 正因为没有输入信号, 0_- 时刻与 0_+ 时刻的物理量绝对不会发生跳变, 因而系数的求解可以使用 0_- 时刻的物理量代替 0_+ 时刻的物理量;
- ④零状态响应: 系统初始状态为 0 的条件下, 输出只有输入决定, 求解对应微分方程(差分方程)的非齐次解, 这个非齐次解包含齐次解和特解两个部分, 且齐次解的求解方法同自由响应; 特解的求解方法同强迫响应;
- ⑤瞬态响应: 求出全响应后, 令 $t \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 全响应中趋于 0 的衰减分量即为瞬态响应; 注意: 瞬态响应与系统函数的极点相关联;
- ⑥稳态响应: 求出全响应后, 令 $t \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 全响应除去趋于 0 的衰减分量即为稳态响应; 注意: 稳态响应与激励信号的极点相关联;
- ⑦单位冲激【样值】响应: 在输入为 $\delta(t)$ 【或 $\delta(n)$ 】的条件下, 输出的响应, 根据卷积的定义, $r(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$, $y(n) = \delta(n) * h(n) = h(n)$;
- ⑧单位阶跃响应(连续域、离散域): 在输入为 $u(t)$ 【或 $u(n)$ 】的条件下, 输出的响应, 值得注意的是, 卷积的性质运用, 根据 $\delta(t)$ 【或 $\delta(n)$ 】求, $u'(t) = \delta(t)$, $u(n) - u(n-1) = \delta(n)$