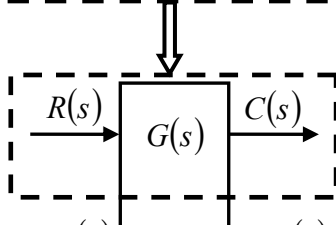
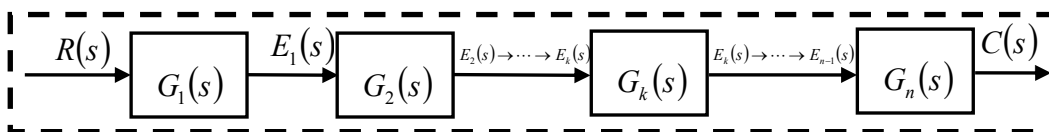


## 自动控制原理系统分析

### 系统结构图

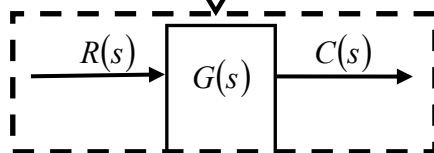
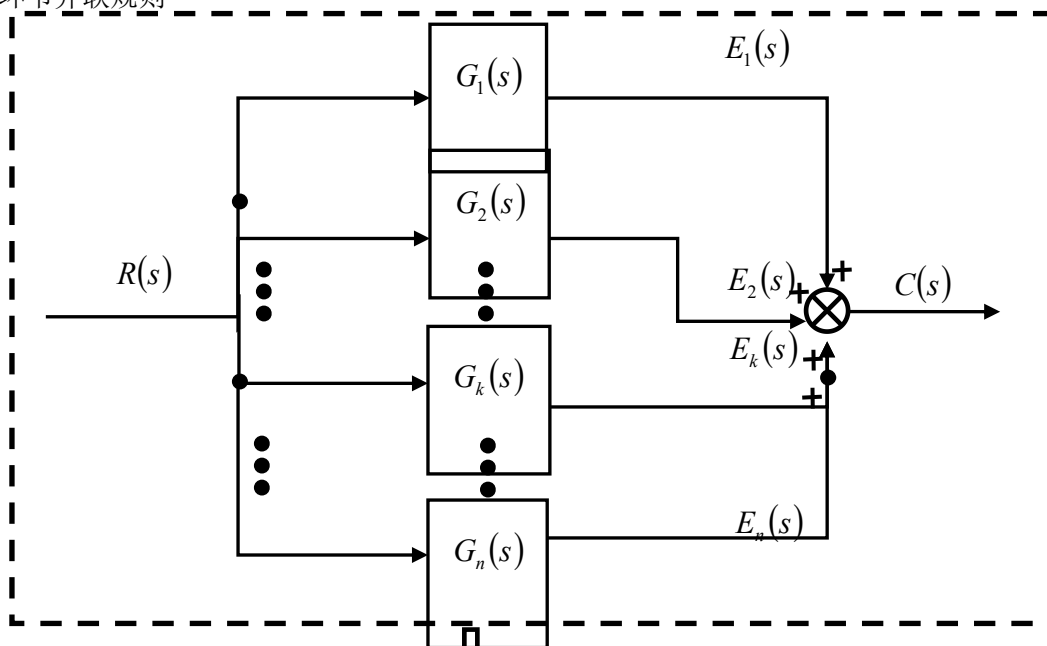
#### ①环节串联规则



$$G_1(s) = \frac{E_1(s)}{R(s)}, \quad G_2(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)}, \quad G_k(s) = \frac{E_k(s)}{E_{k-1}(s)}, \quad G_n(s) = \frac{C(s)}{E_{n-1}(s)}$$

$$\text{相乘得: } G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_k(s) \cdot \dots \cdot G_n(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

#### ②环节并联规则



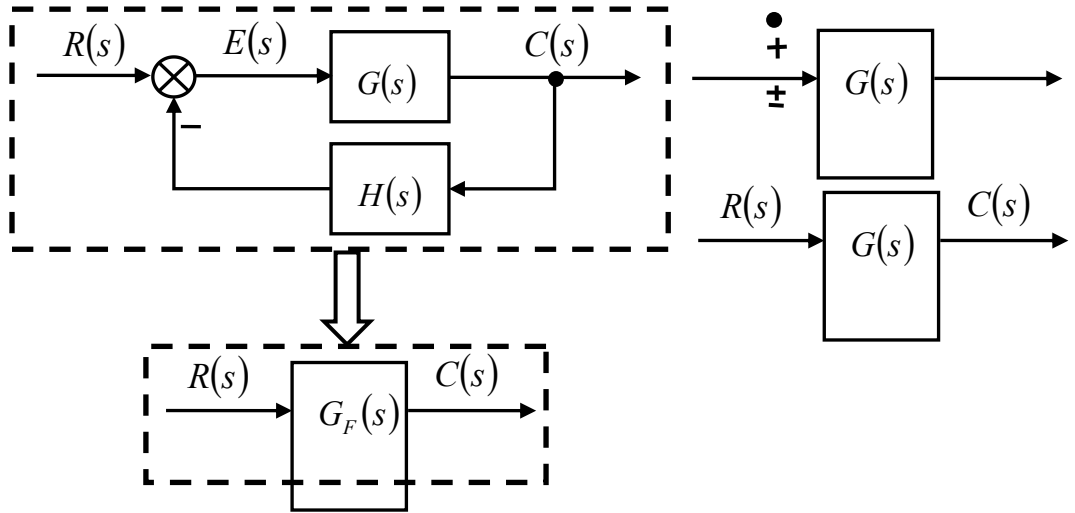
$$E_1(s) = R(s) \cdot G_1(s), \quad E_2(s) = R(s) \cdot G_2(s), \quad E_k(s) = R(s) \cdot G_k(s), \quad E_n(s) = R(s) \cdot G_n(s)$$

$$C(s) = E_1(s) + E_2(s) + \dots + E_k(s) + \dots + E_n(s)$$

$$\text{提取公因子} \quad C(s) = R(s) \cdot [G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_k(s) + \dots + G_n(s)]$$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_k(s) + \dots + G_n(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

### ③环节反馈规则



前向通路传递函数 $G(s)$ , 反馈传递函数 $H(s)$ ; 开环传递函数:  $G_c(s) = G(s) \cdot H(s)$ , 闭环传递函数:  $W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot [\pm H(s)]} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s) \cdot H(s)}$

闭环传递函数与前向通路传递函数 $G(s)$ 和开环传递函数 $G_c(s)$ 之间的关系:  $W(s) = \frac{G(s)}{1 - G_c(s) \cdot [\pm H(s)]} = \frac{\overbrace{G(s)}^{\text{前向通路函数}}}{1 \pm \underbrace{G_c(s)}_{\substack{\text{开环传递函数} \\ \text{+号为负反馈} \\ \text{-号为正反馈}}}}$

当采用单位反馈, 即 $H(s) = \pm 1(s)$ 时, 开环传递函数即为前向通路传递函数, 此时有 $W(s) = \frac{G_c(s)}{1 \pm G_c(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)}$

求对个信号叠加的响应时, 必须用各自的闭环传递函数求解后叠加!!!!!!

1阶闭环反馈传递函数:

$$G_{1F}(s) = \frac{G_{C1}(s)}{1 \pm G_{C1}(s) \cdot H_{B1}(s)}$$

2阶闭环反馈传递函数:

$$G_{2F}(s) = \frac{G_{C1}(s) * G_{C2}(s)}{1 \pm G_{C1}(s) \cdot H_{B1}(s) \pm G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot H_{B2}(s)}$$

3阶闭环反馈传递函数:

$$G_{3F}(s) = \frac{G_{C1}(s) * G_{C2}(s) * G_{C3}(s)}{1 \pm G_{C1}(s) \cdot H_{B1}(s) \pm G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot H_{B2}(s) + G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot G_{C3}(s) \cdot H_{B3}(s)}$$

4阶闭环反馈传递函数:

$$G_{4F}(s) = \frac{G_{C1}(s) * G_{C2}(s) * G_{C3}(s) * G_{C4}(s)}{1 \pm G_{C1}(s) \cdot H_{B1}(s) \pm G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot H_{B2}(s) + G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot G_{C3}(s) \cdot H_{B3}(s) \pm G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot G_{C3}(s) \cdot G_{C4}(s) \cdot H_{B4}(s)}$$

⋮

k阶闭环反馈传递函数:

$$G_{kF}(s) = \frac{G_{C1}(s) * G_{C2}(s) * G_{C3}(s) * \dots * G_{Ck}(s)}{1 \pm G_{C1}(s) \cdot H_{B1}(s) \pm G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot H_{B2}(s) + G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot G_{C3}(s) \cdot H_{B3}(s) \pm \dots \pm G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot \dots \cdot G_{Ck}(s) \cdot H_{Bk}(s)}$$

⋮

n阶闭环反馈传递函数:

$$G_{nF}(s) = \frac{G_{C1}(s) * G_{C2}(s) * G_{C3}(s) * \dots * G_{Cn}(s)}{1 \pm G_{C1}(s) \cdot H_{B1}(s) \pm G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot H_{B2}(s) + G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot G_{C3}(s) \cdot H_{B3}(s) \pm \dots \pm G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) \cdot \dots \cdot G_{Cn}(s) \cdot H_{Bn}(s)}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n G_{Ci}(s)}{1 + \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ \prod_{r=1}^j G_{Cr}(s) \right] \cdot [\pm H_{Bj}(s)] \right\}} \quad (\text{其中} \pm \text{号依次表征负反馈, 正反馈})$$

系统的**传递函数**定义：在**线性定常系统**中，当系统为**零初始条件**时，系统输出量和输入量同作拉普拉斯变换的比值定义为系统的传递函数。

传递函数的**性质**：

①传递函数是复变量  $s$  的有理真分式函数，其分子与分母的系数均为实数，这些系数是构成系统的元件的物理参数决定的。

②传递函数分子的根即零点、分母的根即极点，要么是实数根，要么是共轭复数根。

③传递函数分子项的阶数必然小于分母项的阶数，这是因为构成系统的元件必然具有惯性，且能源有限。

④传递函数描述系统（或构成系统元件）的固有特性，因而只与系统内部结构和参数有关，与外界作用即外界输入量无关。

⑤传递函数具有结构的不确定性，即物理性质完全不同的系统，可能具有相同的传递函数，因而可以用电子系统来模拟机械系统。

### 信号流图重要概念

①**节点**：用以表示线性微分方程中的变量，等同于中间信号（待消去），用“○”表示。

②**传输**：两个节点之间的增益，总增益（总传输）为所有前向通路上增益之和。

③**支路**：带定向箭头用以连接两个节点的线段，限定了信号的流动方向。

④**源点**：只有输出支路，没有输入支路的节点，不能与其他任何节点合并，对应于系统的自变量，也称输入节点。

⑤**阱点**：只有输入支路，没有输出支路的节点，一般不与其他任何节点合并，对应于系统的因变量，也称输出节点。

⑥**混合节点**：既有输入支路，又有输出支路的节点。

⑦**前向通路**：由原点定向“走到”阱点的一串连续支路，不论远近，但每个节点通过的次数最多为1！

⑧**回路**：特征在于向前“返回”，且每个节点最多只通过一次。

⑨**不接触回路**：任意两个或多个回路没有任何公共节点。

⑩**自回路**：回路中有且仅有一个节点。

信号流图的运算规则

①加法规则 ②乘法规则 ③分配规则 ④自回路简化规则 ⑤反馈回路简化规则

**技巧**：上述规则基于两个前提：一是节点与支路、传输构建函数关系，从而导出线性微分方程；二是从信号角度来审视信号流动问题，类比系统结构图。

梅森增益公式：
$$P = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{k=1}^n (p_k \Delta_k)$$

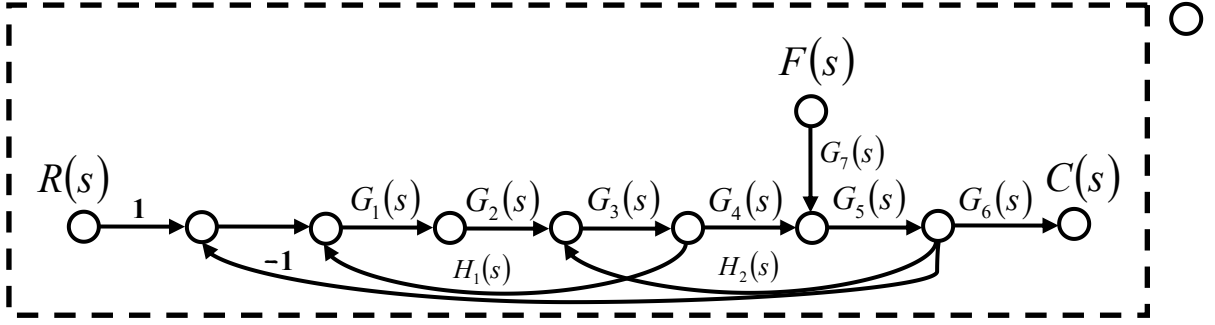
$$\Delta = 1 - \underbrace{\sum_a (L_a)}_{\text{任选1条}} + \underbrace{\sum_{ab} (L_a \cdot L_b)}_{\text{任选2条}} - \underbrace{\sum_{abc} (L_a \cdot L_b \cdot L_c)}_{\text{任选3条}} + \cdots = 1 + \sum_{i=1}^{\text{回路总数}} \left[ \underbrace{\left( (-1)^i \cdot \sum_{r=1}^{m_i} \left( \prod_{Ck=1}^i L_{Ck} \right) \right)}_{\text{任选}i\text{条}} \right]$$

$$\Delta_k = 1 + \sum_{i=1}^{\text{回路总数}} \left[ \underbrace{\left( (-1)^i \cdot \sum_{r=1}^{m_i} \left( \prod_{Ck=1}^i L_{Ck} \right) \right)}_{\text{任选}i\text{条}} \right] \Bigg|_{L_{Ck} = \begin{matrix} L_{k,j} \\ \text{与第}k\text{条前向通路具有公共节点的回路} \end{matrix}} = 0$$

其中： $P$ 代表信号流图（系统）的总增益； $\Delta$ 为信号流图总回路特征式； $p_k$ 代表第 $k$ 条前向通路的增益；

$\Delta_k$ 为在信号流图特征式 $\Delta$ 中，除去与第 $k$ 条前向通路相接触的回路特征式

（即令与第 $k$ 条前向通路有公共节点的回路增益为0）



由所给信号流图知，分为控制传递函数  $G_R(s)$  与扰动传递函数  $G_F(s)$  的求解

前向通路1条：  $P_1 = 1 \cdot 1 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 \cdot G_6 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$

单回路3条：  $L_1 = H_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 = G_3 G_4 G_5 H_2$

$L_2 = H_1 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = G_1 G_2 G_3 H_1$

$L_3 = (-1) \cdot 1 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$

不接触回路0条；

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - (G_3 G_4 G_5 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 - G_1 G_2 G_3 G_4 G_5) = 1 - G_3 G_4 G_5 H_2 - G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$\text{特征余子式 } \Delta_1 = \frac{\text{因回路 } L_1, L_2, L_3 \text{ 与前向通路 } P_1 \text{ 都有接触, 故令 } L_1=0, L_2=0, L_3=0 \text{ 得}}{1 - \sum_a L_a} \rightarrow 1 - \sum_a 0 = 1$$

$$\text{由梅森增益公式得到: } G_R(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{k=1}^n (p_k \cdot \Delta_k) = \frac{(G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6) \cdot 1}{1 - G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 - G_3 G_4 G_5 H_2} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}{1 - G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 - G_3 G_4 G_5 H_2}$$

同理，掌握梅森增益公式中重要概念： $\Delta$  为信号流图的特征式，它有一个重要特征：与前向通路无关，就是说只要给定信号流图，即可确定单回路和不接触回路，因而牢记  $\Delta$  只与回路有关且与前向通路无关；而  $\Delta_k$  则与  $\Delta$  “相反”， $\Delta_k$  由前向通路和回路共同确定。

那么，前向通路1条：  $P_2 = G_7 \cdot G_5 \cdot G_6 = G_5 G_6 G_7$ ；单回路不变3条；特征式不变；

$$\text{特征余子式 } \Delta_2 = \frac{\text{因回路 } L_1, L_2, L_3 \text{ 与前向通路 } P_2 \text{ 有接触, 回路 } L_2 \text{ 与前向通路 } P_2 \text{ 无接触, 故令 } L_1=0, L_3=0 \text{ 得}}{1 - \sum_a L_a} \rightarrow 1 - \sum_a L_a = 1 - L_2 = 1 - G_1 G_2 G_3 H_1$$

$$\text{干扰传递函数 } G_F(s) = \frac{C(s)}{F(s)} = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{k=1}^n (p_k \cdot \Delta_k) = \frac{(G_5 G_6 G_7) \cdot (1 - G_1 G_2 G_3 H_1)}{1 - G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 - G_3 G_4 G_5 H_2} = \frac{G_5 G_6 G_7 - G_1 G_2 G_3 G_5 G_6 G_7 H_1}{1 - G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 - G_3 G_4 G_5 H_2}$$

应用叠加定理：可得到输入信号  $R(s)$  和扰动信号  $F(s)$  同时作用时系统的输出

$$\sum C = G_R(s) \cdot R(s) + G_F(s) \cdot F(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 R(s) + (G_5 G_6 G_7 - G_1 G_2 G_3 G_5 G_6 G_7 H_1) F(s)}{1 - G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 - G_3 G_4 G_5 H_2}$$

## 状态方程

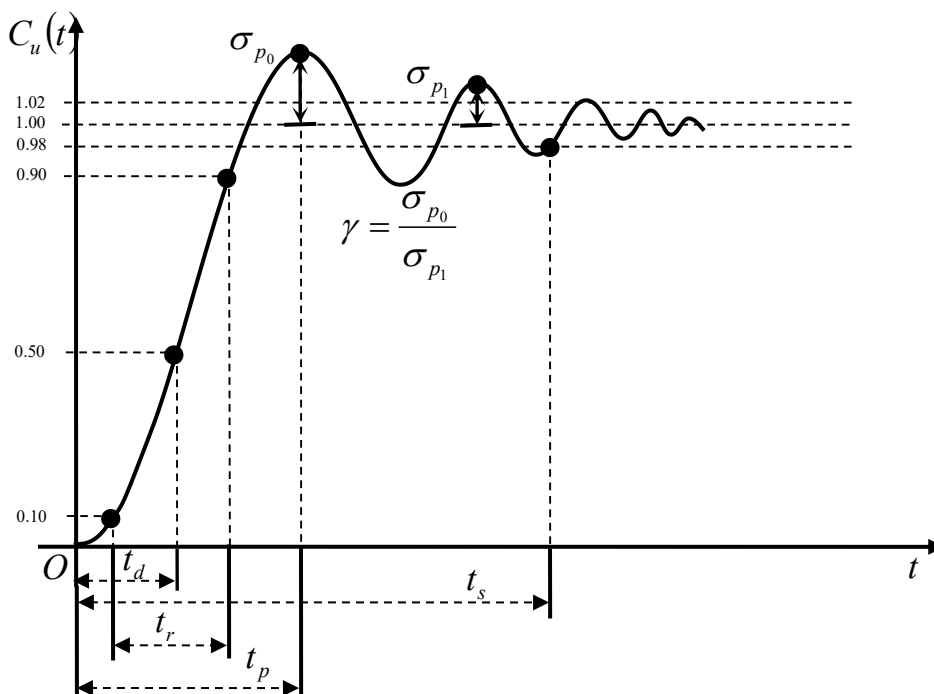
时间响应 
$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[G(s) \cdot R(s)] = \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot r(t-\tau) d\tau$$

阶跃响应 
$$c_u(t) = L^{-1}\left[G(s) \cdot \frac{1}{s}\right]$$
      冲击响应 
$$c_\delta(t) = L^{-1}[G(s) \cdot 1] = L^{-1}[G(s)]$$

**瞬态响应特性：**典型输入为阶跃信号，在输入阶跃信号作用下，输出会有一个持续的瞬间响应，直到调整到目标输入信号允许误差范围内的这个过程即为瞬态响应特性。

瞬态阶跃响应特性的特征量：

- ①上升时间  $t_r$ ：输出由最终值的10%到最终值的90%所经历的时间。
- ②延迟时间  $t_d$ ：输出到达最终值的50%所经历的时间。
- ③最大超调量  $\sigma_{p_0}$ ：输出的最大峰值与最终值的差值。
- ④峰值时间  $t_p$ ：输出到达最大峰值所经历的时间。
- ⑤调整时间  $t_s$ ：输出到达最终值允许误差范围内（如  $\Delta_5 = 5\%$ ,  $\Delta_2 = 2\%$ ）所经历的时间，即第一次到达该点，且该点之后都在允许误差范围内。
- ⑥振幅衰减比  $\gamma$ ：最初超调量与第二次超调量的比值，用来衡量输出的衰减速度，即从峰值到达最终值附近的趋近速度。



阶跃响应过程示意图

## 稳态响应特性： 单位负反馈系统

$$C(s) = E(s) \cdot G(s) = R(s) \cdot W(s)$$

$$E(s) = R(s) + C(s) \cdot (-1) = R(s) - E(s) \cdot G(s)$$

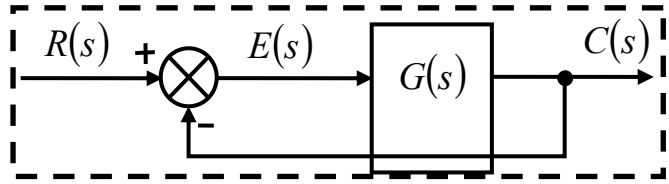
$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s) \quad \text{单位负反馈系统的稳态误差的}s\text{域函数}$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s) \cdot [\pm H(s)]} \cdot R(s)$$

$$\text{开环传递函数为 } G_o = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s) \cdot 1 \quad \text{主反馈断开}$$

$$\text{闭环传递函数 } G_c = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$\text{稳态误差函数 } E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s)$$



稳态误差： $e(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = L^{-1}[E(s)] = L^{-1}\left\{\lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)]\right\} = L^{-1}\left\{\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s}{1+G(s)} \cdot R(s)\right]\right\}$ ，当输入信号分别为：类阶跃函数  $Au(t)$ 、斜坡（定速度）函数  $At$ 、抛物线（定加速度）函数  $At^2$  时

$$\text{稳态位置误差 } E_{sp} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s}{1+G(s)} \cdot L[Au(t)] \right\} = \frac{A}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{A}{1+K_p} \quad ; \quad \text{稳态速度误差 } E_{sv} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s}{1+G(s)} \cdot L[At] \right\} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s)]} = \frac{A}{K_v} \quad ;$$

$$\text{稳态加速度误差 } E_{sa} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s}{1+G(s)} \cdot L[At^2] \right\} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} [s^2 \cdot G(s)]} = \frac{A}{K_a}$$

典型一阶滞后环节闭环传递函数： $G(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1}$ ，其阶跃响应： $c(t) = L^{-1}[C(s)]$

$$C(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s \left( s + \frac{1}{T} \right)} \Leftrightarrow c(t) = \frac{K}{T} \cdot \left[ \frac{1}{\left[ \frac{1}{T} \right]} \left( 1 - e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t} \right) \right] = K \cdot \left( 1 - e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t} \right) \quad 0.632K$$

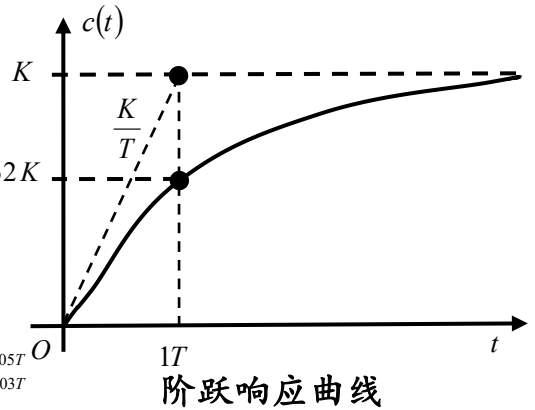
①求响应的最终值，利用【s域终值定理】得到： $\lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot C(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{K}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s} \right] = K$ ，

$$\text{利用时域终值定理得到：} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ K \cdot \left( 1 - e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t} \right) \right] = K$$

②求响应上升时间，即有  $\begin{cases} c(t_1) = 0.1K \\ c(t_2) = 0.9K \end{cases}$ ，求解  $t_r = t_2 - t_1$ ，则有： $\begin{cases} 1 - e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t_1} = 0.1 \\ 1 - e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t_2} = 0.9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -T \cdot \ln 0.9 = 0.105T \\ t_2 = -T \cdot \ln 0.1 = 2.303T \end{cases}$

则上升时间  $t_r = t_2 - t_1 = 2.198T$ ，其中  $T$  代表此系统的惯性，与系统响应速度成负相关， $T$  越大，响应速度越小。

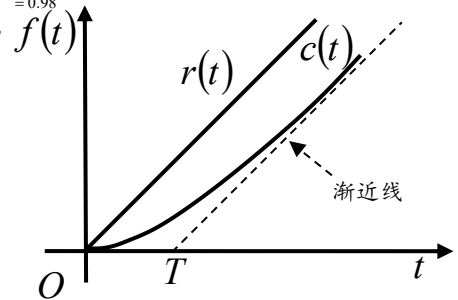
③求调整时间，通过  $c(t)$  的输出曲线图（单调递增函数），选取稳态允许误差为  $\Delta_2 = 2\%$ ，则  $1 - e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t_s} = 0.98$  得到调整时间  $t_s(\Delta_2) = 3.91T$ ，同理得  $t_s(\Delta_5) = 3T$ ，超调量不存在，没有震荡，故而没有振幅衰减  $\lambda$ 。



典型一阶滞后系统闭环传递函数  $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$ ，其斜坡响应，即在输入信号为  $t$  下的响应：

$$c(t) = L^{-1} \left[ G(s) \cdot \frac{1}{s^2} \right] = L^{-1} \left[ \frac{\frac{K}{T}}{s^2 \left( s + \frac{1}{T} \right)} \right] = \frac{K}{T} \cdot \left\{ \frac{1}{\left[ \frac{1}{T} \right]^2} \cdot \left[ \left( \left[ \frac{1}{T} \right] \cdot t \right) + e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t} - 1 \right] \right\} = KT \left[ \left( \left[ \frac{1}{T} \right] \cdot t \right) + e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t} - 1 \right]$$

$$\text{求其最终值：} \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ KT \left[ \left( \left[ \frac{1}{T} \right] \cdot t \right) + e^{-\left[ \frac{1}{T} \right] t} - 1 \right] \right\} = +\infty$$
，则上升时间为  $+\infty$ ，没有调整时间、超调量



重要稳定系数概念与陷阱：使用前提： $G(s)$  为闭环传递函数，且  $G(s)$  的极点只在  $s$  左半平面和原点之间的区域

即强调系统为稳定系统，否则下列稳定系数没有意义，当题目给定为开环传递函数  $G_c(s)$  时，应用  $W(s) = \frac{G_c(s)}{1 \pm G_c(s)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{稳态位置误差系数：} K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \\ \text{稳态速度误差系数 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s)] \quad \text{稳态误差系数的原始定义式：} \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s) \cdot R(s)] \quad \text{将化简后与 } s \text{ 相关的部分定义为稳态误差系数} \\ \text{稳态加速度误差系数 } K_a = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 \cdot G(s)] \end{array} \right.$$

## 二阶系统:

闭环传递函数  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot (\xi \cdot \omega_n) s + \omega_n^2}$ , 当输入  $r(t) = \delta(t)$ , 即  $R(s) = 1(s)$  时, 该二阶系统的脉冲响应如下:

输出响应的拉普拉斯变换  $C(s) = G(s) \cdot L[\delta(t)] = G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot (\xi \cdot \omega_n) s + \omega_n^2}$

根据拉普拉斯变换对  $\left\| C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot (\xi \cdot \omega_n) s + \omega_n^2} \right\| \xleftrightarrow[0 \leq \xi \leq 1]{\text{实用伺服模型}} \left\| \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-(\omega_n \cdot \xi)t} \cdot \sin\left[\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t\right] = c(t) \right\|$

I. 无阻尼 ( $\xi = 0$ ) 情况 II. 欠阻尼 ( $0 < \xi < 1$ ) 情况 III. 临界阻尼 ( $\xi = 1$ ) 情况 IV. 过阻尼 ( $\xi > 1$ ) 情况 V. 不稳定 ( $\xi < 0$ ) 情况

I.  $k_{\xi=0} = c_I(t) = \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$

II.  $k_{0 < \xi < 1}(t) = c_{II}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-(\xi \omega_n)t} \cdot \sin\left[\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t\right]$

III.  $k_{\xi=1}(t) = c_{III}(t) = \omega_n^2 \cdot t \cdot e^{-\omega_n t}$

IV.  $k_{\xi > 1}(t) = c_{IV}(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{1-\xi^2}} \left[ e^{-\left[(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n\right]t} - e^{-\left[(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n\right]t} \right]$

二阶系统的单位冲击响应特征:

(1) 无阻尼为等幅振荡曲线

(2) 欠阻尼为衰减类振荡曲线

(3) 临界阻尼曲线总为正值

(4) 欠阻尼曲线在合理选择参数时

能保证既没有过大的失调幅值,

又可以尽快衰减到稳态误差允许

范围内, 因而具有最好特性。一般

欠阻尼系统取  $\xi = 0.4 \sim 0.8$ 。

(5) 欠阻尼系统中,  $\xi$  越小, 震荡越快,

系统响应速度越快;  $\omega_n$  越大, 系统响应

速度越快。

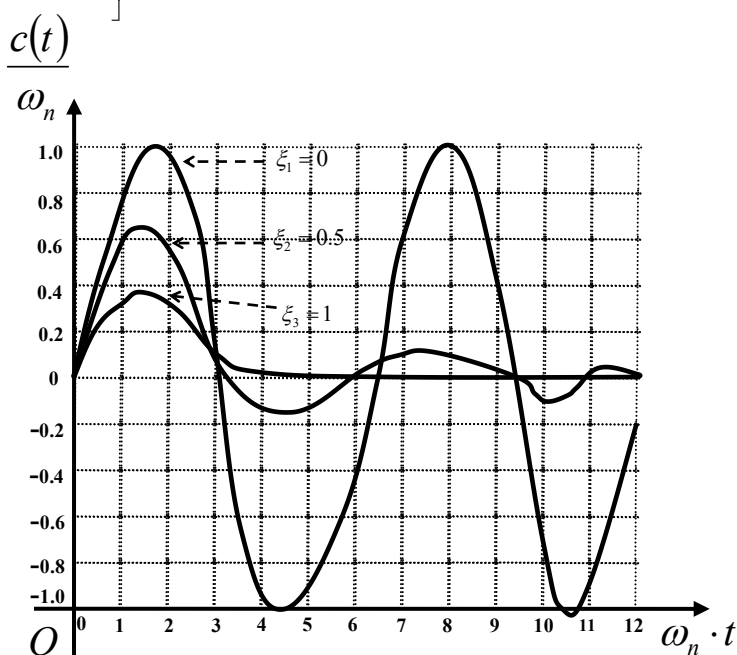
标准二阶欠阻尼系统的单位冲击响应  $c_{\delta}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-(\omega_n \cdot \xi)t} \cdot \sin\left[\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t\right]$

特点:  $\left\| c_{\delta}(t) \right\|$  曲线的峰值点  $(t_p, \sigma_{p_0})$  的斜率为 0, 那么经过运算得到:  $\tan(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t_p) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \Rightarrow$  单位冲击响应到达峰值的时间  $t_p = \frac{\arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$

对于单位冲击响应来说, 其稳态值  $c_{\delta}(\infty) = 0$ , 那么单位冲击响应的最大超调量  $\sigma_{p_0} = c_{\delta}(t_p) \Rightarrow \sigma_{p_0} = c_{\delta}(t_p) = \omega_n \cdot e^{-\left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]}$  (欠阻尼系统  $0 < \xi < 1$ )

根据单位阶跃函数与单位冲击函数的导数关系, 对于二阶系统的单位阶跃响应来说, 其过冲时间  $t_p$  即为  $c_{\delta}(t) = 0$  的时间值, 则有  $(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}) \cdot t_p = \pi \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2})}$

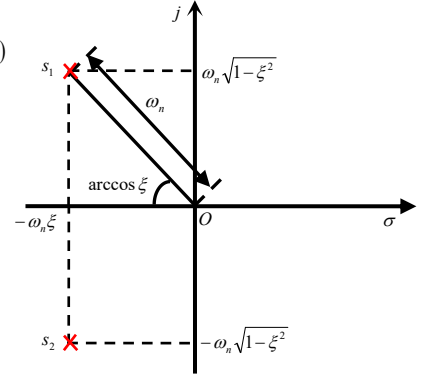
那么, 单位阶跃响应的峰值点  $(t_p, c_u(t_p))$  应有关系:  $c_u(t_p) = \left\| \int_0^{t_p} c_{\delta}(t) dt \right\| = 1 + e^{-\frac{\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1 + \frac{\text{单位阶跃响应的最大超调量}}{\sigma_{p_0}}$



二阶系统的单位冲击响应

根据标准二阶系统单位阶跃响应的推导，得到动态性能指标参数的重要公式

$$\text{单位阶跃响应 } \dot{c}_u(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-[\omega_n \xi]t} \cdot \sin\left[\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right] & (0 \leq \xi < 1) \\ 1 - e^{-[\omega_n \xi]t} \cdot (\omega_n \cdot t + 1) & (\xi = 1) \\ 1 - \frac{\omega_n \xi + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{-(\omega_n \xi - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t} - \frac{-\omega_n \xi + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{-(\omega_n \xi + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t} & (\xi > 1) \end{cases}$$



二阶系统极点和  $\xi$ 、 $\omega_n$  的关系

二阶欠阻尼系统的单位阶跃响应曲线  $c_u(t)$  的极值点处:  $\frac{dc_u(t)}{dt} = 0 \Rightarrow (\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) \cdot t = 0$

$\Rightarrow t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ , 当  $n$  取奇数时依次得到超调量  $t_{p_n}^{\text{奇}}$ ,  $n$  取偶数时依次得到低调量  $t_{p_n}^{\text{偶}}$

$\Rightarrow$  超调量  $\sigma_p(n) = e^{-\frac{n(\pi\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}}$  (与  $\omega_n$  无关)  $\Rightarrow$  振幅衰减比  $\gamma = \frac{\sigma_{p_1}}{\sigma_{p_0}} = \frac{\sigma_p(3)}{\sigma_p(1)} = e^{-\frac{2(\pi\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}} = (\sigma_{p_0})^2$  (与  $\omega_n$  无关)

$\Rightarrow$  上升时间  $t_r$  为初始到第一次到达稳态值所需时间:  $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ ,  $\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

调整时间  $t_s$  满足:  $e^{-[\omega_n \xi]t_s} > \Delta \cdot \sqrt{1-\xi^2}$

则有  $t_s < \frac{\ln \Delta}{-\omega_n \xi} + \frac{\ln \sqrt{1-\xi^2}}{-\omega_n \xi} \approx \frac{4}{\omega_n \xi} \approx \frac{4}{\omega_n \xi} t_s(\Delta_s) < \frac{3}{\omega_n \xi} \approx \frac{3}{\omega_n \xi}$  (估算式子) (常用于调整时间的推断中, 检测系统的快速性)

标准二阶系统的单位阶跃响应推导:

闭环传递函数  $W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \xi \cdot s + \omega_n^2}$ , 求极点  $\Leftrightarrow$  令  $s^2 + 2\omega_n \xi \cdot s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s_1 = -\omega_n \xi + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ ,  $s_2 = -\omega_n \xi - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

讨论  $0 \leq \xi < 1$ ,  $\xi = 1$ ,  $\xi > 1$  三种情况

(1)  $0 \leq \xi < 1$  时, 极点  $s_1$ 、 $s_2$  为共轭复数极点。令  $\begin{cases} s_1 = -\alpha + j\beta \\ s_2 = -\alpha - j\beta \end{cases}$ , 其中  $\begin{cases} \alpha = \omega_n \xi \\ \beta = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$ , 则有:  $C(s) = W(s) \cdot R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$

利用分式分部展开法得到  $C(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \alpha - j\beta} + \frac{k_3}{s + \alpha + j\beta}$ , 其中  $\begin{cases} k_1 = [s \cdot C(s)]_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{\alpha^2 + \beta^2} \\ k_2 = [(s + \alpha - j\beta) \cdot C(s)]_{s=-\alpha+j\beta} = \frac{\omega_n^2}{(-\alpha + j\beta) \cdot (2j\beta)} \\ k_3 = [(s + \alpha + j\beta) \cdot C(s)]_{s=-\alpha-j\beta} = \frac{\omega_n^2}{(-\alpha - j\beta) \cdot (-2j\beta)} \end{cases}$

$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \Leftrightarrow c(t) = L^{-1}\left\{\left[\frac{1}{s}\right] - \left[\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}\right] - \left[\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}\right]\right\} \Rightarrow c(t) = 1(t) - e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t)$

合并为正弦类函数得到  $c(t) = 1(t) - e^{-\alpha t} \cdot \left[1 \cdot \cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sin(\beta t)\right] = 1(t) - e^{-\alpha t} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cdot \left[\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(\beta t)\right]$   
 $\xrightarrow{\text{令 } \tan \varphi = \frac{\beta}{\alpha}} c(t) = 1(t) - e^{-\alpha t} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cdot \sin(\beta \cdot t + \varphi) \Leftrightarrow c(t) = 1 - e^{-[\omega_n \xi]t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left[\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]$

即无阻尼和欠阻尼条件下系统的单位阶跃响应  $\left\|c(t) = 1 - e^{-[\omega_n \xi]t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left[\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]\right\|$

(2)  $\xi = 1$  时, 极点  $s_1$ 、 $s_2$  为两重负实根,  $s_1 = s_2 = -\omega_n \Rightarrow C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \omega_n} + \frac{k_3}{(s + \omega_n)^2}$

$k_1 = [s \cdot C(s)]_{s=0}$ ,  $k_2 = [(s + \omega_n) \cdot C(s)]_{s=-\omega_n} = -1$ ,  $k_3 = [(s + \omega_n)^2 \cdot C(s)]_{s=-\omega_n} = -\omega_n \Rightarrow c(t) = L^{-1}\left[\left(\frac{1}{s}\right) - \left(\frac{1}{s + \omega_n}\right) - \left(\omega_n \cdot \frac{1}{(s + \omega_n)^2}\right)\right]$

$\|c(t) = 1(t) - e^{-\omega_n t} - \omega_n \cdot e^{-\omega_n t} \cdot t = 1 - e^{-\omega_n t} \cdot (1 + \omega_n t)\|$

(3)  $\xi > 1$  时, 极点  $s_1$ 、 $s_2$  为两个负实根,  $C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s - s_1} + \frac{k_3}{s - s_2}$ , 易得  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = \frac{s_2}{s_1 - s_2}$ ,  $k_3 = \frac{s_1}{s_2 - s_1}$

则  $\|c(t) = L^{-1}\left[\left(\frac{1}{s}\right) + \left(\frac{s_2}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_1}\right) + \left(\frac{s_1}{s_2 - s_1} \cdot \frac{1}{s - s_2}\right)\right] = 1(t) + \frac{s_2}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_1 t} + \frac{s_1}{s_2 - s_1} \cdot e^{s_2 t}$  (此式便于记忆)

$c(t) = 1(t) + \frac{-\omega_n \xi - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\omega_n \xi + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t} + \frac{-\omega_n \xi + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}{-2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\omega_n \xi - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t} = \left\|1 - \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{-(\omega_n \xi - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t} - \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{-(\omega_n \xi + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t}\right\|$



稳态误差及稳态误差系数和系统类型的关系 根据  $C(s) = E(s) \cdot G(s) = R(s) \cdot W(s) = R(s) \cdot \frac{\overbrace{G(s)}^{\text{前向通路传递函数}}}{1 - \underbrace{G(s) \cdot H(s)}_{\text{开环传递函数}}}$

对于单位负反馈系统, 即  $H(s) = -1$  时, 有稳态误差函数  $E(s) = \frac{1}{1 + \underbrace{G(s)}_{\text{前向通路传递函数, 又为开环传递函数}}} \cdot R(s)$

$$\text{稳态位置误差 } E_{sp} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\langle s \cdot \left[ \frac{1}{1 + G(s)} \right] \cdot \frac{1}{s} \right\rangle = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$\text{稳态速度误差 } E_{sv} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\langle s \cdot \left[ \frac{1}{1 + G(s)} \right] \cdot \frac{1}{s^2} \right\rangle = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s)]} = \frac{1}{K_v}$$

$$\text{稳态加速度误差 } E_{sa} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\langle s \cdot \left[ \frac{1}{1 + G(s)} \right] \cdot \frac{1}{s^3} \right\rangle = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [s^2 \cdot G(s)]} = \frac{1}{K_a}$$

那么, 在单位负反馈系统中, 已知前向通路传递函数或者开环传递函数, 以及用所给的闭环传递函数求前向通路函数等, 归结为已知  $G(s)$ 。

零点与系统类型无关  
如果形如  $G(s) = \frac{\overline{K}}{s^N (s + p_1) \cdots (s + p_m)}$ , 则该系统在原点处有  $N$  个极点, 称为  $N + m$  阶  $N$  型系统。

$N$  型系统的稳态误差具有如下特征:

$$\left. \begin{array}{l} \text{0型: } E_{sp} = \frac{1}{1 + \frac{K}{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}}, E_{sv} = \infty, E_{sa} = \infty \\ \text{I型: } E_{sp} = 0, E_{sv} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{K}, E_{sa} = \infty \\ \text{II型: } E_{sp} = 0, E_{sv} = 0, E_{sa} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{K} \\ \text{高型: } E_{sp} = 0, E_{sv} = 0, E_{sa} = 0 \end{array} \right\} \text{由此可得, 在原点处增加极点, 即提升系统的类型能改进稳态误差}$$

控制系统类型	稳态位置误差	稳态速度误差	稳态加速度误差
0 型	$\frac{1}{1 + K_p}$	$\infty$	$\infty$
I 型	0	$\frac{1}{K_v}$	$\infty$
II 型	0	0	$\frac{1}{K_a}$
高型	0	0	0

典型环节分析: 典型环节的传递函数具有固定的运动特性, 即有固定表达式

①比例环节  $G_0(s) = K$ ; 比例环节输出不失真, 不延滞, 与输入成比例反复出现, 无惯性, 无瞬态过程

②惯性环节  $G_0(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ ; 惯性环节输出不能突变, 其阶跃响应按照单指数曲线规律逼近阶跃曲线, 根本原因在于储能元件

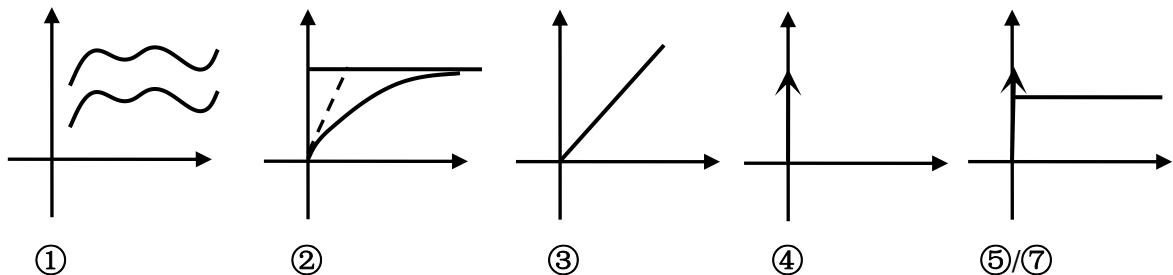
③积分环节  $\left\| G_0(s) = \frac{1}{s} \text{ 或 } \frac{1}{Ts} \right\|$ ; 积分环节(增加了零极点)输出的变化速度和输入成正比, 则输出与输入无固定稳定关系

④微分环节  $\| G_0(s) = s \text{ 或 } Ts \|$ ; 微分环节(增加了零零点)输出与输入的导数成正比, 对于输入突变的『突变点』有较好的跟随性

⑤一阶微分环节  $G_0(s) = Ts + 1$ ; 一阶微分环节输出量正比于输入的导数再加上输入, 对于输入突变有较好的跟随性

⑥二阶振荡环节  $G_0(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$ ; 二阶振荡环节由于电场与磁场能量的转换, 输出为振荡, 最终达到平衡

⑦二阶微分环节  $G_0(s) = T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1$ ; 二阶微分环节输出量正比于输入的一阶导, 正比于输入的二阶导, 再与输入求和, 阶跃响应同一阶微分环节

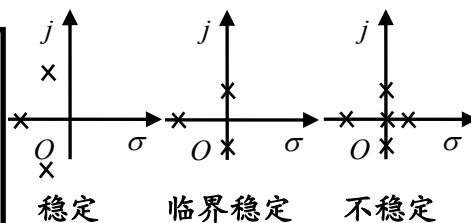


⑥二阶振荡环节见前述二阶系统阶跃响应示意图

## 稳定性判据

线性系统稳定性的一种定义：若系统的冲击响应经过一段时间后，冲击响应趋于 0，则系统**稳定**；冲击响应未趋于 0 但有界，则系统**临界稳定**；冲击响应既未趋于 0 又无界，则系统**不稳定**。

稳定性的充要条件：稳定系统的特征方程的所有根必须具有负的实部（包括 -0），即系统的闭环传递函数  $W(s)$  的全部极点位于  $S$  域左半平面和虚轴上和原点处，也就是位于  $S$  域非右半平面时系统稳定或临界稳定。



基于稳定性的充要条件有如下结论：

①对于线性系统的脉冲响应，稳定系统的最终响应值趋于 0，即  $\lim_{t \rightarrow \infty} c_s(t) = 0$ ；临界稳定系

统的响应最终值有界，即  $\left| \lim_{t \rightarrow \infty} c_s(t) \right| < \infty$ ；不稳定系统的响应最终值发散，即  $\lim_{t \rightarrow \infty} c_s(t) = \infty$ 。

②稳定系统在输入信号幅值有界条件下输出幅值必然也有界，而对于临界和不稳定系统，不能确定其输出幅值的有界性。

③稳定系统在控制信号作用下，输出信号的瞬态响应分量随着时间的推移衰减到 0，而不稳定系统系统输出信号的瞬态响应分量为发散性质，因而，对于一定的干扰控制信号，稳定系统能消除干扰，不稳定系统不具有消除干扰的能力。

④对于临界稳定系统，如果系统在物理上可被看做纯线性系统，则可认为是稳定的；如果是通过将系统或系统里的元件用数学近似处理为线性，那么在分析时要高度审视该系统的物理源特性微分方程，在工程上，由于测量误差的存在，一般将临界稳定系统归结为不稳定系统。

## 劳斯-赫尔维茨稳定判据

劳斯-赫尔维茨稳定性判据主要用于高阶系统（三阶及以上），对于一阶、二阶系统【注意区别 I 型、II 型系统】，其充分必要条件即为闭环传递函数特征方程的系数按照  $s$  的降幂排列时：无缺项且各项系数均为正数。但对于高阶系统来说，系数无缺项且各项系数均为正数只是必要条件。

劳斯判据 闭环传递函数  $W(s) = \frac{Z(s)}{P(s)} \Rightarrow P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_k s^{n-k} + \dots + a_{n-1} s^1 + a_n s^0 = 0$

那么可列出劳斯表：

$$\begin{array}{c}
 s^n \\
 s^{n-1} \\
 s^{n-2} \\
 s^{n-3} \\
 \vdots \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \dots \\
 a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \dots \\
 a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_6 - a_0 a_7 & \dots \\
 a_1 & a_1 & a_1 & \\
 \vdots & & & \\
 s^2 & & & \\
 s^1 & & & \\
 s^0 & & &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 s^n \\
 s^{n-1} \\
 s^{n-2} \times a_1 \\
 s^{n-3} \\
 \vdots \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \dots \\
 a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \dots \\
 a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_6 - a_0 a_7 & \dots \\
 (a_1 a_2 - a_0 a_3) a_3 - a_1 (a_1 a_4 - a_0 a_5) & (a_1 a_2 - a_0 a_3) a_5 - a_1 (a_1 a_6 - a_0 a_7) & & \\
 \vdots & \vdots & & \\
 e_1 & e_2 & & \\
 f_1 & & & \\
 g_1 & & &
 \end{array}$$

在得到的劳斯表中，第一列元素共有  $n+1$  个，第一列元素成为劳斯列元素，记作  $L_{N0,1} = \{a_0, a_1, a_1 a_2 - a_0 a_3, (a_1 a_2 - a_0 a_3) a_3 - a_1 (a_1 a_4 - a_0 a_5), \dots, e_1, f_1, g_1\}$  熟记三阶和四阶系统劳斯表：

$$\begin{array}{c}
 s^3 \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 a_0 & a_2 & a_4 \\
 a_1 & a_3 & 0 \\
 a_1 a_2 - a_0 a_3 & 0 & 0 \\
 a_3 & 0 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{充分必要条件} \\
 \Rightarrow \\
 \begin{cases} a_{0,1,2,3} > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{cases}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 s^4 \\
 s^3 \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 a_0 & a_2 & a_4 \\
 a_1 & a_3 & 0 \\
 a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_4 & 0 \\
 (a_1 a_2 - a_0 a_3) a_3 - a_1 (a_1 a_4) & 0 & 0 \\
 a_1 a_4 & 0 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{充分必要条件} \\
 \Rightarrow \\
 \begin{cases} a_{0,1,2,3,4} > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3) a_3 - a_1 (a_1 a_4) > 0 \end{cases}
 \end{array}$$

劳斯表列出后根据劳斯列 $L_{NO.1}$ 的情况分析如下：

I. 劳斯列元素都不为0时，系统极点的实部为正实数的根（成为不稳定极点）数目等于劳斯列元素符号改变的次数。

II. 劳斯列的某个元素为0，在劳斯表对应于该元素的那一行却存在某些项不为0时，必须使用极限替代法，即令极小正数 $\varepsilon \approx 0$ 替代该0元素，依次类推，继续进行劳斯列元素的递推运算（先计算结果，再使用 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ ），如果发现 $\varepsilon \approx 0$ 前面的元素与 $\varepsilon \approx 0$ 后面的元素符号相反，表明在 $\varepsilon \approx 0$ 前， $\varepsilon \approx 0$ 处， $\varepsilon \approx 0$ 后这三个元素之间有一次符号变化，即 $\varepsilon \approx 0$ 附近产生了一个不稳定极点。

III. 如果劳斯列元素为0，并且该元素在劳斯表中对应的行都为0，说明在s域存在一些（对称的）实轴极点和（或）共轭虚极点，为确定是否存在对称实轴极点，对于劳斯表中全为0的一行，选中该行上面一行作为辅助方程，该辅助方程只有 $s^{\text{偶次方}}$ ，形如 $A(s) = \sum_{i=0}^r (a_{2i} \cdot s^{2i}) = 0$ ，这个辅助方程的s域解即为要知道的极点，可在此判断系统是否稳定，但求解完整劳斯表时，用 $\frac{dA(s)}{ds}$ 得到的降幂表达式作为该行的劳斯表系数，继续求解判断。

劳斯判据三种情形举例

情形I，熟记三阶、四阶劳斯表即可得到：

情形II，特征方程 $s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1s^0 = 0$

$$\text{其劳斯表} \begin{vmatrix} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 2 & 2 & 0 \\ s^2 & 0 & 2 & 0 \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{令 } \varepsilon \approx 0} \begin{vmatrix} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 2 & 2 & 0 \\ s^2 & \varepsilon & 2 & 0 \\ s^1 & \frac{2\varepsilon - 4}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ s^0 & \varepsilon & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon - 4}{\varepsilon} = -\infty} \begin{vmatrix} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 2 & 2 & 0 \\ s^2 & \varepsilon & 2 & 0 \\ s^1 & \frac{2\varepsilon - 4}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ s^0 & \varepsilon & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{劳斯列元素改变了2次，故有2个不稳定根}$$

情形III，特征方程 $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16s^0 = 0$

$$\text{其劳斯表} \begin{vmatrix} s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\ s^5 & 2 & 12 & 16 & 0 \\ s^4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ s^3 & 1 & 6 & 8 & 0 \\ s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^1 & & & & \\ s^0 & & & & \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{令 } A(s) = s^4 + 6s^2 + 8s^0 = 0} \begin{vmatrix} s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\ s^5 & 2 & 12 & 16 & 0 \\ s^4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ s^3 & 1 & 6 & 8 & 0 \\ s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^1 & & & & \\ s^0 & & & & \end{vmatrix} \Rightarrow s^4 + 6s^2 + 8s^0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{12} = \pm j\sqrt{2} \\ s_{34} = \pm j2 \end{cases} \text{，继续递推劳斯表}$$

$$\begin{vmatrix} s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\ s^5 & 2 & 12 & 16 & 0 \\ s^4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ s^3 & 1 & 6 & 8 & 0 \\ s^2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ s^1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{令 } s^3 \text{ 的系数依次为 } \frac{dA(s)}{ds} \text{ 的降幂系数}} \begin{vmatrix} s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\ s^5 & 2 & 12 & 16 & 0 \\ s^4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ s^3 & 1 & 6 & 8 & 0 \\ s^2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ s^1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{一种劳斯列 } L_{NO.1} = \{1, 2, 1, 1, 3, 1, 8\} \text{，系统临界稳定}$$

闭环传递函数的零点和极点与系统响应、系统动态性能之间的关系【结论版】

① 为保证系统稳定，所有闭环极点必须位于s平面虚轴左边，即舍去临界稳定。

② 要提高系统的快速性，所有闭环极点应尽量远离虚轴。

③ 要提高系统的平稳性，减小系统的最大超调量 $\sigma_{p_0}$ （与 $\omega_n$ 无关），所有闭环极点要尽量靠近实轴，

取 $\xi = 0.707$ 时，得到最佳阻尼线，与负实轴夹角为 $\pm 45^\circ$ 的射线。

④ 要求动态过程即瞬态响应尽快结束，根据 $A_k = \frac{K_p^* \prod_{j=1}^m (s_k - z_j)}{s_k \prod_{i=1}^n (s_k - s_i)}$ ，应使得 $A_k$ 分母大、分子小，

则闭环极点应远离原点，且极点间的距离 $(s_k - s_i)$ 要大，也就是极点分布要松散，此外，零点 $z_j$ 应靠近极点 $s_k$ 。

一般来说，零点个数 $m$ 总小于极点个数 $n$ ，因而最好是使得零点靠近离虚轴最近的极点，原因在于，

第②条，快速性要求极点距离虚轴越远越好，反之是由于距离虚轴最近的极点衰减最慢，决定着响应的快慢，这样的极点称为主导极点，所以，应用零点去靠近主导极点，使得该主导极点失去主导性，这也是微分环节的原理。

⑤ 偶极子指一对靠得很近的零点和极点，如果某极点与某零点的距离 $\frac{d_{zp}}{d_{po}} < 0.1$ 或者 $\frac{d_{zp}}{d_{po}} < 0.1$ 那么

这个零点与极点就可看做偶极子；利用主导极点及偶极子分析高阶系统，实质是将高阶系统转化为低阶系统，主导极点分析满足的条件：其他所有极点到虚轴的距离（极点实部的模）是该极点到虚轴的距离4倍及以上，即可认为该极点是主导极点。

$$\text{赫维茨判据 } W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \Rightarrow P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_k s^{n-k} + \dots + a_{n-1} s^1 + a_n s^0 = 0$$

系统稳定的充分必要条件为  $\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n\}}^{s \text{ 的降幂系数无缺项且全为正数}} > 0 \\ \text{特征多项式系数 } n \text{ 阶行列式 } D_n \text{ 的各奇数阶子行列式 } D_{2m-1} > 0 \text{ 也就是 } (n-1) \text{ 阶行列式的值大于 } 0 \\ \text{或各偶数阶子行列式 } D_{2m} > 0 \end{array} \right.$

其中特征多项式系数  $n$  阶行列式

$$D_n(i, j) = \begin{vmatrix} \|a_1\| & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} & a_{31} & \cdots & a_{2m-1} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & \|a_2\| & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} & a_{28} & a_{30} & \cdots & a_{2m-2} & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & \|a_3\| & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} & \cdots & a_{2m-3} & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \|a_4\| & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} & a_{28} & \cdots & a_{2m-4} & \cdots & a_{2n-4} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \|a_5\| & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & \cdots & a_{2m-5} & \cdots & a_{2n-5} \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \|a_6\| & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} & \cdots & a_{2m-6} & \cdots & a_{2n-6} \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \|a_7\| & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & \cdots & a_{2m-7} & \cdots & a_{2n-7} \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \|a_8\| & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2m-8} & \cdots & a_{2n-8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \|a_9\| & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2m-9} & \cdots & a_{2n-9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \|a_{10}\| & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & \cdots & a_{2m-10} & \cdots & a_{2n-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \|a_{11}\| & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & \cdots & a_{2m-11} & \cdots & a_{2n-11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & \|a_{12}\| & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & \cdots & a_{2m-12} & \cdots & a_{2n-12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & \|a_{13}\| & a_{15} & a_{17} & a_{19} & \cdots & a_{2m-13} & \cdots & a_{2n-13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & \|a_{14}\| & a_{16} & a_{18} & \cdots & a_{2m-14} & \cdots & a_{2n-14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & \|a_{15}\| & a_{17} & \cdots & a_{2m-15} & \cdots & a_{2n-15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & \|a_{16}\| & \cdots & a_{2m-16} & \cdots & a_{2n-16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & \|\cdot\cdot\cdot\| & a_{2m-17} & \cdots & a_{2n-17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & \cdots & \|a_{2m-18}\| & \cdots & a_{2n-18} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \|a_{2j-i}\| & \cdots & a_{2n-i} \\ a_{n-38} & a_{n-36} & a_{n-34} & a_{n-32} & a_{n-30} & a_{n-28} & a_{n-26} & a_{24} & a_{n-22} & a_{n-20} & a_{n-18} & a_{n-16} & a_{n-14} & a_{n-12} & a_{n-10} & a_{n-8} & a_{n-6} & a_{2j-n} & a_{n-2} & \|a_n\| \end{vmatrix}$$

$$D_{20}(i, j) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} & a_{31} & a_{33} & a_{35} & a_{37} & a_{39} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} & a_{28} & a_{30} & a_{32} & a_{34} & a_{36} & a_{38} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} & a_{31} & a_{33} & a_{35} & a_{37} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} & a_{28} & a_{30} & a_{32} & a_{34} & a_{36} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} & a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} & a_{28} & a_{30} & a_{32} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} & a_{31} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} & a_{28} & a_{30} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} & a_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} & a_{22} \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & a_{14} & a_{16} & a_{18} & a_{20} \end{vmatrix}$$

## 根轨迹法、根轨迹绘制、根轨迹方程

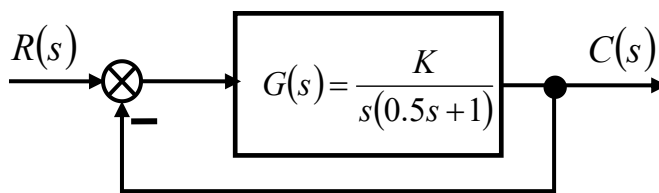
根轨迹定义：根轨迹是指系统中某个参数（由  $0 \rightarrow \infty$ ）变动时闭环传递函数的特征根在  $s$  平面上移动的轨迹。

在单位负反馈系统中，开环传递函数  $G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}$

$\Rightarrow$  闭环传递函数  $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{0.5s^2 + s + K}$

特征方程  $P(s) = 0.5s^2 + s + K = 0$

$\Rightarrow$  特征根  $s_1 = -1 + \sqrt{1-2K}$ ,  $s_2 = -1 - \sqrt{1-2K}$



$K$	0	0.5	1.0	$\infty$
$s_1$	0	-1	$-1 + j1$	$-1 + j\infty$
$s_2$	-2	-1	$-1 - j1$	$-1 - j\infty$

根据根轨迹图，可知道系统如下特性：

① 开环增益  $K(0 \rightarrow \infty)$  变动时，根轨迹均在  $s$  平面左侧，因此

只要  $K > 0$ ，系统总是稳定的；

②  $0 < K < 0.5$  时，闭环特征根  $s_1$ 、 $s_2$  为实根，系统为过阻尼状态，

阶跃响应无超调，具有非周期性；

③  $K = 0.5$  时，闭环特征根  $s_1 = s_2 = -1$  为两重实根，系统处于临界阻尼状态；

④  $K > 0.5$  时，闭环特征根  $s_1$ 、 $s_2$  为共轭复根，系统呈现欠阻尼状态，

阶跃响应的快速性及平稳性较理想；

⑤  $K = 1$  时，闭环特征根  $s_1 = -1 + j1$ ,  $s_2 = -1 - j1$  为最佳共轭复根，

系统处于最佳阻尼状态（ $\xi = \sqrt{2} = 0.707$ ），阶跃响应的快速性平稳性较理想；

⑥  $K > 1$  时，系统阻尼减弱，振荡频率加大，快速性增强，但平稳性变差；

⑦ 由于是单位负反馈系统，前向通路传递函数即为开环传递函数，由于稳态误差是与前向通

路传递函数相关的； $E(s) = \frac{\overbrace{G(s)}^{\text{前向通路传递函数}}}{1 + \underbrace{G(s)}_{\text{开环传递函数}}} \cdot R(s)$ ，而所给开环传递函数  $G(s)$  在原点处只有一个极点，即串联了一个一阶微分环节，故而系统为 I 型，稳态位置误差  $E_{sp} = 0$ ，

稳态速度误差  $E_{sv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s(0.5s+1)}} = \frac{1}{K}$ ，稳态加速度误差  $E_{sa} = \infty$

