高数上册概念细致解读

极限学

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

映射的定义： 设X、Y为两个非空集合，如果$\exists$法则f，使得对于$\forall x\in X$，按照法则f，在Y中有唯一确定的元素与之对应，那么就称f为从X到Y上的映射，记作：f：$X\rightarrow Y$。

映射概念的3大要素：

①集合X满足定义域$\overbrace{D_f=X}^{\text{等于}}$，集合$Y$满足值域$\overbrace{R_f\subset Y}^{\text{属于}}$；

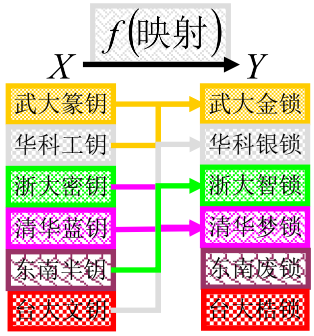
②$\forall x\in X$，元素x的像y是唯一的；

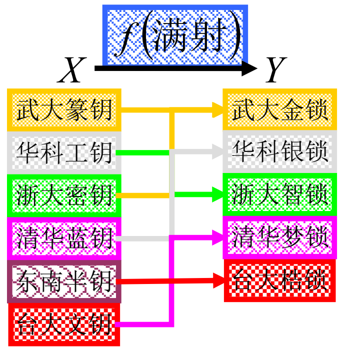
③$\forall y\in Y$，元素y的原像不一定是唯一的。

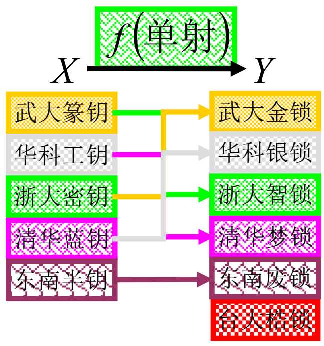
满射：设$X\xrightarrow{f}Y$(即映射f从X到Y存在)，若$R_f=Y$，即Y中的任意一个元素都是X中元素的像，则f称为X到Y上的满射；

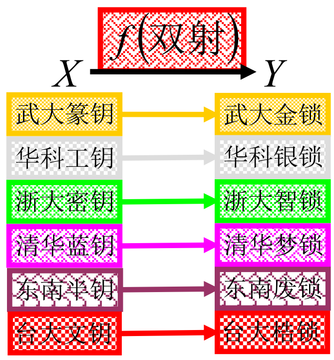
单射：设$X\xrightarrow{f}Y$(即映射f从X到Y存在)，若X中任意两个不同元素x_1、x_2，在Y中的像$f(x_1)\neq f(x_2)$，则f称为X到Y上的单射；

双射：如果f既是满射又是单射，那么f称为X到Y上的双射。









函数的定义： 就是定义域D到实数集R上的映射。

需要注意的是，映射本身就强调了值域y的唯一确定性，因而，对于多值函数，我们分别研究它的单值分支。

函数的特性：有界性、单调性、奇偶性和周期性

有界性定义： 设$f(x)$的定义域为D，$X\subset D$，$\forall x\in X$，$\exists$常数K_1，使得$f(x)\leq K_1$，则称$f(x)$在区间X上有上界，K_1为其中的一个上界；

设$f(x)$的定义域为D，$X\subset D$，$\forall x\in X$，$\exists$常数K_2，使得$f(x)\geq K_2$，则称$f(x)$在区间X上有下界，K_2为其中的一个下界；

总结：设$f(x)$的定义域为D，$X\subset D$，$\forall x\in X$，$\exists$常数$M>0$，使得$|f(x)|\leq M$，则称$f(x)$在区间X上有界，否则，$f(x)$在区间X上无界。

函数有界的充要条件是$f(x)$在区间上既有上界又有下界。

单调性定义： 设函数$f(x)$的定义域为D，$X\subset D$，对于$\forall x_1$、$x_2\in X$，

当$x_1<x_2$时，如果$f(x_1)<f(x_2)$恒成立，那么$f(x)$在区间X上是单调增加的；

当$x_1<x_2$时，如果$f(x_1)>f(x_2)$恒成立，那么$f(x)$在区间X上是单调减小的。

奇偶性定义：设函数$f(x)$的定义域为D,$\overbrace{\text{如果定义域}D\text{关于原点对称}}^{\text{这是前提}}$，$\forall x\in D$，如果$f(-x)=-f(x)$，那么$f(x)$为奇函数；如果$f(-x)=f(x)$，那么$f(x)$为偶函数。

周期性定义：设函数$f(x)$的定义域为D，如果$\exists l>0$，使得对于$\forall x\in D$，$\overbrace{\text{有}(x\pm l)\in D\text{成立}}^{\text{条件1}}$,$\overbrace{\text{且有}f(x+l)=f(x)\text{成立}}^{\text{条件2}}$，那么$f(x)$为周期函数，$l$是它的一个周期。

通常我们说的周期都是最小正周期，**但是请注意，狄利刻雷函数没有最小正周期。**

第二节　数列极限的定义

极限的数学概念定义：设$\{x_n\}$为一数列，如果**存在**常数a，对于**任意的**给定正数ε（不论它多么小），总**存在**正整数N，使得当$n>N$时，**不等式**$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立，那么就称常数 a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称**数列**$\{x_n\}$**收敛于**a，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$；或$x_n\to a(n\to+\infty)$。

极限的数学形式定义：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数$N$，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立。

注意：

①$|x_n-a|<\varepsilon$的几何意义是数列$\{x_n\}$总在点a的ε邻域内，即$x_n\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$

②首先假设常数 a是数列$\{x_n\}$的极限，那么就有$|x_n-a|<\varepsilon$（ε为任意正数）成立，以此推导出 $n>f(\varepsilon)$，然后令$N=\lceil f(\varepsilon)\rceil$（$f(\varepsilon)$向上取整，即传说中的 放大法），这样，$n$比$N$都大，显然有 $n>f(\varepsilon)$，而 $n>f(\varepsilon)\Leftrightarrow|x_n-a|<\varepsilon$，这样原数列极限得证 。

（在这个过程中，n、N均为数列的序号值，并 且N一定要是**确定的或有界的正整数**）

③利用定义证明数列$\{x_n\}$的极限是常数 a

题I:$\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}\to 1(n\to+\infty)$

证：$\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$成立，$\varepsilon$为可任意给定的正数，设$\varepsilon<1$，

原数列$\{x_n\}$的极限就为1。因为$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$成立，则有$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，令$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，（即$N$为$\dfrac{1}{\varepsilon}$向上取整），

所以，$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $\overbrace{n>N}^{n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]>\frac{1}{\varepsilon}\text{恒成立}}$ 时，都有$\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$。即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$

题II: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$

证:$\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，只要$\dfrac{1}{(n+1)^2}<\varepsilon$（$\varepsilon$为可给定的任意正数，设 $\overbrace{\varepsilon<1}^{\text{确保}N\in Z^+}$）成立，

原数列$\{x_n\}$的极限即为0。因为$\dfrac{1}{(n+1)^2}<\varepsilon$成立，则有$(n+1)^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即$n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1$，令$N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1\right]$，

所以，$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1\right]$，当$n>N$时，都有$\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon$。即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$

题III: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-1}=0,|q|<1$

证:$|q^{n-1}-0|=|q^{n-1}|=|q|^{n-1}$，只要$|q|^{n-1}<\varepsilon$（$\varepsilon$为可给定的任意正数，设 $\overbrace{\varepsilon<1}^{\text{确保}N\in Z^+}$）成立，

原数列$\{x_n\}$的极限即为0。$\because |q|^{n-1}<\varepsilon,0<|q|<1,\therefore \ln|q|^{n-1}<\ln\varepsilon\Rightarrow(n-1)\cdot\overbrace{\ln|q|}^{|q|<1\Rightarrow\ln|q|<0}<\ln\varepsilon\Rightarrow n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，

令$N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，所以，$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，当$n>N$时，都有$|q^{n-1}-0|<\varepsilon$。即 $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-1}=0$

收敛数列的性质

收敛数列的4个定理 +1个推论：

定理1: (收敛数列极限的唯一性) $\overbrace{\text{如果数列}\{x_n\}\text{收敛，那么它的极限唯一}}^{\text{收敛是极限唯一的 \textbf{充分必要条件}}}$。

证： 用反证法，假设 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b \\ a \neq b\end{cases}$，不妨设 $a<b$，则有 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists$ 正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$\begin{cases}|x_n - a| < \varepsilon \\ |x_n - b| < \varepsilon \\ a \neq b\end{cases}$ 恒成立，

取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$，则总 $\exists$ 正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$\begin{cases}|x_n - a| < \varepsilon \\ |x_n - b| < \varepsilon \\ a \neq b\end{cases}$ 恒成立，即 $\begin{cases}n > N_1\text{时}, |x_n - a| < \dfrac{b-a}{2} \\ n > N_2\text{时}, |x_n - b| < \dfrac{b-a}{2}\end{cases}$，$N = \max\{N_1, N_2\}$，

而 $n>N$ 时，$\begin{cases}|x_n - a| < \dfrac{b-a}{2} \\ |x_n - b| < \dfrac{b-a}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{3a-b}{2} < x_n < \dfrac{b+a}{2} \\ \dfrac{b+a}{2} < x_n < \dfrac{3b-a}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x < \dfrac{b+a}{2} \\ x > \dfrac{b+a}{2}\end{cases}$ 矛盾，所以假设不成立，原命题定理1成立。

定理2: (收敛数列的有界性) $\overbrace{\text{如果数列}\{x_n\}\text{收敛，那么数列}\{x_n\}\text{一定有界(既有上界又有下界)}}^{\textbf{收敛}\text{是}\textbf{有界}\text{的充分条件}\Leftrightarrow\textbf{有界}\text{是}\textbf{收敛}\text{的}\textbf{必要条件}}$。

证： $\because$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛，$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ (a 为常数)，且有 $|x_n - a| < \varepsilon$，其中 ε 为可给定的任意正数， 设 $\varepsilon < 1$，

$\because |x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < \overbrace{\varepsilon + |a|}^{\text{该项为有界常数}}$，令 $N = \varepsilon + |a|$，$M = \max\{|x_i|,\ i = 0,1,2,\cdots,\ n\}$，显然 $M<N$，则 M 为有界常数

所以，存在正数 M，使得 $\forall x_n$，都有 $|x_n| \le M$，即数列 x_n 有界。

注意：$\overbrace{\text{若数列}\{x_n\}\text{发散}\Leftrightarrow\text{那么数列}\{x_n\}\text{一定无界}}^{\textbf{充分必要条件}}$，但是若数列 $\{x_n\}$ 有界，则数列 $\{x_n\}$ 不一定收敛，如狄利刻雷函数。

定理3: (收敛数列的保号性) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，且 $a>0$ (或 $a<0$)，那么 $\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$)。

证： $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow$ 当 $n>N$ (正整数) 时，$|x_n - a| < \varepsilon$ (对于给定的任意正数 ε 都成立) $\Rightarrow$ 当 $n>N$ (正整数) 时，$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$，由于 $\varepsilon \to 0^+$，说明 x_n 在 a 的左右高阶极小区间内变化，这个变化不会影响 x_n 的符号发生变化，即使有，也是 $a=0$ 的特殊情形。因而，$\exists$ 正整数 N，使得，当 $n>N$ 时，$x_n > a > 0$ (或 $x_n < a < 0$)。

推论1：如果 $\exists$ 正整数 N，使得，当 $n>N$ 时，$x_n \ge 0$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，那么 $a \ge 0$。也就是定理3的充分必要条件。

定理4: (收敛数列与其子数列之间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于常数 a，那么它的任一子数列也收敛于常数 a。

由定理4可知，如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列是发散的，那么数列 $\{x_n\}$ 也发散；但是，发散数列的子数列也有可能是收敛。

$P31$ 习题解答：

$T2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = 0$，理由如下：$\because |x_n - 0| = \left|\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) - 0\right| = \dfrac{1}{n}\cdot\left|\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right| = \begin{cases}0,\ n\text{为奇数} \\ \dfrac{1}{n},\ n\text{为偶数}\end{cases}$，只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ (ε 为任意正数，假设 $\varepsilon < 1$) 成立，

那么原数列极限为0成立，即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ 成立 $\Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，那么当 $n>N$ 时显然有 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$，对于任意 ε 为正数成立，根据极限的定义，

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = 0$；由此可得，当 $\varepsilon = 0.001$ 时，$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] = \lceil 1000 \rceil = 1000$。

$T3-(4)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{999\cdots99}_{n\text{个}9} = 1$，理由如下：$\because |x_n - 1| = \left|0.\underbrace{999\cdots99}_{n\text{个}9} - 1\right| = 0.\underbrace{000\cdots01}_{n\text{位小数}}$，只要 $0.\underbrace{000\cdots01}_{n\text{位小数}} < \varepsilon$，对于任意正数 ε 都成立，假设 $\varepsilon < 1$，那么

原数列极限为1成立，由于 $0.\underbrace{000\cdots01}_{n\text{位小数}} < \varepsilon \Leftrightarrow 10^{-n} < \varepsilon$，取对数 $(-n)\lg 10 < \lg\varepsilon \Rightarrow n > -\overbrace{\lg\varepsilon}^{\varepsilon<1\Rightarrow\lg\varepsilon<0}$，令 $N = \lceil -\lg\varepsilon \rceil = \left\lceil \lg\dfrac{1}{\varepsilon} \right\rceil$，则当 $n>N$ 时，有

$n > -\lg\varepsilon$ 对于任意正数 ε 都成立，根据极限的定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \left\lceil \lg\dfrac{1}{\varepsilon} \right\rceil$，使得当 $n>N$ 时，$\left|0.\underbrace{999\cdots99}_{n\text{个}9} - 1\right| < \varepsilon$ 恒成立 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{999\cdots99}_{n\text{个}9} = 1$。

好好理解极限的数学定义、数学形式定义，以及注意事项②！

第三节　函数极限的数学定义

函数极限的定位：函数极限是与自变量的变化过程密切相关；自变量x的变化过程不同，函数$f(x)$的极限值也不同；

函数极限的数学定义

定义1：设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数A，对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在正数δ，使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$（此即为x_0去心δ邻域的原因），对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，那么就称常数A是函数$f(x)$在x趋近于x_0处的极限，记作

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to x_0)$，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x\in \overset{o}{U}(x_0,\ \delta)$（即$0<|x-x_0|<\delta$）时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立。

注意：

①定义中$0<|x-x_0|<\delta$表示$x\neq x_0$，所以$x\to x_0$时$f(x)$有无极限，与$f(x)$在点x_0处是否有定义并没有半毛钱关系。

②假设常数A是$f(x)$在$x\to x_0$的极限，那么**假设**不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$对任意$\varepsilon>0$成立，我们得到不等式$\varepsilon-A<f(x)<\varepsilon+A$，简记为$f_1(\varepsilon)<f(x)<f_2(\varepsilon)$，由于$f(x)$是$x$的函数，且$x\to x_0$，根据不等式$f_1(\varepsilon)<f(x)<f_2(\varepsilon)$，我们要等价构建出$0<|x-x_0|<f_3(\varepsilon)$，再取$\delta=f_3(\varepsilon)$，**找到δ**。这样，倒过去推导时：$\because 0<|x-x_0|<f_3(\varepsilon)=\delta \Leftrightarrow f_1(\varepsilon)<f(x)<f_2(\varepsilon)$，即$\varepsilon-A<f(x)<\varepsilon+A$，再推出$|f(x)-A|<\varepsilon$，$\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x\in\overset{o}{U}(x_0,\ \delta)$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立。

证明习题练习：

$T1$: $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$。这题其实很有难度，　因为$f(x)=c$，与$x$的值无关。根据函数极　限的定义：$|f(x)-A|=|c-c|=0$，对于可任意给定的正　数$\varepsilon$，都有$0<\varepsilon$成立。于是，任取正数　δ，则当$0<|x-x_0|<\delta$时，对于$\forall\varepsilon>0$，都有$|c-c|<\varepsilon$，满足函数极限的定义　，所以$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$。

$T2$: $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。根据函数极限的定义　：$|f(x)-A|=|x-x_0|$，假设$|x-x_0|<\varepsilon$对于任意　$\varepsilon>0$都成立，那么取　$\delta=\varepsilon$，由$f(x)=x$知$f(x)$在$x\in\overset{o}{U}(x_0,\ \delta)$有定义，则$|x-x_0|<\delta$，$\delta=\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\varepsilon$对于任意　$\varepsilon>0$，都有$|x-x_0|<\varepsilon$都成立，所以　$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。

$T3$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。记住，函数　$f(x)$在$x=1$处没有定义，但是，这　与$f(x)$在$x\to 1$处有没有极限没有半毛　钱关系。因此，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，理由如下：$\because |(x+1)-2|=|x-1|$，只要$|x-1|<\varepsilon$对任意正数　ε都成立，那么，取　$\delta=\varepsilon$，当$0<|x-1|<\delta$时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$恒成立，所以　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

$T4$: $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$。根据函数极限的定义　，$\overbrace{\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|}^{\text{分子有理化，构造 }|x-x_0|}\le\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x_0}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|$，只要　$\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|<\varepsilon$对于任意正数　ε都成立，那么有$|x-x_0|<\sqrt{x_0}\cdot\varepsilon$，原函数定义域　$x\ge 0\Rightarrow|x-x_0|\le x_0$，取$\delta=\min\left\{\sqrt{x_0}\cdot\varepsilon,\ x_0\right\}$，那么当$0<|x-x_0|<\delta$时，$\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$恒成立。

单侧极限：

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$x_0-\delta<x<x_0$时，$|f(x)-f(x_0^-)|<\varepsilon$恒成立。$\leftarrow$ 左极限定义

右极限定义 $\to$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$x_0<x<x_0+\delta$时，$|f(x)-f(x_0^+)|<\varepsilon$恒成立。

$f(x)$在$x\to x_0$极限存在的充分必要条　件是：$f\left(x_0^-\right)$、$f\left(x_0^+\right)$都存在，并且，　$f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)$

定义2：设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义　。如果$\exists$常数A，对于任意给定正数　ε（不论它多么小），总$\exists$正数X，使得当$|x|>X$时，对应函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数A就称作函数$f(x)$在$x\to\infty$的极限，

即$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得$|x|>X$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立。

根据某些特殊函数的定　义域，有以下两种情况　可以简化处理：

I.如果$x>0$且$x\to+\infty$，那么，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A_1\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得$x>X$时，$|f(x)-A_1|<\varepsilon$恒成立；

II.如果$x<0$且$x\to-\infty$，那么，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A_2\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得$x<-X$时，$|f(x)-A_2|<\varepsilon$恒成立。

类比数列极限的4个定　理$+1$个推论，函数极限的　4个定理$+2$个推论：

定理1（函数极限的局部唯一性）：如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，那么这个极限唯　一。

定理2（函数极限的局部有界性）：如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么$\exists$常数$M>0$和$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|\le M$。

定理3（函数极限的局部保号性）：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$（或$A<0$），那么$\exists$常数$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）。

推论1：如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(A\neq 0)$，那么$\exists x_0$的某一去心邻域$\overset{o}{U}(x_0)$，使得当$x\in\overset{o}{U}(x_0)$时，有$|f(x)|>\dfrac{A}{2}$。$\left(\text{证明方法：定理3中取}\varepsilon=\dfrac{A}{2}\right)$

推论2：如果在x_0的某一去心邻域$\overset{o}{U}(x_0)$内$f(x)\ge 0$（或$f(x_0)\le 0$），且有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么$A\ge 0$（或$A\le 0$）。

定理4（函数极限与数列极限的关系）：如果极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n\neq x_0(n\in Z^+)$，那么，相应的函数值序　列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。[此定理表达了离散域与　连续域对应的关系]

第四节　无穷小与无穷大

无穷小定义： 如果函数$f(x)$在$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时的极限为0，那么称函数$f(x)$为当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时的无穷小。[0是唯一可以作为无穷小的常数]

关于无穷小的定理： $f(x)$在$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时具有极限A的充分必要条件是，$f(x)=A+\alpha$，其中α是无穷小。

证：以$x \to x_0$为例，先证充分性。已知$f(x)$在$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时具有极限A，即已知$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$，

则$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，令$\alpha=f(x)-A$，则$|\alpha|<\varepsilon$对于任意$\varepsilon>0$恒成立，

所以，α是$f(x)$在$x \to x_0$时的无穷小，$\alpha=f(x)-A \Rightarrow f(x)=A+\alpha$，充分性即得证。

再证必要性。已知$f(x)=A+\alpha$，α是无穷小，那么$|f(x)-A|=|(A+\alpha)-A|=|\alpha|$，

由于α是$f(x)$在$x \to x_0$时的无穷小，所以$|\alpha|<\varepsilon$对于$\forall \varepsilon>0$恒成立。$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$，必要性得证。

无穷大定义： 设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义)，

如果对于$\forall$给定$M>0$(不论它多么大)，总存在正数δ(或正数X)，只要$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)，

对应的函数值$f(x)$总能满足不等式$|f(x)|>M$，则称函数$f(x)$在$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时的无穷大，

即$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=\infty$)

注意：①无穷大按照函数极限的严格定义来说是不存在的，

但是，“函数的极限是无穷大”这种说法是可以的。

②在定义中，$|f(x)|>M \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>M \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x)=\infty \\ \text{或} f(x)<-M \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x)=-\infty \end{cases}$。

关于无穷大的定理： 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；

反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则有$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大。

这个定理提示着:0和无穷小在数值上可以等价，但是在概念上不能等价！

第五节　极限运算法则

函数极限的运算法则和复合函数极限的求法：

定理1：有限个无穷小之和也是无穷小。

定理2：有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

推论1：常数与无穷小的乘积也是无穷小。

推论2：有限个无穷小的乘积也是无穷小。

定理3：如果对于x的同一变化过程，有 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，

那么函数$f(x)$与函数$g(x)$先进行$+$、$-$、$\times$、$\div$运算再求极限的结果，类似于普通数学运算，即

$$\begin{cases} \lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B \\ \lim\left[f(x)\times g(x)\right]=\lim f(x)\times\lim g(x)=A\cdot B \\ 若B\neq 0, \lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B} \end{cases}$$

推论3：如果$\lim f(x)$存在，对于常数c，有$\lim\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim f(x)$。

推论4：如果$\lim f(x)$存在，对于正整数n，有$\lim\left[f(x)^n\right]=\left[\lim f(x)\right]^n$。(因为$n$与$x$相互独立)

定理4：设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，

那么根据函数极限与数列极限的关系，得到数列极限的运算法则(同定理3)：

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left[x_n\pm y_n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[x_n\times y_n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\times\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\cdot B \\ 若B\neq 0, \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x_n}{y_n}\right]=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B} \end{cases}$$

定理5：如果$\varphi(x)\geq\psi(x)$，$\lim\varphi(x)=a, \lim\psi(x)=b$，那么$a\geq b$。

定理6(复合函数的极限运算法则)：设复合函数$f[g(x)]$在x_0的去心邻域内有定义，

若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0, \lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且$\exists\delta>0$，当$x\in\overset{o}{U}(x_0, \delta)$时，有$g(x)\neq u_0$(为保证去心邻域)，

则$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=A$

第六节 极限重要准则和两个重要极限

极限存在准则I：如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：(1)从某项起，即$\exists n_0 \in N$，当$n > n_0$时，有$y_n \le x_n \le z_n$；(2)$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$；那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。(根据数列极限的定义很容易证明此结论)

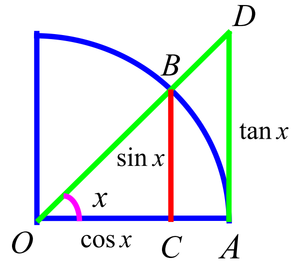
极限存在准则I'：通过准则I数列极限推广到函数极限。如果函数$f(x)$、$g(x)$和$h(x)$满足以下条件：

(1)当$x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$(或$|x| > X$)时，有$g(x) \le f(x) \le h(x)$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} g(x) = A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} h(x) = A$；那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)$存在，且有$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x) = A$。

极限存在准则I(数列极限存在准则)和准则I'(函数极限存在准则)合称为夹逼准则。

准则II(有界与极限存在的进一步关系)：单调有界函数必有极限。(注意：函数有极限说明函数必有界；但函数有界不能代表函数有极限)

应用准则I'(函数极限存在准则)，我们得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$。



理由：$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$，定义域为$x \ne 0$，$x \in R$，使用几何方法证明。

如右图，$\angle AOB = x\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$BC \perp AO$，$DA \perp AO$，

则$|CB| = \sin x$，弧$AB = \hat{l} = x$，$|AD| = \tan x$，

$\because S_{\Delta AOB} < S_{\text{扇形}AOB} < S_{\Delta AOD}$，$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \dfrac{1}{2}\cdot(1\cdot x)\cdot 1 < \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$，则$\sin x < x < \tan x \Rightarrow 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$，$\because x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases}$，

则$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$，应用准则I'，令$\begin{cases} g(x) = \cos x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ h(x) = 1, 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，下面证明$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$。$\because |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$，

根据$\sin x < x < \tan x$，则有$|\cos x - 1| < 2\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{2}$，令$\dfrac{x^2}{2} < \varepsilon$对于$\forall \varepsilon > 0$都成立，则有$-\sqrt{2\cdot\varepsilon} < x < \sqrt{2\cdot\varepsilon}$成立，

结合$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，得到$0 < |x - 0| < \sqrt{2\cdot\varepsilon}$，取$\delta = \sqrt{2\cdot\varepsilon}$，那么，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \sqrt{2\cdot\varepsilon}$，使得$|\cos x - 1| < \dfrac{x^2}{2} < \varepsilon$恒成立，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$，同理易得，$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$，根据准则I'，得到$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$。

应用准则II(单调有界函数的极限存在准则)，我们得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$。

用数列极限求解。设$x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，证明数列$\{x_n\}$单调增加并且有界。

$$\because x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0\frac{1}{n^0} + C_n^1\frac{1}{n^1} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n^1} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n} + \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\text{，那么}$$

$$x_{n+1} = \left[1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right] + \overbrace{\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}^{\text{该项大于}0}$$

令$\tau = \dfrac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)$，则$x_{n+1} = x_n + \tau \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \tau > 0$，所以数列$\{x_n\}$是单调递增数列

采用放大法证明数列$\{x_n\}$有界。易得$x_n < 1 + 1 + \dfrac{1}{2!}\cdot + \cdots + \dfrac{1}{k!}\cdot + \cdots + \dfrac{1}{n!} < 1 + 1 + \dfrac{1}{2^1}\cdot + \cdots + \dfrac{1}{2^{k-1}}\cdot + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < 3$，

但是，数列$\{x_n\}$的极限并不是3，比3小，为$e = 2.71828182845 9045\cdots$

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\left(1-\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{(i+1)!}\cdot\left(1-\frac{0}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i}{n}\right)\right]$$

应用准则II(单调有界函数的极限存在准则)，我们得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$。

用函数极限求解。令 $n\le x\le n+1$，$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，$n\to\infty$ 时有 $x\to+\infty$，根据数列 $\{x_n\}$ 为单调递增，以及函数极限与数列极限之间的关系(定理4)，有

$x_n\le f(x)\le x_{n+1}$，即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$，结合幂函数 $a^x(a>1)$ 单调递增的特性，利用左端缩小、右端放大的方法，有

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，所以，$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(1+\alpha)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=e$；

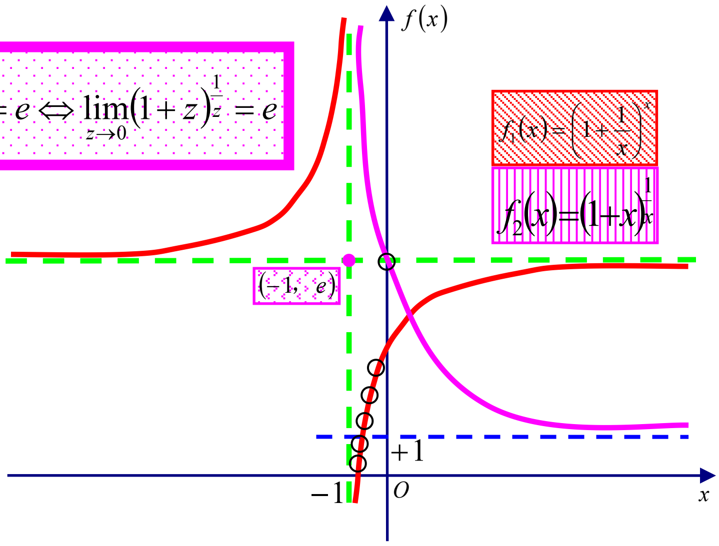
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\cdot(1+\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$，根据夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$。

再根据 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，令 $x=-(t+1)$，由 $x\to+\infty\Rightarrow t=(-x-1)\to-\infty$，则有 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{-(t+1)\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-(t+1)}\right)^{-(t+1)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-1}\right]^{t+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot(1+\alpha)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，

$$\text{所以有}\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\end{cases}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\Leftrightarrow\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e}$$



仿照上述换元套路，易得：

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e & \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}\ \oplus & \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e} & \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e & \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e\end{cases}$$，精妙啊！这个 e，很优美！

准则 II'(单调有界函数极限存在准则)：如果函数 $f(x)$ 在 x 的某个变化过程中，满足 $f(x)$ 单调并且有界，那么 $f(x)$ 在 x 的变化过程中的极限必定存在。具体如下4种情况：

(1) $x\to x_0^-$，即当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f(x)$ 单调且有界，则 $f(x_0^-)$ 极限必定存在；

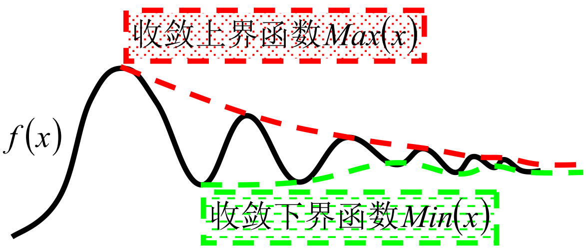
(2) $x\to x_0^+$，即当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f(x)$ 单调且有界，则 $f(x_0^+)$ 极限必定存在；

(3) $x\to-\infty$，即 $\forall M>0$，当 $x<-M$ 时，$f(x)$ 单调且有界，则 $f(-\infty)$ 极限必定存在；

(4) $x\to+\infty$，即 $\forall M>0$，当 $x>M$ 时，$f(x)$ 单调且有界，则 $f(+\infty)$ 极限必定存在；

柯西极限存在准则(柯西审敛原理)：数列 $\{x_n\}$ **收敛的充分必要条件**是：对于给定 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，使得当 $m>N$，$n>N$ 时，$|x_m-x_n|<\varepsilon$ 恒成立。

柯西审敛原理的反面教材 $\Rightarrow$



第七节　无穷小的比较

定义：(1)如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β是比 α高阶的无穷小，记作　$\beta=o(\alpha)$；

(2)如果如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说 β是比 α低阶的无穷小；

(3)如果如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c(常数)$，就说 β是α同阶的无穷小；

(4)如果如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha^{k}}=c(常数)$，就说 β是α的k阶的无穷小；

(5)如果如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β是α**等价无穷小**，记作 $\beta\sim\alpha$

定理1：β与α为等价无穷小的充分必　要条件是：　$\beta=\alpha+o(\alpha)$。

值得注意的是，利用等　价无穷小进行替换计算　时，**一定要注意构造自变量　$\rightarrow 0$**，只有这样才满足等价替　换条件。

定理2：设 $\alpha\sim f(\alpha)$，$\beta\sim f(\beta)$，并且 $\lim\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}$存在，那么，$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}$。

常用的等价无穷小替换　对：

$$在x\rightarrow 0的前提下：\left.\begin{matrix}\sin x\\ \tan x\\ \arcsin x\\ \arctan x\end{matrix}\right\}=x+o(x);$$

$$\begin{cases}1-\cos x=\dfrac{x^2}{2}+o(x)\\ e^x-1=x+o(x)\\ \alpha^x-1=\ln\alpha\cdot x+o(x)\\ (1+x)^\alpha-1=\alpha\cdot x+o(x)\\ \sqrt[n]{(1+x)^m}-1=\overbrace{(1+x)^A}^{A是(m\div n)的商}\cdot\overbrace{\left[\dfrac{B}{n}\cdot x+o(x)\right]}^{B是(m\div n)的余数}\end{cases}\quad,\ \alpha>0且\alpha\neq 1;\ m、n为整数且\ n\neq 0$$

即$\left[\lim\limits_{x\to0}(e^x-1)\right]\sim\left(\lim\limits_{x\to0}\sin x\right)\sim\left(\lim\limits_{x\to0}x\right)\sim\left(\lim\limits_{x\to0}\tan x\right)\sim\left(\lim\limits_{x\to0}\arcsin x\right)\sim\left(\lim\limits_{x\to0}\arctan x\right);$

$\left[\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\right]\sim\left[\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\right];\qquad \left[\lim\limits_{x\to0}(\alpha^x-1)\right]\sim\left[\lim\limits_{x\to0}(\ln\alpha\cdot x)\right];\qquad \left(\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x)^\alpha\right]\right)\sim\left[\lim\limits_{x\to0}(\alpha\cdot x)\right];$

$$\left(\lim_{x\to0}\left[\sqrt[n]{(1+x)^m}-1\right]\right)\sim\left[\lim_{x\to0}\left(\overbrace{(1+x)^A}^{A是(m\div n)的商}\cdot\overbrace{\left[\frac{B}{n}\cdot x+o(x)\right]}^{B是(m\div n)的余数}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m<n时,\left(\lim\limits_{x\to0}\left[\sqrt[n]{(1+x)^m}\right]-1\right)\sim\left(\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{m}{n}\cdot x+o(x)\right]\right)\\ m>n时,\lim\limits_{x\to0}\left(\overbrace{(1+x)^A}^{A是(m\div n)的商}\cdot\overbrace{\left[\dfrac{B}{n}\cdot x+o(x)\right]}^{B是(m\div n)的余数}\right)\end{cases}$$

第八节 函数的连续性与间断点

增量的概念：设变量u从它的一个初值u_1变到终值u_2，那么，终值u_2与初值u_1的差(u_2-u_1)，就叫做变量u的增量，记作Δu，即$\Delta u=u_2-u_1$。增量Δu可正可负，

如果$\Delta u>0$，就说变量u从初值u_1变到终值$u_2=u_1+\Delta u$时是增大的；

如果$\Delta u<0$，就说变量u从u_1变到终值$u_2=u_1+\Delta u$时是减小的。

函数在某点处连续的定义：设函数$f(x)$在点x_0的**某一邻域**内有定义，

如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那么就称函数$f(x)$在点$x_0$处连续。

函数在某点处连续的等价定义：设$x=x_0+\Delta x$，$\Delta x\to 0\Rightarrow x\to x_0$，则

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，

则有如下等价定义：设函数$f(x)$在点x_0的**某一邻域**内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，

那么就称函数$f(x)$在点x_0处连续。

其数学形式语言表达为：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$恒成立。

$$\left[\begin{array}{l}\text{设函数}f(x)\text{在点}x_0\text{的某一邻域内有定义，}\\ \text{如果}\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\text{存在并且等于}f(x_0^-)\text{，则函数}f(x)\text{在点}x_0\text{处左连续；}\\ \text{如果}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\text{存在并且等于}f(x_0^+)\text{，则函数}f(x)\text{在点}x_0\text{处右连续；}\end{array}\right]$$

函数在点x_0处连续的充要条件是：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在、$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在并且$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，

$$\begin{cases}\text{区间}[a,\ b]\text{端点除外，}f(x)\text{在右端点连续对应}\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\text{存在并且}\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)\text{；}\\ \qquad f(x)\text{在左端点连续对应}\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\text{存在并且}\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)\text{。}\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线，有理整式函数在}R\text{区间上都连续，}\\ \text{有理分式函数在其定义域内都连续。}\end{array}\right\}$$

函数的间断点的定义：设函数$f(x)$在x_0的**某去心邻域**内有定义（左或者右邻域，∃），在此前提条件下，如果$f(x)$满足下列三种情形之一：

I.在$x=x_0$处没有定义；II.在$x=x_0$处有定义，但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在(区间端点极限可能不存在)；

III.在$x=x_0$处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也存在，但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$。

函数间断点的分类：[前提条件]：如果x_0是函数$f(x)$的间断点，

左极限$f(x_0^-)$、右极限$f(x_0^+)$都存在，就成为**N0.1**间断点，如果$f_-(x_0)=f_+(x_0)$，就是可去间断点；

如果$f_-(x_0)\neq f_+(x_0)$，就是跳跃间断点；

左极限$f_-(x_0)$、右极限$f_+(x_0)$任意一个不存在，就是**N0.2**间断点，包含无穷间断点、振荡间断点。

第九节　连续函数的运算与初等函数的连续性

根据极限的四则运算和函数在点x_0处的连续定义，即可得出以下定理：

定理1：设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0处连续 $\left(\text{即} \overbrace{\underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{}}^{\text{极限存在且与函数值相等}} = f(x_0)、\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)\right)$，

（左、右极限存在且相等）

$$\text{则有：}\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=f(x_0)\pm g(x_0)；\\ \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=f(x_0)\cdot g(x_0)；\quad [\text{即两个连续函数的和差积商(除数不为0)也是连续函数}]。\\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}，\quad g(x_0)\neq 0；\end{cases}$$

定理2（反函数的单调性和连续性）：如果函数$f(x)$在其定义区间I_x上单调且连续，那么它的反函数$f^{-1}(x)$在定义区间I_y上同一单调且连续。

定理3（复合函数在某点的连续性）：
$$\overbrace{\underbrace{\lim_{x\to x_0} f[g(x)]}_{}}^{g(x)\text{在}x_0\text{处极限存在且等于}u_0} = \overbrace{\underbrace{\lim_{u\to u_0} f(u)}_{}}^{f(u)\text{在}u_0\text{处极限存在且等于}f(u_0)} = f(u_0)，$$

（$g(x)$在x_0处左右极限都存在并且相等；$f(u)$在u_0处左右极限都存在并且相等）

即有$\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right]$，函数符号$f$与极限符号$\lim\limits_{x\to x_0}$可以交换次序，

那么复合函数$f[g(x)]$在其定义区间上连续。

$$\text{你明白了啥}\begin{cases} f(x)=\sin\dfrac{1}{x}，\text{在}(-\infty,0),(0,+\infty)\text{上是连续的，但是在}(-\infty,+\infty)\text{内有振荡间断点；}\\ f(x)=\dfrac{1}{x}，\text{在}(-\infty,0)\text{是},(0,+\infty)\text{上都是单调递减，但是在}(-\infty,+\infty)\text{内非单调函数。}\end{cases}$$

初等函数的连续性：提 供了求极限的一种方法

$f_{反}(x)=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$；$f_{对}(x)=\log_a x,(a>0且a\neq 1)$，$x\in(0,+\infty)$；$f_{幂}(x)=x^u,(u\in R为常数)$，$D$待定

$f_{(三)}(x)=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；$f_{指}(x)=a^x,(a>0且a\neq 1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$

[基本初等函数：反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数和指数函数，
在它们的定义域内都是连续的。
初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合构成并能用一个式子表达，
在其定义区间(包含在定义域内)都是连续的。]

第十节 闭区间上连续函数

闭区间上连续函数的定义：如果函数$f(x)$在开区间(a, b)内连续，在右端点b处左连续，在左端点a处右连续，那么$f(x)$为闭区间$[a, b]$上的连续函数。

闭区间上连续函数的性质：

定理1（有界性与最大值最小值 定理）：在$\overbrace{\text{闭区间上}}^{\text{条件1}}\overbrace{\text{连续函数}}^{\text{条件2}}$在该区间上$\overbrace{\text{有界}}^{\text{结论1}}$，且一定能取得$\overbrace{\text{最大值和最小值}}^{\text{结论2}}$。

定理2（零点定理）：设函数$f(x)$在$\overbrace{\text{闭区间}[a, b]\text{上连续}}^{a\text{处右连续}，b\text{处左连续}}$，且$f(a)$与$f(b)$异号$[\text{即}f(a)\cdot f(b)<0]$，那么，在开区间$(a, b)$内至少有一点$\xi$，满足$f(\xi)=0$。

定理3（介值定理）：设函数$f(x)\overbrace{\text{在闭区间}[a, b]\text{上连续}}^{\text{条件1}}$，且在该闭区间端点$a$处、$b$处分别取得$\overbrace{\text{不同的函数值}}^{\text{条件2}}$ $f(a)=A$，$f(b)=B$，那么，对于介于数值A、B之间的任意数C，在开区间(a, b)上至少有一点λ，满足$f(\lambda)=C$。

推论1：在闭区间$[a, b]$上连续的函数$f(x)$，必定能够取得介于其最大值M和最小值m之间的任意数值。

一致连续性定义：设函数$f(x)$在区间I上有定义，如果对于给定$\forall\varepsilon>0$，总$\exists\delta>0$，使得对于区间I上的任意两点x_1、x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$恒成立，那么称函数$f(x)$在区间$I$上是一致连续。

一致连续性的意义解读：在区间I的任何部分，只要自变量取得的两个数值接近到一定程度，那么，就可以使得对应取得的函数值接近指定的程度。亦即，$f(x)$在区间I上处处连续，不存在间断点。

$$\begin{cases} f(x)\text{在区间}I\text{上一致连续}\Rightarrow f(x)\text{在}I\text{上连续} \\ f(x)\text{在区间}I\text{上连续，当且仅当}I\text{为闭区间时，}f(x)\text{才在}I\text{上一致连续。} \end{cases}$$

定理4（一致连续性）：如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，那么$f(x)$在该区间也是一致连续的。

第十一节 重要习题总结

1.1考察有界的概念及其证明方法

证明：函数$f(x)$有界的充分必要条件是$f(x)$既有上界，又有下界。

先证充分性：已知$f(x)$在区间$X(X\subset D)$上有界，即$\exists M>0$，使得

对于$\forall x\in X, |f(x)|\le M$恒成立$\Rightarrow -M\le f(x)\le M$，于是，得到

$\begin{cases}\forall x\in X，f(x)\le M\Rightarrow f(x)\text{有上界；}\\ \forall x\in X，f(x)\ge -M\Rightarrow f(x)\text{有下界；}\end{cases}$所以，推出$f(x)$既有上界又有下界；

再证必要性：已知$f(x)$在区间$X(X\subset D)$上既有上界K_1又有下界K_2，

即对于$\forall x\in X,\begin{cases}f(x)\le K_1\\ f(x)\ge K_2\end{cases}$恒成立，令$M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$，则有

$|f(x)|\le M$恒成立，所以推出$f(x)$在X上有界。

综上所述，函数$f(x)$有界的充分必要条件是$f(x)$既有上界又有下界。

1.2考察数列极限的定义、数列极限证明中的放大法

题1：证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

证：$|x_n-A|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\overbrace{\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|}^{\text{化简：分子有理化}}=\left|\dfrac{a^2}{n\cdot\left(\underbrace{\sqrt{n^2+a^2}+n}_{>2n}\right)}\right|<\dfrac{a^2}{2n^2}$(因为$n>0$)；

令$\varepsilon>\dfrac{a^2}{2n^2}$,(目的为构造$n>f(\varepsilon)$的形式)，即$n>\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}$(因为$n>0$)，取$N=\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，

则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，使得$n>N$时，$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$恒成立。

题2：若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$；证明当$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$未必成立。

证：由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$知，对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得$n>N$时，$|u_n-a|<\varepsilon$恒成立，

由不等式$|x|-|y|\le|x+y|\le|x|+|y|$得，$|u_n|-|a|\le|u_n-a|\le|u_n|+|a|$，根据

$\begin{cases}|u_n-a|<\varepsilon\\ |u_n|-|a|\le|u_n-a|\end{cases}\Rightarrow |u_n|-|a|<\varepsilon$恒成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$；

用反证法，$u_n=(-1)^n$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$，而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$不存在。

1.3极限运算法则定理2在数列极限上的应用

无穷小与$\overbrace{\text{收敛数列}}^{\text{有极限}}$的乘积仍是无穷小。

$$\left[\text{对应函数极限的表述为：无穷小与}\overbrace{\text{有界函数}}^{\text{有界单调函数才有极限}}\text{的乘积仍是无穷小}\right]\text{。}$$

设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$。

证：数列$\{x_n\}$有界$\Rightarrow \exists M > 0$，使得对于一切$n$有$|x_n| \le M$恒成立；

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使得$n > N$时，$|y_n - 0| < \varepsilon$恒成立。

$|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n|$，由于$|x_n| \le M$，则有$|x_n \cdot y_n - 0| \le M \cdot |y_n|$，令$M \cdot |y_n| < \varepsilon$，

即$|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$，取$N = \left[\dfrac{\varepsilon}{M}\right]$，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \left[\dfrac{\varepsilon}{M}\right]$，

使得$n > N$时，$|x_n \cdot y_n - 0| < \varepsilon$恒成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$。

1.4抽象数列极限的证明，落脚点还是数列极限的定义

设数列$\{x_n\}$满足如下条件，$x_{2k-1} \to a(k \to \infty)$，且$x_{2k} \to a(k \to \infty)$，求证$x_n \to a(n \to \infty)$

证：$x_{2k-1} \to a(k \to \infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$，即$\forall \varepsilon > 0$，$\exists K_1 > 0$，使得$n > K_1$时，$|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$，

$x_{2k} \to a(k \to \infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$，即对于上述$\varepsilon > 0$，$\exists K_2 > 0$，使得$n > K_2$时，$|x_{2k} - a| < \varepsilon$，

取$K = \max\{K_1，K_2\}$，$N = 2K$，则当$n > N$时，即$n > 2K$时，

$$\begin{cases} \text{若}n = 2k-1\text{，则}2k-1 > 2K \Leftrightarrow k > K + \dfrac{1}{2}\text{，取}K_1^{'} = K+1\text{，显然}K_1^{'} > K > K_1\text{，则有} \\ \forall \varepsilon > 0\text{，}\exists K_1^{'} = K+1\text{，使得}n > K_1^{'}\text{时，}|x_{2k-1} - a| < \varepsilon\text{恒成立；} \\ \text{若}n = 2k\text{，则}2k > 2K \Leftrightarrow k > K\text{，取}K_2^{'} = K\text{，则有} \\ \forall \varepsilon > 0\text{，}\exists K_1^{'} = K\text{，使得}n > K_2^{'}\text{时，}|x_{2k} - a| < \varepsilon\text{恒成立；} \end{cases}$$

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

微分学

第二章　导数与微分

第一节　导数概念

导数的定义：设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx时$(x_0+\Delta x$仍在邻域内$)$，相应的函数取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在$\Delta x\to 0$时的极限存在，则称函数$y=f(x)$在$x_0$处可导，并称这个极限为函数$y=f(x)$在$x_0$处的导数，记作$f'(x_0)$，即$f'(x_0)=\lim\limits_{\underset{\text{增量}\to 0}{\Delta x\to 0}}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

也可记作$y'\big|_{x=x_0}$，或$\dfrac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}$，或$\dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}$。

导数的数学形式等价定义：

$$\begin{cases} f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta y}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\underbrace{h}_{\text{极限变量}}} \\ f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x}_{\text{极限变量}}-x_0}\text{，在该式中，}x_0\text{为参变量（类似于}\varepsilon\text{）} \end{cases}$$

函数在某点处可导的定理（即导数存在）：如果函数$y=f(x)$在开区间$(a，b)$内每个点处都可导，那么函数$f(x)$在开区间$(a，b)$内导数都存在，$f'(x)$为导函数。即$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta y}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{\underbrace{h}_{\text{极限变量}}}$。

单侧导数的定义：由于导数定义中，涉及到极限的存在，而极限存在的充分必要条件是左极限和右极限都存在，并且相等。因而，根据左极限存在可以得到左导数，根据右极限存在可以得到右导数，如下：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Leftrightarrow\text{单侧导数}\begin{cases} f'_-(x)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\Leftrightarrow\text{左极限}\Rightarrow\text{左导数} \\ f'_+(x)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\Leftrightarrow\text{右极限}\Rightarrow\text{右导数} \end{cases}。$$

函数可导性与连续性的关系：可导必连续，连续未必可导。

证明：设函数$y=f(x)$可导，即对于任意$x\subset D$，$f(x)$在x的某个邻域内有定义，且有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\overbrace{\underbrace{f'(x)}_{\text{这是一个数}}}^{x\text{为参变量}}$成立，

设α为无穷小，则有$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha，\Rightarrow\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=0$，而$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，则有

对于任意$x\subset D$，$f(x)$在x的某个邻域内有定义，且有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0$，这就是连续性的定义哦！

所以，函数可导，必能推出函数连续；

设函数$y=f(x)$连续，即对于任意$x\subset D$，$f(x)$在x的某个邻域内有定义，且有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0\end{cases}$$，类比上述证明过程，现在构造

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\text{，但是，}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=\frac{0}{\Delta x}\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\left[\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=\dfrac{0}{\Delta x\to 0^-}\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\left[\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=\dfrac{0}{\Delta x\to 0^+}\end{cases}，$$

如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x\to 0^-}$存在，即左极限存在，则有左导数$f'_-(x)$存在；并且$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x\to 0^+}$存在，

即右极限存在，则有右导数$f'_-(x)$存在；并且$\dfrac{0}{\Delta x\to 0^-}=\dfrac{0}{\Delta x\to 0^+}$，即左极限与右极限相等，则左导数与右导数相等，

那么，$f(x)$连续，可以推出$f(x)$可导；否则，函数连续不能推出函数可导。例如$f(x)=|x|$在$x=0$处连续但是不可导。

第二节　导数的求导法则

函数的和、差、积、商 的求导法则：(附带证明，熟悉概念)

定理1：如果函数 $u=u(x)$和$v=v(x)$在点x处都有导数，那么 $u(x)$和$v(x)$的和、差、积、商 (分母不为0) 得到的新函数 $f(x)$在点x处的导数也唯一存在， 且有，

$$\text{I.}\begin{cases} f_1(x)=u(x)\pm v(x) \\ u'(x)、v'(x)\text{都存在}\end{cases} \Rightarrow f_1'(x)=[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$\text{II.}\begin{cases} f_2(x)=u(x)\cdot v(x) \\ u'(x)、v'(x)\text{都存在}\end{cases} \Rightarrow f_2'(x)=[u(x)\cdot v(x)]'=[u'(x)\cdot v(x)]+[v'(x)\cdot u(x)];$$

$$\text{III.}\begin{cases} f_3(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},\ x\notin\{v(x)=0\} \\ u'(x)、v'(x)\text{都存在}\end{cases} \Rightarrow f_3'(x)=\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)};$$

证I：$f_1'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}=[u(x)\pm v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$

$\Rightarrow [u(x)\pm v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$，利用极限的运算法则 定理3，

$\Rightarrow [u(x)\pm v(x)]'=\overbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}}^{u'(x)}\pm\overbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}}^{v'(x)}$(应用条件为 $u'(x)$、$v'(x)$都存在)

$\therefore f_1'(x)=[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

证II：$f_2'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}=[u(x)\cdot v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)]-[u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x}$

$\overset{\text{构造}}{\Rightarrow}[u(x)\cdot v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)]-[u(x)\cdot v(x)]+[u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)]}{\Delta x}$

$\Rightarrow [u(x)\cdot v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)-u(x)]\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$

$\Rightarrow [u(x)\cdot v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}\cdot u(x)$，利用极限运算定理 3

$\Rightarrow [u(x)\cdot v(x)]'=\left\{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\right\}+\left\{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}u(x)\right\}$

$\Rightarrow [u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)$，$\therefore f_2'(x)=[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)$

证III：$f_3'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{[v(x+\Delta x)\cdot v(x)]\cdot\Delta x}$

$\Rightarrow\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{[v(x+\Delta x)\cdot v(x)]\cdot\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{[v(x+\Delta x)\cdot v(x)]\cdot\Delta x}$

$\Rightarrow\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)-u(x)]\cdot v(x)-[v(x+\Delta x)-v(x)]\cdot u(x)}{[v(x+\Delta x)\cdot v(x)]\cdot\Delta x}$

$\Rightarrow\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x)\right]-\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}u(x)\right]}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}[v(x+\Delta x)\cdot v(x)]}=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)}$

$\therefore f_3'(x)=\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

定理2(反函数的求导法则)：如果函数$x=f(y)$在区间I_y内单调、可导，并且$f'(y)\neq 0$，则它的反函数$y=f^{-1}(x)$在区间$I_x=\{x\mid x=f(y),\ y\in I_y\}$内也可导，且有

$[f^{-1}(x)]=\dfrac{1}{f'(y)}$或者$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$(这个式子表明了积分算子的算子特性：既有符号特性又有数的特性)。

证：根据第二章第一节函数可导$\Rightarrow$函数必连续，知，$x=f(y)$在区间I_y内单调、可导，那么$f(y)$在区间I_y上必连续，根据第九节定理2(反函数与原函数同单调性、同连续性)得，函数$x=f(y)$的反函数$y=f^{-1}(x)$在区间I_x上必定单调、连续。$\forall x\in I_x$，给定增量Δx，使得$(x+\Delta x)\in I_x$，由于函数$y=f^{-1}(x)$的单调性得到：$\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)\neq 0\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)}{\Delta x}$，由于函数$y=f^{-1}(x)$连续，

则有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)]=0$，那么$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x\to 0}$，到此处，

根据第二章第一节函数连续不一定可导的推导过程，可以得到，如果再加上条件单调，

[即单调连续函数$g(x)$，那么可以推出$g(x)$是可导的，原因如下：

$g(x)$为单调函数，说明因变量的变化Δy与自变量的变化Δx具有固定的关系：如果$g(x)$是单调递增函数，

那么$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0^-}{\Delta x\to 0^-}\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0^+}{\Delta x\to 0^+}\end{cases}\Rightarrow g_-'(x)=g_+'(x)$，同理，如果$g(x)$是单调递减函数，那么

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0^+}{\Delta x\to 0^-}\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0^-}{\Delta x\to 0^+}\end{cases}\Rightarrow g_-'(x)=g_+'(x)$，所以单调连续函数能推导出可导。]

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)}{\Delta x}=f^{-1}(x)$，其极限存在，所以函数$y=f^{-1}(x)$的导数存在，由于

$f^{-1}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}\left(\text{应用题设条件}f'(y)\neq 0\right)}=\dfrac{1}{f'(y)}\Leftrightarrow$反函数的导数等于原函数导数的倒数。

定理3(复合函数的求导法则)：如果函数$u=g(x)$在点x处可导，而函数$y=f(u)$在$u=g(x)$处可导，则复合函数$y=f[g(x)]$在点x处可导，且其导数为$\dfrac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$，或$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$。

(补充复合函数的知识：$f[g(x)]$，定义域为D_g，并且$\forall x\in D_g$时，$R_g\subset D_f$)

证：$y=f(u)$在u处可导$\Rightarrow\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$，$u=g(x)$在$x$处可导$\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)$，根据第一章第四节定理1，

极限存在的充分必要条件，知$\begin{cases}\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha\\ \dfrac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)+\beta\end{cases}$，$\alpha$、$\beta$分别为$\Delta u\to 0$、$\Delta x\to 0$的的无穷小，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha\Rightarrow\Delta y=f'(u)\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u$，根据增量$\Delta u$、$\Delta x$不为0(为0时规定$\alpha$、$\beta$都为0)，得到

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right]$，根据极限运算法则推论3，得到

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\cdot\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right]\right]=[f'(u)\cdot g'(x)]+\overbrace{(\alpha\cdot[f'(u)\cdot g'(x)])}^{\text{极限运算法则推论1，该项为0}}=f'(u)\cdot g'(x)$，

则复合函数$y=f[g(x)]$的导数存在，并且有$y'=f'[g(x)]=f'(u)\cdot g'(x)$，即$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$。

求导法则与求导公式

求导公式珞珈山：

$$
\text{反三角}\begin{cases}(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}，\ x\in[-1,1]; \\ (\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}，\ x\in[-1,1]; \\ (\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}，\ x\in(-\infty,+\infty); \\ (\operatorname{arc}\cot x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}，\ x\in(-\infty,+\infty);\end{cases}
\quad
\begin{matrix}\text{对}\\\text{幂}\end{matrix}\begin{cases}(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}; \\ (x^u)'=u\cdot x^{(u-1)};\end{cases}
\text{三}\begin{cases}(\sin x)'=\cos x; \\ (\cos x)'=-\sin x; \\ (\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}; \\ (\sec x)'=\sec x\cdot\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}; \\ (\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}; \\ (\cot x)'=-\csc^2 x=\dfrac{-1}{\sin^2 x};\end{cases}
\quad \text{指}\{(a^x)'=a^x\ln x;
$$

$$
\begin{matrix}\text{常数}\\\text{特殊}\end{matrix}\begin{cases}C'=0; \\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}; \\ (e^x)'=e^x;\end{cases}
\text{法则}\begin{cases}[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x); \\ [u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)\pm v'(x)\cdot u(x); \\ \left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}; \\ [C\cdot f(x)]'=C\cdot f'(x);\end{cases}
\quad
\begin{matrix}\text{反函数}\\\text{复合函数}\end{matrix}\begin{cases}[f^{-1}(x)]'=\dfrac{1}{f'(x)},\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ (f[g(x)])'=f'(u)g'(x),\ x\in D_g，\ \text{且}R_g\subset D_f\end{cases}
$$

$$
\text{双曲}\begin{cases}(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x; \\ (\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x; \\ (\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}; \\ (\operatorname{coth} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch} x};\end{cases}
\quad
\text{反双曲}\begin{cases}(\operatorname{arsh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \\ (\operatorname{arch} x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}; \\ (\operatorname{arth} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}; \\ (\operatorname{arcoth} x)'=\dfrac{-1}{1-x^2}\end{cases}
$$

$$\underbrace{\text{双曲函数类比三角函数，可以发现,}\overbrace{\text{正弦函数和余弦函数}}^{\text{有关系}}}_{\text{和傅里叶有关系的！}}$$

第三节　高阶导数

高阶导数的定义：一般的，函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$一般也是x的函数，我们把$y^{(n)}=f^{(n)}(x)$叫做函数$y=x$的n阶导数。

$$\begin{cases}(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right);\\(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right);\end{cases}\begin{cases}[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n};\\(x^u)^{(n)}=\dfrac{u!}{(u-n)!}\cdot x^{u-n}\end{cases}$$

莱布尼茨公式：$[u(x)\cdot v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\left[C_n^k\cdot u^{(n-k)}(x)\cdot v^{(k)}(x)\right]$

第四节　隐函数的导数(参数方程确定函数的导数)

隐函数的定义：一般地，如果变量x和y满足一个方程$F(x，y)=0$，在一定条件下，当x取某区间内的任意值时，相应地总有满足这方程的唯一的y值存在，那么就说方程$F(x，y)=0$在该区间内确定了唯一的一个隐函数。

利用方程求隐函数$y=f(x)$的导数的方法：

首先，对于方程$F(x，y)=0$，我们假设x与y之间存在函数关系$y=f(x)$，这就意味着，x与y并不是独立关系，

然后，进行如下数学操作：$\dfrac{dF(x，y)}{dx}=0\Rightarrow\dfrac{dF_1(x)}{dx}+\overbrace{\dfrac{dF_2(y)}{dx}}^{\text{复合函数求导}}+\overbrace{\dfrac{dF_3(x，y)}{dx}}^{\text{与复合函数的乘积}}=0$，根据复合函数、函数乘积的求导法则，

进行求解，然后化简合并分类，得到方程$\dfrac{dy}{dx}=F_4(x，y)$。

对数求导法：对于一般形式的幂函数$y=u(x)^{v(x)}$，$u(x)>0$，$\overbrace{\text{如果}u(x)、v(x)\text{的导数都存在}}^{\text{前提条件}}$，那么在幂函数等式左右两边取对数，$\Rightarrow\ln y=\ln\left[u(x)^{v(x)}\right]\Rightarrow\ln y=v(x)\cdot\ln u(x)\Rightarrow y=e^{v(x)\ln u(x)}$，则$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]}{dx}$，根据复合函数求导法则，

$$\frac{d\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]}{dx}=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot\frac{d[v(x)\cdot\ln u(x)]}{dx}=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot\left(\frac{d[v(x)]}{dx}\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{d[\ln u(x)]}{dx}\right)=u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right],$$

所以，形如幂函数$y=u(x)^{v(x)}$，$u(x)>0$，(前提条件成立)的导数$\dfrac{dy}{dx}=u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right]$。

参数方程求导法：一般地，若参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)，& t\in I_t\\y=\psi(t)，& t\in I_t\end{cases}$能唯一确定$x$、$y$之间的函数关系，并且，

条件1(反函数存在条件)：函数$x=\varphi(t)$在其定义区间I_t为单调连续函数，根据第一章第九节定理2知，其反函数$t=\varphi^{-1}(x)$存在，并且在$x\in I_x$区间内也是同单调性的连续函数；

条件2(复合函数存在条件)：条件1成立时，由于函数$y=\psi(t)$的定义域I_t与$t=\varphi^{-1}(x)$的值域I_t的交集就是I_t，所以，复合函数$y=\psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$的定义域不变为$I_x$；

以上两个条件都成立时，根据复合函数、反函数的求导法则，得到：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]}{d\varphi^{-1}(x)}\cdot\frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}=\psi'\left[\varphi^{-1}(x)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(x)\right]'\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(t)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

上述结论具有重要意义：用微分算子表示，有：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$(微分算子可以进行乘除法的证明)。

第五节　函数的微分

一般地，如果函数$y=f(x)$满足一定的条件，则因 变量的增量$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$，其中$A$是不依赖$\Delta x$的常数，则有：
$\Delta y-A\cdot\Delta x=o(x)$，则当$A\neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，可用$\Delta x$的线性函数$A\cdot\Delta x$代替$\Delta y$。
函数微分的定义：设函 数$y=f(x)$在某区间I内有定义，$\forall x\in I,(x+\Delta x)\in I$，如果$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$可以表示为，
$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$，且$A$是不依赖$\Delta x$的常数，那么称函数$y=f(x)$在$x$处是可微，$\Delta x$的线性函数$A\cdot\Delta x$称作函数$y=f(x)$的微分，记作$dy$，即$dy=A\cdot\Delta x$。

函数可微的充分必要条 件是函数可导。

证：先证充分性：设函 数$y=f(x)$在$x\in I$处处可微，根据微分的 定义，有$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\Rightarrow A=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，
等式两边对Δx取极限，得$\lim\limits_{\Delta x\to 0}A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，由于$A$与$\Delta x$无关，$o(\Delta x)$为$\Delta x$的高阶无穷小，所以有$A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$；
由于A是常数，则$f'(x)$存在且等于A，$\therefore$函数可微$\Rightarrow$函数可导；
再证必要性：设函数$y=f(x)$在$x\in I$处处可导，根据导数的 定义，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$，说明导数$f'(x)$存在且与$\Delta x$无关，导数$f'(x)$存在
说明极限表达式$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在并等于$f'(x)$，根据第一章第四节定 理1，函数极限与无穷小之 间的关系得到，对于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$，这样看，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\overbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}^{\text{函数}F(x)}=\overbrace{f'(x)}^{\text{极限}a}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,\left(\alpha\text{为}\Delta x\to 0\text{时的无穷小，即}\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0\right)\Rightarrow\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x\Leftrightarrow\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

$\therefore$函数可导$\Rightarrow$函数可微。综合之，函 数可导$\xleftrightarrow{\text{充分必要}}$函数可微。

$$\begin{cases}\text{对于公式}\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)\text{，这样记忆：函数的增 量}=\text{函数的导数}\times\text{自变量的增量}+\text{无穷小。}\\ \text{根据函数微分的定义，有}dy=f'(x)\cdot\Delta x\text{，即函数的微分}=\text{函数的导数}\times\text{自变量的增量}\end{cases}\Rightarrow\Delta y=\overbrace{dy}^{\Delta y\text{的线性主部}}+o(dy)\text{。}$$

于是得到导数的两种定 义：
$$\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\\ dy=f'(x)\cdot\Delta x,\overbrace{\text{自变量的增量即为自变 量的微分}}^{\text{当}|\Delta x|\text{的值很小的时候}}\end{cases}\Rightarrow\underbrace{\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\\ dy=f'(x)\cdot dx,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\\ \dfrac{dy}{dx}=f'(x)\end{cases}}_{\text{由微分公式得到导数公 式}}$$

微分的重要应用：近似 计算

dy与Δy的等价性证明：$\because dy=f'(x)\cdot\Delta x$，当$f'(x)\neq 0$（即针对所有导数不为零 的点），$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{f'(x)\cdot\Delta x}=\dfrac{1}{f'(x)}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$，

$\therefore\Delta y\sim dy\Leftrightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\sim f'(x)\cdot\Delta x$，令$x=x_0$，且$f'(x_0)\neq 0$，则$\overbrace{f(x_0+\Delta x)}^{\text{未知点}B}-\overbrace{f(x_0)}^{\text{已知点}A}\sim\overbrace{f'(x_0)}^{\text{已知点}A\text{的导数}}\cdot\overbrace{\Delta x}^{A\text{到}B\text{的增量}}$

$\Rightarrow f(x)\sim f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，这种做法就是用增量$\Delta y$的线性主部$dy$去近似代替，即用曲线 的切线近似代替曲线，
但是注意前提：$|\Delta x|$要很小，即在切点附近 的切线代替切点附近的 曲线。
$f(x)\sim f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$的重要意义在于，可以 很方便的证明一些函数 的极限。令$x_0=0$，$\Delta x\to 0\Leftrightarrow x\to 0$，于是乎
$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sim\lim\limits_{x\to 0}[f(0)+f'(0)\cdot x]$。

$$\begin{cases}f_1(x)=\sqrt[n]{1+x}\text{，}f_1(0)=1\text{、}f_1'(0)=\dfrac{1}{n}\Rightarrow\sqrt[n]{1+x}\sim 1+\dfrac{1}{n}\cdot x\\ f_2(x)=\sin x\text{，}f_2(0)=0\text{、}f_2'(0)=\cos(0)=1\Rightarrow\sin x\sim x\\ f_3(x)=\tan x\text{，}f_2(0)=0\text{、}f_3'(0)=\dfrac{0}{\cos^2(0)}=1\Rightarrow\tan x\sim x\\ f_4(x)=e^x\text{，}f_2(0)=1\text{，}f_4'(0)=e^0=1\Rightarrow e^x\sim 1+x\\ f_5(x)=\ln(1+x)\text{，}f_5(0)=0\text{，}f_5'(0)=\dfrac{1}{1+(0)}=1\Rightarrow\ln(1+x)\sim x\end{cases}$$

中值定理

第三章　微分中值定理与导数的应用

第一节　微分中值定理

罗尔定理、拉格朗日中值定理

微分中值定理篇

定理1(费马引理)：设函数$f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，并且在x_0处可导，如果对任意$x\in U(x_0)$，有$f(x)\le f(x_0)$[或$f(x)\ge f(x_0)$]，那么$f'(x_0)=0$。

即在x_0的邻域内所有点对应的函数值只在x_0对应的函数值的一侧，那么x_0处的导数必为0。

证明：不妨设$x\in U(x_0)$时，$f(x)\le f(x_0)$，设$(x_0+\Delta x)\in U(x_0)$，那么，在$(x_0+\Delta x)$处，

有$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$，即$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0\Rightarrow\begin{cases}\Delta x>0\text{时},\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0\\ \Delta x<0\text{时},\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0\end{cases}$

很明显，上述两个式子分别是$f'_+(x_0)$、$f'_-(x_0)$，有题设条件知，$f'(x_0)$存在，

所以$\left[f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le\right]=\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0=f'_-(x_0)\right]\Rightarrow f'(x_0)=0$，费马可安息了。

定理2(罗尔定理)：如果函数$f(x)$满足：I.在闭区间$[a,b]$上连续；II.在开区间(a,b)内可导；III.在区间端点a、b处的函数值$f(a)=f(b)$；如果$f(x)$满足这三大条件，那么在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$a<\xi<b$时，有$f'(\xi)=0$恒成立。

证：$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，根据第一章第十节定理1(有界性与最大值最小值定理)，题设中$f(x)$必定存在最大值M和最小值m，这样，只有两种情形：

①$M>m$，$\because f(x)$满足条件II，即有$f(a)=f(b)$，而$m\le f(x)\le M$，则$\begin{cases}f(a)\ge m\\ f(b)\le M\end{cases}$不能同时取等号，我们再分具体情况讨论：(1)当$f(a)=f(b)=M$时，在开区间$(a,b)$内必定存在$\xi_1$，使得$f(\xi_1)=M$，$\forall x\in(a,b)$，$f(x)\le M$，由题设条件II，并结合费马引理知，$\overbrace{f(x)\text{在点}\xi_1\text{的某邻域}U(\xi_1)\text{内有定义}}^{\text{连续条件的运用}}$，$\overbrace{\text{在}\xi_1\text{处可导}}^{\text{可导条件的运用}}$，$\forall x\in U(\xi_1)$，有$f(x)\le f(\xi_1)$恒成立，$\therefore f'(\xi_1)=0$；(2)当$f(a)=f(b)=m$时，同(1)理可得，在开区间$(a,b)$内必定存在$\xi_2$，使得$f(\xi_2)=m$，$\forall x\in(a,b)$，$f(x)\ge m$，由题设条件II，并结合费马引理知，$\overbrace{f(x)\text{在点}\xi\text{的某邻域}U(\xi)\text{内有定义}}^{\text{连续条件的运用}}$，$\overbrace{\text{在}\xi_2\text{处可导}}^{\text{可导条件的运用}}$，$\forall x\in U(\xi_2)$，有$f(x)\ge f(\xi_2)$恒成立，$\therefore f'(\xi_2)=0$；(3)当$m<f(a)=f(b)<M$时，那么必定同时存在(1)、(2)中的$\xi_1$、$\xi_2$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$；

②$M=m$，则有$m=f(a)=f(b)=M=f(x)$，显然，这种情况下，$\forall x\in(a,b)$都有$f'(x)=0$。综合，罗尔定理得证。

定理3(拉格朗日中值定理)：又称微分中值定理

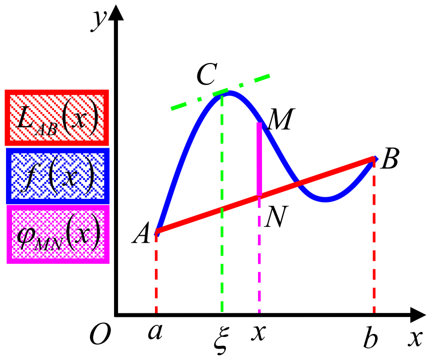
将罗尔定理中条件III$f(a)=f(b)$去掉，即如果函数$f(x)$满足：I.在闭区间$[a,b]$上连续；II.在开区间(a,b)上可导；那么在(a,b)上至少存在一点ξ，使得等式$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$恒成立。

证明这个定理有点难度，先理解拉格朗日中值定理的物理意义。由拉格朗日中值定理的结论可得到$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$，这样就道出了其几何意义：假定函数曲线$f(x)$的$A$、$B$点处，有$f(a)=A$，$f(b)=B$，那么，连续曲线$f(x)$在开区间$(a,b)$上处处可导时，在曲线$AB$上，必定存在一点$C$(其横坐标为$\xi$)，使得点$C$的斜率等于直线$AB$的斜率。

因而，罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形。

拉格朗日中值定理的证明

拉格朗日中值定理的证 明：



证：设直线 AB 的方程为 $L_{AB}(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$，

$\perp x$ 轴的线段 MN 的方程为 $\varphi_{MN}(x)=f(x)-L_{AB}(x)$，

则 $\varphi_{MN}(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$，

根据拉格朗日中值定理 的两个条件，

$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，开区间$(a，b)$上可导知，

函数 $\varphi_{MN}(x)$是$f(x)$与$(r\cdot x+c)$(r、c为常数)的和函数，

容易验证，函数 $(r\cdot x+c)$也满足在闭区间$[a，b]$上连续，

在开区间$(a，b)$上可导的条件，

$\therefore$ 函数 $\varphi_{MN}(x)$满足：I.在闭区间$[a，b]$上连续；

II.在开区间$(a，b)$上可导；

检试知，$\varphi_{MN}(a)=\varphi_{MN}(b)=0$，太妙了！这就是罗尔 定理中的条件 III啊！

III.在端点a、b处的函数值相等，即 $\varphi_{MN}(a)=\varphi_{MN}(b)$；

那么，根据罗尔定理的 结论，在开区间$(a，b)$内，必定存在一点 ξ，使得 $\varphi'_{MN}(\xi)=0$恒成立。

$$\text{而 }\varphi'_{MN}(x)=\frac{d[\varphi_{MN}(x)]}{dx}=\frac{d\left[f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right]}{dx}=\frac{d[f(x)]}{dx}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \varphi'_{MN}(x)==f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}，\text{则 }\varphi'_{MN}(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0，$$

$$\text{从而 }\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}，\text{再 }\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)，$$ 拉格朗日 Aman 。

有限增量定理、拉格朗日中值定理的应用

拉格朗日中值公式的推论：

定理4（有限增量定理）：设x为闭区间$[a，b]$内一点，$x+\Delta x$为该闭区间内的另外一点，则对于拉格朗日中值公式，在以x、$x+\Delta x$为端点的闭区间上，$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\cdot\Delta x$，令$\xi=x+\theta\cdot\Delta x, 0<\theta<1$，则$\xi$位于$x$和$x+\Delta x$之间$\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, 0<\theta<1$，根据函数增量与函数微分的近似关系，在$|\Delta x|$很小的情况下，有$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x$；然而，此处并未限制$|\Delta x|$很小，这就是说，在$|\Delta x|$有限的情况下，有$\Delta y=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, 0<\theta<1$，这就是有限增量定理。有限增量定理表明，在自变量的某个有限增量Δx过程中，有函数的增量Δy确定的表达式$\Delta y=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, 0<\theta<1$，对比总结如下：

$$\left.\begin{matrix}\text{增量定义式}\\ \text{微分近似式}\\ \text{有限增量式}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)\\ |\Delta x|\text{很小时，}dy=f'(x)\cdot\Delta x\text{，}\Delta y\sim dy\\ |\Delta x|\text{有限时，}\Delta y=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, 0<\theta<1\end{matrix}\right.$$

定理5（导数为0定理）：如果函数$f(x)$在区间I上的导数很为0，那么$f(x)$在区间I上是一个常数。

证：（联想拉格朗日中值定理的条件极其中值公式）由题意知，函数$f(x)$在区间I上存在导函数，取开区间$(a，b)\subset I$，那么$f(x)$满足条件II，在开区间$(a，b)$上可导；根据函数可导$\Rightarrow$函数连续，对于闭区间$[a，b]\subset I$，函数$f(x)$连续，这满足条件I，$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，即题设条件给出了拉格朗日中值定理的两个基本条件，我们想办法构造拉格朗日中值公式。

设x_1、x_2为区间I上两不同点，假定$x_1<x_2$，根据拉格朗日中值公式，有$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)$，$x_1<\xi<x_2$，根据题设条件，知$\forall x\in I$，有$f'(x)=0, \therefore f'(\xi)=0\Rightarrow\forall x_1$、$x_2\in I$，有$f(x_1)=f(x_2)$恒成立，即证明函数$f(x)$在区间$I$上是一个常数。

经典例题：证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

证明：设$f(t)=\ln(1+t)$，对于闭区间$[0，x]$，$f(t)$连续，对于开区间$(0，x)$，$f(t)$可导，即$f(t)$在闭区间$[0，x]$上满足拉格朗日中值定理条件，根据拉格朗日中值公式，有$f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot(x-0), 0<\xi<x$，即$\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}, 0<\xi<x$，易得到$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

启示：拉格朗日中值定理的两个条件$\Leftrightarrow$函数$f(x)$在闭区间I上可导，构造证明时，选取函数的零点和导数易计算点。

柯西中值定理(拉格朗日中值定理的拓展)

定理6(柯西中值定理)：如果由参数方程$\begin{cases} x = f(t) \\ y = F(t) \end{cases}$确定的函数$f(t)$、$F(t)$满足：条件I.在闭区间$[a, b]$上连续；II.在开区间$(a, b)$上可导；III.$\forall t \in (a, b)$，$F'(t) \neq 0$；那么，必定存在$\xi \in (a, b)$使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$。

证：由于$F(t)$满足拉格朗日中值定理条件$\Rightarrow F(b)-F(a) = F'(\eta)\cdot(b-a)$，$\because \begin{cases} \forall t \in (a, b),\ F'(t) \neq 0 \\ b-a \neq 0 \end{cases}$，

$\therefore F(b)-F(a) \neq 0$，接下来证明方法完全参照拉格朗日中值定理的证明思路。

我们主要提及：柯西中值定理是拉格朗日中值定理的再一次拓展。

拉格朗日中值定理是函数$y = f(t)$，这可以用参数方程$\begin{cases} t = t \\ y = f(t) \end{cases}$唯一确定，这就是柯西中值定理中，

$F(t) = t$的特殊情形，条件III用于确定直线AB的斜率存在。即：

$$\begin{Bmatrix} L_{AB}(t) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(t-a) \\ \varphi_{MN}(t) = f(t) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} L_{AB}(t) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot[F(t)-F(a)] \\ \varphi_{MN}(t) = f(t) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot[F(t)-F(a)] \end{Bmatrix}$$

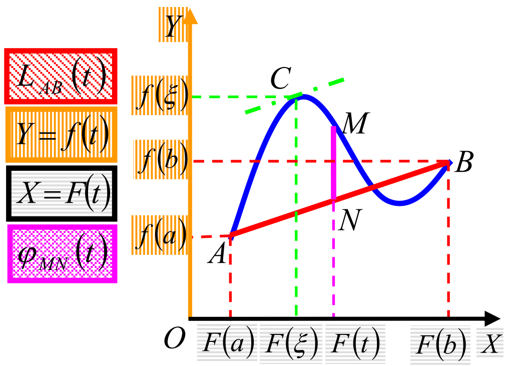
$\varphi'_{MN}(t) = f'(t) - \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(t)$，再根据罗尔定理，在开区间$(a, b)$上必定存在$\xi$，使得$\varphi'_{MN}(\xi) = 0$，

即$f'(t) - \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(t) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(t)}{F'(t)}$。

我们来观察柯西中值定理的结论表达式，等式左边是参数方程$\begin{cases} X = F(t) \\ Y = f(t) \end{cases}$下的斜率，等式右边应该也是斜率，

我们从参数方程$\begin{cases} X = F(t) \\ Y = f(t) \end{cases}$上来理解斜率，$X$、$Y$分别是参变量$t$的函数，此参数方程确定了$Y$与$X$的函数关系，

以X的值为横轴，以Y的值为纵轴，根据第二章第四节参数方程导数求导法知，$\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = \dfrac{f'(t)}{F'(t)}$，妙！



第二节　洛必达法则

柯西中值定理应用于未定式的极限求法，就得到了洛必达法则。

定理1(洛必达法则①)：如果两个函数$f(x)$和$F(x)$满足以下三个条件(缺一不可)：

I.当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时，函数$f(x)$、函数$F(x)$都趋于零(0)，或者都趋于无穷大(∞)；

II.在点x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内，导函数$f'(x)$存在、导函数$F'(x)$存在，并且$F'(x) \neq 0$；

III.极限$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在，或者为$\infty$；

那么，有$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$。

证明：

首先注意洛必达法则的三个苛刻条件，再看洛必达法则的结论：

在一定条件下，商函数的极限 = 分子导函数极限与分母导函数极限的商。

等式左边是两个原函数的商，等式右边是两个导函数的商，立即联想到柯西中值定理：

$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，$a < \xi < b$，$\begin{cases} X = F(t) \\ Y = f(t) \end{cases}$在$t \in$闭区间$I$上可导。

将区间$(a，b)$更换为$(a，t)$，则$\dfrac{f(t)-f(a)}{F(t)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，$a < \xi < t$，$\begin{cases} X = F(t) \\ Y = f(t) \end{cases}$在$t \in$闭区间$I$上可导。

对比洛必达法则结论与柯西中值定理公式，如果$\begin{cases} f(a) = 0 \\ F(a) = 0 \end{cases}$同时满足，

那么有$\dfrac{f(t)}{F(t)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，$a < \xi < t$，$\because a < \xi < t$，$\xi$、$t$同在$a$的右侧，$\therefore$当$t \to a$时，$\xi \to a$，

并且严格而言$t \to a^+$，所以对等式左右两边同取$t \to a$时的极限，必须要确定：

$t \to a^+$的极限与$t \to a^-$的极限是相等的，即$\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f'(t)}{F'(t)}$极限存在，或者等于无穷大；

在上述条件下，我们得到：$\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t)}{F(t)} = \lim\limits_{t \to a} \dfrac{f'(t)}{F'(t)}$。

根据上述分析，令$a = x_0$，自变量t换为自变量x，则有$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(t)}{F(t)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(t)}{F'(t)}$，但是，我们要注意

上述分析中，先假设“如果$\begin{cases} f(a) = 0 \\ F(a) = 0 \end{cases}$同时满足”$\Rightarrow \dfrac{f(t)}{F(t)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，$a < \xi < t$，

也就是“如果$t \to a$时$\begin{cases} f(t) = 0 \\ F(t) = 0 \end{cases}$同时满足”，这就是洛必达法则的条件I；

强调了“要确定$t \to a^+$的极限与$t \to a^-$的极限是相等的”，这就是洛必达法则的条件II；

在柯西中值定理区间$(a，b)$，取其一个子区间a的去心邻域，那么，$f(t)$、$F(t)$在$\mathring{U}(a)$上可导，并额外加上限制条件$F'(t) \neq 0$，这就是洛必达法则的条件II。

定理2（洛必达法则②）：如果函数$f(x)$、函数$F(x)$满足以下三个条件（缺一不可）：

I.当$x\to\infty$时，函数$f(x)$或者$F(x)$都趋于0;

II.当$|x|>N$时，导函数$f'(x)$和$F'(x)$都存在，并且$F'(x)\neq 0$;

III.$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在，或者等于无穷大；

那么，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$。

证明方法类比柯西中值定理以及函数极限的两个定理：$x\to x_0$、$x\to\infty$。

拓展： 将洛必达法则的第一个条件改为，$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，函数$f(x)$、$F(x)$都趋向于无穷大，这个无穷大包括$+\infty$、$-\infty$，提出其符号，保证$\dfrac{f(x)}{F(x)}$为$\dfrac{\infty}{\infty}$型，那么洛必达法则①、②都适用。

证明方法为，将柯西中值定理证明洛必达法则①的假设条件：

如果$\begin{cases}f(a)=0\\F(a)=0\end{cases}$改为$\begin{cases}f(a)=+\infty\\F(a)=+\infty\end{cases}$，即可证明。

洛必达法则可以连续求导进行计算，但是，每次求导前必须确定洛必达法则的三个前提条件都满足。

$$\left[\text{未定式}:\left.\begin{array}{l}\dfrac{0}{0}\text{型}\\\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\end{array}\right\}\Leftarrow\begin{cases}0\cdot\infty\Rightarrow\begin{cases}0\cdot\dfrac{1}{0}=\dfrac{0}{0}\text{型}\\\dfrac{1}{\infty}\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\end{cases}\\\infty\pm\infty\Rightarrow\text{通分合并}\\0^0\Rightarrow\text{设}y=f(x),\ \text{取对数}\ln y\\1^\infty、\infty^0\end{cases}\right]$$

洛必达法则的解题步骤：

①观察函数式，能否先化简（化简时注意极限的过程）

②变换极限过程，使得$x\to 0$，再利用等价替换

③严格审查洛必达法则的三个条件是否满足

第三节 泰勒公式

说明：泰勒公式使用泰勒级数将一个函数进行无穷多项分解，并且是精确等于，而非近似；
这种将函数分解的方法就是无穷级数的思想，提前预示：泰勒级数就是幂级数的特殊情况。

泰勒中值定理

定理1(泰勒中值定理)：如果函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间$(a，b)$内具有直到$(n+1)$阶导数，则对于$\forall x\in(a，b)$，有：

$$f(x)=\frac{1}{0!}\cdot f^{(0)}(x_0)\cdot(x-x_0)^0+\frac{1}{1!}\cdot f^{(1)}(x_0)\cdot(x-x_0)^1+\frac{1}{2!}\cdot f^{(2)}(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}，x_0<\xi<x\text{或者}x_0>\xi>x$$

令$P_n(x)=\frac{1}{0!}\cdot f^{(0)}(x_0)\cdot(x-x_0)^0+\frac{1}{1!}\cdot f^{(1)}(x_0)\cdot(x-x_0)^1+\frac{1}{2!}\cdot f^{(2)}(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n$；

$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}$，则$P_n(x)$称为函数$f(x)$按照$(x-x_0)$的幂展开的$n$阶泰勒公式；$R_n(x)$称为拉格朗日型余项，

$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$称为函数$f(x)$按照$(x-x_0)$的幂展开的带有拉格朗日余项的n阶泰勒公式。

很明显，$n=0$时，$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)\cdot(x-x_0)\Rightarrow f(x)-f(x_0)=f'(\xi)\cdot(x-x_0)$，这就得到拉格朗日中值公式了。

我们对泰勒中值定理做以下分析处理：

易得到：$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}\cdot(x-x_0)^k\right]}^{P_n(x)}+\overbrace{\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}^{R_n(x)}$，如果我们用$P_n(x)$去近似估算$f(x)$的值，那么

这种近似误差就是$|R_n(x)|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}\right|$，$\xi$在$x$与$x_0$之间，我们称$|R_n(x)|$为$n$阶近似误差，对于实际问题来说，

往往需要根据精确度来确定n，也就是：泰勒公式需要展开到“第多少阶”的时候，能够达到精度范围。据此，我们反过来

考虑，对于确定的n值，其n阶近似误差$|R_n(x)|$是有确切的公式的，如果对于给定的n值，$\exists M>0$，使得$\forall x\in(a，b)$，$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$，

那么就有$|R_n(x)|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}\right|\le\left|\frac{1}{(n+1)!}\cdot M\cdot(x-x_0)^{n+1}\right|$，即$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}\cdot\left|(x-x_0)^{n+1}\right|$。

再来看$R_n(x)$的表达式：$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}$，那么易得到$R_n(x_0)=0$，$R_n^{(k)}(x_0)=0$，$k\in Z$且$k\ge0$；

则有$\lim\limits_{x\to x_0}R_n(x)=0$，还有$\lim\limits_{x\to x_0}R_n^{(k)}(x)=0$，考察极限式$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$，这是一个$\frac{0}{0}$型的极限式，观察知道这个极限式满足洛必达法则，

分子分母同时求导n次，每次求导后仍然满足洛必达法则；$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{0}{n!}=0$；或者，利用洛必达法则英勇的步骤，先化简，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\right]=0;$$

$\therefore x\to x_0$时，$R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]$，这个表达式称为佩亚诺型余项，在问题求解精度不高(不需要指明误差)时可使用：

带有佩亚诺型余项的n阶泰勒公式，即$f(x)=P_n(x)+o\left[(x-x_0)^n\right]=\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}\cdot(x-x_0)^k\right]}^{P_n(x)}+o\left[(x-x_0)^n\right]$

再令$x_0=0$，ξ处于0与x之间，令$\xi=\theta\cdot x$分别得到

$$\begin{cases}f(x)\big|_{x_0=0}=P_n(x)\big|_{x_0=0}+R_n(x)\big|_{x_0=0}=\underbrace{\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(0)\cdot x^k\right]}^{P_n(x)}+\overbrace{\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\theta x)\cdot x^{n+1}}^{R_n(x)}}_{\text{带拉格朗日型余项的}n\text{阶麦克劳林公式}},0<\theta<1\\[2ex] f(x)\big|_{x_0=0}=P_n(x)\big|_{x_0=0}+o(x^n)\big|_{x_0=0}=\underbrace{\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(0)\cdot x^k\right]}^{P_n(x)}+o(x^n)}_{\text{带佩亚诺型余项的}n\text{阶麦克劳林公式}}\end{cases}$$

泰勒中值定理速记

①应用条件：函数$f(x)$在某个开区间$(a，b)$上具有$(n+1)$阶导数(前面n阶导数肯定也存在)，

根据函数可导必连续，函数可导$\forall x\in(a，b)$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$的极限也存在。

②核心公式：$f(x)=\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k\right]}^{P_n(x)}+\overbrace{\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}^{R_n(x)}$，$\xi$处于$x$与$x_0$之间，

I.$P_n(x)$叫做n阶泰勒公式，我们也称$P_n(x)$为n阶泰勒级数；

II.$R_n(x)$叫做n阶拉格朗日型余项，为啥$R_n(x)$里面出现了ξ，而不是相应的x_0呢？因为使用了柯西中值定理(特殊情况为拉格朗日中值定理，而拉格朗日的特殊情况又是罗尔定理)，

所以要把导函数里面的x_0换为ξ，参照记忆：$f(x)-f(x_0)=\overbrace{f'(\xi)}^{\text{这里是}\xi}\cdot(x-x_0)$，$\xi$处于$x$与$x_0$之间；

III.核心公式叫做：带n阶拉格朗日余项的n阶泰勒公式，为啥它是核心公式呢？因为它是函数$f(x)$的精确分解，而非近似，其中带有的n阶拉格朗日余项的作用：对于给定的n值，用n阶泰勒公式[即$P_n(x)$]去代替原始函数$f(x)$时，其误差为$|R_n(x)|$，只要确定函数$f(x)$的$(n+1)$阶导数是有界的，即$\forall x\in(a，b)$，$\exists M>0$，使得$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$恒成立；那么，我们就可以给出这种近似替代的精确误差范围；

③引申公式：带佩亚诺型余项的n阶泰勒公式、麦克劳林公式

I.如果问题不要求精确解，或者只需要近似，不需要精确误差范围，那么根据$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$，

得到$R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]$，进而得到：$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\right]+o\left[(x-x_0)^n\right]$；

II.在核心公式中，令$x_0=0$，$\xi=\theta\cdot x,0<\theta<1$，则有：

$$f(x)=\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k\right]}^{P_n(x)}+\overbrace{\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}^{R_n(x)}$$

$\Rightarrow f(x)\big|_{x_0=0}=\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k\right]}^{P_n(x)}+\overbrace{\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}}^{R_n(x)}$，带$n$阶拉格朗日型余项的$n$阶麦克劳林公式:[精确]

$\Rightarrow f(x)\big|_{x_0=0}=\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k\right]}^{P_n(x)}+\overbrace{o(x^n)}^{o\left[(x-x_0)^n\right]}$，带$n$阶佩亚诺型余项的$n$阶麦克劳林公式:[近似]

④总结：泰勒级数是由幂级数的思想引发的，在幂级数的基础上，泰勒级数选择了一个参考点，即x_0，根据这个参考点去求$f(x)$分解出来的函数；麦克劳林更狠，直接把参考点定为0，那么大部分情况下求$f(x)$的分解函数还是很方便的，但是，我们要注意，泰勒公式使用的前提：在含有参考点x_0(或者0)的某个区间上，有$(n+1)$阶导数，所以，我们在使用麦克劳林公式时，一定要先确认函数$f(x)$在$x=0$处的各阶导数都存在(即确认在$x=0$处的可导性)；

对于只需要近似计算，不要求精确误差范围时，把那个拉格朗日余项改为无穷小的表达式，就得到带有n阶佩亚诺余项的n阶泰勒公式和n阶麦克劳林公式了。

泰勒中值定理的经典应用

为叙述方便：

函数$f(x)$展开的带拉格朗日余项的n阶泰勒公式记作：$\mathrm{LT}_n[f(x)]$；函数$f(x)$展开的带佩亚诺余项的n阶泰勒公式记作：$\mathrm{PT}_n[f(x)]$；

函数$f(x)$展开的带拉格朗日余项的n阶麦克劳林公式记作：$\mathrm{LM}_n[f(x)]$；函数$f(x)$展开的带佩亚诺余项的n阶麦克劳林公式记作：$\mathrm{PM}_n[f(x)]$；

题I：$f_1(x)=e^x$，求函数$f_1(x)$的n阶泰勒公式和n阶麦克劳林公式。

解：$f_1(x)=e^x$，在区间$(-\infty,+\infty)$具有$(n+1)$阶导数，且有$f_1^{(k)}(x)=e^x$，则根据$\mathrm{LT}_n[f_1(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\cdot f_1^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k\right]+\frac{f_1^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$，有

$\mathrm{LT}_n[f_1(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{e^{x_0}}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right]+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$在$x$与$x_0$之间；$\mathrm{PT}_n[f_1(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{e^{x_0}}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right]+o[(x-x_0)^n]$；

令$x_0=0$，$\xi=\theta\cdot x, 0<\theta<1$，则$\mathrm{LM}_n[f_1(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\cdot x^k\right]+\frac{e^{\theta\cdot x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$，$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta\cdot x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right|<\frac{e^x}{(n+1)!}\cdot|x^{n+1}|, 0<\theta<1$(误差精度)；

$\mathrm{PM}_n[f_1(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\cdot x^k\right]+o(x^n)$(近似公式)；根据$\mathrm{LM}_n[f_1(x)]$容易近似计算无理数$e$的数值，取$x=1$，则有

$\mathrm{LM}_n[f_1(1)]=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\right)+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$，即$e=\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$，其中$0<\theta<1$，在进行近似计算时，

$e\approx\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，误差精度为$\left|\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\right|<\frac{e^1}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$，从而，给定一个$n$值，就有一个近似值和精确的误差范围值。

题2：$f_2(x)=\sin x, f_3(x)=\cos x$，分别用$n$阶泰勒公式和$n$阶麦克劳林公式展开。

解：$f_2(x)$、$f_3(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$具有$(n+1)$阶导数，且有$f_2^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$、$f_3^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\begin{cases}\mathrm{LT}_n[f_2(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\sin\left(x_0+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right]+\frac{\sin\left[\xi+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\\ \mathrm{LT}_n[f_3(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos\left(x_0+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right]+\frac{\cos\left[\xi+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\end{cases};\begin{cases}\mathrm{PT}_n[f_2(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\sin\left(x_0+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right]+o[(x-x_0)^n]\\ \mathrm{PT}_n[f_3(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos\left(x_0+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right]+o[(x-x_0)^n]\end{cases};$$

$$\begin{cases}\mathrm{LM}_n[f_2(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\cdot x^k\right]+\frac{\sin\left[\theta\cdot x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\\ \mathrm{LM}_n[f_3(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\cdot x^k\right]+\frac{\cos\left[\theta\cdot x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\end{cases};\begin{cases}\mathrm{PM}_n[f_2(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\cdot x^k\right]+o(x^n)\\ \mathrm{PM}_n[f_3(x)]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\cdot x^k\right]+o(x^n)\end{cases};0<\theta<1$$

对于正弦、余弦函数与其导函数组成的函数系，有
$$\begin{cases}\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0，k\text{为偶数}\\1，k\text{为奇数，且}k=4m-3，m\in Z^+\\-1，k\text{为奇数，且}k=4m-1，m\in Z^+\end{cases}\\ \cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0，k\text{为奇数}\\1，k\text{为偶数，且}k=4m-4，m\in Z^+\\-1，k\text{为偶数，且}k=4m-2，m\in Z^+\end{cases}\end{cases}$$
$\Rightarrow$正弦与余弦的优美！

所以，
$$\begin{cases}\sin x=\left(\frac{x^1}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^m\cdot\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\right)+\frac{\overbrace{\sin\left[\theta\cdot x+(2m+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]}^{=(-1)^m\cdot\cos(\theta\cdot x)}}{(2m+1)!}\cdot x^{2m+1}\\ \cos x=\left(\frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\cdot\frac{x^{2m}}{(2m)!}\right)+(-1)^{m+1}\cdot\frac{\cos(\theta\cdot x)}{(2m+2)!}\cdot x^{2m+2}\end{cases}$$

泰勒中值定理的透彻性理解

题III. $f_4(x)=\ln(1+x)$的带拉格朗日的 n阶麦克劳林公式。

$f_4(x)$在区间 $(-1,+\infty)$上具有 $(n+1)$阶导数，且 $f_4^{(0)}(x)=\ln(1+x)$，$f_4^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(1+x)^{-k}$，

则 $f_4^{(0)}(x_0)\big|_{x_0=0}=0, f_4^{(k)}(x_0)\big|_{x_0=0}=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$，

$$\mathrm{LM}[f_4(x)]=0+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot x^k\right]+\frac{(-1)^n\cdot(1+\theta\cdot x)^{-(n+1)}}{n+1}\cdot x^{n+1}, 0<\theta<1;$$

$$\begin{cases}\mathrm{LT}[f_4(x)]=0+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(x-x_0)^k\right]+\frac{(-1)^n\cdot(1+\xi)^{-(n+1)}}{n+1}\cdot(x-x_0)^{n+1}，\xi\text{处于 }x\text{与}x_0\text{之间;}\\ \mathrm{PT}[f_4(x)]=0+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(x-x_0)^k\right]+o\left[(x-x_0)^n\right];\\ \mathrm{LM}[f_4(x)]=0+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot x^k\right]+\frac{(-1)^n\cdot(1+\theta\cdot x)^{-(n+1)}}{n+1}\cdot x^{n+1}, 0<\theta<1;\\ \mathrm{PM}[f_4(x)]=0+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot x^k\right]+o(x^n);\end{cases}$$

$$\mathrm{LM}[f_4(x)]=\left[\frac{x^1}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}\right]+\frac{(-1)^n\cdot(1+\theta\cdot x)^{-(n+1)}}{n+1}\cdot x^{n+1}, 0<\theta<1;$$

$|R_n(x)|=\left|\frac{(-1)^n\cdot(1+\theta\cdot x)^{-(n+1)}}{n+1}\right|=\frac{1}{(n+1)\cdot(1+\theta\cdot x)^{n+1}}$，由 $\left|\frac{1}{(n+1)\cdot(1+\theta\cdot x)^{n+1}}\right|<\frac{1}{n+1}$，得 $|R_n(x)|<\frac{1}{n+1}$。

题IV. $f_5(x)=(1+x)^\alpha$，$\alpha\in R$的带拉格朗日的 n阶麦克劳林公式。

$f_5(x)$的定义域 D与α息息相关，根据幂函数 $y=x^u$在区间 $(0,+\infty)$总有定义的特点，可知 函数$f_5(x)$在区间 $(-1,+\infty)$上总有定义，且具有 $(n+1)$阶导数，且 $f_5^{(0)}(x)=(1+x)^\alpha$，

$f_5^{(k)}(x)=\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-k+1)\cdot(1+x)^{\alpha-k}$，$k\in Z^+$[不能表示为阶乘形式]

$\therefore f_5^{(0)}(x_0)\big|_{x_0=0}=1, f_5^{(k)}(x_0)\big|_{x_0=0}=\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-k+1)$，

$$\mathrm{LM}[f_5(x)]=1+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-k+1)}{k!}\cdot x^k\right]+\frac{[\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-n)]\cdot(1+\theta\cdot x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}, 0<\theta<1;$$

$$\begin{cases}\mathrm{LT}[f_5(x)]=1+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-k+1)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right]+\frac{[\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-n)]\cdot(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1};\\ \mathrm{PT}[f_5(x)]=1+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-k+1)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right]+o\left[(x-x_0)^n\right]\\ \mathrm{LM}[f_5(x)]=1+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-k+1)}{k!}\cdot x^k\right]+\frac{[\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-n)]\cdot(1+\theta\cdot x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}, 0<\theta<1;\\ \mathrm{LP}[f_5(x)]=1+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-k+1)}{k!}\cdot x^k\right]+o(x^n)\end{cases}$$

$$\mathrm{LM}[f_5(x)]=1+\frac{\alpha}{1!}\cdot x^1+\frac{\alpha\bullet(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n+\frac{[\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-n)]\cdot(1+\theta\cdot x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},$$

其精确误差范围 $|R_n(x)|=\left|\frac{[\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-n)]\cdot(1+\theta\cdot x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right|$，

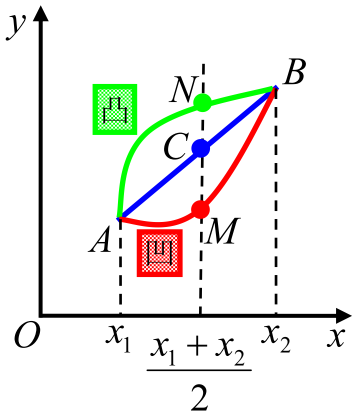
对于给定的 n值，根据 α的值，即判断函数 $(1+x)^{\alpha-(n+1)}$的单调性，

如果单调递增，则 $|R_n(x)|<\left|\frac{[\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-n)]\cdot(1+x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right|$；

如果单调递减，则 $|R_n(x)|<\left|\frac{[\alpha\bullet(\alpha-1)\bullet\cdots\bullet(\alpha-n)]}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right|$；

第四节　函数的单调性与曲线的凹凸性

拐点的求法



定理1(函数单调性的判定法则)：
设函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，在开区间$(a，b)$上可导，
如果$\forall x\in(a，b)$，恒有$f'(x)>0$，那么函数$f(x)$在$[a，b]$上单调递增；
如果$\forall x\in(a，b)$，恒有$f'(x)<0$，那么函数$f(x)$在$[a，b]$上单调递减。

函数曲线的凹凸性的定义：设函数$f(x)$在区间I上连续，$\forall x_1$、$x_2\in I$，$x_1\neq x_2$，
如果恒有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则$f(x)$的曲线形状是凹的；
如果恒有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则$f(x)$的曲线形状是凸的。

定理2(函数凹凸性的判断法则)：设函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，在开区间$(a，b)$上具有二阶导数，那么：
如果$f''(x)>0$，那么$f(x)$的曲线形状在$[a，b]$上是凹的；如果$f''(x)<0$，那么$f(x)$的曲线形状在$[a，b]$上是凸的。

[解析：根据图示，凸函数(曲线)从A到B的切线斜率的绝对值越来越小，即$f'(x)$是单调减函数，所以原函数的二阶导数$f''(x)<0$可以判断函数的曲线形状是凸的；同理，$f''(x)>0$可以判断函数的曲线形状是凹的。]

拐点的定义：一般地，设函数$f(x)$在区间I上连续，x_0是区间I的内点，如果函数$f(x)$的曲线在经过点$(x_0，f(x_0))$时，曲线的凹凸性改变，即点$(x_0，f(x_0))$左凹右凸，或者点$(x_0，f(x_0))$左凸右凹，那么就称$(x_0，f(x_0))$为拐点。

[解析：拐点定义中，没有强求$f(x)$在区间I上具有二阶导数，这意味着，二阶导数的不可导点有可能是拐点。
拐点的寻找步骤：
①根据$f(x)$利用导函数求导法则求出$f''(x)$，根据$f''(x)$的表达式找出其不可导点集合$\{x_i\}$；
②令$f''(x)=0$，求解这个方程，得到方程的单根集合$\{x_j\}$；
③令$\{x_m\}=\{x_i\}\cup\{x_j\}$，即求出二阶导数的不可导点集合与零点集合的并集；
④对于$\{x_m\}$的每一个元素，用求左右极限的方法，判断二阶导数的左极限$f_-^{(2)}(x_m)$、二阶导数的极限$f_+''(x_m)$的符号；
⑤如果$f_-^{(2)}(x_m)$、$f_+''(x_m)$的符号相反，即$f_-^{(2)}(x_m)\bullet f_+''(x_m)<0$，那么，$x_m$是拐点，留下；否则，剔除$x_m$。]

第五节　函数的极值与最值

极值点的求法

极值(极值点)的定义：设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域$U(x_0)$内有定义，如果$\forall x\in U(x_0)$，$f(x)<f(x_0)$恒成立，[或者$f(x)>f(x_0)$恒成立]，那么就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值,[或者一个极小值]，极大值、极小值统称为极值；使函数$f(x)$取得极值的自变量x的点叫做极值点(这个点不是二维坐标点，而是一维点!)

定理1(极值的必要条件：费马引理)：设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取得极值，那么必有$f'(x_0)=0$。

[解析：函数的极值点必定是函数的驻点(一阶导数的零点)，但是，函数的驻点不一定是函数的极值点；函数的不可导点也可能是函数的极值点。]

定理2(极值的第一种充分条件)：设函数$f(x)$在x_0处连续，且在x_0的δ去心邻域$\overset{o}{U}(x_0,\ \delta)$内可导，

I.如果当$x\in(x_0-\delta,\ x_0)$时，$f'(x)>0$，且当$x\in(x_0,\ x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，那么，x_0是极大值点；

II.如果当$x\in(x_0-\delta,\ x_0)$时，$f'(x)<0$，且当$x\in(x_0,\ x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$，那么，x_0是极小值点；

III.如果当$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$时，$f'(x)$的符号保持不变，那么$x_0$不是极值点。

上述充分条件简化如下：如果函数$f(x)$在x_0处连续(连续肯定有定义)，在x_0处可不可导没有关系，只要$f'_-(x_0)$与$f'_+(x_0)$符号相反，那么x_0就是函数$f(x)$的极值点。这与函数的拐点不是异曲同工吗？？？

请看对比分析：

- 拐点的条件：原函数$f(x)$在x_0处连续，其二阶导数$f''(x)$在x_0处可不可导没关系，先找$f''(x)$的不可导点，再找$f''(x)$的零点，汇总这些点，对每一个点判断$f''(x)$在该点处左极限和右极限的符号是否相反，相反的就是拐点；
- 极值点的条件：原函数$f(x)$在x_0处连续，其一阶导数$f'(x)$在x_0处可不可导没关系，先找$f'(x)$的不可导点，再找$f'(x)$的零点，汇总这些点，对每一个点判断$f'(x)$在该点处左极限和右极限的符号是否相反，相反的就是极值点；

定理3(极值的第二种充分条件)：设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数$f''(x_0)$,[记住：可导必连续]，并且满足，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$,[拐点要么存在于不可导点，要么存在于二阶导数的零点处，题设条件排除了拐点]那么，当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值；当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值。

第六节　函数图形的绘制

极值点、拐点综合理解与应用

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	拐点值	↘	极小值	↗

核心：原函数的间断点、一阶导函数的零点与间断点、二阶导函数的零点与间断点。

第七节　曲率

弧微分和曲率公式

弧微分公式：设函数$y=f(x)$在区间$(a，b)$上具有连续导数，则弧微分$ds=\sqrt{1+(y')^2}\cdot dx=\sqrt{1+\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}\cdot dx$；

曲率：设函数$y=f(x)$在区间$(a，b)$上具有连续导数，则曲率$K=\frac{|y''|}{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}=\frac{\left|\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|}{\sqrt{\left(1+\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2\right)^3}}$；

如果光滑曲线由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\theta(t)\end{cases}$确定，那么曲线相应的弧微分和曲率公式为：

$$\begin{cases}ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx=\sqrt{1+\left[\dfrac{\frac{d\theta(t)}{dt}}{\frac{d\varphi(t)}{dt}}\right]^2}\cdot\left[\varphi'(t)\cdot dt\right]\\ K=\dfrac{\left|\dfrac{d\frac{\theta'(t)}{\varphi'(t)}}{\varphi'(t)\cdot dt}\right|}{\sqrt{\left(1+\left[\frac{\theta'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2\right)^3}}=\dfrac{\left|\theta''(t)\cdot\varphi'(t)-\theta'(t)\cdot\varphi''(t)\right|}{\sqrt{\left(\left[\theta'(t)\right]^2+\left[\varphi'(t)\right]^2\right)^3}}\end{cases}$$

；当$\frac{df(x)}{dx}<<1$时，曲率$K=\frac{|y''|}{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}\approx|y''|$

曲率圆、渐屈线和渐伸线

曲率圆 R的应用理解：为了打磨　曲线$f(x)$，R需要与$f(x)$同时接触的点最少，即　R的半径 $\rho_{\max} \le \frac{1}{K_{\max}}$，这是因为，圆的半径越　大，对应点的曲率就越　小。所以，找到曲线　$f(x)$上曲率最大的点，进而确定曲率圆　R最大的半径值。

点M的曲率中心 $($点M所在的曲率圆的圆心　$)$的计算公式：

若已知曲线 C的方程为 $y = f(x)$，且其二阶导数 $f''(x)$在点x处不为 0，点$M(x_0，y_0)$在曲线 C上，其曲率中心 D的坐标为 $(\alpha，\beta)$，则：

根据圆心 $(\alpha，\beta)$及半径 $\rho = \frac{1}{K}$，列写曲率圆 R的方程为：① $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{1}{K^2}$，$K = \dfrac{\left|\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|}{\sqrt{\left(1+\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]^2\right)^3}}$；

所以，$(x-\alpha)^2 + [f(x)-\beta]^2 = \dfrac{\left(1+\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]^2\right)^3}{\left[\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]^2}$，点 M在曲率圆 R上，$\Rightarrow$ ②$(\alpha - x_0)^2 + [\beta - f(x_0)]^2 = \dfrac{\left(1+\left[\dfrac{df(x_0)}{dx_0}\right]^2\right)^3}{\left[\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx_0{}^2}\right]^2}$

方程①、②是同一个圆　在同一个坐标系中的不　同表达式，但是，请注　意这个同一个圆：

方程①中，假定圆心　D的坐标 $(\alpha，\beta)$是参变量，描述的是圆　R上的点的轨迹方程；

方程②中，假定圆上点　M的坐标 $(x_0，y_0)$是参变量，描述的是圆　R的圆心的轨迹方程。

根据切线斜率等联立求　解，得到③ $\begin{cases} \alpha = x_0 - \dfrac{\dfrac{df(x_0)}{dx_0}\cdot\left(1+\left[\dfrac{df(x_0)}{dx_0}\right]^3\right)}{\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx_0^2}} \\ \beta = f(x_0) + \dfrac{1+\left[\dfrac{df(x_0)}{dx_0}\right]^3}{\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx_0^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - \dfrac{\dfrac{df(x)}{dx}\cdot\left(1+\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]^3\right)}{\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}} \\ \beta = f(x) + \dfrac{1+\left[\dfrac{df(x)}{dx_0}\right]^3}{\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}} \end{cases}$

公式③表明，曲线　$y = f(x)$上的每一个点　$(x，f(x))$都对应一个曲率圆圆心　，亦即对应一个曲率圆　，曲率圆圆心的轨迹曲线　叫做曲线 $y = f(x)$的渐屈线；曲线　$y = f(x)$叫做曲率圆圆心轨迹曲　线的渐伸线。

将曲线 $y = f(x)$改成参数方程 $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$，而曲率圆圆心轨迹参　数方程 $\begin{cases} \alpha = t - \dfrac{\dfrac{df(t)}{dt}\cdot\left(1+\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right]^3\right)}{\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}} \\ \beta = f(t) + \dfrac{1+\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right]^3}{\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}} \end{cases}$，

从上面可以看出，　x、y是t的参数方程；　α、β也是 t的参数方程；并且　x、y与α、β只是变量符号的区别，所以坐标系 xOy与$\alpha O\beta$是同一坐标系。

积分学

第四章　不定积分

第一节　不定积分的概念与性质

定义：如果在区间I上，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即$\forall x\in I$，有$dF(x)=f(x)\cdot dx$恒成立，那么$F(x)$称作$f(x)$在区间I上的一个原函数。(这是因为：$F(x)+C$，仍然满足在区间I上，$dF(x)+dC=f(x)\cdot dx$)

定理1(原函数存在定理)：如果函数$f(x)$在区间I上连续，那么在区间I上存在函数$F(x)$，对于$\forall x\in I$，有$dF(x)=f(x)\cdot dx$，即连续函数一定存在原函数。

定义：在区间I上，任意常数项C的原函数$F(x)$称作函数$f(x)$的不定积分，记作：$\int f(x)dx$。其中，记号$\int$称为**积分号**，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)dx$称为**被积表达式**，dx称为**微分算子**，x称为**积分变量**。

定理2(不定积分的线性性质)：如果函数$f_i(x)$的原函数，k_i为非零常数，那么有$\int k_i\cdot f_i(x)dx=k_i\cdot\int f_i(x)dx$，$k_i\neq 0$(否则左边带$C$，右边恒为0)。

定理3(第一类换元法定理)：设$f(u)\overbrace{\text{具有原函数}}^{\text{条件1}}$，$u=\varphi(x)\overbrace{\text{可导}}^{\text{条件2}}$，则$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\cdot dx=\int f(u)\cdot du$。(复杂积分式变为简单积分式，具有方向性)

定理4(第二类换元法定理)：设$\underbrace{\overbrace{x=\psi(t)\text{为单调可导函数}}^{\text{条件1、条件2}}，\text{且}\overbrace{\psi'(t)\neq 0}^{\text{条件3}}}_{\text{即}t=\psi^{-1}(x)\text{存在}}$，$\overbrace{\text{复合函数}f[\psi(t)]}^{\text{条件4}}\overbrace{\text{具有原函数}}^{\text{条件5}}$，则有：

$\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)\cdot dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$(简单积分式变为复杂积分式，具有方向性)

定理3、定理4根据积分式的简易程度提出了两种换元方法，积分式简单不一定好积，积分式复杂不一定不好积。

定理5(分部积分法定理)：设函数$u(x)$、$v(x)$具有连续导数，则$\int u\cdot v'dx=\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du=\int v\cdot u'dx$。

第二节　不定积分经典公式及例题

第五章　定积分

第一节　定积分的基本概念及重要定理

定积分的定义： 设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有界，在闭区间$[a, b]$上任意插入诺干个分割点，形如$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n$，这样就把闭区间$[a, b]$分成了$n$个小区间，形如$[x_0, x_1],[x_1, x_2],\cdots[x_{k-1}, x_k],[x_k, x_{k+1}],\cdots[x_{n-1}, x_n]$，这$n$个小区间的长度依次为$\Delta x_1 = x_1 - x_0$，$\Delta x_2 = x_2 - x_1,\cdots$，$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$，$\Delta x_{k+1} = x_{k+1} - x_k,\cdots$，$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$；在每个小区间$[x_{k-1}, x_k]$上任取一点$\xi_k(x_{k-1} < \xi_k < x_k)$，取其函数值$f(\xi_k)$，$1 \le k \le n$且$k \in Z$，令$S = \sum_{k=1}^{n}[\Delta x_k \cdot f(\xi_k)]$，记$\lambda = \max\{\Delta x_k, 1 \le k \le n$且$k \in Z\}$，如果不论对闭区间$[a, b]$如何划分，并且不论在小区间$[x_{k-1}, x_k]$上如何选取点$\xi_k(x_{k-1} < \xi_k < x_k)$，$\lim_{\lambda \to 0} S = I$总成立，那么称极限$I$为函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上的定积分(简称积分)，记作$\int_a^b f(x)dx$，即有$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}[\Delta x_k \cdot f(\xi_k)]\right) = I$，

其中，a叫做积分下限，b叫做积分上限，$[a, b]$叫做积分区间。

定积分的数学形式定义： 设有常数I，如果对于$\forall \varepsilon > 0$，总$\exists \delta > 0$，使得对于闭区间$[a, b]$的任何分法，不论ξ_k在小区间$[x_{k-1}, x_k]$上怎样选取，令$\lambda = \max\{\Delta x_k, 1 \le k \le n$且$k \in Z\}$，当$\lambda < \delta$时，$\left|\sum_{k=1}^{n}[\Delta x_k \cdot f(\xi_k)] - I\right| < \varepsilon$恒成立，那么就有，$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}[\Delta x_k \cdot f(\xi_k)]\right) = I$。

定理1(函数可积定理的第一充分条件)：如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在闭区间$[a, b]$上可积。

定理2(函数可积定理的第二充分条件)：如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有界，且只有有限个间断点，则函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上可积。

定积分的性质：①线性性质：$\int_a^b k_i \cdot f_i(x)dx = k_i \cdot \int_a^b f_i(x)dx$，$k_i$为任意常数(包括0)；

②面积性质$\left|\int_a^b f_i(x)dx\right| \le \int_a^b |f_i(x)|dx$；

定理3(定积分中值定理)：如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，那么在闭区间$[a, b]$上存在点ξ，使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$，$(a \le \xi \le b)$。

第二节　微积分基本公式

定理1(变上限函数的导数定理)：如果函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，那么积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在闭区间$[a，b]$上可导，并且有$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$。

定理2(原函数存在定理2)：如果函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，那么积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在闭区间$[a，b]$上的一个原函数。

定理3(牛顿－莱布尼茨公式)：如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上的一个原函数，那么有：$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$。

经典例题证明：用微分中值定理和牛顿－莱布尼茨公式证明积分中值定理。

证：积分中值定理中，$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，根据原函数存在定理2知函数$f(x)$的原函数$F(x)$必定存在，这样就满足牛顿－莱布尼茨公式的条件，得到$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(a)-F(b)$，由于$F(x)$在闭区间$[a，b]$上可导，根据可导必定连续得：$F(x)$在闭区间$[a，b]$上连续；在开区间$(a，b)$上可导，这显然满足微分中值定理，即拉格朗日中值定理，所以，有：$F(b)-F(a)=F'(\xi)\cdot(b-a)$，$\xi$处于$b$与$a$之间，则$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(a)-F(b)=F'(\xi)\cdot(b-a)=f(\xi)\cdot(b-a)$，$\xi$处于$b$与$a$之间，这样就证明了积分中值定理。

定理4(定积分的换元法定理)：如果函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$在闭区间$[\alpha，\beta]$上具有连续导数，值域$R_\varphi=[a，b]$，并且$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，那么$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$。(定积分进行换元时一定要注意同步更换对应的积分上限、积分下限)。

第三节　反常积分

反常积分分为两类：一类是积分限为无穷区间；一类是被积函数为无界函数。

第一类无穷积分

定义：如果函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，取参变量$t>a$，如果极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的反常积分，记作：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，则有$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$；

同理，如果函数$f(x)$在区间$(-\infty，b]$上连续，取参变量$t<b$，如果极限$\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty，b]$上的反常积分，记作：$\int_t^b f(x)dx$，则有$\int_t^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$；

如果函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，取参变量$t_1<0$，$t_2>0$，如果极限$\lim\limits_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^0 f(x)dx$存在，极限$\lim\limits_{t_2\to+\infty}\int_0^{t_2} f(x)dx$也存在那么反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$也存在，且有$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^0 f(x)dx+\lim\limits_{t_2\to+\infty}\int_0^{t_2} f(x)dx$；

在上述定义中，反常积分存在也称该反常积分收敛；反常积分不存在(即使为去穷大)，称该反常积分发散。

第二类无穷积分

瑕点的定义：如果函数$f(x)$在点a的任意一个邻域内都无界，那么点a就称为函数$f(x)$的瑕点，也叫做无界间断点。

仿照第一类无穷积分的定义，将无穷区间变为带有瑕点的有限区间，分别得到三种反常积分：

区间$(a，b]$，a为瑕点，得到$\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$；区间$[a，b)$，$b$为瑕点，得到$\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$；

区间$[a，b]$，c为瑕点，且$a<c<b$得到$\lim\limits_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx$和$\lim\limits_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$。

第四节　反常积分的审敛法和Γ函数

反常积分的审敛定理

第一种情况：反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$中，被积函数$f(x)$在所给积分区间$[a,+\infty)$上有界，是有界函数的无限区间积分。

定理1：如果函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geq 0$，函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$x\in[a,+\infty)$上有上界，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛。

定理2(比较审敛原理)：如果函数$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，且$0\leq f(x)\leq g(x)(a\leq x<+\infty)$，并且$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，那么$\int_a^{+\infty} f(x)dx$也收敛,(类逼准则);$0\leq g(x)\leq f(x)(a\leq x<+\infty)$，并且$\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散，那么$\int_a^{+\infty} f(x)dx$也发散,(类似于反夹逼准则)。

定理3(比较审敛法1)：设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续$(a>0)$，且$f(x)\geq 0$，如果存在常数$M>0$以及$p>1$，使得$f(x)\leq \frac{M}{x^p}$，$(a\leq x<+\infty)$，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；如果存在常数$N>0$以及$p=1$使得$f(x)\geq \frac{N}{x^1}$,$(a\leq x<+\infty)$，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

定理4(极限审敛法1)：设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续$(a>0)$，且$f(x)\geq 0$，如果存在常数$p>1$，使得$\overbrace{\text{极限}\lim_{x\to+\infty}\left[x^p\cdot f(x)\right]\text{存在}}^{\text{不包括无穷大}}$，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；如果存在常数$p=1$时，有$\lim_{x\to+\infty} x\cdot f(x)=\overbrace{d>0}^{!\ !\ !}$或者$\lim_{x\to+\infty} x\cdot f(x)=+\infty$，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

定理5(绝对收敛定理1)：如果函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，并且有$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$收敛，那么反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$必定收敛。

(定理5只要求$f(x)$在给定积分区间上是连续函数，没有限定$f(x)\geq 0$，也不要求积分下限$a\geq 0$)

第二种情况：反常积分$\int_a^b f(x)dx$中，被积函数$f(x)$在所给积分区间$(a,\ b]$有瑕点，是无界函数的有限区间积分。

定理6(比较审敛法2)：设函数$f(x)$在区间$(a,\ b]$上连续，且$f(x)\geq 0$,$(a<x\leq b)$，$x=a$为$f(x)$的瑕点，如果存在常数$M>0$及$q<1$使得$f(x)\leq \frac{M}{(x-a)^q}$,$(a<x\leq b)$，那么反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；如果存在常数$N>0$及$q=1$，使得$f(x)\geq \frac{N}{(x-a)^1}$，那么反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

定理7(极限审敛法2)：设函数$f(x)$在区间$(a,\ b]$上连续，且$f(x)\geq 0$,$(a<x\leq b)$，$x=a$为$f(x)$的瑕点，如果存在常数q，q介于0到1之间，即$0<q<1$，使得极限$\lim_{x\to a^+}\left[(x-a)^q\cdot f(x)\right]$存在,(不包括无穷大)，那么反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；如果存在常数$q$，$q=1$，使得极限$\lim_{x\to a^+}\left[(x-a)^1\cdot f(x)\right]=\overbrace{d>0}^{!\ !\ !}$，或者极限为无穷大，那么反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

定理8(绝对收敛定理2)：如果函数$f(x)$在闭区间$(a,\ b]$上连续，$x=a$是瑕点，并且有$\int_a^b |f(x)|dx$收敛，那么反常积分$\int_a^b f(x)dx$必定收敛。

(定理8只要求$f(x)$在给定积分区间上是连续函数，有瑕点$x=a$，没有限定$f(x)\geq 0$，也不要求积分下限$a\geq 0$)

反常积分审敛法总结

反常积分审敛法总结：

定理 1 是反常积分的定义；定理 2 是一个类逼准则，相当于数列极限和函数极限的夹逼准则；

定理 3、定理 4、定理 5 用于有界函数在无限区间上的反常积分计算；

其中，使用最方便的就是**定理 4（极限审敛法 1）**，它对被积函数的要求是在所给积分区间上**连续**，并且函数值为**非负值（$f(x)\geq0$）**，先以 $p=1$ 为切入点，利用 $x^1\times f(x)$求 x 趋于$+\infty$时的**极限 d，如果 $d>0$ 或者 $d=+\infty$**，就有发散的结论，如果 $d=0$、$d<0$、$d=-\infty$，就说明是收敛的。

然而，有时候取 $p=1$ 并不好直接得出该极限的结果，这时候，有两条路，①试试极限式子的等价变形，**尝试洛必达法则（注意三个前提条件）**；②**取 $p>1$ 的数**，消去 x 的幂，但是，千万要注意，取 $p>1$ 后，只能得到收敛的结论，得到发散的结论是不可靠的。定理 5 就是利用函数的有界性"函数 $f(x)$的绝对值有界→函数 $f(x)$有界"；

定理 6、定理 7、定理 8 用于无界函数在有限区间上的反常积分计算，这三个定理分别**完全类比**定理 3、定理 4、定理 5。

其中，使用最方便的顺其自然是定理 7（极限审敛法 2），它对被积函数的要求是在所给积分区间上**有瑕点 $x=a$**，除去瑕点外的其他区间函数**连续**，并且函数值为**非负值（$f(x)\geq0$）**，以 $p=1$ 为切入点，（如果 a 是下限，那么就趋近于 a^+；如果 a 是上限，那么就趋近于 a^-），利用$(x-a)^1\times f(x)$求 x 趋于（a^+或 a^-）时的极限 d，如果 $d>0$ 或者 $d=+\infty$，就有发散的结论，如果 $d=0$、$d<0$、$d=-\infty$，就说明是收敛的。

然而，有时候取 $p=1$ 并不好直接得出该极限的结果，这时候，有两条路，①试试极限式子的等价变形，尝试洛必达法则（注意三个前提条件）；②**取 $0<p<1$ 的数**，消去 x 的幂，但是，千万要注意，取 $p<1$ 后，只能得到收敛的结论，得到发散的结论是不可靠的。定理 8 同样利用函数的有界性"函数 $f(x)$的绝对值有界→函数 $f(x)$有界"；

反常积分审敛法的经典例题

题①：计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$。

解：直接利用牛顿 – 莱布尼茨公式：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot dx=\arctan(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$；

题②：计算反常积分 $\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-p\cdot x}dx$，$p>0$。

解：根据反对幂三指的规则，$\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-p\cdot x}dx=\frac{1}{-p}\cdot\int_0^{+\infty}x\cdot de^{-p\cdot x}=\frac{1}{-p}\cdot\left[\left(x\cdot e^{-p\cdot x}\right)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-p\cdot x}\cdot dx\right]$

$=\frac{1}{-p}\cdot\left[\left(x\cdot e^{-p\cdot x}\right)\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{-p}\cdot e^{-p\cdot x}\Big|_0^{+\infty}\right]=-\frac{1}{p}\cdot\left(x\cdot e^{-p\cdot x}\right)\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{p^2}\cdot e^{-p\cdot x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{p^2}\cdot\left[p\cdot\left(x\cdot e^{-p\cdot x}\right)\Big|_0^{+\infty}+e^{-p\cdot x}\Big|_0^{+\infty}\right]$

$=-\frac{1}{p^2}\cdot\left(p\cdot\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-p\cdot x}\right)-\left(0\cdot e^{-p\cdot 0}\right)\right]+\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-p\cdot x}\right)-e^{-p\cdot 0}\right]\right)$，由于 $p>0$，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-p\cdot x}\right)$属于 $(\infty\cdot 0)$型未定式，

变成 $\frac{0}{0}$型未定式后观察判断，满足洛必达的三个条件，因而使用洛必达法则求解此极限得，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-p\cdot x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{p\cdot x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(e^{p\cdot x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{p\cdot e^{p\cdot x}}=0$，则 $\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-p\cdot x}dx=-\frac{1}{p^2}\cdot\left[p\cdot(0-0)+(0-1)\right]=\frac{1}{p^2}$，

$\therefore$ 记住此反常积分：$\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-p\cdot x}dx=\int_0^{+\infty}t\cdot e^{-p\cdot t}dt=\frac{1}{p^2}$，$\overbrace{\text{前提条件是：}\ p>0}^{!\,!\,!\,!\,!\,!\,!\,!}$。

题③：证明反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx,(a>0)$，当 $p>1$时收敛；当 $p\le 1$时发散。

证：先证特殊值 $p=1$时，$\overbrace{\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^1}dx=\ln x\Big|_a^{+\infty}}^{\text{被积函数的积分区间指明了定义域}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\ln a=+\infty$，$\therefore$ $p=1$反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx,(a>0)$发散；

当$p\ne 1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_a^{+\infty}x^{-p}dx=\frac{x^{1-p}}{\underbrace{1-p}_{p\ne 1}}\Bigg|_a^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}\right)-\frac{a^{1-p}}{1-p}=\begin{cases}p>1\text{时，}\frac{a^{1-p}}{p-1}\text{，是一个确定的正数}\\ p<1\text{时，}+\infty\end{cases}$，

$\therefore$ 反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx,(a>0)$，当 $p>1$时收敛；当 $p\le 1$时发散。

题④：计算反常积分 $\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx,(a>0$，因为积分上限重要大于积分下限，否则在一个点处的积分就 $\ldots)$。

解：$\because$ $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$不存在（因为无意义），$\therefore$ $x=a$是函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$的瑕点，则

$\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a=\lim\limits_{x\to a^-}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)-\arcsin\left(\frac{0}{a}\right)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$，判断瑕点只是为了深化极限的理解。

题⑤：讨论反常积分 $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$、$\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$的收敛性。

解：令 $f(x)=\frac{1}{x^2}$、$g(x)=\frac{1}{x}$，显然有，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$（左极限不存在），$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$（右极限不存在），

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在；$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=-\infty$（左极限不存在），$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=+\infty$（右极限不存在），$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$不存在；即 $x=0$是

$f(x)$、$g(x)$的瑕点，$\therefore$ $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^0x^{-2}dx+\int_0^{+1}x^{-2}dx=\frac{1}{-1}\cdot\left(\frac{1}{x}\Big|_{-1}^0+\frac{1}{x}\Big|_0^1\right)=-\left[\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}-\frac{1}{-1}\right)+\left(\frac{1}{1}-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)\right]$

$=-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}-1-1+\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=-2-\overbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}}^{\text{极限不存在}}+\overbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}^{\text{极限不存在}}$，$\therefore$ 反常积分 $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$发散；

同理，$\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx=\overbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(-x)}^{\text{极限不存在}}+\overbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x}^{\text{极限不存在}}$，$\therefore$ 反常积分 $\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$发散。

题⑥：证明反常积分$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx$，当$0<q<1$时收敛，当$q\geq 1$时发散。

[备注：题⑥与题③极其相似与对称，题③是无穷限的反常积分；题⑥是带瑕点的反常积分。注意对称美！]

证：令$f(x)=\frac{1}{(x-a)^q}$，很明显$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$，则$x=a$是$f(x)$的瑕点，则

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx=\int_a^b (x-a)^{-q}dx=\overbrace{\frac{1}{1-q}}^{q\neq 1}\cdot(x-a)^{1-q}\Big|_a^b=\frac{1}{1-q}\cdot\left[(b-a)^{1-q}-\lim_{x\to a^+}(x-a)^{1-q}\right]=\frac{1}{1-q}\cdot\left[(b-a)^{1-q}-\begin{cases}0, & q<1\\ +\infty, & q>1\end{cases}\right]$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx=\begin{cases}\dfrac{\overbrace{(b-a)^{1-q}}^{\text{有界}}}{1-q}, 0<q<1\text{，收敛；} \\ +\infty\text{，}q>1\text{，发散}\end{cases}$$
在此判断中，根据幂函数$y=x^u$的单调性进行判断，高阶无穷大的概念。

当$q=1$时，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx=\ln(x-a)\Big|_a^b=\ln(b-a)-\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)=\ln(b-a)-\lim\limits_{x\to 0^+}x=\overbrace{\ln(b-a)}^{\text{有界}}-(-\infty)=+\infty$，

$$\therefore \int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx=\begin{cases}\dfrac{\overbrace{(b-a)^{1-q}}^{\text{有界}}}{1-q}, 0<q<1\text{，收敛。} \\ +\infty\text{，}q\geq 1\text{，发散}\end{cases}$$

题⑦：求反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x+1)^3}}\cdot dx$。

解：令$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x+1)^3}}$，由于原反常积分积分区间是$(0,+\infty)$，所以求$0^+$的极限就可以了，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x+1)^3}}=+\infty$，

用牛顿–莱布尼茨公式求解时，由于带有根式，选择合适的换元法可以简化计算，我们来分析分析。

首先，x、$x+1$具有导数等价关系，针对x的换元没有意义；我们再考虑针对$\sqrt{x}$的换元，好像可行，但计算还是不简单；再想想，如果针对$\frac{1}{x}$的换元，这样是不是可以跑到分子上去呢？试一试吧～

令$t=\frac{1}{x}$，由于$x\to 0^+$时，$t\to+\infty$；$x\to+\infty$时，$t\to 0^+$。所以用$t=\frac{1}{x}$换元后对应的积分上下限变为$\int_{+\infty}^{0^+}$，则$x=\frac{1}{t}$，

$$dx=-\frac{1}{t^2}\cdot dt\Rightarrow\int_{+\infty}^{0^+}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{t}+1\right)^3}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\cdot dt\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^3\cdot\left(\frac{1}{t}+1\right)^3}}\cdot dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(1+t)^3}}\cdot dt=\int_0^{+\infty}(1+t)^{-\frac{3}{2}}\cdot dt=\frac{1}{-\frac{1}{2}}\cdot(1+t)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{+\infty}$$

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x+1)^3}}\cdot dx=-2\cdot\left[\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{-\frac{1}{2}}-\lim\limits_{t\to 0^+}(1+t)^{-\frac{1}{2}}\right]=-2\cdot(0-1)=2$，所以，积分难不难，取决于技巧！

题⑧：判定反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\cdot dx$的收敛性。

解：令$f(x)=\sqrt[3]{x^4+1}=\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{3}}$，在积分区间$[a,+\infty)$，$a=1$，上连续，并且有$0<\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{4}{3}}$，

根据题③知，反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\cdot dx$，$a>0$，在$p>1$时收敛，在$0<p\le1$时发散，这就满足反常积分

审敛定理3(也满足定理2)，由于$\int_1^{+\infty}x^{\frac{4}{3}}\cdot dx$在$[1,+\infty)$上收敛，利用类逼准则得到$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\cdot dx$也收敛。

题⑨：判定反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$的收敛性。

解：令$f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$，利用极限审敛法1(即反常积分审敛定理4)，极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1$，所以，反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$收敛。

或者利用极限审敛法1反证，由于$p=1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^p\cdot f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^1\cdot f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，

这正好不满足$d>0$(或者$d=+\infty$)的条件，所以，题求反常积分不发散，不发散$\Leftrightarrow$收敛。

题⑩：判定反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\cdot dx$的收敛性。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{+\infty}{0+1}=+\infty$，所以该反常积分发散。

误区： 本题若取$p=2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^p\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1+0}=+\infty$，那么这就说明题求反常积分不收敛了吗？大错特错了！极限审敛法1(即反常积分审敛法定理4)的应用意义是：

如果你想证明反常积分收敛，那么就$p>1$的任意一个值，只要存在一个值能得到一个存在的极限，那么反常积分就收敛；如果你想证明反常积分发散，那么只能取$p=1$，在该条件下，求得的极限只要是一个非零值$(d>0)$，或者正无穷大$(d=+\infty)$，那么该反常积分积分就发散，反之收敛。

因而，取$p>1$时不能证明发散的结论；取$p=1$时既能证明发散又能证明收敛的结论，这是因为，

所有幂函数中x^1和$\frac{1}{x}$是很特殊的分界函数，其根本原因在于“原数与其倒数的乘积等于1”。

所以，上述提及的极限审敛法1(即反常积分审敛法定理4)告诉我们：

率先取$p=1$进行判断，如果得到发散的结论、或者收敛的结论，最好不过了；

如果取$p=1$时得到的极限不好求，那就取$p>1$消除幂x^u，但此时只能证明收敛的结论。

题XI：判断反常积分$\int_0^{+\infty} e^{-a\cdot x}\cdot\sin(b\cdot x)dx$，$a>0$，的收敛性。

解：利用绝对收敛定理(反常积分审敛法定理5)，令$f(x)=e^{-a\cdot x}\cdot\sin(b\cdot x)\Rightarrow|f(x)|\le\left|e^{-a\cdot x}\right|$，

则$\int_0^{+\infty}\left|e^{-a\cdot x}\cdot\sin(b\cdot x)\right|dx\le\int_0^{+\infty}\left|e^{-a\cdot x}\right|dx=\int_0^{+\infty}e^{-a\cdot x}dx=\frac{1}{-a}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-a\cdot x}-1\right)$，由$a>0$得结果为$\frac{1}{a}$，

$\therefore\int_0^{+\infty}\left|e^{-a\cdot x}\cdot\sin(b\cdot x)\right|dx\le\int_0^{+\infty}\left|e^{-a\cdot x}\right|dx=\int_0^{+\infty}e^{-a\cdot x}dx=\frac{1}{a}$，$a>0$，都收敛。

题XII：反常积分$\int_1^3\frac{1}{\ln x}\cdot dx$的收敛性。

解：$x=1$是被积函数$\frac{1}{\ln x}$的瑕点，利用极限审敛法2(反常积分审敛法定理6)，

先取$q=1$，求极限$\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x-1)^1\cdot\frac{1}{\ln x}\right]=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}$，$\frac{0}{0}$型，$\overset{\text{洛必达}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1>0$，所以发散。

题XIII：反常积分$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-k^2x^2)}}\cdot dx$，$k^2<1$(也称椭圆积分)，的收敛性。

解：$x=1$(具体是$x=1^-$)是被积函数的瑕点，先取$q=1$，$\lim\limits_{x\to1^-}\left[(1-x)^1\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-k^2x^2)}}\right]$，

好像然并卵，因为少一个根号，于是转向去$q=\frac{1}{2}$，(只能证明收敛的结论)，得到

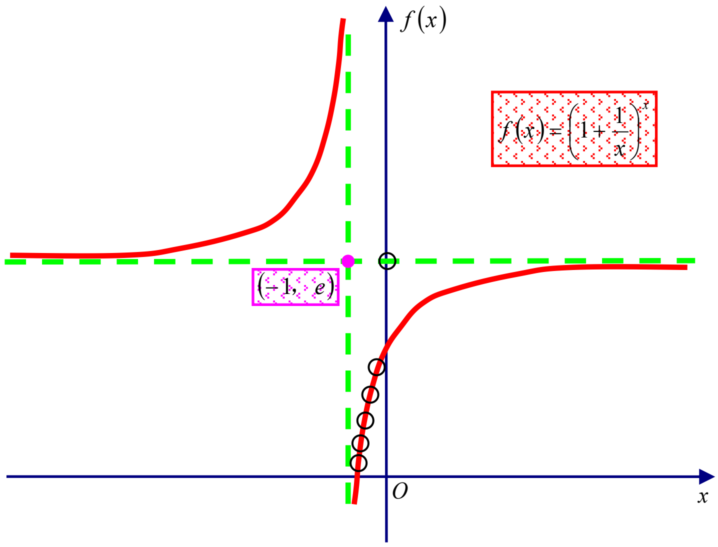
$\lim\limits_{x\to1^-}\left[\sqrt{(1-x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-k^2x^2)}}\right]=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{(1-k^2x^2)}}$，由于$k^2<1$，所以$x\to1^-$时，

$\sqrt{1+x}=\sqrt{2}$，$0<\sqrt{(1-k^2x^2)}<1\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\left[\sqrt{(1-x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-k^2x^2)}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\cdot(1-k^2x^2)}}$，收敛。

题XIV：判断反常积分$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot dx$的收敛性。

解：根据极限审敛法2和绝对收敛定理2，以及类比题XI，即可得到结论：收敛。

神奇的 Gamma 函数——**Γ函数**


$f(x)$
$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
$(-1,\ e)$
O
x