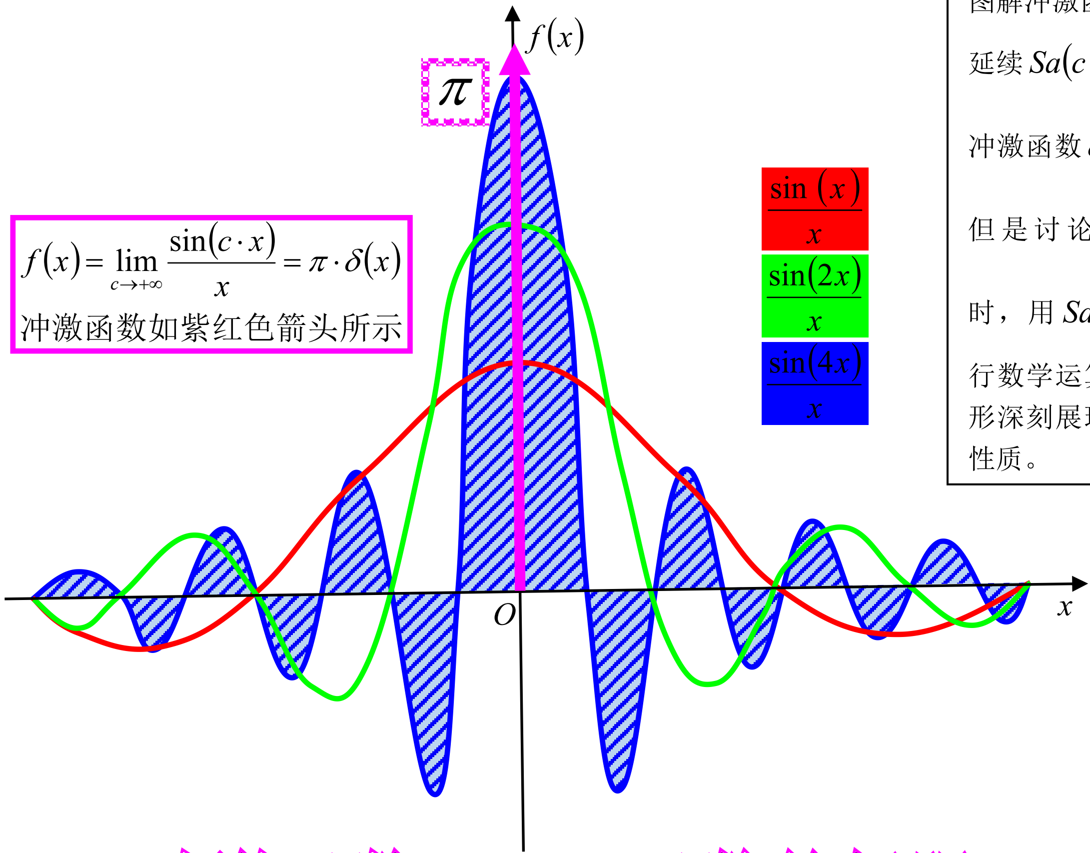
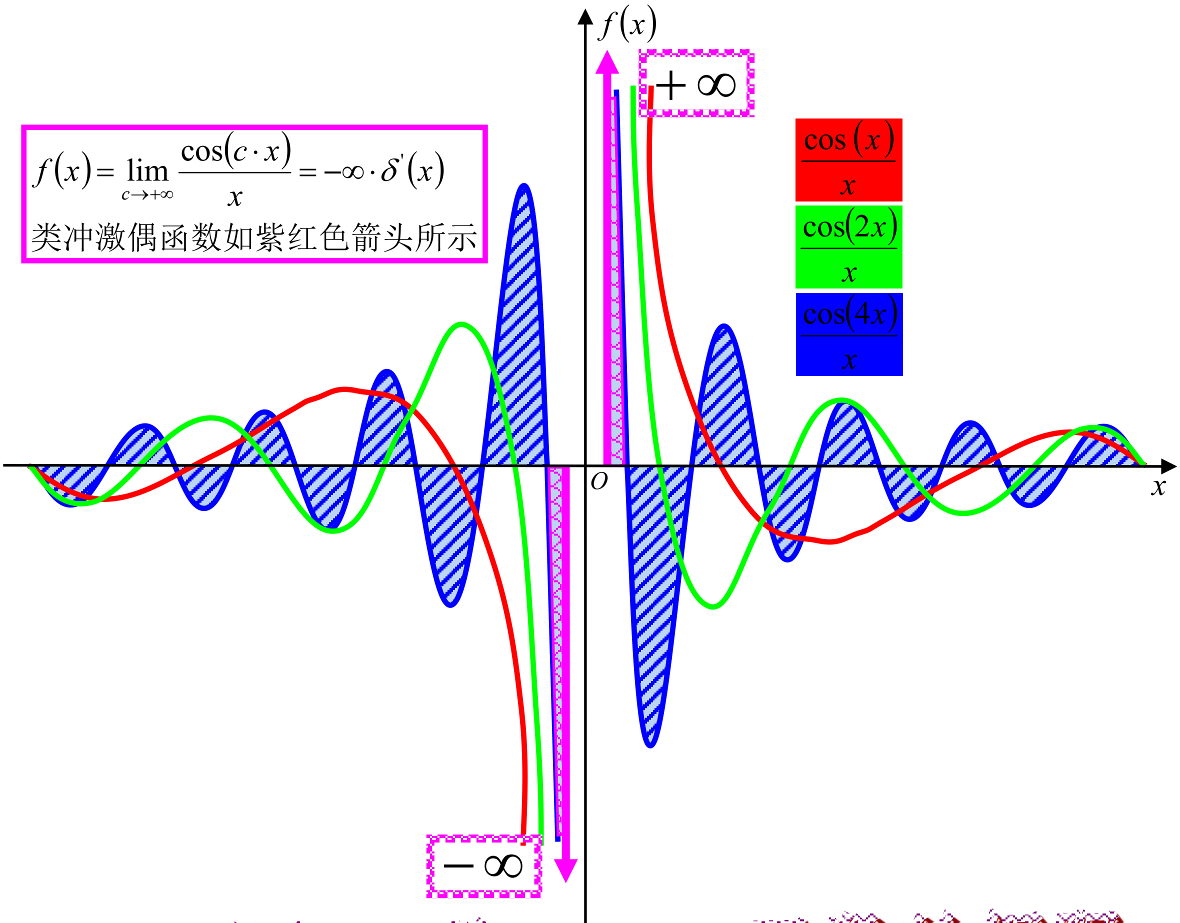
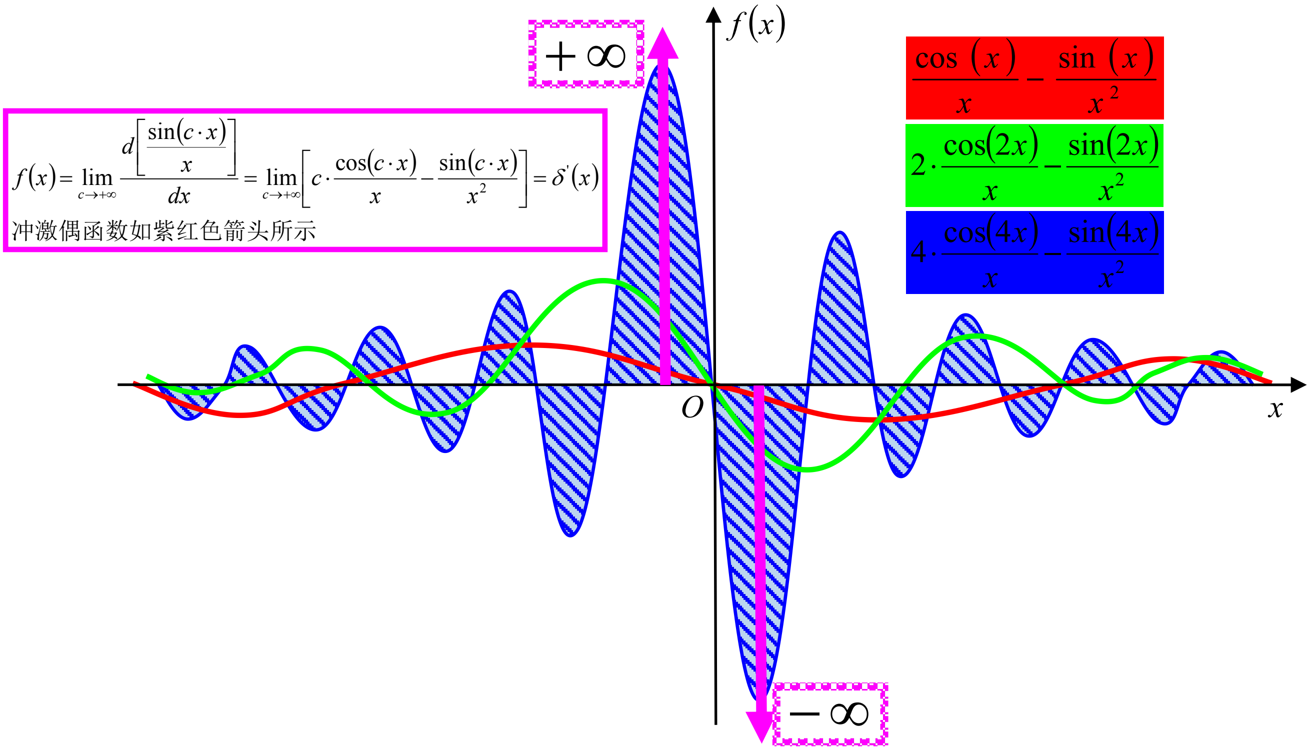
图解冲激函数的思想：延续 $Sa(c\cdot x)$ 图形逼近冲激函数 $\delta(t)$ 的思想，但是讨论 $\delta(t)$ 的性质时，用 $Sa(c\cdot x)$ 代替进行数学运算，且结合图形深刻展现冲激函数的性质。



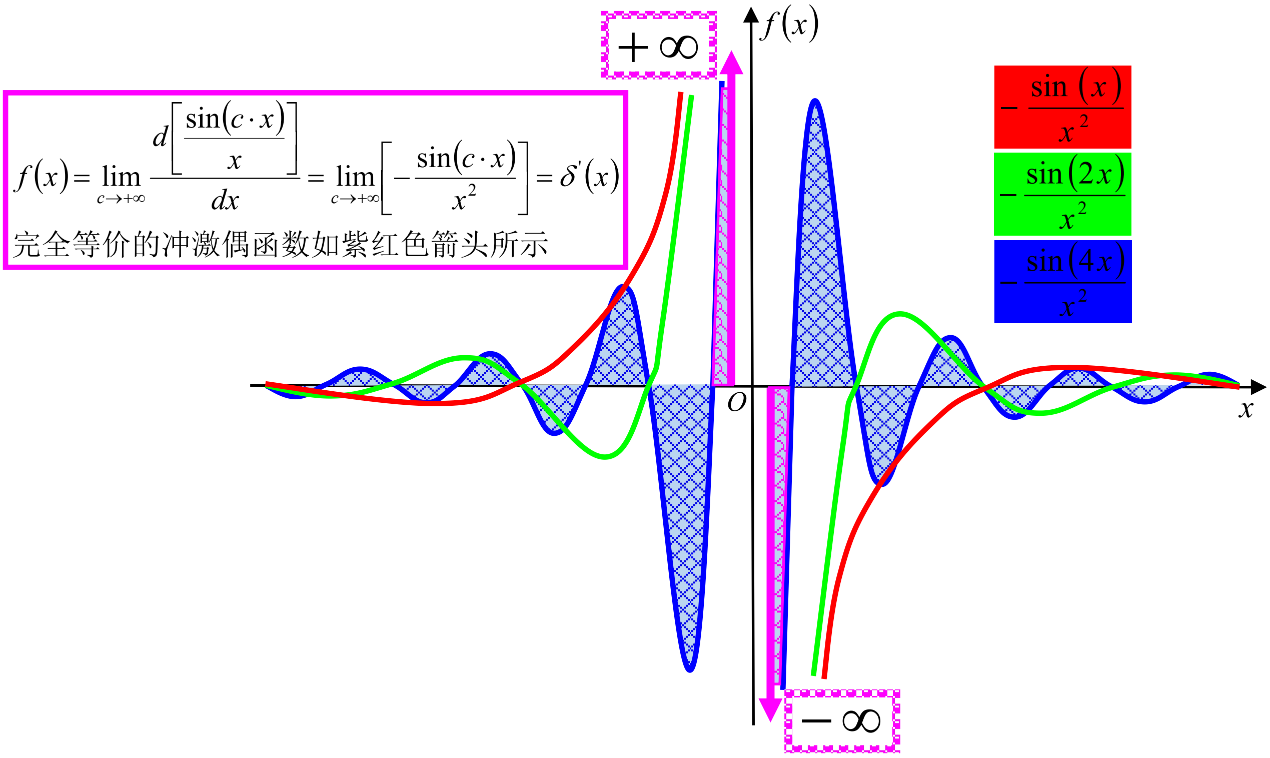
冲激函数[Sa(cx)函数的极限]



类冲激偶函数[Ca(cx)函数的极限]



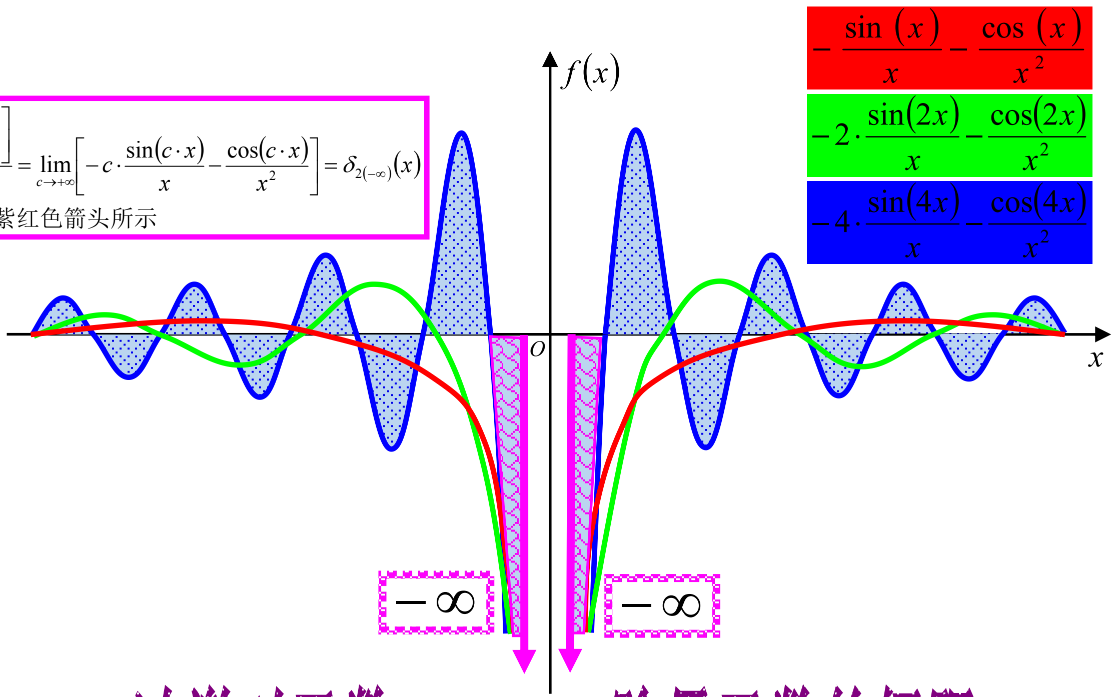
冲激偶函数[Sa(cx)一阶导函数的极限]



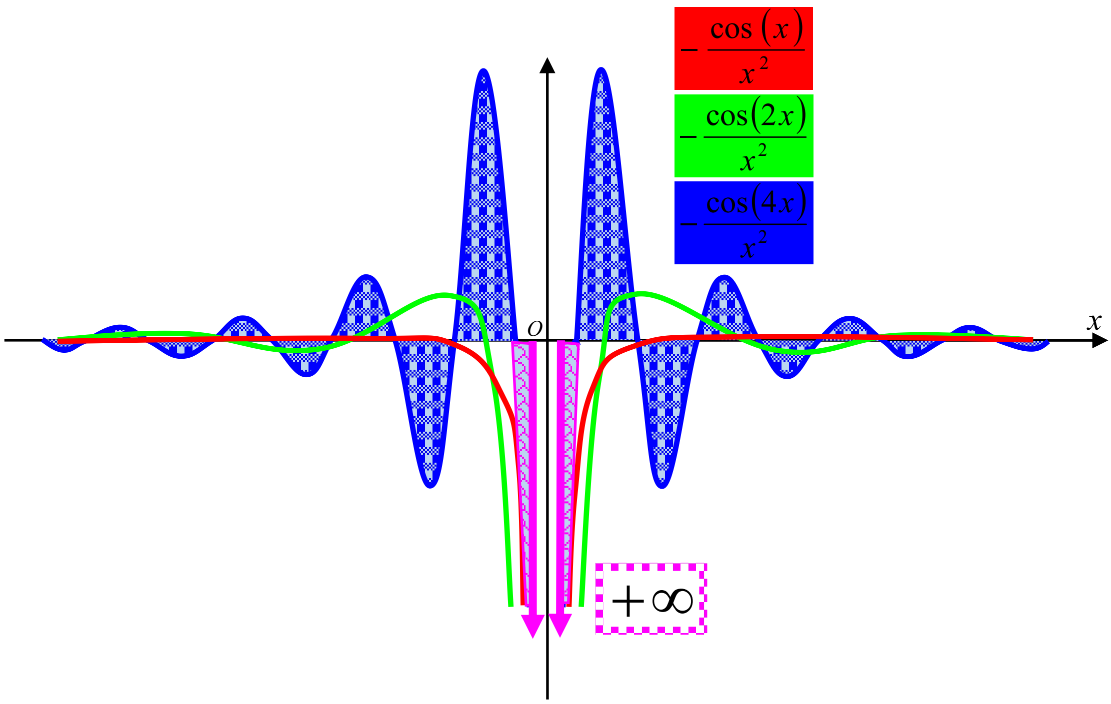
等价冲激偶函数[Sa(cx)一阶导函数的极限]

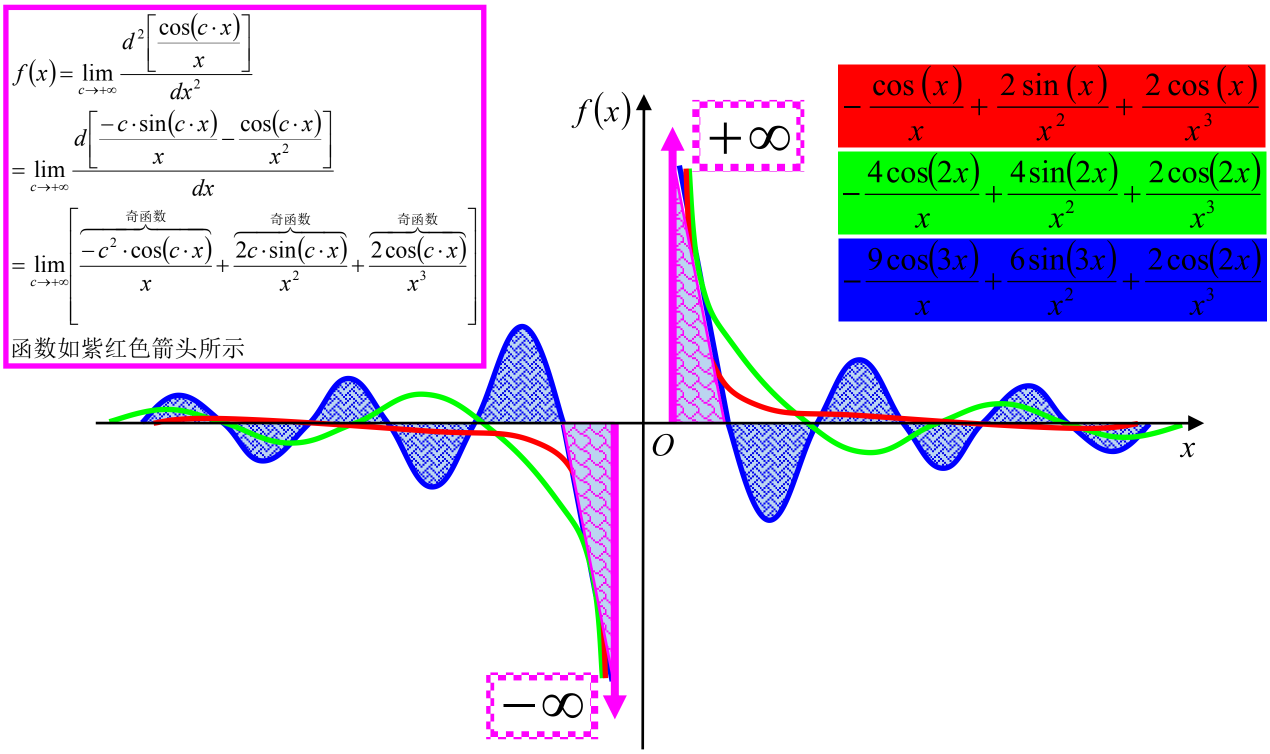
$$f(x)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d\left[\frac{\cos(c\cdot x)}{x}\right]}{dx}=\lim_{c\to+\infty}\left[-c\cdot\frac{\sin(c\cdot x)}{x}-\frac{\cos(c\cdot x)}{x^2}\right]=\delta_{2(-\infty)}(x)$$

负无穷冲激对函数如紫红色箭头所示

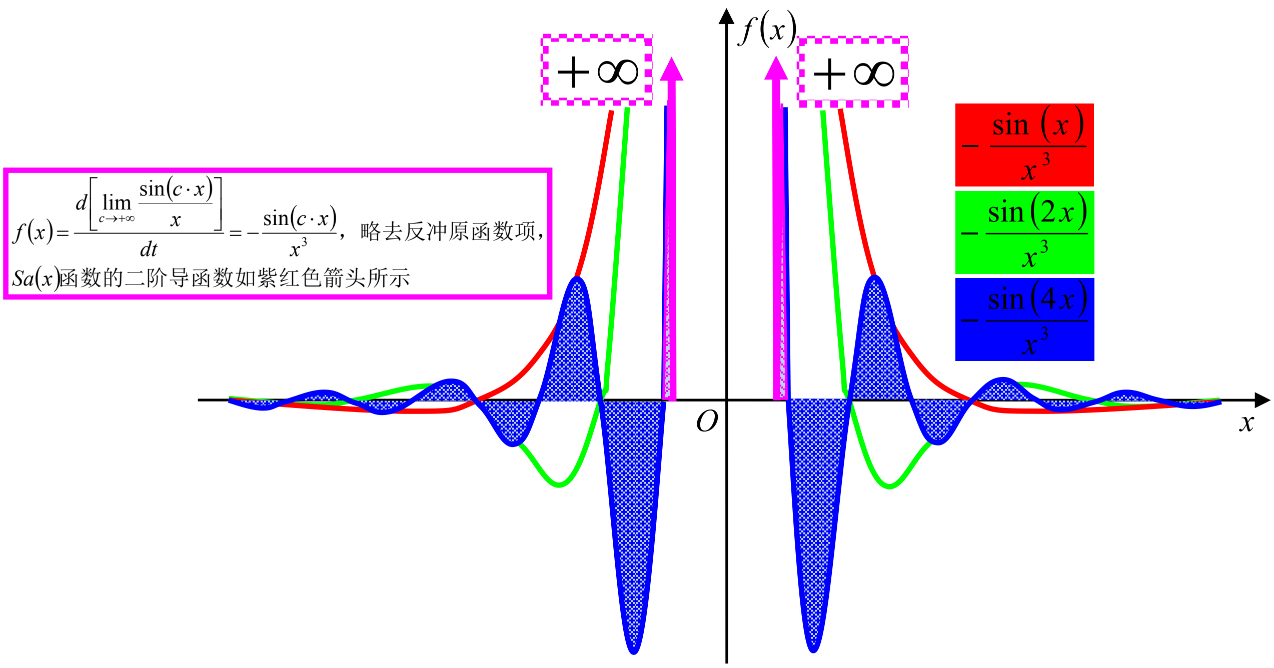


冲激对函数[Ca(cx)一阶导函数的极限]

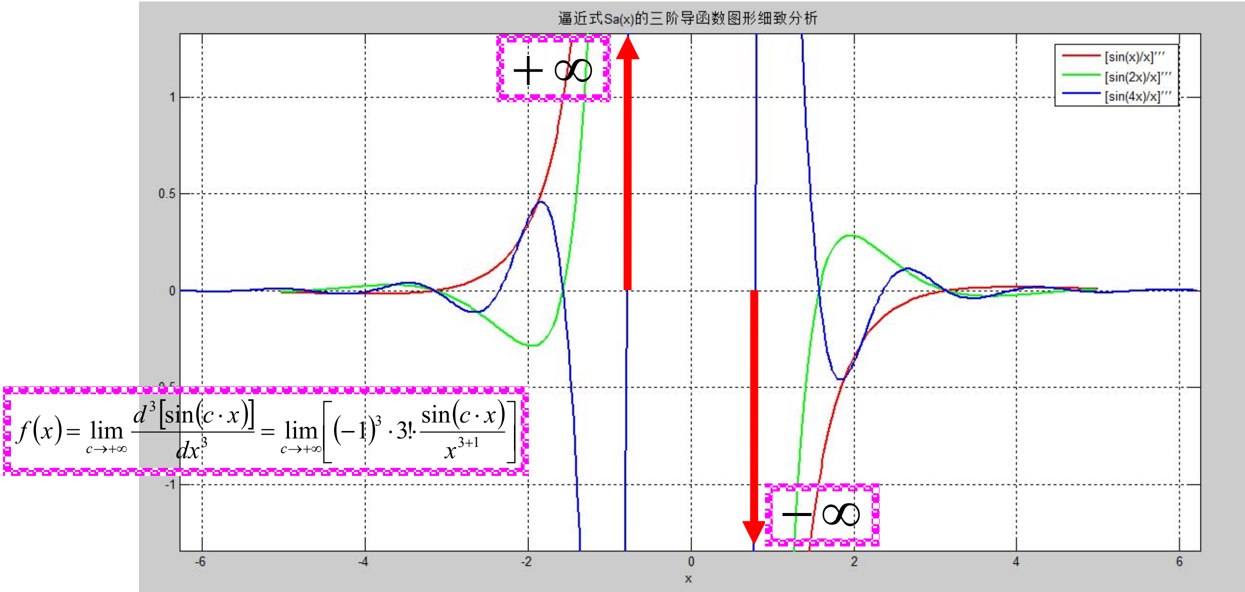


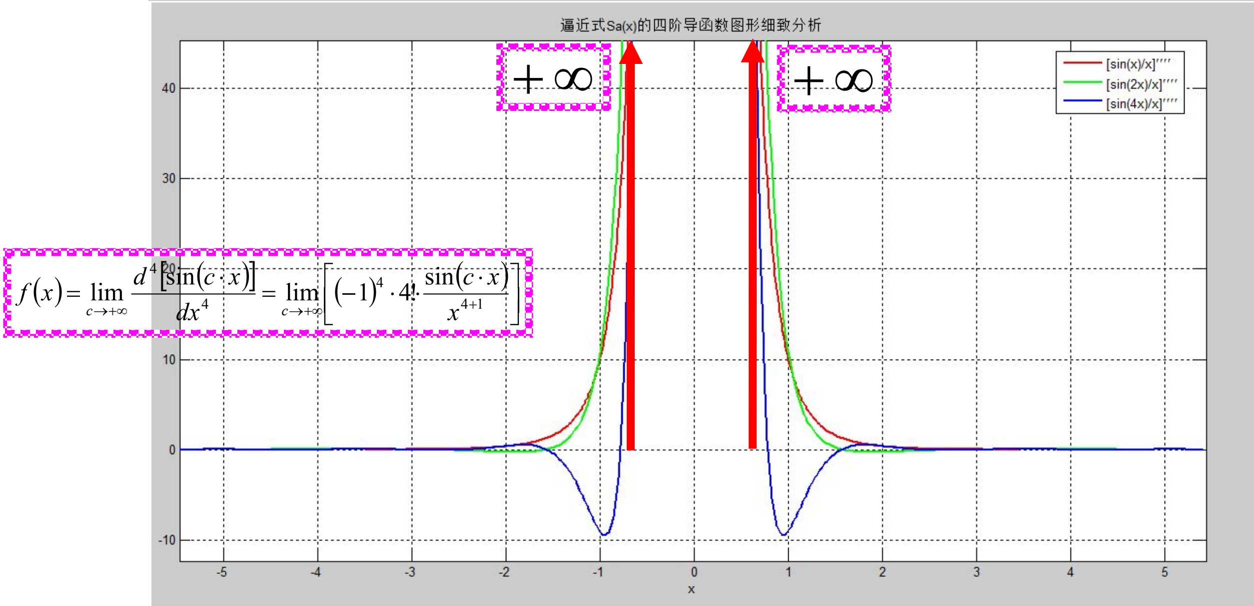


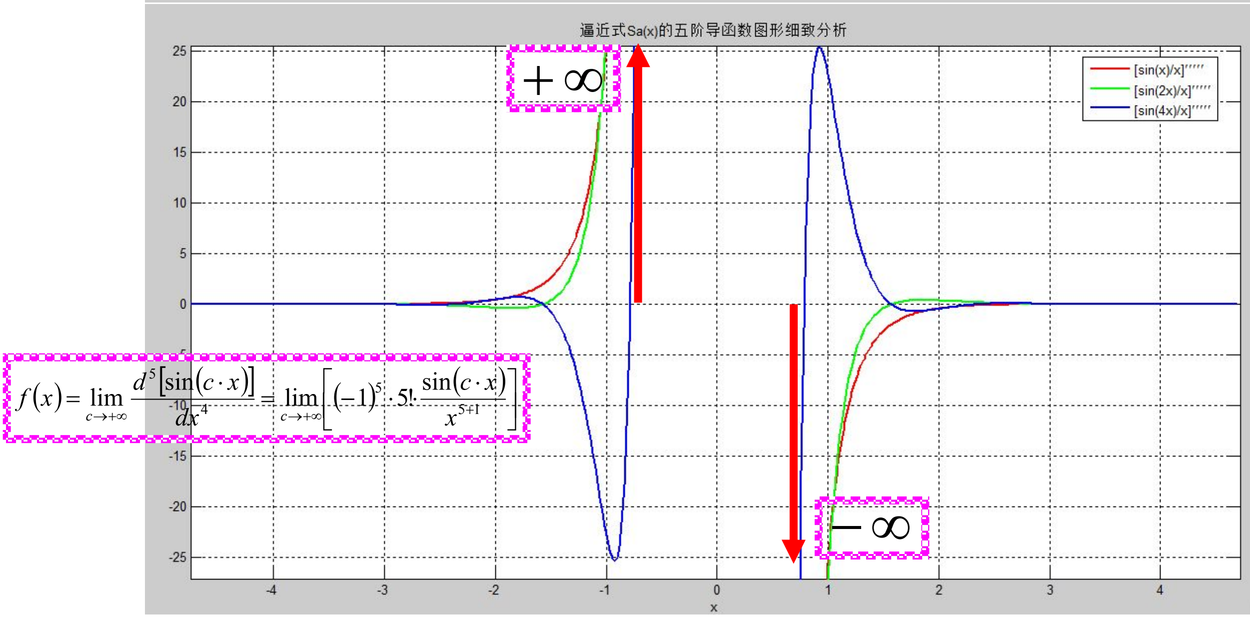
Ca(cx)二阶导函数



Sa(cx)的二阶导函数


逼近式Sa(x)的三阶导函数图形细致分析
[sin(x)/x]'''
[sin(2x)/x]'''
[sin(4x)/x]'''
$+\infty$
$-\infty$
$f(x)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^3[\sin(c\cdot x)]}{dx^3}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^3\cdot 3!\cdot\frac{\sin(c\cdot x)}{x^{3+1}}\right]$
x


逼近式Sa(x)的四阶导函数图形细致分析
[sin(x)/x]''''
[sin(2x)/x]''''
[sin(4x)/x]''''
$+\infty$
$+\infty$
$f(x)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^4[\sin(c\cdot x)]}{dx^4}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^4\cdot 4!\cdot\frac{\sin(c\cdot x)}{x^{4+1}}\right]$
x


逼近式Sa(x)的五阶导函数图形细致分析
[sin(x)/x]'''''
[sin(2x)/x]'''''
[sin(4x)/x]'''''
$+\infty$
$-\infty$
$f(x)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^5[\sin(c\cdot x)]}{dx^4}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^5\cdot 5!\cdot\frac{\sin(c\cdot x)}{x^{5+1}}\right]$
x

图解冲激函数法则

图解法的规则如下：

$$令f(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}，f_{c_n}(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{\cos(c\cdot t)}{t^n}，n\in Z且n\geq 0，则\begin{cases}\delta(t)\Leftrightarrow\dfrac{f(t)}{\pi}\\ \delta(t)\Leftrightarrow\dfrac{\lim\limits_{c\to+\infty}\dfrac{\sin(c\cdot t)}{t}}{\pi}\end{cases}，称f(t)为冲原函数，f_c(t)为反冲原函数，\delta(t)为冲激函数，$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{\pi}dt=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}dt=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{c\to+\infty}\int_{0^-}^{0^+}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}dt=1，$$ 且 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 构成极限镜像关系，极 限镜像关系的具体定义 如下：

定义1：定义对实值函数的数 学运算 M，则 $M[\delta(t)]=M\left[\frac{f(t)}{\pi}\right]$，即冲激函数 $\delta(t)$ 进行 M 运算，与冲原函数 $f(t)$ 进行 M 运算后除以 π 完全等价，

根据极限的定义知，$\delta(t)$ 的强度值，严格等于 $f(t)$ 的函数体与 t 轴围成的面积值(非负值)除以 π。

并且规定，反冲原函数 $f_{c_n}(t)$ 与 t 轴围成的面积值为负值 $\left[如\frac{\cos(c\cdot x)}{x}\right]$ 属于无意义，视为常数0。

根据定义1，得到定理1：

$$f^{(n)}(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^n\left[\frac{\sin(c\cdot t)}{t}\right]}{dt^n}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^{n+1}}\right]=\begin{cases}\pi\cdot\delta(t), & n=0\\(\pm\infty)\cdot\delta(t), & n=正奇数\\2\cdot(+\infty)\cdot\delta(t), & n=正偶数\end{cases}$$

$$f'(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d\left[\frac{\sin(c\cdot t)}{t}\right]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\left[\frac{c\cdot\cos(c\cdot t)}{t}+(-1)\cdot 1!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^2}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[c\cdot f_{c_1}(t)+(-1)\cdot 1!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^2}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[c\cdot 0+(-1)\cdot 1!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^2}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^1\cdot 1!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^2}\right]$$

$$f''(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^2\left[\frac{\sin(c\cdot t)}{t}\right]}{dt^2}=\lim_{c\to+\infty}\frac{d[f'(t)]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\frac{d\left[(-1)\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^2}\right]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)\cdot 1!\cdot c\cdot\frac{\cos(c\cdot t)}{t^2}+(-1)^2\cdot 2!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^3}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^2\cdot 2!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^3}\right]$$

$$f^{(3)}(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^3\left[\frac{\sin(c\cdot t)}{t}\right]}{dt^3}=\frac{d[f''(t)]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^2\cdot 2!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^3}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^2\cdot 2!\cdot c\cdot\frac{\cos(c\cdot t)}{t^3}+(-1)^3\cdot 3!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^4}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^3\cdot 3!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^4}\right]$$

$$f^{(4)}(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^4\left[\frac{\sin(c\cdot t)}{t}\right]}{dt^4}=\frac{d[f^{(3)}(t)]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\frac{d\left[(-1)^3\cdot 3!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^4}\right]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^3\cdot 3!\cdot c\cdot\frac{\cos(c\cdot t)}{t^4}+(-1)^4\cdot 4!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^5}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^4\cdot 4!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^5}\right]$$

$\vdots$

$$f^{(i)}(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^i\left[\frac{\sin(c\cdot t)}{t}\right]}{dt^i}=\frac{d[f^{(i-1)}(t)]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\frac{d\left[(-1)^{i-1}\cdot(i-1)!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^i}\right]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^{i-1}\cdot(i-1)!\cdot c\cdot\frac{\cos(c\cdot t)}{t^i}+(-1)^i\cdot i!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^{i+1}}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^i\cdot i!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^{i+1}}\right]$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{d^n\left[\frac{\sin(c\cdot t)}{t}\right]}{dt^n}=\frac{d[f^{(n-1)}(t)]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\frac{d\left[(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^n}\right]}{dt}=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot c\cdot\frac{\cos(c\cdot t)}{t^n}+(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^{n+1}}\right]=\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^{n+1}}\right]$$

结合 $MATLAB$ 仿真极限逼近趋势图，易知(这是可以用数学严格证 明的)：

$$\delta^{(n)}(t)=\frac{f^{(n)}(t)}{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{c\to+\infty}\frac{d^n\left[\frac{\sin(c\cdot t)}{t}\right]}{dt^n}=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{c\to+\infty}\left[(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{\sin(c\cdot t)}{t^{n+1}}\right]=\frac{1}{\pi}\cdot\left[(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{\pi\delta(t)}{t^n}\right]=(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{\delta(t)}{t^n}=\begin{cases}\delta(t), & n=0\\(\pm\infty)\cdot\delta(t), & n为正奇数\\2\cdot(+\infty)\cdot\delta(t), & n为正偶数\end{cases}$$

图解冲激函数定义及镜像映射法则

冲激函数性质证明

冲激函数的性质证明：

①积分性质：根据$\delta(t)$函数的定义，有$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{\pi}dt=\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0^-}^{0^+}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}dt=1$，同理$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)dt=1$；

②筛选性质:因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot g(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{\pi}\cdot g(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}}{\pi}\cdot g(t)dt$，分拆积分区间，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot g(t)dt=\int_{-\infty}^{0^-}\frac{\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}}{\pi}\cdot g(t)dt+\int_{0^-}^{0^+}\frac{\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}}{\pi}\cdot g(t)dt+\int_{0^+}^{+\infty}\frac{\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}}{\pi}\cdot g(t)dt$$

$\overset{c\to+\infty时}{\Leftrightarrow}\int_{-\infty}^{0^-}\frac{0}{\pi}\cdot g(t)dt+\int_{0^-}^{0^+}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}dt}{\pi}\cdot g(t)dt+\int_{0^+}^{+\infty}\frac{0}{\pi}\cdot g(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\cdot g(t)dt=g(0)$，所以$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot g(t)dt=g(0)$，同理，$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\cdot g(t)dt=g(t_0)$；

③偶函数性质：因为$f(-t)=\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin[c\cdot(-t)]}{-t}=\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin(c\cdot t)}{t}=f(t)$，则$\delta(-t)=\frac{f(-t)}{\pi}=\frac{f(t)}{\pi}=\delta(t)$，

所以有$\delta(-t)=\delta(t)$，$\delta(t)$为偶函数；

④复合函数性质：根据性质①，对于$\delta[g(t)]$，有$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[g(t)]d[g(t)]=1$，即$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin[c\cdot g(t)]}{g(t)}d[g(t)]=1\Rightarrow\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin[c\cdot g(t)]}{g(t)}dt=\frac{1}{|g'(t)|}$

取绝对值是因为积分面积为非负值。令方程$g(t)=0$的k个全体单根为t_i，$i=1,2,\cdots$，k，且$t_1<t_2<\ldots<t_k$分拆积分区间得到，

由于$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{t_i^-}^{t_i^+}\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin[c\cdot g(t_i)]}{g(t_i)}dt=\frac{1}{|g'(t_i)|}$，$1=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{t_i^-}^{t_i^+}\delta(t-t_i)dt$，则$\int_{t_i^-}^{t_i^+}\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin[c\cdot g(t_i)]}{g(t_i)}dt=\frac{\int_{t_i^-}^{t_i^+}\delta(t-t_i)dt}{|g'(t_i)|}$，即$\int_{t_i^-}^{t_i^+}\delta[g(t_i)]dt=\frac{\int_{t_i^-}^{t_i^+}\delta(t-t_i)dt}{|g'(t_i)|}$，又因为

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin[c\cdot g(t)]}{g(t)}d[g(t)]=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{c\to+\infty}\left[\int_{-\infty}^{0}0dt+\sum_{i=1}^{k}\left(\int_{t_i^-}^{t_i^+}\frac{\sin[c\cdot g(t_i)]}{g(t_i)}dt\right)+\int_{t_k^+}^{+\infty}0dt\right]=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{c\to+\infty}\left[\int_{-\infty}^{0}0dt+\sum_{i=1}^{k}\left(\int_{t_i^-}^{t_i^+}\delta(t_i)dt\right)+\int_{t_k^+}^{+\infty}0dt\right]=\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\int_{t_i^-}^{t_i^+}\delta(t-t_i)dt}{|g'(t_i)|}\right)$$

则$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{c\to+\infty}\frac{\sin[c\cdot g(t)]}{g(t)}d[g(t)]=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\int_{t_i^-}^{t_i^+}\delta(t-t_i)dt}{|g'(t_i)|}\right)$，该式表明，由于冲激函数的积分性质是表示其强度的，冲激函数的作用点t_0由$\delta(t-t_0)$决定，

与积分式无关，即复合函数$\delta[g(t)]$可以分解为在t_i处的k个冲激函数，进而得到$\delta[g(t)]=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\delta(t-t_i)}{|g'(t_i)|}\right]$，$t_i$为方程$g(t)=0$的单根，$i=1,2,\cdots$，$k$

⑤根据④即可得到尺度变换性质：在④中，令$g(t)=at+b$，$a\neq0$，则$\delta(at+b)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\delta(t-t_i)}{|g'(t_i)|}$，由$at+b=0$，$a\neq0$得到，$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\cdot\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$；

⑥n阶导数性质：根据定理1，得到$\delta^{(n)}(t)=\begin{cases}\delta(t), & n=0\\(\pm\infty)\cdot\delta(t), & n为正奇数\\2\cdot(+\infty)\cdot\delta(t), & n为正偶数\end{cases}$

冲激函数8条性质及证明

⑦幂函数乘积导数性质：根据定理1中的推导，有$t^n\cdot\delta^{(n)}(t)=t^n\cdot f^{(n)}(t)=t^n\cdot(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{\delta(t)}{t^n}=(-1)^n\cdot n!\cdot\delta(t)$，则$t^n\cdot\delta^{(n)}(t)=(-1)^n\cdot n!\cdot\delta(t)$

⑧复合函数尺度变换性质：$\delta^{(n)}(at+b)=\frac{f^{(n)}(at+b)}{\pi}=\frac{\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{\sin[c\cdot(at+b)]}{(at+b)}\right)^{(n)}}{\pi}$

$$\delta^{(1)}(at+b)=\frac{\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{\sin[c\cdot(at+b)]}{(at+b)}\right)^{(1)}}{\pi}=\frac{\lim_{c\to+\infty}}{\pi}\cdot\frac{(-1)^1\cdot1!\sin[c\cdot(at+b)]\cdot a}{(at+b)^2}；\quad\delta^{(2)}[g(t)]=\frac{\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{\sin[c\cdot g(at+b)]}{(at+b)}\right)^{(2)}}{\pi}=\frac{\lim_{c\to+\infty}}{\pi}\cdot\frac{(-1)^2\cdot2!\sin[c\cdot(at+b)]\cdot a^2}{(at+b)^3};\cdots;$$

$$\delta^{(n)}(at+b)=\frac{\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{\sin[c\cdot(at+b)]}{(at+b)}\right)^{(n)}}{\pi}=\frac{\lim_{c\to+\infty}}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n\cdot2!\sin[c\cdot(at+b)]\cdot a^n}{(at+b)^{n+1}}=a^n\cdot\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot\delta(at+b)}{(at+b)^n}=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot\delta(at+b)}{\left(t+\frac{b}{a}\right)^n},$$

由于$\delta^{(n)}\left(t+\frac{b}{a}\right)=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)}{\left(t+\frac{b}{a}\right)^n}$，即有$\begin{cases}\delta^{(n)}(at+b)=m\cdot\delta(at+b)\\\delta^{(n)}\left(t+\frac{b}{a}\right)=m\cdot\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)\end{cases}$，由性质⑤得$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\cdot\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$

$\Rightarrow\delta^{(n)}(at+b)=\frac{1}{|a|}\cdot\delta^{(n)}\left(t+\frac{b}{a}\right)$，等同于尺度变换性质！