

2 弦轴孔定位技术原理

2.1 弦轴孔定位技术数学建模

根据钢琴码克图纸 UOV 坐标系提供的弦轴孔圆心坐标, 使用码桥钻孔/铲坡/植钉组合机先切换到钻孔模式进行钻孔加工, 再切换到铲坡模式进行铲坡加工, 然后, 将已钻好弦轴孔的码克铁板搬移至弦轴孔木圈压入与钻孔机床(简称机床)上装夹固定, 紧接着, 将码克铁板边缘与机床 XOZ 坐标系尽量对齐后, 即尽可能保证 UOV 坐标系与 XOZ 坐标系完全相同, 使用弦轴孔木圈压入和木圈钻孔组合机进行弦轴孔木圈压入和木圈钻孔加工。但是, 由于码克铁板在机床上的工装误差, 以及机床工件原点设置的误差(这些误差视作微小的旋转平移误差), 机床上弦轴孔圆心坐标值与钢琴码克图纸上标记的坐标值存在一定误差, 这正是弦轴孔定位技术的困难所在。弦轴孔定位技术的简化数学模型如图 2.1、图 2.2 和图 2.3 所示。

如图 2.1 所示在钢琴码克图纸 UOV 坐标系中, 矩形区域 $ABCD$ 内分布着几百个弦轴孔(红色小孔), 这些弦轴孔可分为三类, 三孔 1 组、两孔 1 组和单孔 1 组; 如图 2.2 所示在机床工件坐标系 XOZ 中, 矩形区域 $A'B'C'D'$ 中弦轴孔(绿色小孔)与钢琴图纸 UOV 坐标系下弦轴孔(红色小孔)一一对应, 其中, θ_1 , θ_2 表示了钢琴图纸 UOV 坐标系中弦轴孔与机床工件 XOZ 坐标系弦轴孔所代表的误差, 如图 2.3 所示。

显然, 若弦轴孔木圈压入和木圈钻孔组合机根据矩形区域 $ABCD$ 内弦轴孔圆心坐标进行钻孔加工, 势必导致弦轴孔定位与钻孔失败。由此, 弦轴孔定位技术可转化为数学问题: 能否将矩形区域 $ABCD$ 以某个点为旋转中心, 旋转 $(\theta_1 - \theta_2)$, 分别沿 X 轴、沿 Z 轴平移一定距离, 就得到完全相同的矩形区域 $A'B'C'D'$ 呢?

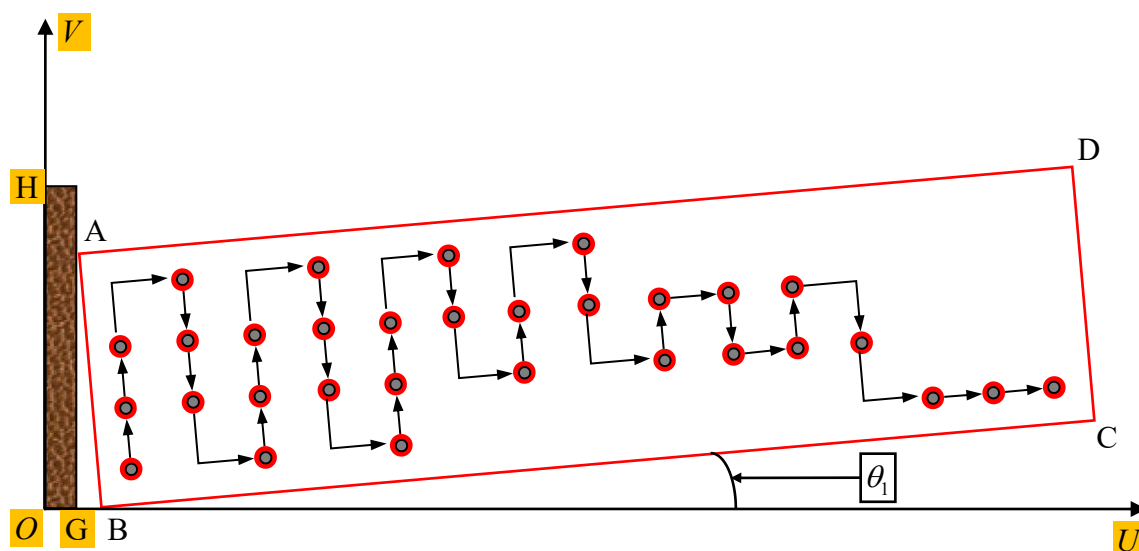


图 2.1 钢琴码克图纸上的弦轴孔理论坐标分布模型

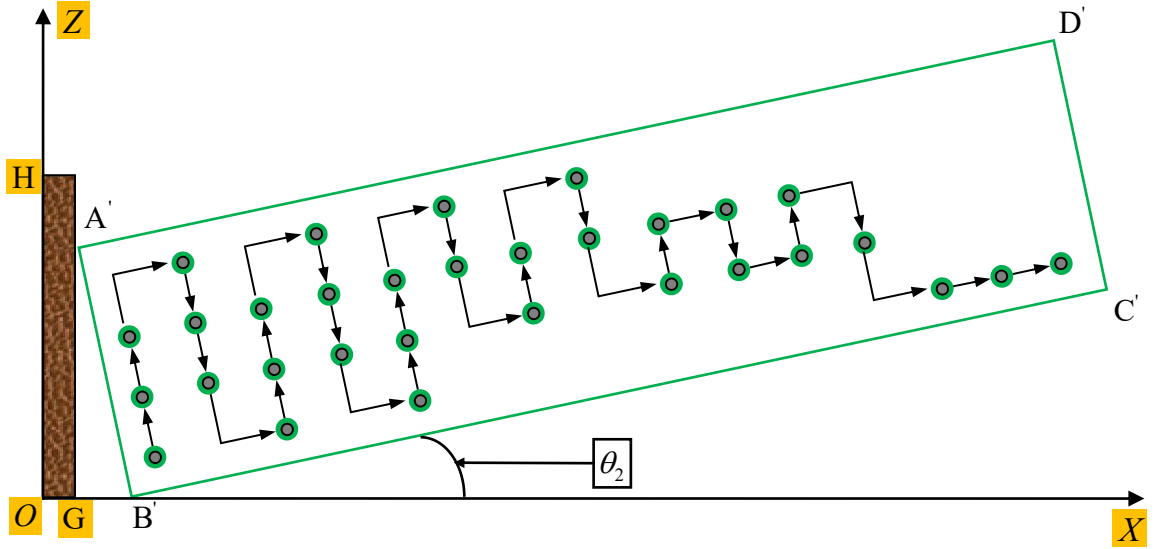


图 2.2 钢琴码克铁板上的弦轴孔实际坐标分布模型

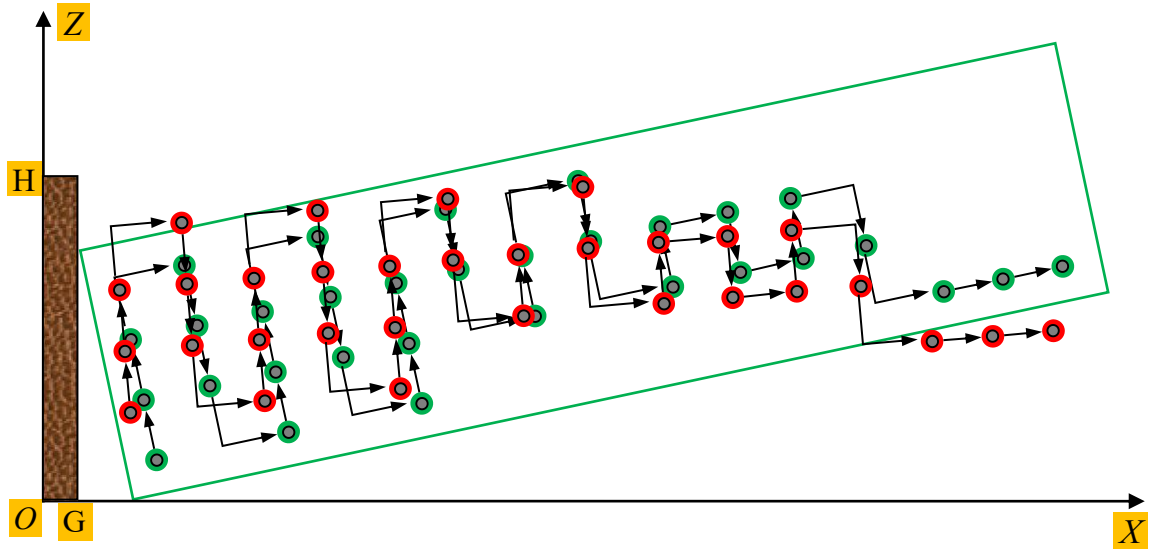


图 2.3 图纸弦轴孔与铁板弦轴孔坐标分布偏差模型

2.2 旋转平移法方案模型

在钢琴图纸 UOV 坐标系矩形区域 $ABCD$ 中选取两个定位基准孔(红色小孔), 记作 S_1 和 S_2 , 其圆心坐标分别为 (u_{S1}, v_{S1}) 和 (u_{S2}, v_{S2}) , 如图 2.4 所示。根据 S_1 和 S_2 , 利用测量工具得到机床工件 XOZ 坐标系矩形区域 $A'B'C'D'$ 中对应定位测量孔(红色小孔)的圆心坐标, 记作 $T_1(x_{T1}, z_{T1})$ 和 $T_2(x_{T2}, z_{T2})$, 如图 2.5 所示。以定位基准孔 S_1 和 S_2 连线的中点为旋转中心, 则有旋转平移变换表达式^[8]:

$$\begin{cases} x_{Ti} = \left(u_{Si} - \frac{u_{S1} + u_{S2}}{2} \right) \cos \alpha - \left(v_{Si} - \frac{v_{S1} + v_{S2}}{2} \right) \sin \alpha + l_x \\ z_{Ti} = \left(u_{Si} - \frac{u_{S1} + u_{S2}}{2} \right) \sin \alpha + \left(v_{Si} - \frac{v_{S1} + v_{S2}}{2} \right) \cos \alpha + l_z \end{cases} \quad (2.1)$$

将 (u_{S1}, v_{S1}) 、 (u_{S2}, v_{S2}) 、 (x_{T1}, z_{T1}) 、 (x_{T2}, z_{T2}) 带入公式 2.1 得:

$$\begin{bmatrix} \left(u_{S1} - \frac{u_{S1} + u_{S2}}{2}\right) & -\left(v_{S1} - \frac{v_{S1} + v_{S2}}{2}\right) & 1 & 0 \\ \left(v_{S1} - \frac{v_{S1} + v_{S2}}{2}\right) & \left(u_{S1} - \frac{u_{S1} + u_{S2}}{2}\right) & 0 & 1 \\ \left(u_{S2} - \frac{u_{S1} + u_{S2}}{2}\right) & -\left(v_{S2} - \frac{v_{S1} + v_{S2}}{2}\right) & 1 & 0 \\ \left(v_{S2} - \frac{v_{S1} + v_{S2}}{2}\right) & \left(u_{S2} - \frac{u_{S1} + u_{S2}}{2}\right) & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ l_x \\ l_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{T1} \\ z_{T1} \\ x_{T2} \\ z_{T2} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

根据公式 2.2 易求得求解旋转平移变换旋转角 α 、 X 轴平移 l_x 和 Z 轴平移 l_z 。然后根据公式 2.1 对矩形区域 ABCD 中所有的弦轴孔圆心坐标(红色小孔)进行旋转平移变换, 得到机床工件坐标中矩形区域 A'B'C'D'内对应的弦轴孔圆心坐标(蓝色小孔), 如图 2.6 所示。理论情况下, 蓝色小孔将与绿色小孔完全重合, 即弦轴孔定位技术可以达到零误差。

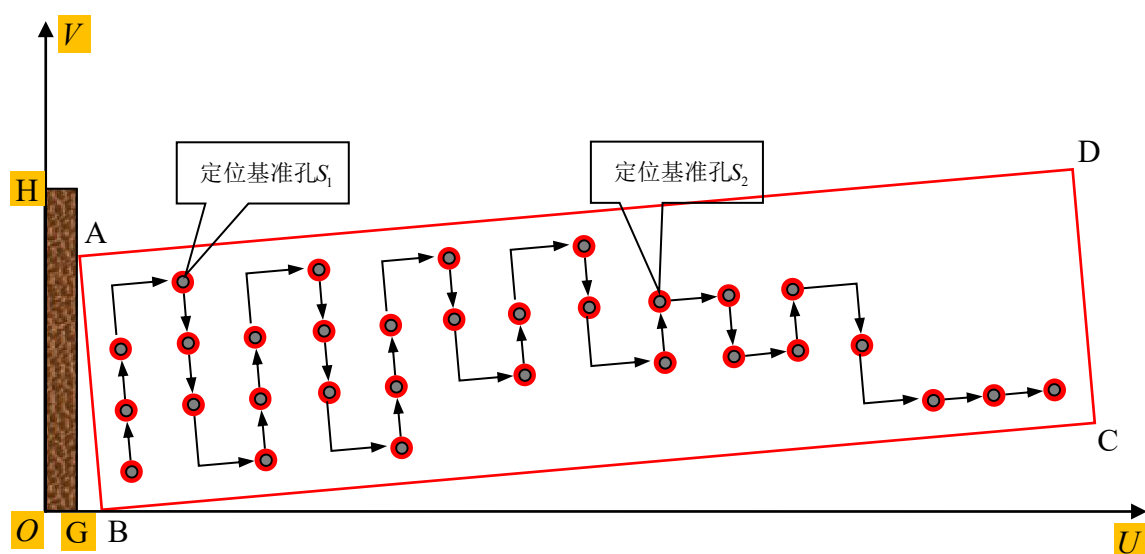


图 2.4 在钢琴码克图纸上选取 2 个定位弦轴孔

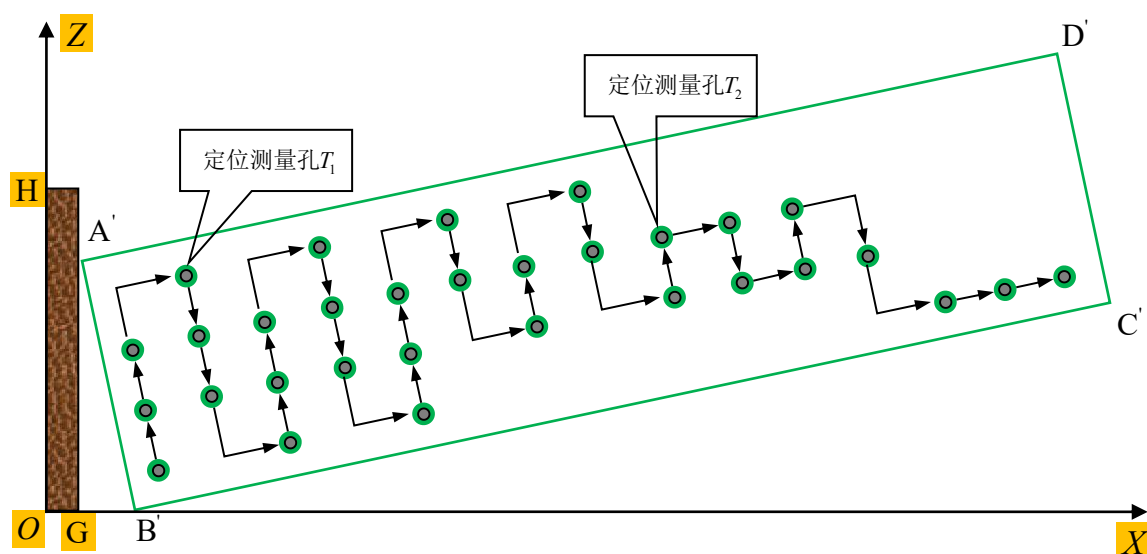


图 2.5 在钢琴码克铁板上选取 2 个测量弦轴孔

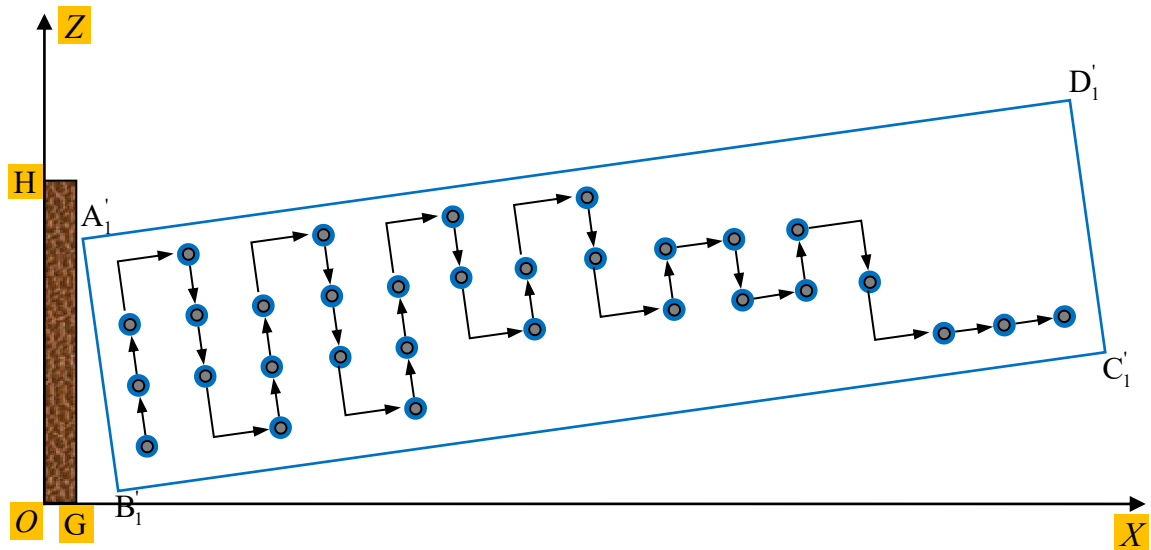


图 2.6 经旋转平移变换得的弦轴孔理论坐标分布模型

旋转平移法方案具体实施步骤如下：

步骤 1：将钢琴码克弦轴孔铁板固定在弦轴孔木圈压入与钻孔机床上。然后设定机床工件 XOZ 坐标系，使得 XOZ 坐标系与钢琴码克图纸 UOV 坐标系尽可能一致；

步骤 2：在钢琴码克图纸上选取距离较远的 2 个弦轴孔作为定位基准孔，记为 S_1 、 S_2 。钢琴码克图纸上这些定位基准孔圆心坐标记为 $S_1(u_{S1}, v_{S1})$ 、 $S_2(u_{S2}, v_{S2})$ ；机床工件 XOZ 坐标系下，对应的定位测量孔及其圆心坐标记为 $T_1(x_{T1}, z_{T1})$ 、 $T_2(x_{T2}, z_{T2})$ ；

步骤 3：根据钢琴码克图纸上定位基准孔圆心坐标值 $S_1(u_{S1}, v_{S1})$ ，令激光或红外线定位检测装置快速移动至定位基准孔圆心 $T_1(x_{T1}, z_{T1})$ 处。令激光或红外线定位检测装置沿 X 轴负方向移动，直至检测到基准孔 $T_1(x_{T1}, y_{T1})$ 的边沿位置，记下当前 X 坐标 x_- ；令定位检测装置沿 X 轴正方向移动，直至检测到基准孔 $T_1(x_{T1}, y_{T1})$ 的另一侧边沿位置，记下当前 X 坐标 x_+ ；然后计算出机床工件坐标系下的定位测量孔 T_1 的圆心 X 坐 $x_{T1}=(x_-+x_+)/2$ 。同理，可以得到机床工件坐标系下定位测量孔 T_1 的 Z 坐标 $z_{T1}=(z_-+z_+)/2$ 。至此，得到了定位基准孔 S_1 对应的定位测量孔圆心坐标位置 $T_1(x_{T1}, z_{T1})$ ；

步骤 4：重复步骤 3，得到机床工件坐标系下的弦轴基准孔 S_2 对应的定位测量孔圆心坐标位置 $T_2(x_{T2}, z_{T2})$ ；

步骤 5：以定位基准孔 $((u_{S1}+u_{S2})/2, (v_{S1}+v_{S2})/2)$ 为旋转中心，根据公式 2.1，构建旋转平移变换关系式：

步骤 6：将 $S_1(u_{S1}, v_{S1})$ 、 $S_2(u_{S2}, v_{S2})$ 、 $T_1(x_{T1}, z_{T1})$ 和 $T_2(x_{T2}, z_{T2})$ 的坐标带入公式 2.2，求解旋转平移变换参数 α 、 X 轴平移 l_x 和 Z 轴平移 l_z ；

步骤 7：将钢琴码克图纸上所有弦轴孔坐标带入公式 2.1，求得机床上对应的弦轴孔圆心坐标的理论值，保存弦轴孔坐标数据至宏变量。

步骤 8：令木圈压入/木圈钻孔组合机根据宏变量提供的弦轴孔圆心坐标，移动到弦轴孔圆心坐标的位置，在木圈压入模式下将弦轴木圈压入弦轴孔，在木圈钻孔模式下对弦轴木圈钻孔。

2.3 旋转平移法方案的缺陷

由于激光或红外线定位检测装置在检测基准孔边沿位置坐标时存在一定的误差，前道工序进行码克铁板弦轴孔钻孔加工时，弦轴孔边沿也会存在一定误差。这些误差可能导致弦轴基准孔圆心坐标定位存在一定的偏差。从而，根据两个存在一定偏差的基准孔圆心坐标导出的旋转平移变换表达式，有可能导致计算出的机床工件 XOZ 坐标系上弦轴孔理论圆心坐标位置(蓝色小孔)与弦轴孔实际圆心坐标位置(绿色小孔)存在偏差。这一偏差可能导致弦轴孔木圈压入位置偏心，以及弦轴孔木圈中心钻孔位置偏心，导致弦轴孔定位技术失败。

如图 2.7 所示，图 2.7(a)是钢琴码克上的弦轴孔，图 2.7(b)是弦轴孔木圈，图 2.7(c)弦轴孔木圈压入弦轴孔，图 2.7(d)是合格的弦轴孔，图 2.7(e)是不合格的弦轴孔。实际生产加工测试结果表明，利

用旋转平移法进行弦轴孔定位与钻孔，会产生大量且不稳定的如图 2.7(e)所示的不合格弦轴孔。即利用旋转平移法变换得到的蓝色小孔与机床工件 XOZ 坐标系下绿色小孔会出现大范围的偏差，如图 2.8 所示。因此，旋转平移法的缺陷在于不能克服测量仪器的误差。

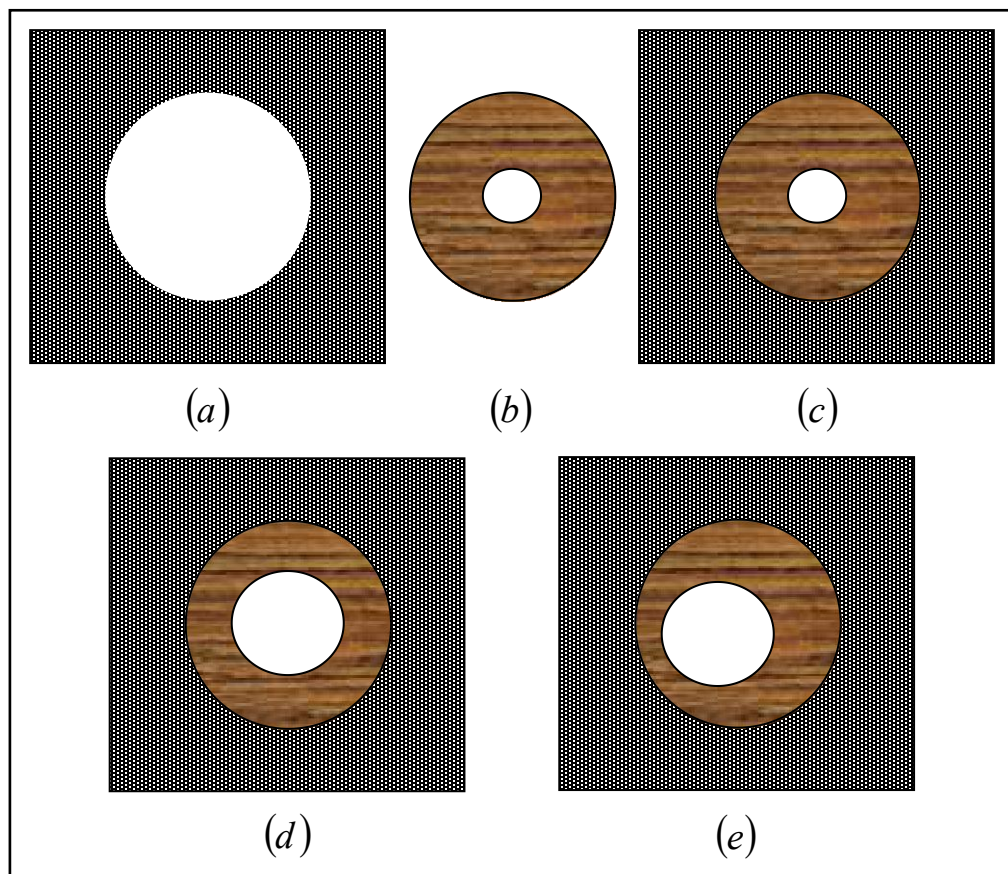


图 2.7 钢琴码克弦轴孔、木圈及木圈钻孔
(a) 码克铁板上的弦轴孔；(b) 弦轴孔木圈；(c) 木圈压入弦轴孔；
(d) 对准弦轴孔圆心位置钻孔；(e) 未对准弦轴孔圆心钻孔。

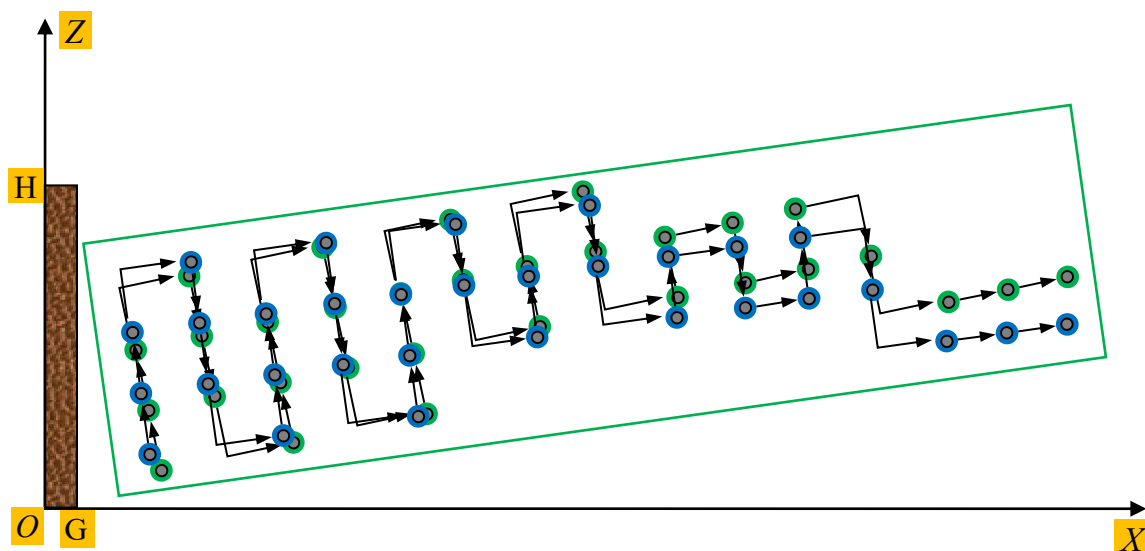


图 2.8 旋转平移变换弦轴孔与铁板弦轴孔坐标分布偏差模型

2.4 最小二乘法方案模型

最小二乘法具有整体偏差最小的性质^[9]。在钢琴图纸 UOV 坐标系矩形区域 $ABCD$ 中选取 7(即 $m=7$)个定位基准孔(红色小孔)，记作 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 、 S_5 、 S_6 和 S_7 ，其圆心坐标分别为 (u_{S1}, v_{S1}) 、 $(u_{S2},$

v_{S2})、 (u_{S3}, v_{S3}) 、 (u_{S4}, v_{S4}) 、 (u_{S5}, v_{S5}) 、 (u_{S6}, v_{S6}) 和 (u_{S7}, v_{S7}) ，如图 2.9 所示。根据 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 、 S_5 、 S_6 和 S_7 ，利用测量工具得到机床工件 XOZ 坐标系矩形区域 $A'B'C'D'$ 中对应定位测量孔(红色小孔)的圆心坐标，记作 $T_1(x_{T1}, z_{T1})$ 、 $T_2(x_{T2}, z_{T2})$ 、 $T_3(x_{T3}, z_{T3})$ 、 $T_4(x_{T4}, z_{T4})$ 、 $T_5(x_{T5}, z_{T5})$ 、 $T_6(x_{T6}, z_{T6})$ 和 $T_7(x_{T7}, z_{T7})$ ，如图 2.10 所示。

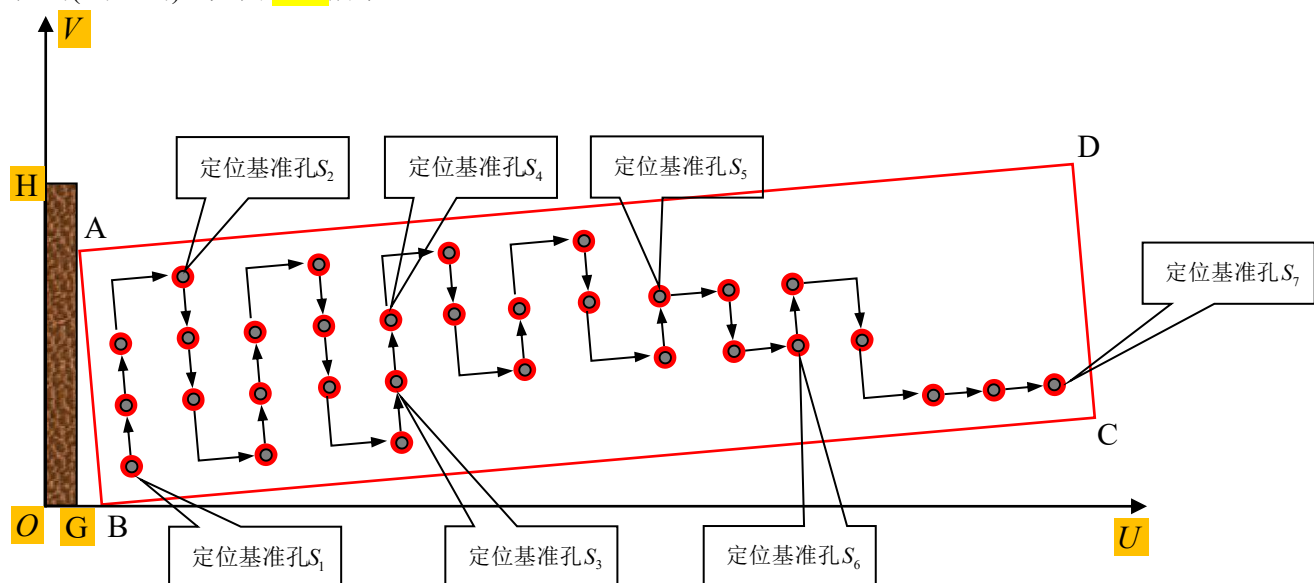


图 2.9 在钢琴码克图纸上选取 7 个定位弦轴孔

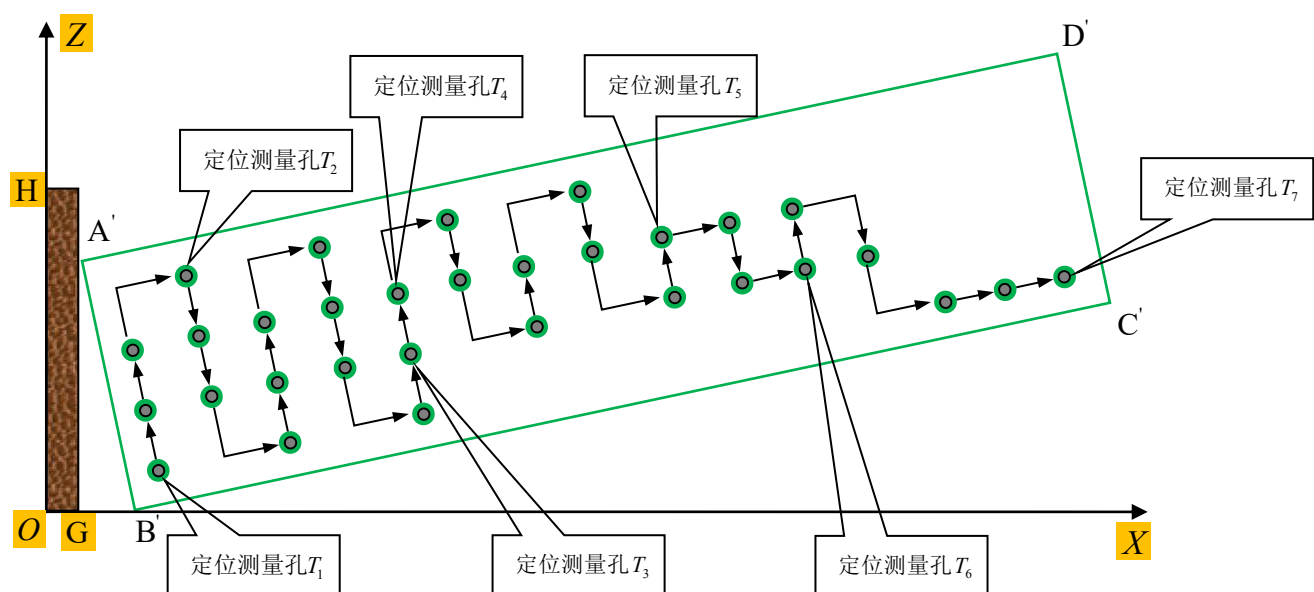


图 2.10 在钢琴码克铁板上选取 7 个测量弦轴孔

则有最小二乘法变换表达式：

$$\begin{cases} p_{Ti} = au_{Si} + bv_{Si} + c \\ q_{Ti} = du_{Si} + ev_{Si} + f \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1, n) \quad (2.3)$$

在公式 2.3 中 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 为待定参数， p_{Ti} 、 q_{Ti} 为红色小孔最小二乘变换后得到的弦轴孔的 X 坐标和 Y 坐标。写成矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix} u_{Si} & v_{Si} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{Si} & v_{Si} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{Ti} \\ q_{Ti} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\dots, n-1, n) \quad (2.4)$$

考虑定位测量孔的圆心坐标参杂了测量仪器的固有误差，以及最小二乘法具有的整体最优性质，引入最小二乘法的误差平方和公式：

$$MSE = \sum_{i=1}^m [(p_{Ti} - x_{Ti})^2 + (q_{Ti} - y_{Ti})^2] \quad (i=1,2,\dots, m-1, m=7) \quad (2.5)$$

文献[10~11]介绍了最优判据的内容。利用公式 2.3、公式 2.5，由 MSE 分别对变换系数 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 求偏导数并令偏导数为零得到下列方程组：

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^m u_{Si}^2 + b \sum_{i=1}^m u_{Si} v_{Si} + c \sum_{i=1}^m u_{Si} = \sum_{i=1}^m u_{Si} x_{Ti} \\ a \sum_{i=1}^m u_{Si} v_{Si} + b \sum_{i=1}^m v_{Si}^2 + c \sum_{i=1}^m v_{Si} = \sum_{i=1}^m v_{Si} x_{Ti} \\ a \sum_{i=1}^m u_{Si} + b \sum_{i=1}^m v_{Si} + nc = \sum_{i=1}^m x_{Ti} \\ d \sum_{i=1}^m u_{Si}^2 + e \sum_{i=1}^m u_{Si} v_{Si} + f \sum_{i=1}^m u_{Si} = \sum_{i=1}^m u_{Si} y_{Ti} \\ d \sum_{i=1}^m u_{Si} v_{Si} + e \sum_{i=1}^m v_{Si}^2 + f \sum_{i=1}^m v_{Si} = \sum_{i=1}^m v_{Si} y_{Ti} \\ d \sum_{i=1}^m u_{Si} + e \sum_{i=1}^m v_{Si} + nf = \sum_{i=1}^m y_{Ti} \end{cases} \quad (i=1,2,\dots, m-1, m) \quad (2.6)$$

$$\text{使用变量代换，令} \begin{cases} A = \sum_{i=1}^m u_{Si}^2, \quad B = \sum_{i=1}^m u_{Si} v_{Si}, \quad C = \sum_{i=1}^m u_{Si}, \quad D = \sum_{i=1}^m u_{Si} x_{Ti} \\ E = \sum_{i=1}^m v_{Si}^2, \quad F = \sum_{i=1}^m v_{Si}, \quad G = \sum_{i=1}^m v_{Si} x_{Ti} \\ H = \sum_{i=1}^m x_{Ti}, \quad I = \sum_{i=1}^m u_{Si} y_{Ti}, \quad J = \sum_{i=1}^m v_{Si} y_{Ti}, \quad K = \sum_{i=1}^m y_{Ti} \end{cases} \quad (2.7)$$

则公式 2.6 可简化为：

$$\begin{bmatrix} A & B & C & 0 & 0 & 0 \\ B & E & F & 0 & 0 & 0 \\ C & F & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & 0 & B & E & F \\ 0 & 0 & 0 & C & F & n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ G \\ H \\ I \\ J \\ K \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

将 (u_{S1}, v_{S1}) 、 (u_{S2}, v_{S2}) 、 (u_{S3}, v_{S3}) 、 (u_{S4}, v_{S4}) 、 (u_{S5}, v_{S5}) 、 (u_{S6}, v_{S6}) 、 (u_{S7}, v_{S7}) ， (x_{T1}, z_{T1}) 、 $(x_{T2},$

z_{T2})、 (x_{T3}, z_{T3}) 、 (x_{T4}, z_{T4}) 、 (x_{T5}, z_{T5}) 、 (x_{T6}, z_{T6}) 和 (x_{T7}, z_{T7}) 带入公式 2.7, 由公式 2.8 即可得到关于 6 个待定参数 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 的 6 个线性无关方程, 根据线性代数理论, 方程组 2.8 有唯一解。然后, 将求解出的待定参数 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 带入公式 2.3, 根据公式 2.3, 可将矩形区域 $ABCD$ 的所有红色小孔变换到机床工件坐标下中矩形 $A_2'B_2'C_2'D_2'$ 的粉红色小孔, 如图 2.11 所示。

若利用最小二乘法进行弦轴孔定位与钻孔, 得到绝大部分如图 2.7(d) 所示的合格弦轴孔, 且误差最大的弦轴孔也在允许误差范围内, 即利用旋转平移法变换得到的粉红色小孔与机床工件 XOZ 坐标系下绿色小孔基本重合, 如图 2.12 所示, 则说明最小二乘法能够克服测量仪器的测量误差, 更适合作为弦轴孔定位与钻孔的核心算法。

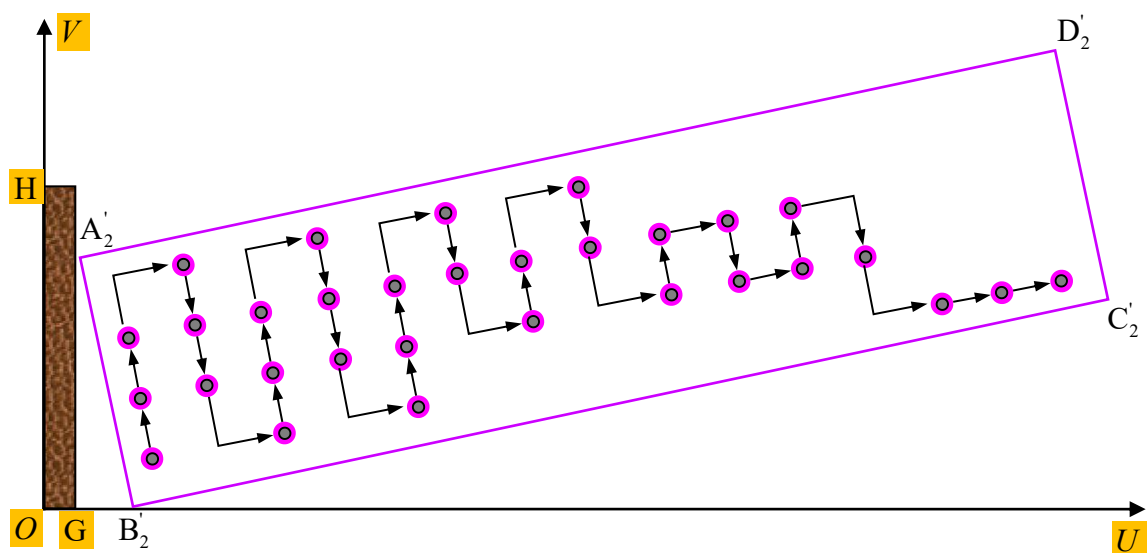


图 2.11 经最小二乘变换得的弦轴孔理论坐标分布模型

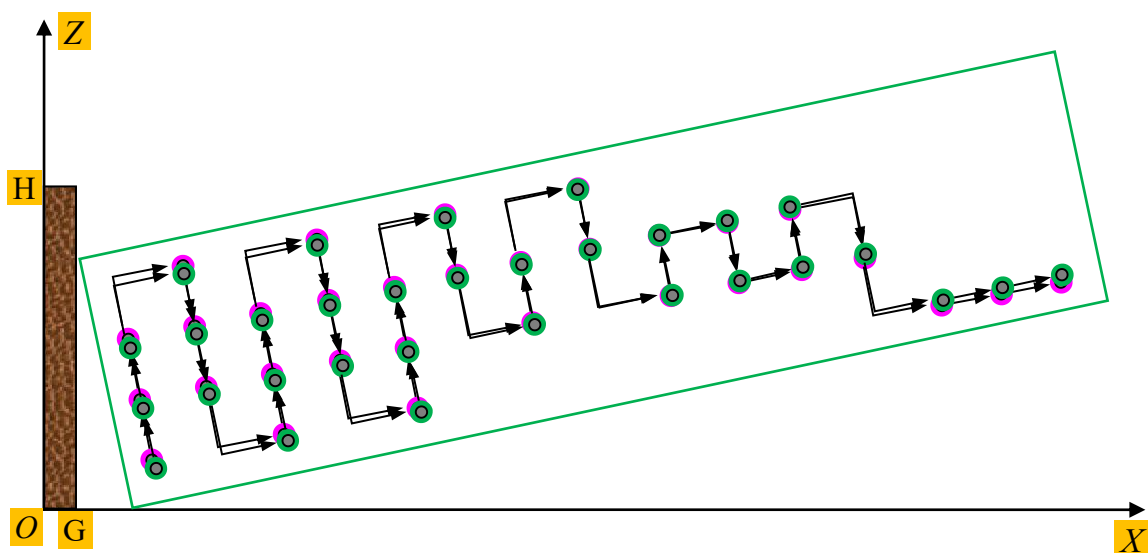


图 2.12 最小二乘变换弦轴孔与铁板弦轴孔坐标分布偏差模型

3 弦轴孔定位误差分析

3.1 弦轴孔定位 MATLAB 仿真程序设计

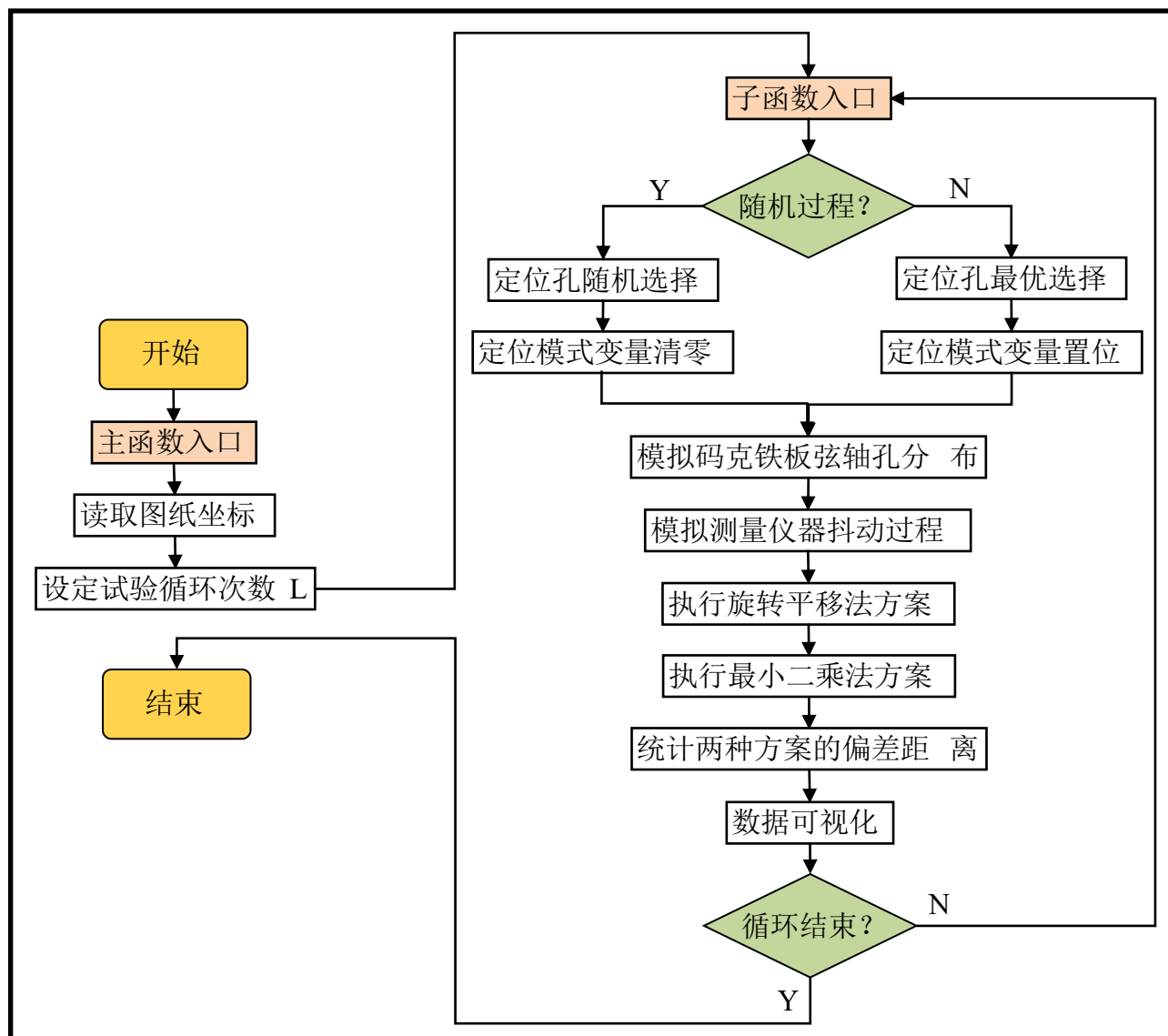


图 3.1 弦轴孔误差分析 MATLAB 程序设计流程图

根据弦轴孔定位如图 3.1 所示,

步骤 1: 读取钢琴码克图纸上弦轴孔圆心坐标 $K_i(u_i, v_i)$ (标记为黑色小孔), 并将 X 轴坐标保存至变量 CY_U、 Z 轴坐标保存至变量 CY_V, 弦轴孔数目保存至变量 CY_LEN;

步骤 2: 根据实际加工经验, 将图纸上弦轴孔圆心坐标做微小的旋转平移变换, 模拟码克铁板上已钻好的弦轴孔 $G_i(x_i, z_i)$ (标记为绿色小孔)在机床工件 XOZ 坐标系下的分布;

步骤 3: 根据实际测量仪器的测量误差, 对步骤 2 中码克铁板上弦轴孔做轻微抖动。以 0.25 毫米的圆域范围作为测量仪器的随机测量误差, 由此得到机床工件 XOZ 坐标系下弦轴孔圆心坐标的测量值 $R_i(x_i, z_i)$ (标记为红色小孔), 将测量值 X 轴坐标保存至变量 CY_X_RED、 Z 轴坐标至变量 CY_Y_RED;

步骤 4: 随机选取 2 个定位弦轴孔, 根据公式 2.2 计算旋转平移待定参数。再根据旋转平移变换公式 2.1 对钢琴码克图纸上弦轴孔进行旋转平移变换, 得到经旋转平移变换后弦轴孔理论坐标 $B_i(x_i, z_i)$ (标记为蓝色小孔), 并将其 X 轴坐标保存至变量 CY_X_BLUE、 Z 轴坐标至变量 CY_Y_BLUE;

步骤 5: 随机选取 7 个定位弦轴孔，根据公式 2.4 计算旋转平移待定参数。再根据最小二乘变换公式 2.3 对钢琴码克图纸上弦轴孔进行最小二乘变换，得到经最小二乘变换后弦轴孔理论坐标 $M_i(x_i, z_i)$ (标记为洋红色小孔)，并将其 X 轴坐标保存至变量 CY_X_MAGENTA、 Z 轴坐标至变量 CY_Z_MAGENTA；

步骤 6: 计算并保存旋转平移方案的弦轴孔偏差数。具体方法是计算蓝色弦轴孔理论坐标 $B_i(x_i, z_i)$ 与红色弦轴孔测量坐标 $R_i(x_i, z_i)$ 的偏差距离，并保存至变量 CY_SLD1，即

$$CY_SLD1 = \sqrt{(CY_BLUE_X - CY_RED_X)^2 + (CY_BLUE_Y - CY_RED_Y)^2} \quad (3.1)$$

步骤 7: 计算并保存最小二乘方案的弦轴孔偏差数。具体方法是计算洋红色弦轴孔理论坐标 $M_i(x_i, z_i)$ 与红色弦轴孔测量坐标 $R_i(x_i, z_i)$ 的偏差距离，并保存至变量 CY_SLD2，即

$$CY_SLD1 = \sqrt{(CY_BLUE_X - CY_RED_X)^2 + (CY_BLUE_Y - CY_RED_Y)^2} \quad (3.2)$$

步骤 8: 将坐标数据、偏差距离进行数据可视化。即绘制弦轴孔圆心图纸坐标 $K_i(u_i, v_i)$ (黑色小孔)与弦轴孔圆心机床工件坐标 $G_i(u_i, v_i)$ (绿色小孔)分布对比图，绘制弦轴孔圆心机床工件坐标 $G_i(u_i, v_i)$ (绿色小孔)与弦轴孔圆心测量坐标 $R_i(u_i, v_i)$ (红色小孔)分布对比图，绘制弦轴孔圆心旋转平移理论坐标 $B_i(u_i, v_i)$ (蓝色小孔)与弦轴孔圆心测量坐标 $R_i(u_i, v_i)$ (红色小孔)分布对比图，绘制弦轴孔圆心最小二乘坐标 $M_i(u_i, v_i)$ (洋红色小孔)与弦轴孔圆心测量坐标 $R_i(u_i, v_i)$ (红色小孔)分布对比图，绘制旋转平移方案弦轴孔圆心偏差距离 CY_SLD1 和最小二乘方案弦轴孔圆心偏差距离 CY_SLD1 对比图。

步骤 9: 重复步骤 3 至步骤 9，模拟钢琴码克弦轴孔定位，试验 10000 次，并以累加统计方式保存变量 CY_SLD1 和 CY_SLD1；

步骤 10: 对步骤 9 的统计结果数据进行表格和图形分析，得出随机选择定位弦轴孔条件下旋转平移法方案与最小二乘方案的比较结果；

步骤 11: 根据偏差距离统计最小原则，找到旋转平移法中 2 个定位基准孔的最优选择和最小二乘法中 7 个定位基准孔的最优选择；

步骤 12: 将步骤 4、步骤 5 中的随机选择定位弦轴孔，分别改为步骤 9 中旋转平移法最优选择定位弦轴孔和最小二乘法最优选择定位弦轴孔。重复步骤 3 至步骤 10，结束程序。

3.2 弦轴孔定位 MATLAB 仿真试验

以钢琴码克图纸上 219 个弦轴孔圆心坐标为测试对象，根据图 3.1 设计的流程图，编写主函数文件“MSE_main.m”，子函数“CY_MSE.m”。根据钢琴码克弦轴孔定位与钻孔加工过程涉及到的测量设备、机床设备的实际运作情况，指定如下模拟参数：

旋转平移法方案选取 2 个定位弦轴孔，最小二乘法方案选取 7 个定位弦轴孔；为便于结果图形化分析，将码克铁板在机床工件 XOZ 坐标系上的工装误差放大：旋转角度为 10°、沿 X 轴负半轴平移 66.1700 毫米、沿 Z 轴负半轴平移 57.1600 毫米；测量仪器随机测量误差设定为 0.25 毫米；分别独立执行两次主循环过程：第一次主循环为定位弦轴孔随机选择，第二次主循环根据第一次主循环的统计数据结果寻找最优定位弦轴孔，设定主循环次数为 10000 次。钢琴码克图纸上标有 219 个弦轴孔圆心坐标，部分弦轴孔圆心坐标数据见表 3.1。

表 3.1 钢琴码克弦轴孔圆心图纸坐标

弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标
1	(70.000, 98.000)	2	(68.910, 120.080)	3	(67.730, 142.300)	4	(80.730, 153.330)
...
44	(251.990, 112.610)	45	(250.860, 136.420)	46	(263.770, 148.070)	47	(264.980, 123.960)

...
94	(473.110, 132.730)	95	(474.510, 108.420)	96	(475.310, 84.010)	97	(511.220, 67.920)
98	(511.200, 92.140)	99	(511.230, 116.410)	100	(523.720, 127.030)	101	(523.430, 102.860)
...
153	(716.840, 74.130)	154	(730.220, 79.940)	155	(725.620, 61.580)	156	(720.980, 43.520)
...
173	(793.490, 30.940)	174	(798.080, 46.850)	175	(1015.050, 47.640)	176	(1029.760, 47.680)
...
194	(1158.300, 28.200)	195	(1161.130, 47.120)	196	(1175.630, 47.080)	197	(1172.880, 28.210)
...
216	(1380.360, 46.790)	217	(1371.020, 27.610)	218	(1396.150, 27.790)	219	(1406.710, 46.720)

执行后主函数文件“MSE_main.m”，完成第一次主循环，即进行 10000 次定位弦轴孔随机选择试验后，得到弦轴孔距离偏差分布对比图如图 3.2~图 3.5 所示。

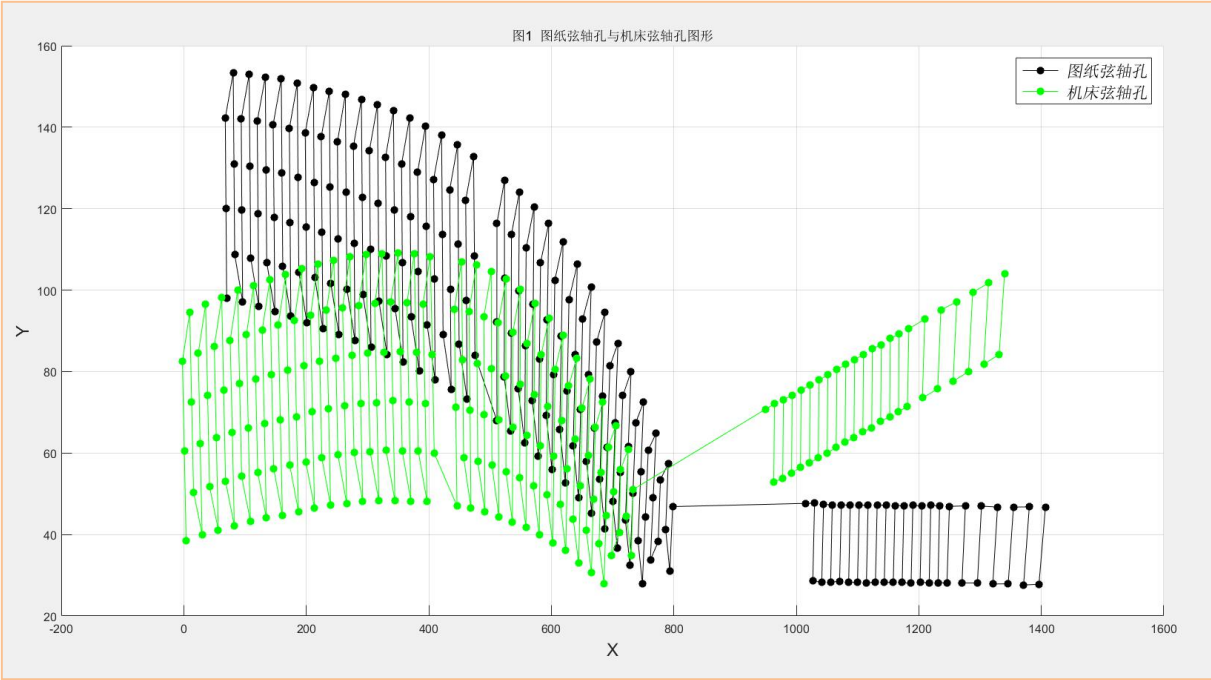


图 3.2 图纸弦轴孔与模拟码克铁板弦轴孔分布对比图

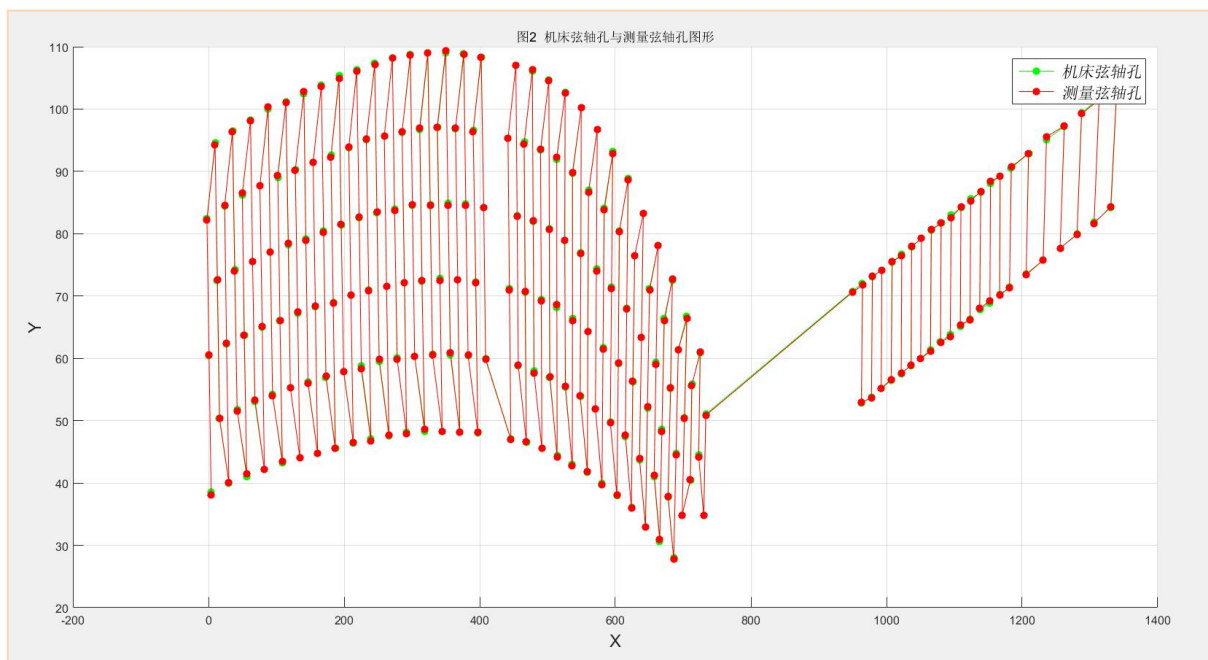


图 3.3 随机试验中弦轴孔机床分布与测量分布对比图

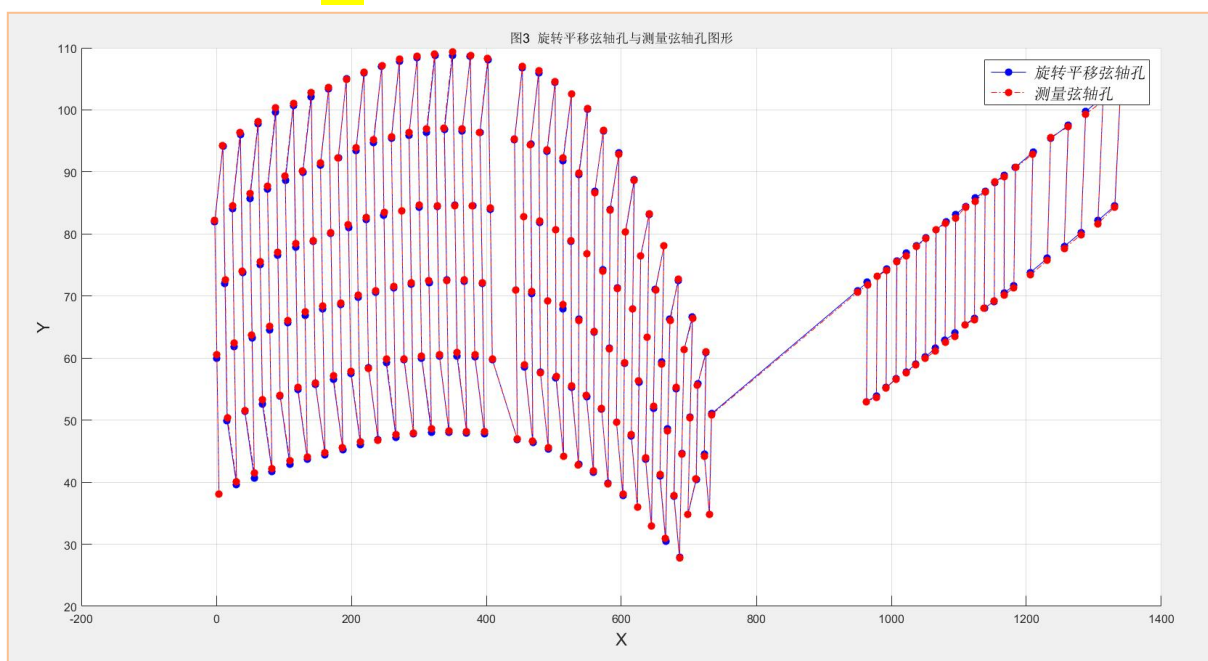


图 3.4 随机定位弦轴孔试验下旋转平移方案弦轴孔偏差对比图

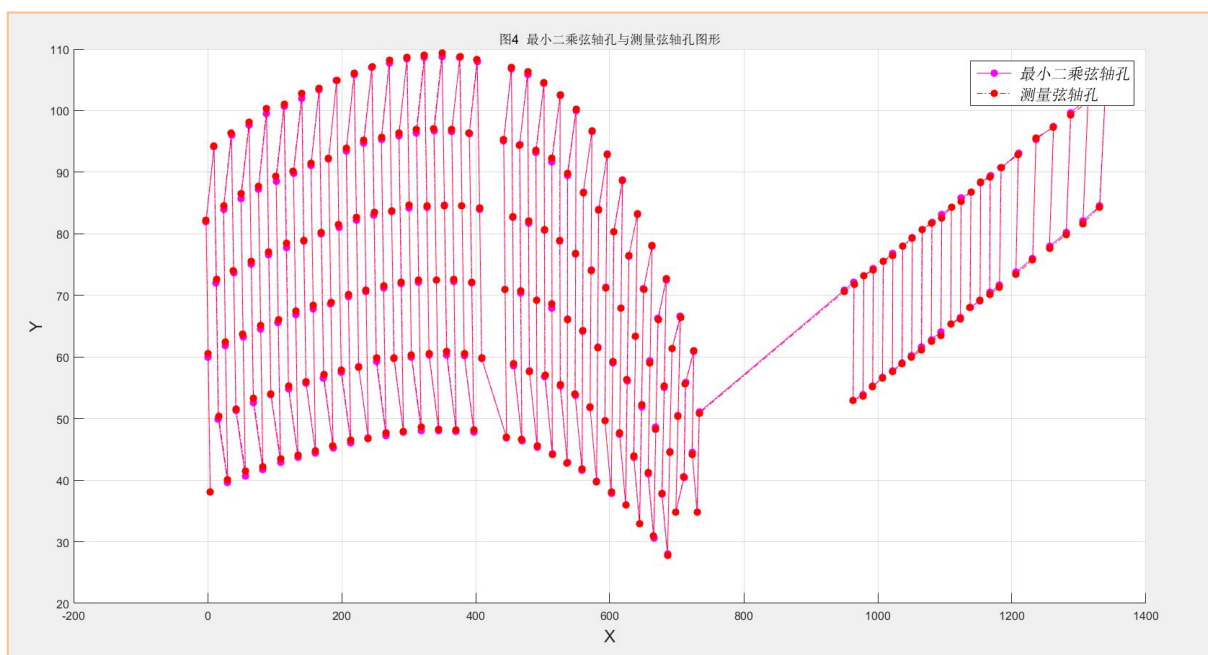


图 3.5 随机定位弦轴孔试验下最小二乘方案弦轴孔偏差对比图

图 3.2~图 3.5 初步验证了 MATLAB 编程进行误差分析的正确性。图 3.2 能明显看出绿色小孔与黑色小孔的分布差异，这是仿真模拟测试特意设置旋转 10° ，平移(66.1700mm, 57.1600mm)的标记点；图 3.3~图 3.5，绿色小孔、蓝色小孔、洋红色小孔基本都与红色小孔重合，这是因为测量仪器误差是相对较小的，使用测量仪器去测量弦轴孔，其测量距离偏差一般小于 0.5 毫米，而图 3.3~图 3.5 中纵轴的单位为 10mm，所以人眼难以识别其中的微小误差。

3.3 弦轴孔定位误差分析

由本章 3.1、3.2 的仿真测验程序，得到大量的弦轴孔坐标分布数据，作者对其进行了大量的统计测算工作，在随机选择定位弦轴孔情况，列出较好的定位弦轴孔选择方案，确定旋转平移法最优定位弦轴孔选择为：

图纸编号“1”，坐标为(70.0000, 98.0000)；图纸编号“219”，坐标为(1406.7100, 46.7200)。由此得到旋转中心坐标为(738.3550, 72.3600)，旋转角 $\alpha=0.087264$ (约为 5°)、X 轴平移量 $l_x=671.8102$ ，Z 轴平移量 $l_z=71.3088$ ，则公式 2.1 的旋转平移变换关系式近似于：

$$\begin{cases} x_{Ti} = (u_{Si} - 738.3550)\cos 0.0873 - (v_{Si} - 72.3600)\sin 0.0873 + 671.8102 \\ y_{Ti} = (u_{Si} - 738.3500)\sin 0.0873 + (v_{Si} - 72.3600)\cos 0.0873 + 71.3088 \end{cases}$$

化简得：

$$\begin{cases} x_{Ti} = 0.9962u_{Si} - 0.0872v_{Si} - 57.4240 \\ y_{Ti} = 0.0872u_{Si} + 0.9962v_{Si} - 65.1522 \end{cases} \quad (3.3)$$

确定最小二乘法最优定位弦轴孔选择为：

图纸编号“1”，坐标为(70.0000, 98.0000)；图纸编号“46 点”，坐标：(263.7700, 148.0700)；图纸编号“97 点”，坐标：(511.2200, 67.9200)；图纸编号“154 点”，坐标：(730.2200, 79.9400)；图纸编号“175 点”，坐标：(1015.0500, 47.6400)；图纸编号“197 点”，坐标：(1172.8800, 28.2100)；图纸编号“219 点”，坐标：(1406.7100, 46.7200)；由此得到的最小二乘待定参数 $a=0.9960$ ， $b=-0.0847$ ， $c=-57.3752$ ， $d=0.0875$ ， $e=0.9998$ ， $a=-65.7255$ ，则公式的最小二乘变换关系式近似于：

$$\begin{cases} p_{Ti} = 0.9960u_{Si} - 0.0847v_{Si} - 57.3852 \\ q_{Ti} = 0.0875u_{Si} + 0.9998v_{Si} - 65.7255 \end{cases} \quad (3.4)$$

根据弦轴孔距离偏差数据绘制旋转平移方案和最小二乘方案在随机选择定位孔情况下弦轴孔统计平均偏差距离折线图，如图 3.6 所示。

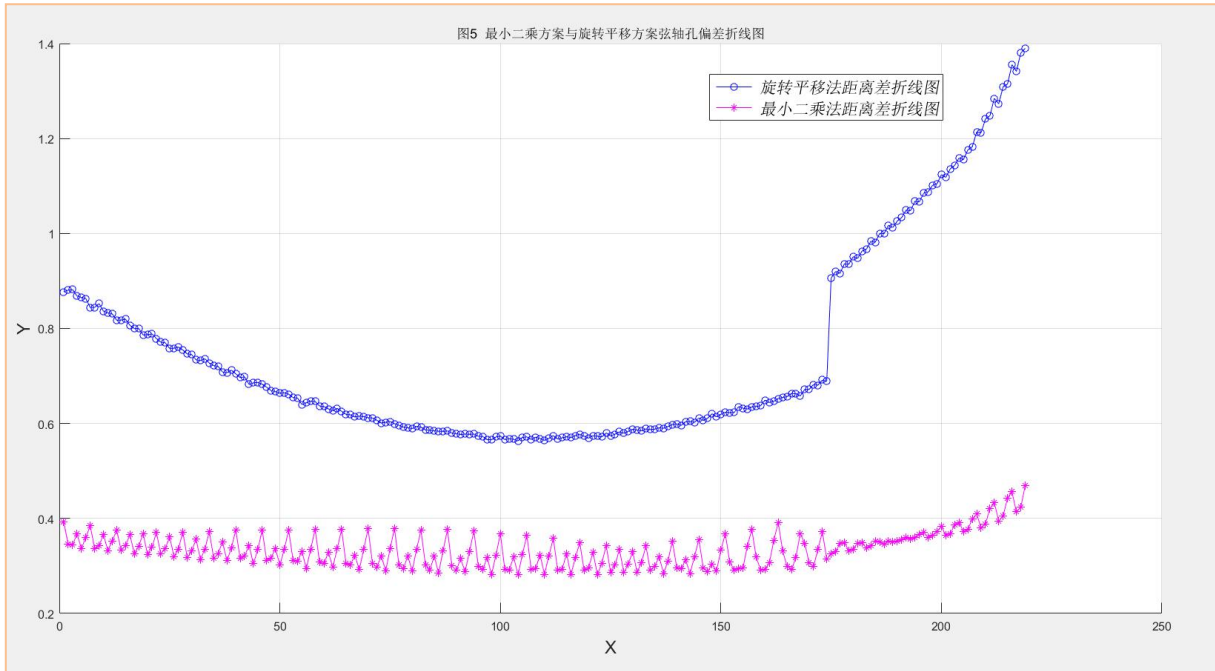


图 3.6 随机定位弦轴孔试验下两种方案弦轴孔偏差

图 3.6 中表明，在随机选定定位弦轴孔条件下，旋转平移方案会导致弦轴孔圆心出现偏差极大的现象，单个弦轴孔最大偏差竟达到 1.4 毫米，最小偏差也接近 0.6 毫米，因而旋转平移法必须通过优化定位弦轴孔的选择，避免出现单个弦轴孔偏差极大的情形，这也说明本文对旋转平移法的改进工作的必要性；而最小二乘方案中，219 个弦轴孔整体偏差较为稳定，单个弦轴孔偏差在 0.3 毫米至 0.5 毫米之间，相对于旋转平移法，已经便显出了整体偏差最小的优良性能，但是单个弦轴孔偏差还是可能达到 0.5 毫米，因而也需要指定优化的定位基准孔选择方案进行提升。

按照选定最优弦轴孔方案，分别得到最优先轴孔选择方案下旋转平移变换关系式最小二乘变换关系式，分别如公式 3.5 和公式 3.6 所示：

$$\begin{cases} x_{Ti} = (u_{Si} - 738.3550)\cos(0.0875) - (v_{Si} - 72.3600)\sin(0.0875) + 671.9763 \\ y_{Ti} = (u - 738.3550)\sin(0.0875) + (v - 72.3600)\cos(0.0875) + 70.9811 \end{cases}$$

化简得：

$$\begin{cases} x_{Ti} = 0.9962u_{Si} - 0.0874v_{Si} - 57.2306 \\ y_{Ti} = 0.0874u_{Si} + 0.9962v_{Si} - 65.6257 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} p_{Ti} = 1.0000u_{Si} + 0.002v_{Si} - 57.3752 \\ q_{Ti} = 0u_{Si} + 1.006v_{Si} - 64.9755 \end{cases} \quad (3.6)$$

定位弦轴孔进行最优选择后两种方案弦轴孔偏差如图 3.7 所示。

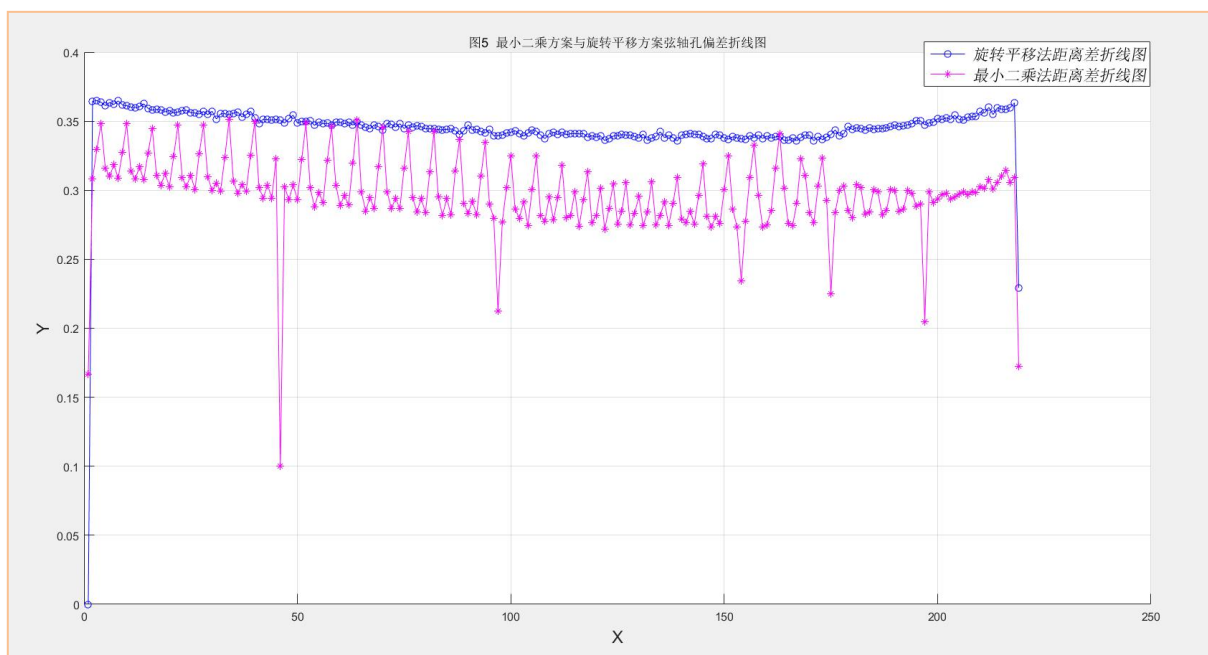


图 3.7 最优定位弦轴孔试验下两种方案弦轴孔偏差

从图 3.6、图 3.7 中可看出，定位弦轴孔最优选择颇有成效。经最优选择后，旋转平移法方案平均偏差接近 0.35 毫米，最大偏差为 0.38 毫米，最小偏差为 0.00 毫米(只有一个)，极大地提升了使用旋转平移法进行弦轴孔定位的稳定性能；而最小二乘法方案平均偏差小于 0.28 毫米，最大偏差 0.35 毫米，最小偏差 0.10 毫米，相比于旋转平移法方案，最小二乘法仍有具有良好的整体偏差最小性能。

由此，按照公式 3.5 和公式 3.6，得到了经旋转平移方案和最小二乘方案变换后的弦轴孔圆心理论变换坐标 $B_i(u_i, v_i)$ 和 $M_i(u_i, v_i)$ ，分别如表 3.2、表 3.3 所示。

表 3.2 旋转平移变换下 219 个弦轴孔理论坐标 $B_i(u_i, v_i)$

弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标
1	(70.039, 98.242)	2	(68.951, 120.322)	3	(67.773, 142.542)	4	(80.774, 153.571)
...
44	(252.030, 112.836)	45	(250.903, 136.646)	46	(263.814, 148.295)	47	(265.021, 124.185)
...
94	(473.152, 132.936)	95	(474.550, 108.626)	96	(475.348, 84.216)	97	(511.257, 68.123)
98	(511.239, 92.343)	99	(511.271, 116.613)	100	(523.762, 127.232)	101	(523.470, 103.062)
...
153	(716.877, 74.315)	154	(730.258, 80.123)	155	(725.656, 61.764)	156	(721.014, 43.704)
...
173	(793.523, 31.118)	174	(798.115, 47.027)	175	(1015.085, 47.798)	176	(1029.795, 47.837)
...
194	(1158.333, 28.346)	195	(1161.165, 47.265)	196	(1175.665, 47.224)	197	(1172.913, 28.354)
...
216	(1380.395, 46.916)	217	(1371.053, 27.737)	218	(1396.183, 27.915)	219	(1406.745, 46.844)

表 3.3 最小二乘变换下 219 个弦轴孔理论坐标

弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标	弦轴孔 序号	弦轴孔 圆心坐标
1	(70.055, 98.045)	2	(68.969, 120.139)	3	(67.792, 142.372)	4	(80.794, 153.409)
...
44	(252.047, 112.659)	45	(250.921, 136.484)	46	(263.833, 148.141)	47	(265.039, 124.016)
...
94	(473.170, 132.786)	95	(474.566, 108.460)	96	(475.362, 84.035)	97	(511.269, 67.934)
98	(511.253, 92.169)	99	(511.287, 116.454)	100	(523.779, 127.081)	101	(523.485, 102.896)
...
153	(716.890, 74.142)	154	(730.271, 79.956)	155	(725.667, 61.584)	156	(721.024, 43.513)
...
173	(793.532, 30.923)	174	(798.125, 46.843)	175	(1015.09, 47.628)	176	(1029.80, 47.667)
...
194	(1158.34, 28.172)	195	(1161.17, 47.104)	196	(1175.67, 47.063)	197	(1172.92, 28.181)
...
216	(1380.40, 46.767)	217	(1371.06, 27.576)	218	(1396.19, 27.755)	219	(1406.75, 46.697)

根据表 3.~表 3.3, 在选取的 7 个定位弦轴孔处得到弦轴孔圆心偏差距离数据, 如表 3.4 所示。

表 3.4 旋转平移法方案与最小二乘法方案比较

定位弦轴 孔序号	图纸上 圆心坐标 $K_i(u_{Si}, v_{Si})$	实际测量值 $R_i(x_{Ri}, y_{Ri})$	旋转平移法		最小二乘法	
			理论值 $B_i(x_{Bi}, y_{Bi})$	偏差 Δ_{TBi}	理论值 $M_i(x_{Mi}, y_{Mi})$	偏差 Δ_{TBi}
2	(263.770, 148.070)	(263.787, 148.074)	(263.814, 148.295)	0.2219	(263.833, 148.141)	0.0805
3	(511.220, 67.920)	(511.324, 67.775)	(511.257, 68.123)	0.3545	(511.269, 67.934)	0.1686
4	(730.220, 79.940)	(730.399, 79.953)	(730.258, 80.123)	0.2214	(730.271, 79.956)	0.1284
5	(1015.050, 47.640)	(1015.043, 47.520)	(1015.085, 47.798)	0.2814	(1015.095, 47.628)	0.1195
6	(1172.880, 28.210)	(1172.859, 28.174)	(1172.913, 28.354)	0.1885	(1172.921, 28.181)	0.0620
7	(1406.710, 46.720)	(1406.766, 46.843)	(1406.745, 46.844)	0.0217	(1406.754, 46.697)	0.1468

结论

本文从钢琴码克实际生产加工工序入手，确定弦轴孔定位偏差问题主要源于弦轴孔定位技术的缺陷，进而以高精度弦轴孔定位技术为目标，展开对传统旋转平移算法、最小二乘算法的研究，并完成 MATLAB 仿真模拟弦轴孔定位过程，通过两次主循环进行大量的弦轴孔定位模拟测试实验，确定最小二乘法方案能够极大地改进传统弦轴孔定位技术。编写弦轴孔定位模拟仿真 MATLAB 程序代码，该程序功能包括、弦轴孔分布比较，弦轴孔偏差数据计算与分析，重要数据文档保存。具体研究工作如下：

(1)深入了解弦轴孔定位的技术背景、构建弦轴孔定位数学模型，对旋转平移法、最小二乘法搭建了图示化的实际模型，简单清晰；

(2)设计弦轴孔定位 MATLAB 仿真测试流程图，编写弦轴孔定位误差分析的全套代码，为弦轴孔定位误差分析提供详尽的数据；

(3)通过将弦轴孔分布图示化以及仿真测试实验的统计分析结果，确定传统的旋转平移法产生偏差的根本原因是不能克服测量仪器的测量误差，且提出通过选取最优的定位弦轴孔，可改进旋转平移法的定位偏差；

(4)通过旋转平移法与最小二乘法的比较，验证了最小二乘法的整体偏差最小性能，这可以极大改进弦轴孔定位技术的精度，且经过定位弦轴孔进行最优选择后，得到的弦轴孔圆心理论坐标足以满足钢琴马克的生产需求。

(5)在钢琴码克实际生产过程中，优先选用最小二乘法方案，方案如下：

图纸编号“1”，坐标为(70.0000, 98.0000)；图纸编号“46点”，坐标：(263.7700, 148.0700)；图纸编号“97点”，坐标：(511.2200, 67.9200)；图纸编号“154点”，坐标：(730.2200, 79.9400)；图纸编号“175点”，坐标：(1015.0500, 47.6400)；图纸编号“197点”，坐标：(1172.8800, 28.2100)；图纸编号“219点”，坐标：(1406.7100, 46.7200)；由此得到的最小二乘待定参数 $a=0.9960$, $b=-0.0847$, $c=-57.3752$, $d=0.0875$, $e=0.9998$, $a=-65.7255$ ，则公式的最小二乘变换关系式近似于：

$$\begin{cases} p_{Ti} = 0.9960u_{Si} - 0.0847v_{Si} - 57.3852 \\ q_{Ti} = 0.0875u_{Si} + 0.9998v_{Si} - 65.7255 \end{cases}$$

按照上式对钢琴码克坐标系的弦轴孔圆心坐标进行最小二乘变换，将得到的弦轴孔圆心理论坐标输入弦轴孔定位/钻孔组合机进行相应加工，即可得到合格的钢琴马克产品，这对于钢琴生产厂家减少因生产出不合格钢琴产品而带来的损失具有实用价值，对适应智能化、产业化、网络化数控系统发展趋势，提升国产先进制造装备水平，填补钢琴码克设备制造的自动化与国产化缺口，具有重要的创新意义。

参考文献

- [1] 顾伯良.欧洲钢琴制造工艺引发的思考[J].乐器, 2003, (02): 14-15.
- [2] 黄蕾.菲尔德夜曲风格特征与 19 世纪钢琴制造工艺的关联性研究[J].星海音乐学院学报, 2009, (03): 60-63.
- [3] 刘金寿, 刘远.钢琴的物理结构及张弦系统的力学分析[J].演艺设备与科技, 2007, (02): 60-63.
- [4] 齐丽华.钢琴制造工艺与音律理论研究[D].济南: 山东艺术学院, 2012: 11-22.
- [5] 顾伯良.欧洲钢琴止音弹簧力度的测量工艺[J].乐器, 2003, (04): 14-15.
- [6] 顾伯良.欧洲钢琴止音弹簧力度的测量工艺[J].乐器, 2003, (05): 14-15.
- [7] 杨拯.钢琴制造中运用计算机辅助软件的优越性[J].大舞台, 2005, (01): 249-250.
- [8] 朱锋, 岳占福, 张峰.建筑物无约束整体旋转平移关键技术研究[J].岩石力学与工学报, 2004, 23(02): 5253-5255.
- [9] 孔祥玉, 魏瑞轩, 韩崇昭.一种稳定的总体最小二乘自适应滤波算法[J].西安交通大学学报, 2004, 38(01): 831-834.
- [10] 许建华, 张学工, 李衍达.最小平方误差算法的正则化核形式[J].自动化学报, 2004, 30(1): 27-35.
- [11] BianZhao-Qi,ZhangXue-Gong. Pattern Recognition(SecondEdition).[M]Beijing:Tsinghua University Press,2000: 187-192.