$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}d\tau\right]\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega,\quad t\in(-\infty,+\infty) \\ f[g(t)]=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f[g(\tau)]\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}d\tau\right)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega,\quad g(t)\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow t\in(-\infty,+\infty) \end{cases}$$

令$f(t)=r(t)+jx(t)$，$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)+jx(t)]\cdot[\cos(\omega\cdot t)-j\sin(\omega\cdot t)]dt$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left([r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)+x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]+j[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)-r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]\right)dt \\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)+x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt+j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)-r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt \\ &=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)+\left(\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)\end{aligned}$$

①奇偶虚实性：I.时域$f(t)$反褶$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$反褶，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f(-t)\leftrightarrow F(-\omega)$

$f(-t)=r(-t)+jx(-t)$，$F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt$，由上推导得

$$F_1(\omega)=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)+\left(\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)$$

等价变形：用换元法解决积分问题时时刻注意，换元前后的积分区间上下限的值要严格一一对应！！！

$$\begin{aligned}F_1(\omega)=&\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\cos\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d[-(-t)]}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\sin\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d[-(-t)]}^{\omega\text{的实奇函数}}\right) \\ &+\left(\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\cos\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d[-(-t)]}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\sin\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d[-(-t)]}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)\end{aligned}$$

更换积分变量：$$\begin{aligned}F_1(\omega)=&-1\cdot\left(\overbrace{\int_{+\infty}^{-\infty}[r(-t)\cdot\cos\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d(-t)}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{+\infty}^{-\infty}[x(-t)\cdot\sin\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d(-t)}^{\omega\text{的实奇函数}}\right) \\ &-1\cdot\left(\overbrace{j\int_{+\infty}^{-\infty}[x(-t)\cdot\cos\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d(-t)}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{+\infty}^{-\infty}[r(-t)\cdot\sin\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d(-t)}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)\end{aligned}$$

将积分变量视为整体：$$\begin{aligned}F_1(\omega)=&\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\cos\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d(-t)}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\sin\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d(-t)}^{\omega\text{的实奇函数}}\right) \\ &+\left(\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\cos\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d(-t)}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\sin\{(-\omega)\cdot(-t)\}]\cdot d(-t)}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)\end{aligned}$$

通过与$f(t)$的傅里叶变换公式作对比，即可得到：$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f(-t)\leftrightarrow F(-\omega)$

即：$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(\omega) \\ F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(-\omega)\end{cases}\quad ①-\mathrm{I}$$

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}d\tau\right]\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega,\quad t\in(-\infty,+\infty) \\ f[g(t)]=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f[g(\tau)]\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}d\tau\right)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega,\quad g(t)\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow t\in(-\infty,+\infty)\end{cases}$$

①奇偶虚实性：II.时域$f(t)$共轭$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$反褶再共轭，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f^*(t)\leftrightarrow F^*(-\omega)$

令$f(t)=r(t)+jx(t)$，$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)+jx(t)]\cdot[\cos(\omega\cdot t)-j\sin(\omega\cdot t)]dt$

$$\Rightarrow F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}([r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)+x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]+j[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)-r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)])dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)+x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt+j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)-r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt$$

$$=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)+\left(\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)$$

$f^*(t)=r(t)-jx(t)$，$F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt$，由上推导得

$$F_2(\omega)=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实偶函数}}-\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)+\left(\overbrace{-j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)$$

等价变形：$$F_2(\omega)=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos\{(-\omega)\cdot t\}]dt}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\sin\{(-\omega)\cdot t\}]dt}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)-\left(\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos\{(-\omega)\cdot t\}]dt}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\{(-\omega)\cdot t\}]dt}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)$$

通过与$f(t)$的傅里叶变换公式作对比，即可得到：$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f^*(t)\leftrightarrow F^*(-\omega)$

即：$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(\omega)\\ F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F^*(-\omega)\end{cases}\quad ①-\mathrm{II}$$

①奇偶虚实性：III.时域$f(t)$反褶再共轭$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$共轭，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f^*(-t)\leftrightarrow F^*(\omega)$

$f^*(-t)=r(-t)-jx(-t)$，$F_3(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(-t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt$

$$F_3(\omega)=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实偶函数}}-\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)+\left(\overbrace{-j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)$$

$$=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\cos\{\omega\cdot(-t)\}]d(-t)}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\sin\{\omega\cdot(-t)\}]d(-t)}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)+\left(\overbrace{-j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\cos\{\omega\cdot(-t)\}]d(-t)}^{\omega\text{的虚偶函数}}+\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\sin\{\omega\cdot(-t)\}]d(-t)}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)$$

$$=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\cos\{(\omega)\cdot(-t)\}]d(-t)}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\sin\{(\omega)\cdot(-t)\}]d(-t)}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)-\left(\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(-t)\cdot\cos\{(\omega)\cdot(-t)\}]d(-t)}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(-t)\cdot\sin\{(\omega)\cdot(-t)\}]d(-t)}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)$$

通过与$f(t)$的傅里叶变换公式作对比，即可得到：$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f^*(-t)\leftrightarrow F^*(\omega)$

即：$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(\omega)\\ F_3(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(-t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F^*(\omega)\end{cases}\quad ①-\mathrm{III}$$

新发现：$\int_{-A}^{+A}\varphi(x)dx=-\int_{+A}^{-A}\varphi(x)d(-x)=\int_{-A}^{+A}\varphi(x)d(-x)$

即$$\begin{cases}dx=d(-x)=-dx\\ \int_{-A}^{+A}\varphi(x)dx=\int_{-A}^{+A}\varphi(x)d(-x)\end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt\right]\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega,\quad t\in(-\infty,+\infty) \\ f[g(t)]=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f[g(t)]\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt\right)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega,\quad g(t)\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow t\in(-\infty,+\infty) \end{cases}$$

令$f(t)=r(t)+jx(t)$, $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)+jx(t)]\cdot[\cos(\omega\cdot t)-j\sin(\omega\cdot t)]dt$

$$\Rightarrow F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}([r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)+x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]+j[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)-r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)])dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)+x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt+j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)-r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt$$

$$=\left(\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实偶函数}}+\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实奇函数}}\right)+\left(\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚偶函数}}-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚奇函数}}\right)$$

①奇偶虚实性：I.时域$f(t)$反褶$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$反褶，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f(-t)\leftrightarrow F(-\omega)$ I

则：$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(\omega)\\ F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(-\omega)\end{cases}$ ①－I

①奇偶虚实性：II.时域$f(t)$共轭$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$反褶再共轭，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f^*(t)\leftrightarrow F^*(-\omega)$ II

则：$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(\omega)\\ F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F^*(-\omega)\end{cases}$ ①－II

①奇偶虚实性：III.时域$f(t)$反褶再共轭$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$共轭，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f^*(-t)\leftrightarrow F^*(\omega)$ III

则：$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(\omega)\\ F_3(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(-t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F^*(\omega)\end{cases}$ ①－III

①奇偶虚实性：时域$f(t)$为是实偶函数$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$为实偶函数，即$f(-t)=f(t)\leftrightarrow F(-\omega)=F(\omega)$ IV

则：$\begin{cases}f(t)=r(t)\text{且}f(-t)=f(t)\\ F(\omega)=\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实偶函数}}=F(-\omega)\end{cases}$ ①－IV

①奇偶虚实性：时域$f(t)$为是实奇函数$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$为虚奇函数，即$f(-t)=-f(t)\leftrightarrow F(-\omega)=-F(\omega)$ V

则：$\begin{cases}f(t)=r(t)\text{且}f(-t)=-f(t)\\ F(\omega)=-\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[r(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚奇函数}}=-F(-\omega)\end{cases}$ ①－V

①奇偶虚实性：时域$f(t)$为是虚偶函数$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$为虚偶函数，即$f(-t)=f(t)\leftrightarrow F(-\omega)=F(\omega)$ VI

则：$\begin{cases}f(t)=jx(t)\text{且}f(-t)=f(t)\\ F(\omega)=\overbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的虚偶函数}}=F(-\omega)\end{cases}$ ①－VI

①奇偶虚实性：时域$f(t)$为是虚奇函数$\Leftrightarrow$频域$F(\omega)$为实奇函数，即$f(-t)=-f(t)\leftrightarrow F(-\omega)=-F(\omega)$ VII

则：$\begin{cases}f(t)=jx(t)\text{且}f(-t)=-f(t)\\ F(\omega)=\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)]dt}^{\omega\text{的实奇函数}}=-F(-\omega)\end{cases}$ ①－VII

后四条性质，简记为：偶函数同实虚，奇函数反实虚，时域频域奇偶保持一致性。

②尺度变换特性：时域$f(t)$压缩$\leftrightarrow$频域$F(\omega)$扩展，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Leftrightarrow f(at)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$，$a\neq 0$

已知$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt$，由于$(at)\in(-\infty,+\infty)$，$a\neq 0\Rightarrow t\in(-\infty,+\infty)$，则$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt$，

等价变形：$F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\cdot e^{-j\left[\left(\frac{\omega}{a}\right)\cdot(at)\right]}dt$，因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\cdot e^{-j\left[\left(\frac{\omega}{a}\right)\cdot(at)\right]}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\cdot e^{-j\left[\left(\frac{\omega}{a}\right)\cdot(at)\right]}d(-t)$，所以$a\neq 0$时，得到

$F_1(\omega)=\frac{1}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\cdot e^{-j\left[\left(\frac{\omega}{a}\right)\cdot(at)\right]}d(at)$，将$(at)$视作整体，与$f(t)$的傅立叶变换做对比，即可得到：$F_1(\omega)=\frac{1}{|a|}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$，

则有：$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Leftrightarrow f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$，$a\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt\\ F_1(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\cdot e^{-j\left[\left(\frac{\omega}{a}\right)\cdot(at)\right]}d(at)\end{cases}$

③波形对称相似性：频域$F(\omega)$波形作为时域波形$F(t)\leftrightarrow$时域$f(t)$波形反褶后乘以$2\pi$作为频域$2\pi\cdot f(-\omega)$波形，
即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow F(t)\leftrightarrow 2\pi\cdot f(-\omega)$，函数只是自变量的意义发生变化，且$2\pi$为常系数，所以时域与频域的波形会对称相似。

证明：$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{F(\omega)}^{\omega\text{的函数}}\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\Rightarrow f(-t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j[\omega\cdot(-t)]}d\omega$，同步变换$\overbrace{\begin{cases}t\Rightarrow\omega\\ \omega\Rightarrow t\end{cases}}^{t、\omega\text{均}\in(-\infty,+\infty)}$，则有

$f(-\omega)=\mathscr{F}^{-1}[F(t)]=\overbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\cdot e^{j[t\cdot(-\omega)]}dt}^{\text{这是傅里叶逆变换！}}\Leftrightarrow\mathscr{F}[F(t)]=2\pi\cdot f(-\omega)=\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt}^{\text{这是傅里叶正变换！！}}$，所以：$\overbrace{f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow F(t)\leftrightarrow 2\pi\cdot f(-\omega)}^{\text{傅里叶变换的数学物理对称美！}}$

④时移特性：时域函数$f(t)$平移$\lambda$长度$\leftrightarrow$频域函数$F(\omega)$乘以一个欧拉常数$e^{j(\lambda)}$

$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt$，$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f(t+t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+t_0)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt$，由于$t_0$为常数，$(t+t_0)\in(-\infty,+\infty)$，则有

$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f(t+t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+t_0)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}d(t+t_0)$，为构造傅里叶正变换，等式左右两边同乘以$\omega$的参变量常数$e^{-j(\omega\cdot t_0)}$，得到

$F_1(\omega)\cdot e^{-j(\omega\cdot t_0)}=\mathscr{F}[f(t+t_0)]\cdot e^{-j(\omega\cdot t_0)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+t_0)\cdot\left[e^{-j(\omega\cdot t)}\cdot e^{-j(\omega\cdot t_0)}\right]d(t+t_0)=\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+t_0)\cdot e^{-j[(\omega)\cdot(t+t_0)]}d(t+t_0)}^{\text{这不是}\mathscr{F}[f(t)]\text{么，嘻嘻~~~}}=F(\omega)$，

所以，$F_1(\omega)\cdot e^{-j(\omega\cdot t_0)}=\mathscr{F}[f(t+t_0)]\cdot e^{-j(\omega\cdot t_0)}=F(\omega)\Rightarrow F_1(\omega)=\mathscr{F}[f(t+t_0)]=F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t_0)}$，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f(t+t_0)\leftrightarrow F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t_0)}$

同理可得，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(\omega)\cdot e^{j[\omega\cdot(-t_0)]}=F(\omega)\cdot e^{-j(\omega\cdot t_0)}$，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)\cdot e^{-j(\omega\cdot t_0)}$

综合起来：$F_3(\omega)=\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t\pm t_0)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=F(\omega)\cdot e^{j[\omega\cdot(\pm t_0)]}=F(\omega)\cdot e^{\pm j(\omega\cdot t_0)}$，即$f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f(t\pm t_0)\leftrightarrow F(\omega)\cdot e^{\pm j(\omega\cdot t_0)}$

注意：$\begin{cases}\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt\\ \mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t\pm t_0)\cdot\overbrace{e^{-j(\omega\cdot t)}dt}^{\text{稳如磐石}}\end{cases}$

⑤频移特性：频域函数$F(\omega)$平移$\gamma$长度$\leftrightarrow$时域函数$f(t)$乘以一个欧拉常数$e^{j(-\gamma)}$
根据时移特性，联系傅里叶正变换和傅里叶逆变换的对称美，猜测频移特性可用傅里叶逆变换推导。

$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega$，$f_1(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega+\omega_0)]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega+\omega_0)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega$，由于$\omega_0$为常数，$(\omega+\omega_0)\in(-\infty,+\infty)$，

$f_1(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega+\omega_0)]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega+\omega_0)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d(\omega+\omega_0)$，等式左右两边同乘以$t$的参变量$e^{j(\omega_0\cdot t)}$，得到

$f_1(t)\cdot e^{j(\omega_0\cdot t)}=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega+\omega_0)]\cdot e^{j(\omega_0\cdot t)}=\overbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega+\omega_0)\cdot e^{j[(\omega+\omega_0)\cdot t]}d(\omega+\omega_0)}^{\text{这不是}\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]\text{么？嘿嘿~~~}}\Rightarrow f_1(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega+\omega_0)]=f(t)\cdot e^{-j(\omega_0\cdot t)}=f(t)\cdot e^{j[(-\omega_0)\cdot t]}$

即$F(\omega)\leftrightarrow f(t)\Rightarrow F(\omega+\omega_0)\leftrightarrow f(t)\cdot e^{-j(\omega_0\cdot t)}$，同理可得：$F(\omega)\leftrightarrow f(t)\Rightarrow F(\omega-\omega_0)\leftrightarrow f(t)\cdot e^{j(\omega_0\cdot t)}$

综合起来：$F(\omega)\leftrightarrow f(t)\Rightarrow F(\omega\pm\omega_0)\leftrightarrow f(t)\cdot e^{\mp j(\omega_0\cdot t)}$

将④、⑤整合起来，得到$\begin{cases}f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Rightarrow f(t\pm t_0)\leftrightarrow F(\omega)\cdot e^{\pm j(\omega t_0)}\\ F(\omega)\leftrightarrow f(t)\Rightarrow F(\omega\pm\omega_0)\leftrightarrow f(t)\cdot e^{\mp j(\omega_0 t)}\end{cases}\Leftrightarrow$时移相同，频移反号

⑥线性性质：由于积分具备线性性质(注意这些性质的使用条件)，阐明傅里叶变换是一种线性算子。

$\mathscr{F}[f_i(t)]=F_i(\omega)$，若$f(t)=\sum_{i=1}^{n}[a_i\cdot f_i(t)]$，$a_i$不完全为0，$f_i(t)$在$(-\infty,+\infty)$均可积$\Rightarrow F(\omega)=\sum_{i=1}^{n}[a_i\cdot F_i(\omega)]$

⑦时域微分特性：要对$f(t)$进行微分操作，抓住傅里叶逆变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{F(\omega)}^{\omega\text{的函数}}\cdot\overbrace{e^{j(\omega\cdot t)}}^{\omega、t\text{的联合函数}}\overbrace{d\omega}^{\text{积分变量}}\Rightarrow\frac{d[f(t)]}{dt}=\frac{d\left\{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\right\}}{dt}=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot\frac{d\left[e^{j(\omega\cdot t)}\right]}{dt}d\omega=(j\omega)^1\cdot\overbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\right]}^{\text{这不是}f(t)\text{么？咻咻}\sim\sim}$$

$$\frac{d^2[f(t)]}{dt^2}=(j\omega)^2\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\right]\cdots\frac{d^n[f(t)]}{dt^n}=(j\omega)^n\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\right]\Rightarrow\frac{d^n[f(t)]}{dt^n}=(j\omega)^n\cdot f(t)\text{，那么}$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d^n[f(t)]}{dt^n}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(j\omega)^n\cdot f(t)\right]\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}\overbrace{dt}^{\text{积分变量}}=(j\omega)^n\cdot\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt}^{\text{这不是}F(\omega)\text{么？哈哈}\sim\sim}=(j\omega)^n\cdot F(\omega)$$

⑧频域微分特性：要对$F(\omega)$进行微分操作，抓住傅里叶逆变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{f(t)}^{t\text{的函数}}\cdot\overbrace{e^{-j(\omega\cdot t)}}^{t、\omega\text{的联合函数}}\overbrace{dt}^{\text{积分变量}}\Rightarrow\frac{d[F(\omega)]}{d\omega}=\frac{d\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt\right]}{dt}=(-jt)^1\cdot\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt}^{\text{这就是}F(\omega)}\Rightarrow\frac{d^n[F(\omega)]}{d\omega^n}=(-jt)^n\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt$$

则$\frac{d^n[F(\omega)]}{d\omega^n}=(-jt)^n\cdot F(\omega)$，$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d^n[F(\omega)]}{d\omega^n}\right\}=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(-jt)^n\cdot F(\omega)\right]\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega=(-jt)^n\cdot\overbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\right]}^{\text{这不是}f(t)\text{么？唬唬}\sim\sim}=(-jt)^n\cdot f(t)$

总结⑦、⑧：$\begin{cases}\mathscr{F}\left\{\frac{d^n[f(t)]}{dt^n}\right\}=(j\omega)^n\cdot F(\omega)\text{，条件为}f(t)\leftrightarrow F(\omega)\\ \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d^n[F(\omega)]}{d\omega^n}\right\}=(-jt)^n\cdot f(t)\text{，条件为}F(\omega)\leftrightarrow f(t)\end{cases}$，在推导过程中，运用傅里叶变换对公式的对称美！

且运用性质⑥的线性性质，再结合对积分公式的被积函数，积分变量，函数的自变量、因变量的熟练理论区分，轻松推导。在推导过后，不免想起了性质⑥的理论基础，是$f(t)$要满足绝对可积，这个条件是傅立叶变换的理论核心视野点。

⑨时域积分特性：对时域函数进行积分操作，积分操作与微分操作是互逆操作，结合⑦，就知道要抓住傅里叶正变换

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt\Rightarrow\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot u(t-\tau)\overbrace{d\tau}^{\text{里层积分变量}}\right]\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}\overbrace{dt}^{\text{外层积分变量}}$$

交换积分次序得到：$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot\overbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(t-\tau)\cdot e^{-j(\omega\cdot t)}dt\right]}^{\text{这不是}\mathscr{F}[u(t-\tau)]\text{么？哇哇}\sim\sim}d\tau$，根据$\begin{cases}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\\ f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)\cdot e^{-j(\omega\cdot t_0)}\end{cases}$

$$\Rightarrow\mathscr{F}[u(t-\tau)]=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}\text{，从而}\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}d\tau=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\cdot\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}d\tau}^{\text{这居然又是}\mathscr{F}[f(\tau)]\text{喵喵}\sim\sim}$$

$$\Rightarrow\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\cdot F(\omega)=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\cdot F(0)$$

⑩频域积分特性：根据⑦、⑧的对称美，以及⑨的推导，就知道抓住傅立叶逆变换，且过程与结果高度雷同⑨！

$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\Rightarrow\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega\right]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega\right]\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega$，将内层积分区间拓展为$(-\infty,+\infty)$

$\Leftrightarrow\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega\right]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F(\Omega)\cdot u(\omega-\Omega)d\Omega\right]\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega$，交换积分次序，得到

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega\right]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\Omega)\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{u(\omega-\Omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega}^{\text{这是}\mathscr{F}^{-1}\left[u\left(\underset{\Delta}{\omega-\Omega}\right)\right]\text{哟}\sim\sim}\right]d\Omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\Omega)\cdot\left[\overbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[2\pi\cdot u(\omega-\Omega)]\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\right)}^{\text{这才是}\mathscr{F}^{-1}[2\pi\cdot u(\omega-\Omega)]\text{哟！棒棒}\sim\sim}\right]d\Omega$$

考虑性质③波形对称相似性，即$\begin{cases}\text{时域}f(t)\leftrightarrow\text{频域}F(\omega)\\\text{时域}F(t)\leftrightarrow\text{频域}2\pi\cdot f(-\omega)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{时域}u(t)\leftrightarrow\text{频域}\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\\\text{时域}\dfrac{1}{jt}+\pi\delta(t)\leftrightarrow\text{频域}2\pi\cdot u(-\omega)\end{cases}$，再结合性质①奇偶虚实性，$\begin{cases}u(t)\leftrightarrow F(\omega)\\u(-t)\leftrightarrow F(-\omega)\end{cases}$

则有$\begin{cases}\text{时域}u(t)\leftrightarrow\text{频域}\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\\\text{时域}\dfrac{1}{-jt}+\pi\delta(-t)\leftrightarrow\text{频域}2\pi\cdot u(\omega)\end{cases}$

$$\Rightarrow\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega\right]=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\Omega)\cdot\left[\frac{1}{-jt}+\pi\delta(-t)\right]\cdot e^{j(\Omega\cdot t)}d\Omega=\left[\frac{1}{-jt}+\pi\delta(-t)\right]\cdot\overbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\Omega)\cdot e^{j(\Omega\cdot t)}d\Omega\right]}^{\text{这就是目标}f(t)!\ \text{德玛西亚}\sim\sim}$$

$$\Rightarrow\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega\right]=\left[\frac{1}{-jt}+\pi\delta(-t)\right]\cdot f(t)=\frac{f(t)}{-jt}+\pi\delta(t)\cdot f(0)$$

总结⑨、⑩：$\begin{cases}\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\dfrac{F(\omega)}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\cdot F(0)\\\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega\right]=\dfrac{f(t)}{-jt}+\pi\delta(t)\cdot f(0)\end{cases}$

# 傅立叶变换总结：

傅里叶积分公式：$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}d\tau\right]\cdot e^{j(\omega t)}d\omega$

$$\Rightarrow\begin{cases}F(\omega)=\mathscr{F}[f(\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-j(\omega\cdot\tau)}d\tau\\f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j(\omega\cdot t)}d\omega\end{cases}\Leftrightarrow[f(t)\leftrightarrow F(\omega)]$$

| 性质 | 时域 $f(t)$ | 频域 $F(\omega)$ | 时域频域对应关系 |
|---|---|---|---|
| ①奇偶虚实性 | $\begin{cases}f(t)\\f^*(t)\\f^*(-t)\end{cases}$ | $\begin{cases}F(-\omega)\\F^*(-\omega)\\F^*(\omega)\end{cases}$ | 偶函数**同实虚**，奇函数**反实虚**，时域频域**同奇偶**。 |
| | $\begin{cases}f(t)\text{为实偶函数}\\f(t)\text{为实奇函数}\\f(t)\text{为虚偶函数}\\f(t)\text{为虚奇函数}\end{cases}$ | $\begin{cases}F(\omega)\text{为实偶函数}\\F(\omega)\text{为虚奇函数}\\F(\omega)\text{为虚偶函数}\\F(\omega)\text{为实奇函数}\end{cases}$ | |
| ②尺度变换特性 | $f(at+b)$ | $\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\cdot F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)\cdot e^{j\left(\omega\cdot\frac{b}{a}\right)}$ | 时域**压缩**，频域扩展<br>时域**扩展**，频域压缩 |
| | $f(-t)$ | $F(-\omega)$ | **反褶** |
| ③波形对称相似性 | 时域波形$\begin{cases}f(t)\\F(t)\end{cases}$ | $\left.\begin{matrix}F(\omega)\\2\pi\cdot f(-\omega)\end{matrix}\right\}$频域波形 | 时域波形与频域波形的对应关系具有**对称相似**特性 |
| ④时移特性 | $f(t\pm t_0)$ | $F(\omega)\cdot e^{\pm j(\omega\cdot t_0)}$ | 时移**同号**<br>频移**反号** |
| ⑤频移特性 | $f(t)\cdot e^{\mp j(\omega_0\cdot t)}$ | $F(\omega\pm\omega_0)$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⑥线性性质 | $f(t)=\sum_{i=1}^{n}[a_i\cdot f_i(t)]$ | $F(\omega)=a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}[F_i(\omega)]$ | 由积分的线性性质决定 |
| ⑦时域微分特性 | $f^{(n)}(t)=\frac{d^n[f(t)]}{dt^n}$ | $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n\cdot F(\omega)$ | 时域**微分** ***n*** 次<br>频域**×(*jω*)**因式 ***n*** 次 |
| ⑧频域微分特性 | $\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^n\cdot f(t)$ | $F^{(n)}(\omega)=\frac{d^n[F(\omega)]}{d\omega^n}$ | 频域**微分** ***n*** 次<br>时域**×(-*jt*)**因式 ***n*** 次 |
| ⑨时域积分特性 | $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$ | $\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi\cdot\delta(\omega)\cdot F(0)$ | 时域**积分**至 t，<br>频域÷**(*jω*)**因式+冲激 *δ* |
| ⑩频域积分特性 | $\frac{f(t)}{-jt}+\pi\cdot\delta(t)\cdot f(0)$ | $\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega$ | 频域**积分**至Ω，<br>时域÷**(-*jt*)**因式+冲激 *δ* |
| **XI** 时域卷积定理 | $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$ | $F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$ | 时域**卷积**，频域**乘积** |
| **XII** 频域卷积定理 | $2\pi\cdot[f_1(t)\cdot f_2(t)]$ | $F_1(\omega)*F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\Omega)\cdot F_2(\omega-\Omega)d\Omega$ | 频域**卷积**，时域**乘积** |
| **XIII** 时域抽样定理 | $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[f(t)\cdot\delta(t-n\cdot T_s)]$ | $\frac{1}{T_s}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[F(\omega-n\cdot\omega_s)]$ | 时域**冲激抽样** |
| **XIV** 频域抽样定理 | $\frac{1}{\omega_s}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[f(t-n\cdot T_s)]$ | $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[F(\omega)\cdot\delta(\omega-n\cdot\omega_s)]$ | 频域**冲激抽样** |
| **XV** 相关性 | $\left\{\begin{matrix}R_{12}(\tau)\\R_{21}(\tau)\end{matrix}\right.$ | $\left.\begin{matrix}F_1(\omega)\cdot F_2^*(\omega)\\F_1^*(\omega)\cdot F_2(\omega)\end{matrix}\right\}$ | |
| **XVI** 自相关性 | $R(\tau)$ | $\lvert F(\omega)\rvert^2$ | |