# 2014年考研数学一真题学习训练网络

## 第一部分：单选题（八×4 分）

(1)下列曲线中有渐近线的是

(A)$y=x+\sin x$

(B)$y=x^2+\sin x$

(C)$y=x+\sin\frac{1}{x}$

(D)$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

解：渐近线一定是直线；曲线$y=f(x)$的渐近线为$y=ax+b$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0$。

方法一：观察四个选项，可能渐近线只能是$y=x$，首先考虑$C$选项$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x+\sin\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$;

从而确定$C$选项正确,(根据考试规律，第一题选择$B$、$C$的概率比较大，所以优先考虑); 进而确信$A$选项没有渐近线。

(2)设函数$f(x)$具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上

(A)当$f'(x)\ge 0$时，$f(x)\ge g(x)$.

(B)当$f'(x)\ge 0$时，$f(x)\le g(x)$.

(C)当$f''(x)\ge 0$时，$f(x)\ge g(x)$.

(D)当$f''(x)\ge 0$时，$f(x)\ge g(x)$.

解：方法一：令$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$，$F'(x)=f'(x)+f(0)-f(1)$，$F''(x)=f''(x)$，

【根据题目的前提假设，正确答案应与$f''(x)$有关】，当$f''(x)\ge 0$时，$F''(x)\ge 0$，根据“二阶导数大于等于0，原函数在对应区间上是凹的”，

即$F(x)$在区间$[0,1]$上是凹的，而$F(0)=f(0)-f(0)=0$，$F(1)=f(1)-f(1)=0$，

即在区间$[0,1]$端点处$F(x)$为0，且是凹的，从而推出，在区间$[0,1]$上，$F(x)=f(x)-g(x)\le 0$，进而推得$f(x)\le g(x)$，综上，$D$选项正确；

方法二：根据方法一的计算(或者是题意)，容易得到$\begin{cases}g(0)=f(0)\\g(1)=f(1)\end{cases}$，且$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，是一条直线，过两个点$A(0,\ f(0))$、$B(1,\ f(1))$;

而函数$f(x)$也过两个点$A(0,\ f(0))$、$B(1,\ f(1))$；若$f''(x)\ge 0$，那么$f(x)$在区间$[0,1]$上过$A$、$B$且是凹的，而$g(x)$在区间$[0,1]$上过$A$、$B$且是直的，

所以有$g(x)\ge f(x)$的结果，综上，$D$选项正确；

方法三：构造函数表达式，利用中值定理替换。令$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$，则$F(x)=f(x)[(1-x)+x]-f(0)(1-x)-f(1)x$

$=f(x)(1-x)+f(x)x-f(0)(1-x)-f(1)x$

$=[f(x)-f(0)](1-x)+[f(x)-f(1)]x$，构造区间

$=[f(x)-f(0)](1-x)-[f(1)-f(x)]x$，得到了$[0,\ x]$和$[x,1]$两个完备区间:$[0,\ x]+[x,1]=[0,1]$

$=[f'(\xi)(x-0)](1-x)-[f'(\eta)(1-x)]x$，$\Leftarrow$利用函数的中值定理，然后便于化简，$\xi\in[0,\ x]$；$\eta\in[x,1]$

$=f'(\xi)x(1-x)-f'(\eta)(1-x)x$

$=x(1-x)[f'(\xi)-f'(\eta)]$，$\xi\in[0,\ x]$；$\eta\in[x,1]$；当$f''(x)\ge 0$时，$f'(x)$单调递增，那么有$\begin{cases}x\ge 0\\1-x\ge 0\\f'(\xi)-f'(\eta)\le 0\end{cases}$

$\Rightarrow F(x)\le 0\Leftrightarrow f(x)\le g(x)$，从中可看到，$f'(x)\ge 0$或$f'(x)\le 0$并不能说明什么。

**该题启示：** ①重视题干的条件：本题中“设$f(x)$存在二阶导数”，要引起警觉，命题人为何要说明该条件，对比选项，如果选择了$f'(x)$大选项，那么命题人的说明条件不是充当花瓶了吗?是命题人傻还是你真傻？？

②有了①的深刻感觉，对于该题，可以对抽象函数$f(x)$特殊取值化，利用排除法解题。

③但是，应该掌握正统的解题方法，因为那更明确、有底，且往往更节约时间，因为你只需要确定一个正确选项；排除法有运气成分，最多需要排除三个选项。

(3)设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$

(A)$\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B)$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

解：根据题意，积分区域$D=\left\{(x,y)\middle|-\sqrt{1-y^2}\le x\le 1-y,0\le y\le 1\right\}$，即$\begin{cases} x\ge-\sqrt{1-y^2} & \text{区域①} \\ x\le 1-y & \text{区域②} \\ y\ge 0 & \text{区域③} \\ y\le 1 & \text{区域④} \end{cases}$

根据区域①②③④画出区域$D$的图形如图$3-a$所示，区域D可分为两部分：$D_1$等腰直角三角形和$D_2$直角圆弧，这两部分区域的直角坐标表示分别为：$D_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1-x\end{cases}$；$D_2\begin{cases}0\le y\le 1\\ \begin{cases}x\le\sqrt{1-y^2}\\x\le 0\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow D_2\begin{cases}-1\le x\le 0\\0\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{cases}$，

变换为极坐标表示为$D_1\begin{cases}0\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta},\begin{cases}y=1-x\\r\sin\theta=1-r\cos\theta\end{cases}\\0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$；$D_2\begin{cases}0\le r\le 1,\begin{cases}x^2+y^2=1\\(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=1\end{cases}\\\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{cases}$

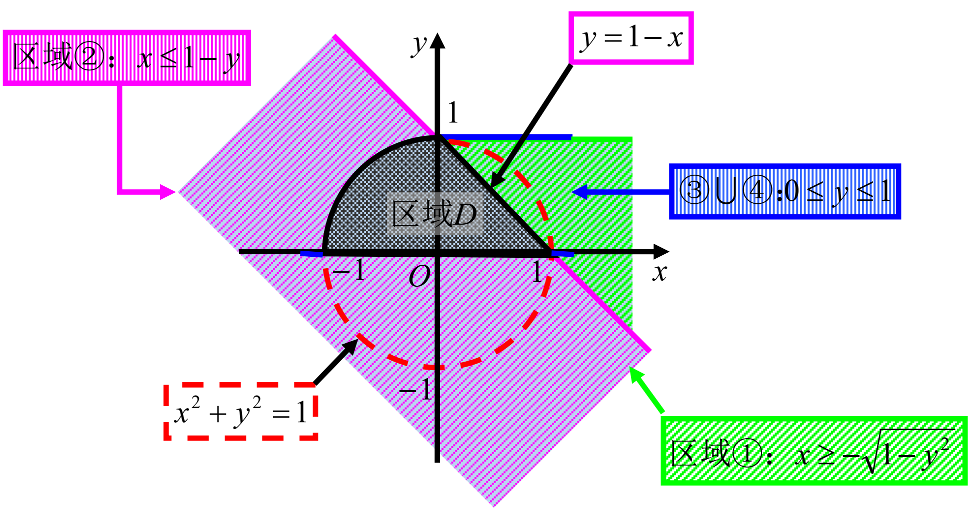
因此，有$\begin{cases}\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\\ \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\end{cases}$

综上，对比各选项，$D$选项正确。

该题启示：①积分区域的直角坐标表示以及各边界曲线确定的区域，需要重点理解、训练，对于常见的积分区域，烂熟于心；

②对于该题，想到直角坐标转化为极坐标(这是根据选项$C$、$D$透露的信息)，对比$C$、$D$，很快能确定$D$选项是正确答案；

③通过具体的演算分析，$A$、$B$选项之间的细小差异进行组合能得到正确的结果，这提示着我们，这种题就根据结果反推！




图$3-a$

(4)若$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,\ b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$，则$a_1\cos x+b_1\sin x=$

(A)$2\sin x$
(B)$2\cos x$
(C)$2\pi\sin x$
(D)$2\pi\cos x$

> 方法三为考试理想解答方法，抓住二元函数极值(最小值)的考点；
> 方法一为专业解法，需要对傅里叶级数蕴含的均方逼近思想有深刻认识；
> 方法二为平庸解法，计算复杂度不大，但是较耗费时间，且容易导致计算问题。

解：方法一(专业解法)：傅里叶级数就是一种均方逼近，则使得$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx$

最小的$a$和$b$就是函数$f(x)=x$的傅里叶级数相应的系数，即$\begin{cases}a=a_1=\dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\cos 1xdx=0\\ b=b_1=\dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 1xdx=\int_0^{\pi}\sin xdx=2\end{cases}$，

则$a_1\cos x+b_1\sin x=2\sin x$，综上，$A$选项正确。

方法二(通用计算法)：令$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}[x-(a\cos x+b\sin x)]^2dx$，

则$I=\int_{-\pi}^{\pi}\left[x^2-2(a\cos x+b\sin x)\bullet x+(a\cos x+b\sin x)^2\right]dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[x^2-2(a\cos x\bullet x+b\sin x\bullet x)+(a^2\cos^2x+2ab\cos x\sin x+b^2\sin^2x)\right]dx$，注意到积分区间为对称区间，

$$=\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-2b\sin x\bullet x+a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)dx}^{\text{偶函数，对称积分}}+\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}(-2a\cos x\bullet x+2ab\cos x\sin x)dx}^{\text{奇函数，积分结果为0}},$$

$$=2\int_0^{\pi}(x^2-2b\sin x\bullet x+a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)dx=2\left(\int_0^{\pi}x^2dx+\int_0^{\pi}-2b\sin x\bullet xdx+\int_0^{\pi}a^2\cos^2xdx+\int_0^{\pi}b^2\sin^2xdx\right)$$

$$=2\left[\frac{1}{3}\left(x^3\Big|_0^{\pi}\right)+(2b)(x\cos x-\sin x)\Big|_0^{\pi}+a^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}+b^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}\right]，\text{记住}\begin{cases}\int_0^{\pi}x\sin xdx=\pi\\ \int_0^{\pi}x\cos xdx=-2\end{cases}$$

$$=2\left[\frac{\pi^3}{3}-2b\pi+\frac{a^2\pi}{2}+\frac{b^2\pi}{2}\right]=\frac{2\pi^3}{3}+a^2\pi+(b^2\pi-4b\pi)=\pi(a^2)+\pi(b-2)^2+\left(\frac{2\pi^3}{3}-4\pi\right),$$

考虑$\begin{cases}a^2\ge 0\\(b-2)^2\ge 0\end{cases}$，当且仅当$\begin{cases}a^2=0\\(b-2)^2=0\end{cases}$时，$I_{\min}=\dfrac{2\pi^3}{3}-4\pi$，此时$a=0$；$b=2$【很明显$I_{\max}$不存在】

方法三(技巧视野)：根据题意，要确定两个待定参变量$a$、$b$的值，考虑二元函数$z(a,\ b)=I$，

根据二元函数取得极值的必要条件(最值属于极值)，令$\begin{cases}z_a'(a,\ b)=0\\ z_b'(a,\ b)=0\end{cases}$($\varphi$式)，由于是选择题，

可以确定$\varphi$式求得的$a$、$b$即为标准答案，$\overbrace{\text{由于}I\text{是定积分，其最终结果只会含有待定参量}a\text{、}b}^{\text{积分式的视角！本解法的任督二脉！！}}$，

$$\varphi\text{式等价于：}\begin{cases}\dfrac{d\left[\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right]}{da}=0\\ \dfrac{d\left[\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right]}{db}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi}2(x-a\cos x-b\sin x)\bullet(-\cos x)dx=0\\ \int_{-\pi}^{\pi}2(x-a\cos x-b\sin x)\bullet(-\sin x)dx=0\end{cases},$$

根据奇函数、偶函数在对称区间积分的特点，有$\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi}2a\cos^2xdx=0\\ \int_{-\pi}^{\pi}2(b\sin^2x-x\sin x)dx=0\end{cases}$，继续化简得到

$$\begin{cases}4a\int_0^{\pi}\cos^2xdx=0\\ 4\left(\int_0^{\pi}b\sin^2xdx-\int_0^{\pi}x\sin xdx\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\cdot\dfrac{\pi}{2}=0\\ b\cdot\dfrac{\pi}{2}-\pi=0\end{cases}，\text{从而解得极值条件}\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$$

(5)行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$

A.$(ad-bc)^2$

B.$-(ad-bc)^2$

C.$a^2d^2-b^2c^2$

D.$b^2c^2-a^2d^2$

解：此题好用拉普拉斯行列式定理。

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \overbrace{\Rightarrow}^{1、4行交换} -\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} \overbrace{\Rightarrow}^{2、4列交换} \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = (cb-ad)\bullet(da-cb)$$

$=-(ad-bc)^2$，综上所述，选择$B$。

(6)设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$均为3维向量，则对任意常数$k$，$l$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的( )

A.必要非充分条件

B.充分非必要条件

C.充分必要条件

D.既非充分也非必要条件

解：设$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$，则$(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{bmatrix}$。

若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$为三阶可逆矩阵，

(7)设随机事件$A$与$B$独立，且$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则$P(B-A)=(\ )$

A.0.1

B.0.2

C.0.3

D.0.4

解：题干$A$、$B$独立，因而$A$、$\overline{B}$独立；$\overline{A}$、$B$独立，所以有：

$$\begin{cases} P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.3 \\ P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A}) \end{cases}，则\begin{cases} P(B)=P(\overline{B})=0.5 \\ P(A)P(\overline{B})=0.3 \Rightarrow P(A)=0.6，综上所述，B选项正确 \\ P(B)P(\overline{A})=0.5\cdot 0.4=0.2 \end{cases}$$

(8)设连续型随机变量$X_1$与$X_2$相互独立且方差均存在，$X_1$与$X_2$概率密度分别为$f_1(x)$与$f_2(x)$，随机变量$Y_1$的概率密度$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则

A.$E[Y_1]>E[Y_2]$，$D[Y_1]>D[Y_2]$

B.$E[Y_1]=E[Y_2]$，$D[Y_1]=D[Y_2]$

C.$E[Y_1]=E[Y_2]$，$D[Y_1]<D[Y_2]$

D.$E[Y_1]=E[Y_2]$，$D[Y_1]>D[Y_2]$

解：方法一：$E\left[(Y_1)^1\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}y^1 f_{Y_1}(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}y^1\left(\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]\right)dy=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}y^1 f_1(y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}y^1 f_2(y)dy\right]=\frac{1}{2}(E[X_1]+E[X_2])$

$E\left[(Y_2)^1\right]=E\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=\frac{1}{2}(E[X_1]+E[X_2])$，$E[Y_1]-E[Y_2]=\frac{1}{2}(E[X_1]+E[X_2])-\frac{1}{2}(E[X_1]+E[X_2])=0$；

$\therefore E[Y_1]=E[Y_2]$；

而$D[Y_1]=E\left[(Y_1-E[Y_1])^2\right]=E\left[(Y_1)^2-2(Y_1)E(Y_1)+(E[Y_1])^2\right]=E\left[(Y_1)^2\right]-2(E[Y_1])^2+(E[Y_1])^2=\overbrace{E\left[(Y_1)^2\right]-(E[Y_1])^2}^{方差=二阶原点矩-(一阶原点矩)^2}$

$\therefore D[Y_1]-D[Y_2]=\left\{E\left[(Y_1)^2\right]-(E[Y_1])^2\right\}-\left\{E\left[(Y_2)^2\right]-(E[Y_2])^2\right\}$

$=E\left[(Y_1)^2\right]-(E[Y_1])^2-E\left[(Y_2)^2\right]+(E[Y_2])^2$，由于$E[Y_1]=E[Y_2]$

$=E\left[(Y_1)^2\right]-E\left[(Y_2)^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\left(\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]\right)dy-E\left[\left(\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left(E\left[(X_1)^2\right]+E\left[(X_2)^2\right]\right)-\frac{1}{4}\left(E\left[(X_1)^2\right]+E\left[(X_2)^2\right]+2E[X_1]E[X_2]\right)$

$\therefore D[Y_1]-D[Y_2]=\frac{1}{4}\left(E\left[(X_1)^2\right]+E\left[(X_2)^2\right]+2E[X_1]E[X_2]\right)=\frac{1}{4}E\left[(X_1-X_2)^2\right]\geq 0$，由于$X_1$、$X_2$独立，因而必有$E\left[(X_1-X_2)^2\right]>0$，

$\therefore D[Y_1]>D[Y_2]$；综上所述，$D$选项正确。

方法二：灵活运用$E[X]$、$D[X]$的性质。

## 第二部分：填空题（六×4 分）

(9)曲面$z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点$(1,0,1)$的切平面方程为

解：抓住曲面Σ的法向量。切平面方程的求法步骤：

①构建曲面Σ标准方程$F(x,y,z)=0$；②求出曲面Σ在点$Q$的法向量$M(F_x',F_y',F_z')$

③切平面方程 ⇔ 法向量点法式：$F_x'(x-Q_x)+F_y'(y-Q_y)+F_z'(z-Q_z)=0$；

④法线方程 ⇔ 法向量截距比例式：$\dfrac{(x-Q_x)}{F_x'}=\dfrac{(y-Q_y)}{F_y'}=\dfrac{(z-Q_z)}{F_z'}=t$，可列出法向量截距参数式

与此对应的题型为：曲线$L$在点$P$处的切线和法平面方程。

抓住曲线$L$的方向向量，切线方程求法步骤：

①构建曲线$L$的标准参数方程$\begin{cases}x=X(t)\\y=Y(t)\\z=Z(t)\end{cases}$；②求出曲线$L$在点$P$的方向向量$M(X_t',Y_t',Z_t')$

③法平面方程 ⇔ 方向向量点法式：$X_t'(x-Q_x)+Y_t'(y-Q_y)+Z_t'(z-Q_z)=0$；

④切线方程 ⇔ 方向向量截距比例式：$\dfrac{(x-Q_x)}{X_t'}=\dfrac{(y-Q_y)}{Y_t'}=\dfrac{(z-Q_z)}{Z_t'}=t$，可列出方向向量截距参数式

令$F(x,y,z)=(1-\sin y)x^2+(1-\sin x)y^2-z=0$，则$\begin{cases}F_x'=2x(1-\sin y)-y^2\cos x\\F_y'=2y(1-\sin x)-x^2\cos y\Rightarrow \vec{F}'\big|_{(1,0,1)}=(2,-1,-1)\\F_z'=-1\end{cases}$

$\therefore$题求切平面方程为$2(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0$，即$2x-y-z=1$

(10)设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1)$，$x\in(0,2)$，则$f(7)=$

解：$f(x)$为可导函数且$f'(x)=2(x-1)$，则$f(x)=x^2-2x+C$，$x\in(0,2)$；

$f(x)$为奇函数，则$f(0)=0\Rightarrow C=0$，$f(1)=1-2=-1$，$f(2)=0$；

$f(x)$为周期函数，则$f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-(-1)=1$

(11)微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=e^3$的解$y=$

解：由原始微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$知，$x>0$，$y>0$；利用比例变形得：$y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，

令$\dfrac{y}{x}=u$【$u$为$x$、$y$的函数！！】，则$y=ux$，$y'=(ux)'=u'x+u\cdot 1=u'x+u$，

$\therefore u'x+u=u\ln u\Rightarrow \dfrac{du}{dx}x=u(\ln u-1)\Rightarrow \dfrac{1}{u(\ln u-1)}du=\dfrac{1}{x}dx\Leftrightarrow \dfrac{1}{(\ln u-1)}d(\ln u-1)=\dfrac{1}{x}dx$，

从而$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln C,(C>0)$由原始微分方程确定的$x>0$，得$\ln|\ln u-1|=\ln x+\ln C=\ln Cx$，

$\therefore |\ln u-1|=Cx\Rightarrow \left|\ln\dfrac{y}{x}-\ln e\right|=Cx\Rightarrow\left|\ln\dfrac{y}{ex}\right|=Cx\Rightarrow\begin{cases}\ln\dfrac{y}{ex}=Cx，\ C>0\\ \ln\dfrac{y}{ex}=(-C)x，\ C>0\end{cases}\Leftrightarrow \ln\dfrac{y}{ex}=C_1x，\ C_1\in R$

$\therefore y=e\cdot x\cdot e^{C_1x}=xe^{C_1x+1}$，由$y(1)=e^3$得，$e^3=1\cdot e^{C_1\cdot 1+1}$，解得$C_1=2\Rightarrow y=xe^{2x+1}(x>0)$

(12)设$L$是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从$z$轴正向往$z$轴负向看去为逆时针方向，则

曲线积分$\oint_L zdx+ydz=$

此题很重要！
对于理解对曲面的二重曲面积分
对曲面的二重坐标积分
以及投影法、$dS$与$dxdy$之间的关系
很有裨益！

解：方法一：题干很明显地暗示了斯托克斯公式【因为涉及$x$、$y$、$z$三个维度】。

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

而本题中，$\begin{cases}P=z\\Q=0\\R=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=0,\frac{\partial P}{\partial z}=1\\\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\\\frac{\partial R}{\partial x}=0,\frac{\partial R}{\partial y}=1\end{cases}$ 即$\oint_L zdx+ydz=\iint_\Sigma(1)dydz+(1)dzdx+(0)dxdy$；$\therefore\oint_L zdx+ydz=\iint_\Sigma 1dydz+1dzdx=I$

【这是对三维曲面$\Sigma$的坐标积分，曲面$\Sigma$的方程已知：$\begin{cases}y+z=0,\text{ 主体}\\x^2+y^2=1,\text{ 边界}\end{cases}$】则曲面$\Sigma$的单位法向量为

$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}(F_x',\ F_y',\ F_z')$，则$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{(0)^2+(1)^2+(1)^2}}(0,1,1)$，$\therefore\vec{n}=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$，亦即$\begin{cases}\cos\alpha=0\\\cos\beta=1/\sqrt2\\\cos\gamma=1/\sqrt2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dydz=\cos\alpha\cdot dS=0\\dzdx=\cos\beta\cdot dS=1/\sqrt2\,dS,\\dxdy=\cos\gamma\cdot dS=1/\sqrt2\,dS\end{cases}$

$\therefore I=\iint_\Sigma(1\cdot0)dS+1\cdot1/\sqrt2\,dS=\iint_\Sigma\frac{1}{\sqrt2}dS=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\iint_\Sigma 1dS$【对曲面的曲面积分，转化为对曲面的坐标积分。】

根据曲面$\Sigma$的方程$\begin{cases}y+z=0,\text{ 主体}\\x^2+y^2=1,\text{ 边界}\end{cases}$，将$\Sigma$沿$z$轴投影到$xoy$平面，由曲面$\Sigma$主体$y+z=0$，沿$z$轴得到$z=-y$，投影比率

$\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}=\sqrt{1+(0)^2+(-1)^2}=\sqrt2$，即$dS=\sqrt2dxdy$，这也可以通过$dxdy=\cos\gamma\cdot dS\Rightarrow dS=\frac{1}{\cos\gamma}dxdy$来理解；

由曲面$\Sigma$边界$x^2+y^2=1$，沿z轴投影得到$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}$，则$I=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\iint_\Sigma 1dS=\iint_{D_{xy}}1dxdy=\pi\cdot1^2=\pi$。

方法二：方法一利用斯托克斯公式将“对三维闭合曲线积分”转化为“对三维曲面的二重坐标积分”，再根据曲面积分元$dS$与坐标积分元$d?d?$之间的投影比率关系【曲面主体的单位法向量$\vec{n}$】，又将“对三维曲面的二重坐标积分”转化为“对三维曲面的曲面积分”，这样做化简了积分式，最后又根据投影比率关系式，将“对三维曲面的曲面积分”转化为“对三维曲面的二重坐标积分”，反反复复得到最后的结果。

其实，可根据斯托克斯公式的曲面积分版本简化该过程，即：

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}dS\Rightarrow\oint_L zdx+ydz=\begin{cases}\begin{cases}F(x,\ y,\ z)=y+z=0\\\vec{n}=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\end{cases}\\\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\z&0&y\end{vmatrix}dS\end{cases}=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\iint_\Sigma 1dS,$$

或者，在方法一中，得到$\oint_L zdx+ydz=\iint_\Sigma 1dydz+1dzdx=I$后，进一步得到$I=\iint_{D_{yz}}1dydz+\iint_{D_{zx}}1dzdx$，由于曲面$\Sigma$的方程

$\begin{cases}y+z=0,\text{ 主体}\\x^2+y^2=1,\text{ 边界}\end{cases}$，由于$y+z=0$这个平面对于$y$轴和$z$轴的对称性，可以知道，$\Sigma$的投影$S_{D_{xy}}=S_{D_{xz}}$，而$D_{yz}$为直线$S_{D_{yz}}=0$

从而得到$I=\iint_{D_{zx}}1dzdx=\iint_{D_{xy}}1dzdx=\pi$

(13)设二次型$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数为1，则$a$的取值范围为

解：由配方法得：$f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+ax_3)^2-a^2x_3^2-(x_2-2x_3)^2+4x_3^2$

$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2, \because$ 负惯性指数为1, $\therefore 4-a^2\geq 0\Rightarrow a\in[-2,2]$

(14)设总体$X$的概率密度为$f(x; \theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta \\ 0, & 其他\end{cases}$，其中$\theta$是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$

是来自总体$X$的简单随机样本。若$c\sum_{i=1}^{n}X_i^2$是$\theta^2$的无偏估计，则$c=$

解：$E\left[c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]=c\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i^2\right]=c\cdot n\bullet E\left[X^2\right]=cn\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=cn\int_{\vartheta}^{2\theta}\dfrac{2x^3}{3\theta^2}dx=\dfrac{cn}{6\theta^2}\cdot x^4\Big|_{\theta}^{2\theta}=\dfrac{5}{3}cn\cdot\theta^2,$

根据题干假设，$c\sum_{i=1}^{n}X_i^2$是$\theta^2$的无偏估计，$\therefore E\left[c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]=\theta^2$，即$\dfrac{5}{3}cn\cdot\theta^2=\theta^2\Rightarrow c=\dfrac{3}{5n}$

## 第三部分：解答题（五×10 分+2×11 分+2×11 分）

常见函数的泰勒级数：

(15)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

解：原极限变量$x\to+\infty$，则有$\dfrac{1}{x}\to 0$，利用等价无穷小、洛必达以及泰勒公式化简求解；

且考虑变上限积分的求导公式：$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt\Rightarrow F'(x)=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$。

I. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\overset{\overbrace{\text{等价无穷小}}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}$【可否用洛必达？？】

II. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}$【无从用等价无穷小，推断I式是可行的】

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$，这个结果很容易得到0，

考虑泰勒级数$e^x=1+\dfrac{x^1}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}-1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{6x^3}+o\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^3\right]$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left[\left(\frac{1}{x}\right)^3\right]\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}+o\left[\left(\frac{1}{x}\right)^3\right]\right)=\frac{1}{2}$$

(16)设函数$y=f(x)$由方程$y^3+xy^2+x^2y+6=0$确定，求$f(x)$的极值。

解：极值点的判定结论：如果$f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=f^{(3)}(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，

那么，当$n$为偶数时，如果$f^{(n)}(x_0)>0$，那么$f(x_0)$为原函数的极小值；如果$f^{(n)}(x_0)<0$，那么$f(x_0)$为极大值；

当$n$为奇数时，可根据$f^{(n)}(x_0)\neq 0$直接得到$f(x_0)$不是极值点，如果$n$为奇数且$n\geq 3$，那么$f(x_0)$是拐点而非极值点。

所以，根据方程$y^3+xy^2+x^2y+6=0$得，$3y^2\cdot y'+y^2+2xy\cdot y'+2xy+x^2\cdot y'=0$，即$(3y^2+2xy+x^2)y'+(y^2+2xy)=0$。

由于题目求极值，因而可使用$f^{(1)}(x_0)=0$，$f^{(2)}(x_0)\neq 0$，即令$y'=0$，那么$y\cdot(y+2x)=0\Rightarrow y=0$或$y=-2x$，而

$y=0$显然不满足原方程，因而得到$y=-2x$。【这时不要犯傻，认为题目出错，因为函数$y=-2x$无极值。。。】

根据上述只能确立$y=-2x$是原方程的解，因而将$y=-2x$带入原方程得：$x^3=1\Rightarrow x_0=1$，$y(1)=-2$，$y'(1)=0$;

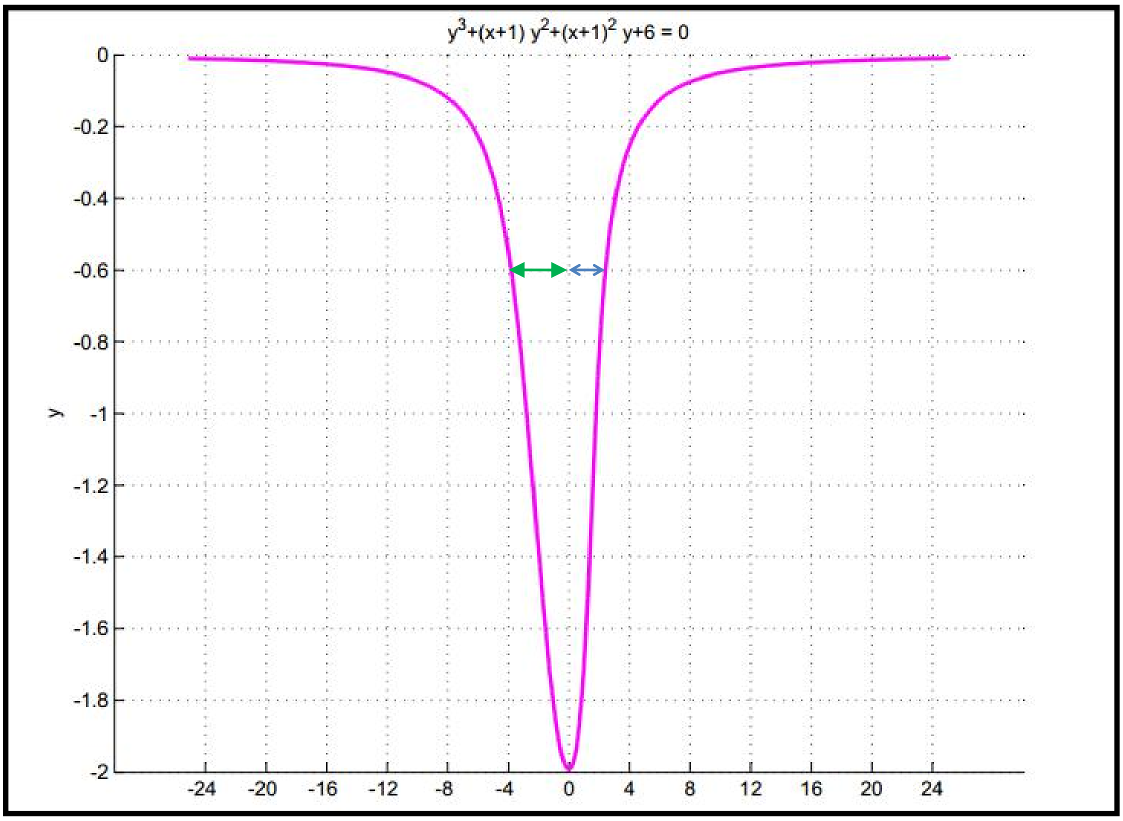
所以，在$y'=0$的条件下，得到$\begin{cases}x_0=1\\ f(x_0)=-2\\ f^{(1)}(x_0)=0\end{cases}$，下面，只要得出$f^{(2)}(x_0)\neq 0$即可得到函数$y=f(x)$的极值。

对$(3y^2+2xy+x^2)y'+(y^2+2xy)=0$继续求导得：

$[6yy'+2(y+xy')+2x]y'+(3y^2+2xy+x^2)y''+2yy'+2(y+xy')=0$，即

$(3y^2+2xy+x^2)y''+6y(y')^2+4y(y')+2x(y')^2+2x(y')+2y=0$，带入$\begin{cases}x_0=1\\ f(x_0)=-2\\ f^{(1)}(x_0)=0\end{cases}$得，$(12-4+1)y''-4=0\Rightarrow y''=\dfrac{4}{9}>0$，

由此得到原方程确定的函数$y=-2x$，在$x_0=1$处，一阶导数为0，二阶导数$\neq 0$且二阶导数$>0\Rightarrow y(x_0)=-2$为极小值。



(17)设函数$f(u)$具有二阶连续导数，$z=f\left(e^x\cos y\right)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4z+e^x\cos y\right)e^{2x}$，

若$f(0)=f'(0)=0$，求$f(u)$的表达式。

解：此题即为复合函数求导的问题，按照普通方法解答即可。

由题意，令$u=e^x\cos y$，则$z=f(u)$，$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot e^x\cos y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)\cdot e^x\sin y$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left[f'(u)\cdot e^x\cos y\right]}{\partial x}=\left[f'(u)\right]\cdot e^x\cos y+f'(u)\cdot\left(e^x\cos y\right)=\left[f''(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right]\cdot e^x\cos y+f'(u)e^x\cos y$$

$$=f''(u)\cdot\left(e^x\cos y\right)\cdot e^x\cos y+f'(u)e^x\cos y=f''(u)\cdot u^2+f'(u)\cdot u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[-f'(u)\cdot e^x\sin y\right]=-e^x\left[f'(u)\cdot\sin y\right]=-e^x\left[\left(f''(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\sin y+f'(u)\cos y\right]$$

$$=f''(u)\left(e^x\sin y\right)^2-f'(u)\cdot u$$

则：$\left[f''(u)\cdot u^2+f'(u)\cdot u\right]+\left[f''(u)\left(e^x\sin y\right)^2-f'(u)\cdot u\right]=\left[4f(u)+u\right]e^{2x}$

即$f''(u)\cdot e^{2x}\left(\cos^2 y+\sin^2 y\right)=4f(u)e^{2x}+ue^{2x}\Leftrightarrow f''(u)-4f(u)=u$，得到一个二阶微分方程，

从信号与系统的角度来看，等式右边为输入极其各阶导数$=u$，等式左边为输出极其各阶导数，

为$f''(u)-4f(u)$，利用齐次方程的通解，即特征方程的解，和非齐次方程的通解，即冲激函数匹配解，

$$\text{得到:}\begin{cases}f''\left(\overbrace{u}^{\text{指定了变量域}}\right)-4f(u)=0\Rightarrow\lambda^2-4\lambda^0=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\ \lambda_2=2\Rightarrow\text{通解为}y^{\#}=f^{\#}(u)=\overbrace{C_1e^{-2u}}^{u\text{为变量所在域}}+C_2e^{2u}\\ f''(u)-4f(u)=u\Rightarrow\text{设}y^{*}=f^{*}(u)=au+b\text{，则}(au+b)''-4(au+b)=u\Rightarrow a=-\tfrac{1}{4},\ b=0\Rightarrow y^{*}=f^{*}(u)=-\tfrac{1}{4}u\end{cases}$$

$\therefore f(u)=f^{\#}(u)+f^{*}(u)=C_1e^{-2u}+C_2e^{2u}-\dfrac{u}{4}$，根据初始条件$\begin{cases}f(0)=0\\f'(0)=0\end{cases}$得：

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\-2C_1+2C_2-\dfrac{1}{4}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-\dfrac{1}{16}\\C_2=\dfrac{1}{16}\end{cases}\Rightarrow f(u)=\frac{-1}{16}e^{-2u}+\frac{1}{16}e^{2u}+\frac{-1}{4}u$$

常见二阶常线性微分方程的齐次解、特解与通解：形如$y''+Py'+Qy=\left(a_0+a_1\cdot x\right)\cdot e^{kx}$，$P$、$Q$、$a_0$、$a_1$、$k$为已知常数。

步骤①：列出其齐次线性方程为：$\lambda^2+P\lambda+Q=0\Rightarrow$得到两个根$\lambda_1$、$\lambda_2$，根据这两个根的情况进行判断；

$$\text{步骤②：}\begin{cases}\text{若}\lambda_1\neq\lambda_2\text{且均为实根，则该齐次方程的齐次解为}y^{\#}=C_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x}+C_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}\\ \text{若}\lambda_1=\lambda_2=\lambda\text{且为实根，则该齐次方程的齐次解为}y^{\#}=\left(C_1+C_2\cdot x\right)\cdot e^{\lambda\cdot x}\\ \text{若}\begin{cases}\lambda_1=\alpha+j\beta\\\lambda_2=\alpha-j\beta\end{cases}\text{(互为共轭根)，则该齐次方程的齐次解为}y^{\#}=\left[C_1\cos(\beta\cdot x)+C_2\cdot\sin(\beta\cdot x)\right]\cdot e^{\alpha\cdot x}\end{cases}$$

步骤③：观察原微分方程右边，$\left(a_0+a_1\cdot x\right)\cdot e^{kx}$，指数函数$e^{kx}$，根据$k$的情况进行分类公式化处理。令$f(\lambda)=\lambda^2+P\lambda+Q$

$$\begin{cases}\text{若}k\neq\lambda_1\text{且}k\neq\lambda_2\text{，即}k\text{不等于特征根，那么特解}y^{*}=\left(b_0+b_1x\right)e^{kx}\text{，其中}\begin{cases}b_0=\dfrac{a_0-b_1\cdot f'(k)}{f(k)}\\b_1=\dfrac{a_1}{f(k)}\end{cases}\\ \text{若}k=\lambda_1\text{且}k\neq\lambda_2\text{且}k\text{为实数，即}k\text{等于单个实数特征根，那么特解}y^{*}=x\cdot\left(b_0+b_1x\right)e^{kx}\text{，其中}\begin{cases}b_0=\dfrac{a_0-2b_1}{f(k)}\\b_1=\dfrac{a_1}{2f'(k)}\end{cases}\\ \text{若}k=\lambda_1\text{且}k=\lambda_2\text{且}k\text{为实数，即}k\text{等于重二实数特征根，那么特解}y^{*}=x^2\cdot\left(b_0+b_1x\right)e^{kx}\text{，其中}\begin{cases}b_0=\dfrac{a_0}{2}\\b_1=\dfrac{a_1}{6}\end{cases}\end{cases}$$

步骤④：原微分方程的通解$y=y^{\#}+y^{*}$。

说明，对于原微分方程右边为$\sin x$或$\cos x$的形式，可以考虑用欧拉公式$e^{ikx}=\cos(kx)-i\sin(kx)$，根据叠加定理分步求解。

二阶常线性微分方程通解强化公式以及理解拓展训练：

$$\text{对于形如}\begin{cases} y^{''}+Py^{'}+Q=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i\cdot x^i\right)\bullet e^{k\cdot x} \\ \text{特征方程：}\lambda^2+P\lambda+Q=0 \end{cases}\text{，其齐次解}y^{\#}=\begin{cases} C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x} \\ \left(C_1+C_2x\right)e^{\lambda x} \\ \left[C_1\cos(\beta\cdot x)+C_2\sin(\beta\cdot x)\right]e^{\alpha x} \end{cases}$$

$$\text{其特解}y^{*}=x^{\mathrm{S}}\sum_{i=0}^{n}\left(b_i\cdot x^i\right)\bullet e^{k\cdot x},\begin{cases} \text{当}k\text{不等于特征根时，}\mathbf{S=0} \\ \text{当}k\text{等于单个实数特征根时，} \\ \text{当}k\text{等于二重实数特征根时，}\mathbf{S=2} \end{cases},\begin{cases} \text{令}f(\lambda)=\lambda^2+P\lambda+Q \\ \text{则}\begin{cases} f(k)=k^2+Pk+Q, \\ f^{'}(k)=2k+P \end{cases} \end{cases}$$

$$b_i=\begin{cases} \mathbf{S=0}\text{，即当}k\text{不等于特征根时，}\dfrac{a_i-(i+1)b_{i+1}\bullet f^{'}(k)-(i+1)(i+2)b_{i+2}}{f(k)} \\ \mathbf{S=1}\text{，即当}k\text{等于单个实数特征根时，}\dfrac{a_i-(i+1)(i+2)b_{i+2}}{(i+1)\cdot f^{'}(k)} \\ \mathbf{S=2}\text{，当}k\text{等于二重实数特征根时，}\dfrac{a_i}{(i+1)(i+2)} \end{cases}\text{，且注意}b_{n+2}=b_{n+1}=0$$

N阶微分方程

此法仍然通用！

实战训练：求微分方程$y^{''}+2y^{'}+y=\left(2x^4+x^3-x\right)\cdot e^{-x}$的通解。

解：易得特征方程$\lambda^2+2\lambda+1=0$，二重根$\lambda=-1$，求得齐次解$y^{\#}=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}$；若使用待定系数法求通解，

待定系数法规则：原微分方程右边的函数设为$G(x)\cdot e^{kx}$，$G(x)$为$x$的幂函数，$k$为已知常数，还是判断$k$：

$$\begin{cases} k\text{不等于特征根，则}\mathbf{S=0} \\ k\text{等于单个实数特征根，则}\mathbf{S=1}\Rightarrow\text{特解}y^{*}=x^{\mathrm{S}}F(x)\cdot e^{kx}\text{，其中}F(x)\text{与}G(x)\text{是}x\text{的同阶幂函数，} \\ k\text{等于二重实数特征根，则}\mathbf{S=2} \end{cases}$$

针对于本题而言，由于$k=-1$正好是二重实数特征根，$\therefore$应假设特解$y^{*}=x^2\cdot\left(b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\right)\cdot e^{kx}$，

即$y^{*}=\left(b_4x^6+b_3x^5+b_2x^4+b_1x^3+b_0x^2\right)\cdot e^{kx}$,$\left(y^{*}\right)^{'}=\left(6b_4x^5+5b_3x^4+4b_2x^3+3b_1x^2+2b_0x^1\right)\cdot e^{kx}+\left(b_4x^6+b_3x^5+b_2x^4+b_1x^3+b_0x^2\right)\cdot ke^{kx}$

$\left(y^{*}\right)^{''}=\ldots$【好复杂！！！！！！！！！！！】带入原方程得到:…

$$\text{公式法：}n=4(\text{四阶幂函数})\text{，}k=-1=\lambda\text{，}\mathbf{S=2}\text{，当}k\text{等于二重实数特征根时，}b_i=\frac{a_i}{(i+1)(i+2)}\text{，即有}\begin{cases} b_4=\dfrac{2}{5\cdot6}=\dfrac{1}{15} \\ b_3=\dfrac{1}{4\cdot5}=\dfrac{1}{20} \\ b_2=\dfrac{0}{3\cdot4}=0 \\ b_1=\dfrac{-1}{2\cdot3}=\dfrac{-1}{6} \\ b_0=\dfrac{0}{1\cdot2}=0 \end{cases}$$

$\therefore$特解$y^{*}=x^2\cdot\left(\frac{x^4}{15}+\frac{x^3}{20}+\frac{-x}{6}\right)\cdot e^{-x}=\left(\frac{x^6}{15}+\frac{x^5}{20}+\frac{-x^3}{6}\right)\cdot e^{-x}$，原微分方程的通解$y=y^{\#}+y^{*}$，即

通解$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+\left(\frac{x^6}{15}+\frac{x^5}{20}+\frac{-x^3}{6}\right)\cdot e^{-x}=\left(\frac{x^6}{15}+\frac{x^5}{20}+\frac{-x^3}{6}+C_2x+C_1\right)\cdot e^{-x}$，$C_1$、$C_2$为任意实数。

(18)设$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2(z\le 1)$的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy.$$

解：方法一：利用闭合曲面围成的三维空间高斯公式求解。

$\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$，注意，$\Sigma$为空间区域$\Omega$的外侧，$dV$为体积元。

曲面$\Sigma$非闭合，补曲面$\Sigma_1$：$z=1$，被$z=x^2+y^2$所截有限部分的下侧，根据高斯公式得：

$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy-\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$，$\Sigma+\Sigma_1$为内侧面，

$=-\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right]dV-\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$，曲面$\Sigma_1$为下侧，且平行于$xoy$平面，

$=-\iiint_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]dV-\iint_{\Sigma_1}(z-1)dxdy$，曲面$\Sigma_1$限制条件$\begin{cases}z=1(\text{指定}z\text{变量为定值})\\ z=x^2+y^2(\text{指定区间})\end{cases}$且为下侧，

在曲面$\Sigma_1$的定义区间上被积函数始终满足$f(x，y，z)=z-1=0$，从而有：

$=-\iiint_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]dV-\iint_{\Sigma_1}0dxdy$(且注意是下侧，应有负号)$=-\iiint_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]dV+\iint_{-(\Sigma_1)}0dxdy$

$=-3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dV+6\iiint_{\Omega}(x+y)dV-7\iiint_{\Omega}1dV$，对空间$\Omega$的体积积分，可转换为柱坐标系、球坐标系下的三重积分，

柱坐标系下:$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$且$\begin{cases}\mathrm{h}\le\rho\le\mathrm{k}\\ \alpha\le\theta\le\beta，\text{极限}[0,2\pi]\text{且应注意角度的旋转方向！！}\Rightarrow dV=\rho\bullet dz\cdot d\rho\cdot d\theta;\\ \mathrm{z}_1\le z\le\mathrm{z}_2\end{cases}$

球坐标系下:$\begin{cases}x=(r\cdot\sin\varphi)\cos\theta\\ y=(r\cdot\sin\varphi)\sin\theta\\ z=r\cdot\cos\varphi\end{cases}$且$\begin{cases}\varepsilon\le\varphi\le\lambda，\text{极限}[0，\pi]\\ \alpha\le\theta\le\beta，\text{极限}[0,2\pi]\text{且应注意角度旋转的方向！！}\Rightarrow dV=r^2\bullet\sin\varphi\bullet dr\cdot d\varphi\cdot d\theta。\\ \mathrm{h}\le r\le\mathrm{k}\end{cases}$

空间$\Omega$的边界方程$\begin{cases}z=1\\ z=x^2+y^2\end{cases}$，在柱坐标系下，将$\Omega$沿$z$轴投影到$xoy$面上，令$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$且$\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\\ x^2+y^2=\rho^2\le z\le 1\end{cases}$

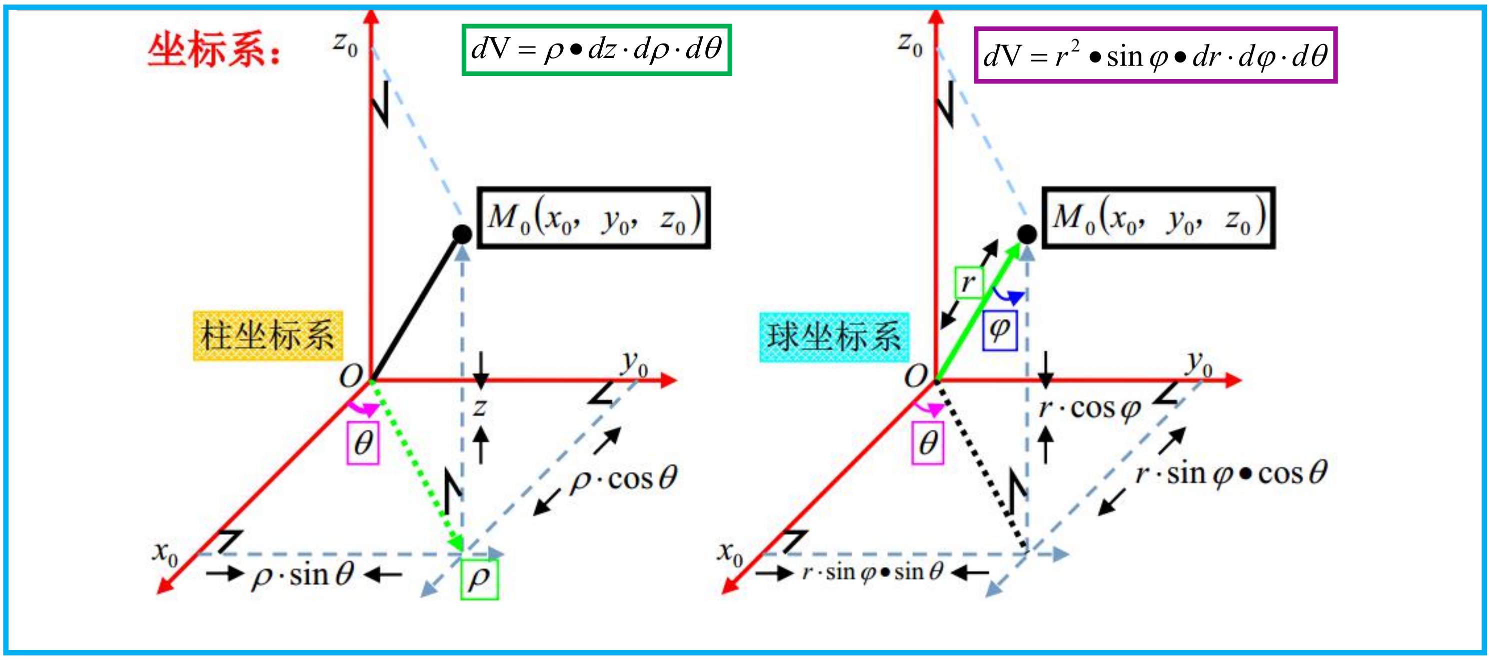
则$I=-3\bullet\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^1(\rho^2)\cdot\rho\bullet dz\cdot d\rho\cdot d\theta+6\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^1[\rho(\cos\theta+\sin\theta)]\cdot\rho\bullet dz\cdot d\rho\cdot d\theta-7\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^1(1)\cdot\rho\bullet dz\cdot d\rho\cdot d\theta$

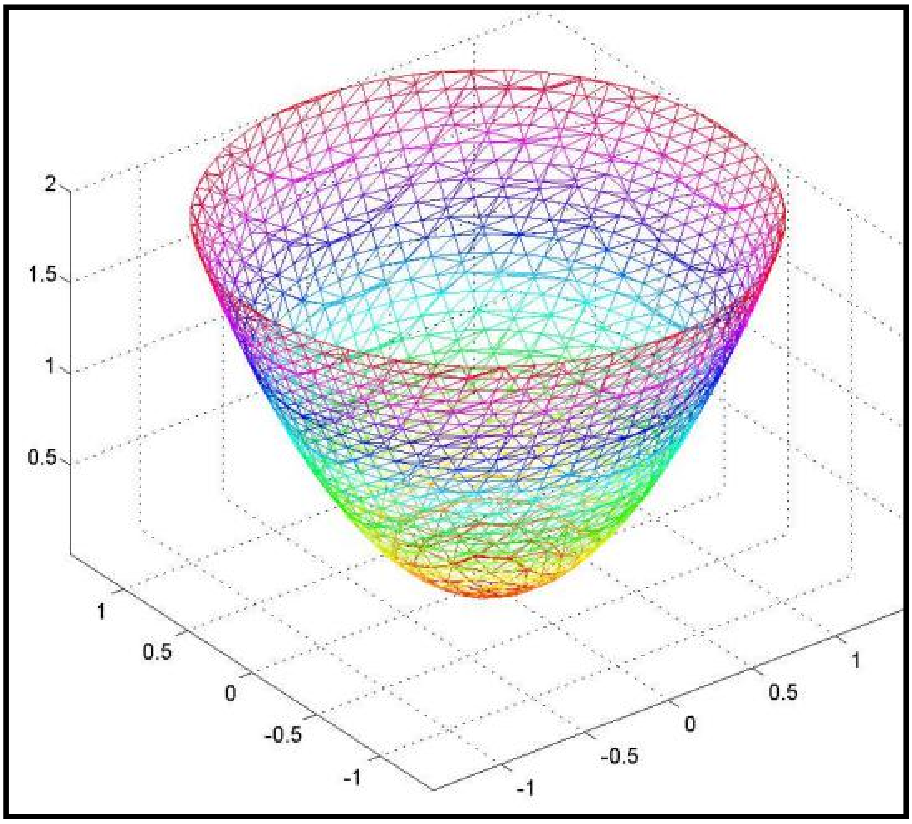
$$I_1=-3\bullet\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_{\rho^2}^1\rho^3\bullet dz\right)\cdot d\rho\right]\cdot d\theta=-3\bullet\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho\int_{\rho^2}^1 1dz=-3\bullet\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3(1-\rho^2)d\rho=-3\bullet 2\pi\bullet\left(-\frac{\rho^6}{6}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$=-3\bullet 2\pi\cdot\frac{1}{12}=-3\bullet\pi/6=\frac{-\pi}{2}$；$I_2=6\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^1\rho^2d\rho\int_{\rho^2}^1dz=6\bullet 0=0$;

$$I_3=-7\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1dz=-7\bullet 2\pi\cdot\left(\frac{-\rho^4}{4}+\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-7\bullet 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{-7\pi}{2};$$

$$\therefore I=\frac{-\pi}{2}+0+\frac{-7\pi}{2}=-4\pi$$




启示：对易闭合曲面的二重坐标积分，通过补足曲面转化为对闭合曲面的二重坐标积分，通过高斯公式变为对空间立体$\Omega$的体积积分，根据$\Omega$的边界方程选择柱坐标系(沿$z$轴投影)，将体积元$dV$变为$\rho\bullet dzd\rho d\theta$，其中，使用高斯公式应注意闭合曲面应为$\Omega$的外侧闭合曲面，根据$\Omega$的边界方程确定$\rho$、$\theta$、$z$(函数曲线表达式)的范围，最后变为简单的三次积分。

$PS$：考场解答本题时，应注意积分式中被积函数、积分区间(积分曲面、积分立体)的对称性，被积函数的奇偶性应用可免去部分计算，降低计算出错的概率。

方法二：坐标投影转换法。在本年考题填空题(12)题中，通过斯托克斯公式，加强了我们对于两类曲面积分的联系以及转换关系的理解。对于本题，我们查看题干，题目所求为对一个曲面进行坐标积分，这个曲面是一个开口朝向$z$轴正半轴的抛物面，如果所有的投影能沿着$z$轴投到$xoy$平面，即对该曲面的坐标积分全部变为$dxdy$，那么此题的解答很容易。由于曲面$\Sigma$的边界方程为$\{x^2+y^2-z=0$，令$F(x，y，z)=x^2+y^2-z$，求出曲面$\Sigma$在其定义域内的点$(x，y，z)$处的单位法向量$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，

而$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{F_x^{'}}{\sqrt{(F_x^{'})^2+(F_y^{'})^2+(F_z^{'})^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{F_y^{'}}{\sqrt{(F_x^{'})^2+(F_y^{'})^2+(F_z^{'})^2}}\\ \cos\gamma=\dfrac{F_x^{'}}{\sqrt{(F_x^{'})^2+(F_y^{'})^2+(F_z^{'})^2}}\end{cases}$，且理解投影微分式的意义：$\begin{cases}\overbrace{dS\cdot\cos\alpha}^{\text{沿着}x\text{轴投影}}=dydz\\ \overbrace{dS\cdot\cos\beta}^{\text{沿着}y\text{轴投影}}=dzdx\\ \overbrace{dS\cdot\cos\lambda}^{\text{沿着}z\text{轴投影}}=dxdy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{dydz}{dxdy}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\dfrac{F_x^{'}}{F_z^{'}}\\ \dfrac{dzdx}{dxdy}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\dfrac{F_y^{'}}{F_z^{'}}\end{cases}$，即投影微分与投影比率成正比，也即投影微分与投影方向的偏导数成正比。$\therefore\begin{cases}dydz=\dfrac{F_x^{'}}{F_z^{'}}dxdy\\ dzdx=\dfrac{F_y^{'}}{F_z^{'}}dxdy\end{cases}\oplus\begin{cases}dzdx=\dfrac{F_y^{'}}{F_x^{'}}dydz\\ dxdy=\dfrac{F_z^{'}}{F_x^{'}}dydz\end{cases}\oplus\begin{cases}dxdy=\dfrac{F_z^{'}}{F_y^{'}}dzdx\\ dydz=\dfrac{F_x^{'}}{F_y^{'}}dzdx\end{cases}$

从而：令曲面$\Sigma$为函数$F(x，y，z)=x^2+y^2-z，z\le1$，则$dydz=\dfrac{F_x^{'}}{F_z^{'}}dxdy=\dfrac{2x}{-1}dxdy=-2x\cdot dxdy$；$dzdx=\dfrac{F_y^{'}}{F_z^{'}}dxdy=\dfrac{2y}{-1}dxdy=-2y\cdot dxdy$

$$I=\iint_\Sigma(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=\iint_\Sigma(x-1)^3\cdot(-2x)\cdot dxdy+(y-1)^3\cdot-2y\cdot dxdy+(z-1)dxdy$$

$=\iint_\Sigma-2x(x-1)^3-2y(y-1)^3+(z-1)dxdy$，曲面$\Sigma$的定义为$\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z\le1\end{cases}$，那么被积函数$(z-1)$对曲面$\Sigma$进行坐标积分时满足其定义条件，

则$z-1=(x^2+y^2)-1$，对曲面$\Sigma$进行坐标积分$dxdy$，等价于对$\Sigma$在$xoy$的投影区域$\overbrace{D_{xy}=\{(x，y)|x^2+y^2\le1\}}^{\text{由}0\le z\le1\text{得到投影区域}}$，所以

$I=\iint_{D_{xy}}-2x(x-1)^3-2y(y-1)^3+(x^2+y^2-1)dxdy$，常规解法，乘方展开，合并同类项，然后注意函数奇偶性和积分区间的对称性，

$=\iint_{D_{xy}}(-2x^4-5x^2)+(6x^3+2x)dxdy+\iint_{D_{xy}}(-2y^4-5y^2)+(6y^3+2y)dxdy-\iint_{D_{xy}}1dxdy$，根据被积函数的奇偶性，积分区间$D_{xy}$的对称性得，

$I=\iint_{D_{xy}}(-2x^4-5x^2-2y^4-5y^2)dxdy-S_{D_{xy}}=\iint_{D_{xy}}[-2(x^4+y^4)-5(x^2+y^2)]dxdy-\pi$，变换为极坐标：$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$且$\begin{cases}0\le\rho\le1\\ 0\le\rho\le2\pi\end{cases}$，

则$I=\iint_{D_{xy}}[-2\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)-5\rho^2]\rho\bullet d\rho d\theta-\pi=\iint_{D_{xy}}-2\rho^5(\cos^4\theta+\sin^4\theta)d\rho d\theta+\iint_{D_{xy}}-5\rho^3d\rho d\theta-\pi$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)d\theta\cdot\int_0^1-2\rho^5d\rho+\int_0^{2\pi}1d\theta\cdot\int_0^1-5\rho^3d\rho-\pi=\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{-\rho^6}{3}\right)\Bigg|_0^1+2\pi\cdot\left(\frac{-5\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1-\pi=\frac{-\pi}{2}+\frac{-5\pi}{2}-\pi=-4\pi.$$

或者：$I=2\cdot\iint_{D_{xy}}(-2x^4-5x^2)dxdy-\pi=2\cdot\iint_{D_{xy}}(-2\rho^4\cos^4\theta-5\rho^2\cos^2\theta)\rho\bullet d\rho d\theta-\pi=2\cdot\left[\iint_{D_{xy}}(-2\rho^5\cos^4\theta)d\rho d\theta+\iint_{D_{xy}}(-5\rho^3\cos^2\theta)d\rho d\theta\right]-\pi$

$$=2\cdot\left[\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta)d\theta\cdot\int_0^1-2\rho^5d\rho+\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta)d\theta\cdot\int_0^1-5\rho^3d\rho\right]-\pi=2\cdot\left[\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)+(\pi)\cdot\left(\frac{-5}{4}\right)\right]-\pi=-4\pi$$

常用正余弦幂次方典型定积分结果，区间$[0,2\pi]$完全等价于区间$[-\pi，\pi]$

$$\begin{cases}\int_0^{2\pi}(\cos x)^4dx=\int_0^{2\pi}(\sin x)^4dx=\dfrac{3\pi}{4}\\ \int_0^{2\pi}(\cos x)^6dx=\int_0^{2\pi}(\sin x)^6dx=\dfrac{5\pi}{8}\\ \int_0^{2\pi}(\cos x)^8dx=\int_0^{2\pi}(\sin x)^8dx=\dfrac{35\pi}{64}\end{cases}\begin{cases}\int_0^{2\pi}(\cos x)^0dx=\int_0^{2\pi}(\sin x)^0dx=2\pi\\ \int_0^{2\pi}(\cos x)^2dx=\int_0^{2\pi}(\sin x)^2dx=\pi\\ \int_0^{2\pi}(\cos x)^{\text{奇数次方}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x)^{\text{奇数次方}}dx=0\\ \int_0^{2\pi}(\sin x)^{\text{奇数次方}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\text{奇数次方}}dx=0\end{cases}$$

(19)设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足$\begin{cases}0<a_n<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<b_n<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，且有$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛。

(I)证明：$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

(II)证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛。

证明:(I)依题意，$a_n=\cos a_n-\cos b_n=-2\sin\dfrac{a_n+b_n}{2}\sin\dfrac{a_n-b_n}{2}>0$，且$\begin{cases}0<\dfrac{a_n+b_n}{2}<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{-\pi}{4}<\dfrac{a_n-b_n}{2}<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$，

那么，$\dfrac{a_n-b_n}{2}<0$，即得$a_n<b_n$；又级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$，综合得$0<a_n<b_n$，根据夹逼准则，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$;

(II)由(I)得$\begin{cases}0<\dfrac{a_n+b_n}{2}<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{-\pi}{4}<\dfrac{a_n-b_n}{2}<0\end{cases}$，那么易得$\begin{cases}\sin\dfrac{a_n+b_n}{2}\le\dfrac{a_n+b_n}{2}\\ -\sin\dfrac{a_n-b_n}{2}\le\dfrac{b_n-a_n}{2}\end{cases}$，

则$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2\sin\dfrac{a_n+b_n}{2}\sin\dfrac{a_n-b_n}{2}}{b_n^2}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot\dfrac{a_n+b_n}{2}\cdot\dfrac{b_n-a_n}{2}}{b_n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n^2-a_n^2}{2b_n^2}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n^2}{2b_n^2}=\dfrac{1}{2}<1$，

根据级数比较审敛法，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛。

方法二：构造法。$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n^2}$，注意到$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}a_n=0\\ \lim_{n\to\infty}b_n=0\end{cases}$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\cos b_n}{b_n^2}\cdot\dfrac{a_n}{1-\cos b_n}\right)$，等价无穷小

则。$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)}{b_n}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{1-\cos b_n}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{1-\cos a_n+a_n}$，洛必达$\left(\dfrac{0}{0}型\right)$，即$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)}{b_n}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sin a_n+1}=\dfrac{1}{2}<1$。

根据级数比较审敛法，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛。

神奇的$\boldsymbol{Gamma}$函数：

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\left(x^{s-1}\cdot e^{-x}\right)dx$，这个函数是关于$s$的函数，积分式针对于积分变量$x$；当且仅当$s>0$时这个反常积分(函数)收敛，即这个函数的定义域$s>0$；

特殊值及递推公式：$\begin{cases}\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s),\ s>0\Leftrightarrow\Gamma(s)=(s-1)\cdot\Gamma(s-1),\ s>1\\ \Gamma(n+1)=n!,\text{也就是}s=n,\text{取正整数时的特殊结果}\end{cases}$；$\begin{cases}s=1\text{时},\Gamma(s)|_{s=1}=\int_0^{+\infty}\left(x^0\cdot e^{-x}\right)dx=-\left(e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty}=e^0-e^{-\infty}=1;\\ s=2\text{时},\Gamma(s)|_{s=2}=\int_0^{+\infty}\left(x^1\cdot e^{-x}\right)dx=\left[(s-1)\cdot\Gamma(s-1)\right]_{s=2}=1\cdot\Gamma(1)=1\cdot1=1!;\end{cases}$

$$\begin{cases}s=3\text{时},\Gamma(s)|_{s=3}=\int_0^{+\infty}\left(x^2\cdot e^{-x}\right)dx=\left[(s-1)\cdot\Gamma(s-1)\right]_{s=3}=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot1!=2!;\\ s=4\text{时},\Gamma(s)|_{s=4}=\int_0^{+\infty}\left(x^3\cdot e^{-x}\right)dx=\left[(s-1)\cdot\Gamma(s-1)\right]_{s=4}=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot2!=3!;\\ \text{依此类推：}s=n+1\text{时},\Gamma(s)|_{s=n+1}=\int_0^{+\infty}\left(x^1\cdot e^{-x}\right)dx=\left[(s-1)\cdot\Gamma(s-1)\right]_{s=n+1}=n\cdot\Gamma(n)=n!\end{cases}$$

那么，常用的数值结论，$s=\frac{1}{2}$时，有$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\left(x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}\right)dx$，令$t=x^{\frac{1}{2}}$，即$x=t^2$，原积分式中$x\in(0,+\infty)$可推出$t\in(0,+\infty)$，则$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\left(t^{-1}\cdot e^{-t^2}\right)d\left(t^2\right)$

$\therefore\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\left(t^{-1}\cdot e^{-t^2}\right)d\left(t^2\right)=\int_0^{+\infty}\left(t^{-1}\cdot e^{-t^2}\right)\left[d\left(t^2\right)\right]=\int_0^{+\infty}\left(t^{-1}\cdot e^{-t^2}\right)(2t\cdot dt)=\int_0^{+\infty}\left(2t\cdot t^{-1}\cdot e^{-t^2}\right)dt$。即：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\int_0^{+\infty}\left(e^{-t^2}\right)dt$，

而积分式$\int_0^{+\infty}\left(e^{-t^2}\right)dt$是常用经典反常积分，其积分结果为$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\therefore\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$，这个结果可以通过两个公式记忆导出：

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty}x^{2n}\cdot e^{-a\cdot x^2}dx=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)}{2^{n+1}\cdot a^n}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ \text{参数}a>0,\ n=0,1,2,\cdots;\ n=0\text{时，结果为}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\\ Gamma\text{函数的余元公式：}\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi\cdot s)},\ \text{其中注意}0<s<1\end{cases}$$

根据$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$的推导思路，对于$Gamma$函数$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\left(x^{s-1}\cdot e^{-x}\right)dx$，$s>0$，令$x=t^2$，由$x\in(0,+\infty)\Rightarrow t\in(0,+\infty)$

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\left(t^{2(s-1)}\cdot e^{-t^2}\right)d\left(t^2\right)=2\bullet\int_0^{+\infty}\left(t^{2s-2+1}\cdot e^{-t^2}\right)dt=2\bullet\int_0^{+\infty}\left(t^{2s-1}\cdot e^{-t^2}\right)dt$，再令$u=2s-1$，则变量代换后，$\Rightarrow s=\frac{1+u}{2}$，

由于原函数收敛域为$s>0$，这推出$u>-1$；【收敛域很重要！！！！】

那么：$\Gamma\left(\frac{1+u}{2}\right)=2\bullet\int_0^{+\infty}\left(t^u\cdot e^{-t^2}\right)dt$，$u>-1$，所以：$\int_0^{+\infty}\left(t^u\cdot e^{-t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1+u}{2}\right)$，函数定义域$u>-1$；

也就是：$\int_0^{+\infty}\left(t^s\cdot e^{-t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)$，$s>-1$。这个结果的重大意义：

一个幂函数×指数函数带平方项的反常积分，可以直接转化为$Gamma$函数求解。在实际题目中，$s$往往为非负整数。

分类讨论：当$s$为奇数时，可以得到$\frac{1+s}{2}$为整数，利用$\Gamma(n)=(n-1)!$，$n>0$可以很快得到结果；

当$s$为偶数时，$\frac{1+s}{2}=\frac{1}{2}+$整数，利用$\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$，$s>0$也可以很快得出结果，因为我们知道$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，

做成表格：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$；$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$；$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$；$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

$\Rightarrow\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)}{2^n}\bullet\sqrt{\pi}$

但是，最好的方案还是记忆如下公式：

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty}\left(x^{2n}\cdot e^{-(a)\cdot x^2}\right)dx=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)}{2^{n+1}\cdot a^n}\bullet\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ \text{参数}a>0,\ n=0,1,2,\cdots;\ \text{【涵盖}x^{\text{偶数次方}}\text{】}\\ \int_0^{+\infty}\left(x^{2n-1}\cdot e^{-(a)\cdot x^2}\right)dx=\frac{1\times2\times3\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)}{2\cdot a^n},\ \text{参数}a>0,\ n=0,1,2,\cdots;\ \text{【涵盖}x^{\text{奇数次方}}\text{】}\end{cases}$$

根据奇偶函数在对称区间的积分特性，显然得到如下结果

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^{2n}\cdot e^{-(a)\cdot x^2}\right)dx=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)}{2^n\cdot a^n}\bullet\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ \text{参数}a>0,\ n=0,1,2,\cdots;\ \text{【涵盖}x^{\text{偶数次方}}\text{】}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^{2n-1}\cdot e^{-(a)\cdot x^2}\right)dx=0,\ \text{参数}a>0,\ n=0,1,2,\cdots;\ \text{【涵盖}x^{\text{奇数次方}}\text{】}\end{cases}$$

# 神奇的*Gamma*函数

$$
\begin{cases}
\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,\quad s>0 \\
\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad s>0 \\
\Gamma(n+1)=n!,\quad n>0 \\
\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi\cdot s)},0<s<1 \\
\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)=\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
\int_0^{+\infty}\left(x^{2n}\cdot e^{-(a)\cdot x^2}\right)dx=\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)}{2^{n+1}\cdot a^n}\bullet\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}, \\
\int_0^{+\infty}\left(x^{2n-1}\cdot e^{-(a)\cdot x^2}\right)dx=\dfrac{1\times2\times3\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)}{2\cdot a^n},
\end{cases} \\
\begin{cases}
\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^{2n}\cdot e^{-(a)\cdot x^2}\right)dx=\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)}{2^n\cdot a^n}\bullet\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^{2n-1}\cdot e^{-(a)\cdot x^2}\right)dx=0,\text{ 参数}a>0,\quad n=0,1,2,\cdots;
\end{cases}
\end{cases}
$$

(20)

设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵。

(I)求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系。

(II)求满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$的所有矩阵$\boldsymbol{B}$。

解:(I)将$\boldsymbol{A}$化为行最简形得：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-2\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{bmatrix}$$

变换规则：①$r_1$不动$\begin{cases}r_1\cdot(0)+r_2\to r_2(r_2\text{不动})\\r_1\cdot(-1)+r_3\to r_3\end{cases}$②$r_2$不动$\begin{cases}r_2\cdot(2)+r_1\to r_1\\r_2\cdot(-4)+r_3\to r_3\end{cases}$③$r_3$不动$\begin{cases}r_3\cdot(-1)+r_1\to r_1\\r_3\cdot(1)+r_2\to r_2\end{cases}$

通解$[-1k_1,2k_1,3k_1,1k_1]^T$，基础解系$\eta=(-1,2,3,1)^T$；

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc}\vec{x}_1&\vec{x}_2&\vec{x}_3&\vec{x}_4&\vec{b}_1&\vec{b}_2&\vec{b}_3\end{array} & & \\
(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E})= & \begin{bmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{bmatrix}\\
 & & & \begin{array}{ccccccc}\vec{I}_1'&\vec{I}_2'&\vec{I}_3'&\vec{x}_1'&\vec{x}_2'&\vec{x}_3'&\vec{x}_4'\end{array}
\end{array}$$

求通解时，将上述变换过程拆解为：

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E}_1)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{bmatrix}，\text{通解}\boldsymbol{B}_1=[2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,0+k_1,]^T=k_1\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E}_2)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&6\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&-3&-4\end{bmatrix}，\text{通解}\boldsymbol{B}_2=[6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,0+k_2]^T=k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E}_3)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&-2&1\\0&0&1&-3&1\end{bmatrix}，\text{通解}\boldsymbol{B}_3=[-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,0+k_3]^T=k_3\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{E}_3)\Rightarrow\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_3)=\begin{bmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$$

附：本题可以直接求解第二问，根据$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}_3$的形式直接得到第一问的基础解系$[-1,2,3,1]^T$结果。

(21)证明：

矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$与矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$相似。

证明：记$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$，由于$A$为实对称矩阵，因而必与对角矩阵相似。

根据$\left|\lambda E-A\right|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}=0$得，$A$的特征值为$n,0,0,\cdots,0$(共$n-1$个0)，因而有

$A\sim\begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$；由$\left|\lambda E-B\right|=(\lambda-n)\lambda^{n-1}=0$得，$B$的特征值为$n,0,0,\cdots,0$(共$n-1$个0)，

而$\lambda=0$时，$R(0E-B)=R(B)=1$，则$\lambda=0$对应的特征向量共有$n-R(0E-B)=n-1$个，

从而$B$对应的特征向量共有$n$个，且这$n$个特征向量线性无关，因而，$B$与对角矩阵相似，

即$B\sim\begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$，根据相似矩阵的传递性，$A\sim B$，原命题得证。

(22)设随机变量$X$的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0，i)(i=1,2)$.

(I)求$Y$的分布函数$F_Y(y)$.

(II)求$E(Y)$.

解:(I)记$U(0，i)$的分布函数为$F_i(x)(i=1,2)$，则$F_i(x)=\begin{cases}0，x<0\\ \frac{x}{i},0\le x\le i;\quad i=1,2\\ 1，x>i\end{cases}$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{X=1\}\cdot P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}\cdot P\{Y\le y|X=2\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(P\{Y\le y|X=1\}+P\{Y\le y|X=2\}\right)=\frac{1}{2}[F_1(y)+F_2(y)]$$

$$=\begin{cases}0，y<0\\ \frac{3y}{4},0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4},1\le y<2\\ 1，y\ge 2\end{cases}$$

(II)由(I)得，随机变量$Y$的概率密度函数$f_Y(y)$为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4},0<y<1\\ \frac{1}{4},1\le y<2\\ 0，其他\end{cases}\Rightarrow E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_Y(y)dy=\int_0^1\frac{3y}{4}dy+\int_1^2\frac{y}{4}dy=\frac{3}{4}$$

(23)设总体$X$的分布函数为$F(x;\ \theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}};\ x\ge 0,\\ 0,\ x<0\end{cases}$ 其中$\theta$是未知参数且大于零，

$X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$为来自总体的简单随机样本。

(I)求$E[X]$和$E[X^2]$.

(II)求$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}_n$.

(III)是否存在实数$a$，使得对任何$\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0$?

分析：给出$F(x;\ \theta)$即可得到$f(x;\ \theta)$，进而得到$E[X^k]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\cdot f(x;\ \theta)dx$;

求出$f(x;\ \theta)$，就可以构造似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta)$，很容易求得最大似然估计量$\hat{\theta}_n$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0$等价于$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|<\varepsilon\right\}=1$，就是$\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}a$，依照概率收敛涉及大数定律。

解:(I)总体$X$的概率密度函数$f(x;\ \theta)=F_x'(x;\ \theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}\cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}};\ x\ge 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$;

$$\begin{cases}E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x;\ \theta)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2x}{\theta}\cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{2}{\theta}\cdot\int_0^{+\infty}x^2\cdot e^{-\frac{1}{\theta}x^2}dx\\ E[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x;\ \theta)dx=\frac{2}{\theta}\cdot\int_0^{+\infty}x^3\cdot e^{-\frac{1}{\theta}x^2}dx\end{cases}$$，还记得神奇的$Gammar$公式么？

$$\therefore E[X]=\frac{2}{\theta}\cdot\frac{1}{2^{1+1}\cdot\left(\frac{1}{\theta}\right)^1}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{\theta}}}=\frac{\sqrt{\theta\pi}}{2};\quad E[X^2]=\frac{2}{\theta}\cdot\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{\theta}\right)^2}=\theta$$

(II)设$x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$为样本观测值，似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta)=\begin{cases}\frac{2\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta^{2n}}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j)^2};\ x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\ge 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$

当$x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n>0$时，$\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j)^2$，令$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j)^2=0$,

解得$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j)^2$;

(III)存在$a=\theta$满题意，理由如下：

因为$X_1^2,\ X_2^2,\ ,\ X_n^2$是独立同分布的随机变量序列，且$E[X_i^2]=\theta<+\infty$，根据辛钦大数定律，当$n\to+\infty$时，

$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j)^2$依照概率收敛于$E[X_i^2]=\theta$，所以对于任意的$\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|<\varepsilon\right\}=1$，亦即$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0$