空间任意平面多边形面积快速算法及在CAD开发中的应用

成基华

一、引　言

计算多边形面积的一般方法是将多边形分割成三角形，然后求各三角形面积的代数和。这种算法需要求三角形边长，故效率较低。《新浪潮》1993年第五期中刊登了一篇题为"平面任意多边形面积公式的推导及应用"的文章①，但其算法仅限于二维平面多边形。本文将利用斯托克斯公式(Strokes)推导出空间任意平面多边形面积公式，并将此法引入到CAD软件中。

二、公式推导

设空间任意平面多边形A共有N个顶点$P_1,P_2,\cdots,P_i,\cdots,P_N$，按逆时针方向组成一环L，如图1。其中$P_i=(X_i,Y_i,Z_i)$，则其面积为$S_A=\iint_A ds$　　(1)

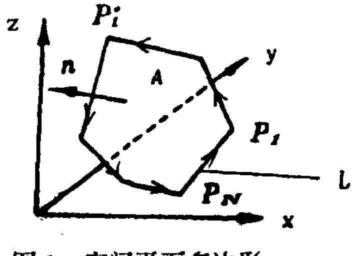

图1　空间平面多边形

根据斯托克斯公式

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_A[(\partial R/\partial y-\partial Q/\partial z)\cos(n,x)+(\partial P/\partial z-\partial R/\partial x)\cos(n,y)+(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)\cos(n,z)]ds \quad (2)$$

其中n为按环的走向由右手定则确定的多边形单位法矢，$\cos(n,x)$，$\cos(n,y)$，$\cos(n,z)$为n与坐标轴夹角余弦。

令$P=-y\cos(n,z)$、$Q=-z\cos(n,x)$、$R=-x\cos(n,y)$，代入(2)得

$$-\oint_L (y\cos(n,z)dx+z\cos(n,x)dy+x\cos(n,y)dz)$$

$$=\iint_A [\cos^2(n,x)+\cos^2(n,y)+\cos^2(n,z)]ds$$

$$=\iint_A dx \tag{3}$$

显然由(1)、(3)可知，多边形面积

$$S_A=-\oint_L [y\cos(n,z)dx+z\cos(n,x)dy+x\cos(n,y)dz] \tag{4}$$

令 $P_{N+1}=P_1$，则有

$$S_A=-\sum_{i=1}^{n}\int_{P_iP_{i+1}} [y\cos(n,z)dx+z\cos(n,x)dy+x\cos(n,y)dz] \tag{5}$$

设线段 P_iP_{i+1} 的参数方程为

$$P=(1-t)P_i+tP_{i+1},t\in[0,1] \tag{6}$$

由此可得

$$\begin{cases} x=(1-t)x_i+tx_{i+1} \\ y=(1-t)y_i+ty_{i+1} \\ z=(1-t)z_i+tz_{i+1} \end{cases} \quad \begin{cases} dx=(x_{i+1}-x_i)dt \\ dy=(y_{i+1}-y_i)dt \\ dz=(z_{i+1}-z_i)dt \end{cases} \tag{7}$$

经积分变量替换

$$\begin{aligned} S_A=-\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 & [(1-t)y_i+ty_{i+1}](x_{i+1}-x_i)\cos(n,z)dt+ \\ & [(1-t)z_i+tz_{i+1}](y_{i+1}-y_i)\cos(n,x)dt+ \\ & [(1-t)x_i+tx_{i+1}](z_{i+1}-z_i)\cos(n,y)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =-1/2\sum_{i=1}^{n} & (x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}+y_i)\cos(n,z)+ \\ & (y_{i+1}-y_i)(z_{i+1}+z_i)\cos(n,x)+ \\ & (z_{i+1}-z_i)(x_{i+1}+x_i)\cos(n,y)] \end{aligned}$$

因 $P_{N+1}=P_1$，推出

$$\begin{aligned} S_A=1/2[& \cos(n,z)\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+ \\ & \cos(n,x)\sum_{i=1}^{n}(y_iz_{i+1}-y_{i+1}z_i)+ \\ & \cos(n,y)\sum_{i=1}^{n}(z_ix_{i+1}-z_{i+1}x_i)] \end{aligned} \tag{8}$$

式中 $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ 显然为常数，利用多边形 A 的任意三个顶点(P_i, P_j, P_K 可求出。当 $P_jP_i\times P_KP_i$ 与 A 的法矢方向一致时，单位法矢 $n=(P_jP_i\times P_KP_i)/\|P_jP_i\times P_KP_i\|$ (9)

$$\begin{aligned} \text{其中 } P_jP_i\times P_KP_i-&[(Y_j-Y_1)(Z_K-Z_1)-(Y_K-Y_1)(Z_J-Z_1)]i+ \\ &[(X_K-X_1)(Z_J-Z_1)-(X_j-X_1)(Z_K-Z_1)]j+ \\ &[(X_J-X_I)(Y_K-Y_1)-(X_K-X_1)(Y_J-Y_1)]k \end{aligned} \tag{10}$$

令 $a=\|P_JP_1\times P_KP_1\|^2$，则

$$\begin{aligned} a=&[Y_j-Y_i)(Z_K-Z_i)-(Y_K-Y_i)(Z_j-Z_i)]^2+ \\ &[(X_K-X_i)(Z_J-Z_i)-(X_j-X_i)(Z_K-Z_i)]^2+ \end{aligned}$$

$$[(X_J-X_i)(Y_K-Y_i)-(X_K-X_i)(Y_J-Y_i)]^2 \tag{11}$$

由上可得

$$\cos(n,x)=[(Y_j-Y_i)(Z_K-Z_i)-(Y_K-Y_i)(Z_J-Z_i)]/\sqrt{a}$$

$$\cos(n,y)=[(X_K-X_i)(Z_J-Z_i)-(X_j-X_i)(Z_K-Z_i)]/\sqrt{a} \tag{12}$$

$$\cos(n,z)=[(X_J-X_i)(Y_K-Y_i)-(X_K-X_i)(Y_J-Y_i)]/\sqrt{a}$$

当 $P_jP_i \times P_kP_i$ 与 A 的法矢方向相反时，仅需将上面公式变号即可。

当 $z=0$ 时，$\cos(n,x)\equiv 0$，$\cos(n,y)\equiv 0$，$\cos(n.z)\equiv 1$，S_A 退化为二维多边形面积，即

$$S_A=1/2\sum_{i=1}^{N}(X_iY_{i+i}-X_{i+i}Y_i) \tag{13}$$

此结果与文献[1]中公式相符。

三、在三维物体整体特性计算中的应用

在开发航空部“八五”攻关项目 PEDS(Parameter Engineering Design System)造型系统中的整体特性计算模块时直接或间接地应用了此算法，如求物体表面积、截面积、体积、质量、重心、惯性矩等，全部程序用 C^{++} 语言编写。下面以表面积为例说明此算法的应用。为便于说明，在此先引入环的概念。

定义 1：环是由边连续组成的，具有封闭性，如图 2。

定义 2：环有内、外环之分。沿环正方向走实体部分总在左侧，从环所属表面外法矢反向看，外环为逆时针方向，内环为顺时针方向，如图 2。

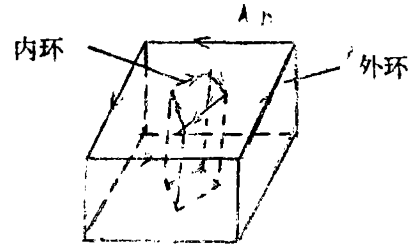

图 2　内、外环的定义

因此，由上面推导的公式计算环所围成的多边形面积时，如按环的方向顺次取多边形顶点，则面积有正负之分，外环围成的多边形面积为正，内环围成的面积为负(只要按环的走向顺序输入多边形各顶点的座标值，即可通过公式定出面积的符号)。遍历数据结构中所有组成物体的环，求出各环所围成的多边形面积的代数和，即为物体的表面积。因篇幅所限，在此略去源程序。

四、结束语

此算法对空间任意平面多边形面积的计算具有通用性，算法简洁，易于编程实现。在应用中证明，多边形的顶点越多，计算面积效率提高的越多。对于曲面面积的求解，可先将曲面离散成平面多边形，再利用此算法。

参考文献

①宋怀林．平面任意多边形面积公式的推导及应用，《新浪潮》．1993 年 5 月。

（作者　本院信息系讲师）